Noţiuni de verificare a ipotezelor statistice

Verificarea ipotezelor statistice este legată de compararea diferitelor ipoteze asupra unei populaţii statistice (şi nu asupra unui eşantion) cu datele obţinute prin încercări experimentale. Dacă datele observate nu sunt compatibile cu o anumită ipoteză, atunci ea trebuie respinsă.

Definiţie. Vom numi ipoteză statistică orice presupunere privind repartiţia unei variabile aleatoare, iar metodele de verificare a ipotezelor statistice le vom numi teste statistice.

Testele care se referă la ipoteze ce privesc valorile necunoscute ale parametrilor unei repartiţii specificate se numesc teste parametrice iar cele care se referă la ipoteze făcute în legătură cu însăşi repartiţia unei variabile se numesc teste de concordanţa (neparametrice).

1. Teste parametrice

Să considerăm o repartiţie unidimensională caracterizată de densitatea de repartiţie $f(x,\lambda)$, dependentă de parametrul necunoscut λ. Ne propunem să verificăm ipoteza conform căreia $\lambda=\lambda_0$.

Notăm această ipoteza $H_0:\lambda=\lambda_0$. Dacă λ poate lua şi alte valori $\lambda_1,\lambda_2 ,...,\lambda_n$, atunci ipotezele $H_i:\lambda =\lambda_i$ $i=1,n$ sunt ipoteze admisibile. Pentru a o distinge de alte ipoteze, ipoteza H_0 o numim ipoteză nulă. Orice altă ipoteză admisibilă este numită ipoteză alternativă. Dacă valoarea parametrului propusă în ipoteza alternativă este unică atunci ipoteza alternativă se numeşte simplă, în caz contrar ea fiind compusă. Dacă ipotezei nule i se asociază o ipoteză alternativă compusă de forma $H_1:\lambda\geq\lambda_0$, de exemplu, atunci ea generează un test parametric unilateral iar dacă ipoteza alternativă este $H_1:\lambda\neq\lambda_0$ ea generează un test bilateral.

Ipoteza nulă poate fi verificată cu ajutorul valorilor observate cuprinse în selecţia $\mathbf{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ alcătuită din rezultatele măsurătorilor pe un eşantion de volum n. Dacă ipoteza nulă este adevărată, atunci valorile selecţiei aparţin unui spaţiu $V(\mathbf{X})$ cu o probabilitate condiţionată:

$$P[X \in V(X)/H_0] = \alpha = P[X \in V(X)/\lambda = \lambda_0]\,.$$

Dacă probabilitatea α este mică, mulţimea $V(\mathbf{X})$ este denumită *regiune critică* iar în caz contrar *regiune de acceptare*. Dacă rezultatele măsurătorilor, grupate în vectorul de selecţie **X**, sunt incluse în regiunea critică, atunci respingem ipoteza nulă H_0 şi acceptăm ipoteza alternativă, in caz contrar o acceptăm.

Dificultatea în alcătuirea unui test pentru verificarea unei ipoteze constă tocmai în alegerea regiunii critice $V(\mathbf{X})$.

În luarea deciziei privind admiterea sau respingerea unei ipoteze sunt posibile două tipuri de erori:

- respingerea ipotezei nule deşi ea este adevărată (*eroare de ordinul unu*), şi
- admiterea ipotezei nule deşi este falsă (*eroare de ordin doi*).

Presupunem ipoteza nulă $H_0:\lambda=\lambda_0$ cu alternativa $H_1:\lambda=\lambda_1$ şi fie $V(\mathbf{X})$ regiunea critică, iar $\overline{V}(X)$ regiunea de acceptare. Putem pune în evidentă următoarele probabilităţi:

1. Probabilitatea de respingere a ipotezei nule deşi ea este adevărată (probab. comiterii erorii de ordin unu):

$$P[\mathbf{X}\in V(\mathbf{X})/\lambda=\lambda_0]=\alpha.$$

2. Probabilitatea de acceptare a ipotezei nule ea fiind adevărată:

$$P[X \in \overline{V}(X)/\lambda = \lambda_0] = 1-\alpha\,.$$

3. Probabilitatea de acceptare a ipotezei nule deşi ea este falsă (probabilitatea comiterii erorii de ordin doi):

$$P[X \in \overline{V}(X)/\lambda = \lambda_1] = \beta\,.$$

4. Probabilitatea de respingere a ipotezei nule ea fiind falsă (puterea testului):

$$P[X \in V(X)/\lambda = \lambda_1] = 1-\beta\,.$$

Cu cât α şi β sunt mai mici cu atât testul bazat pe regiunea critică $V(\mathbf{X})$ este mai puternic. Alegând un test, prin mărirea volumului selecţiei putem micşora oricât de mult probabilitatea comiterii unei erori, dar nu totdeauna a ambelor. Impunând α (de regulă 0,01 sau 0,05), β rezultă ca o consecinţa şi invers. Nu se poate afirma care din aceste probabilităţi trebuie să fie mai mică, neexistând o regulă în această privinţa. De exemplu, dacă dorim să verificăm compoziţia unui medicament care peste un anumit grad de concentrare devine vătămător, comiterea unei erori de ordinul doi este mai gravă decât comiterea uneia de ordinul unu. În controlul statistic al calităţii produselor α se numeşte *riscul furnizorului* şi β *riscul beneficiarului*.

Definiţie Probabilitatea de respingere a ipotezei nule funcţie de valorile posibile ale parametrului λ, se numeşte funcţie de putere a testului $\Pi(\lambda) = P[X \in V(X)/\lambda]$, $\lambda\in D$.

Pentru ipoteza simplă formulată anterior, $\Pi(\lambda_0)=\alpha$ şi $\Pi(\lambda_1)=1-\beta$.

Dintre toate mulţimile V(**X**) pentru care P[**X**$\in$V(**X**)/H_0]=α, mulţimea pentru care β este minim se numeşte cea mai bună regiune critică, iar testul bazat pe acesta se numeşte cel mai puternic test. Dificultatea în alcătuirea unui test statistic constă tocmai în alegerea regiunii critice V(**X**).

Exemplul 1. Test privind media repartiţiei normale de dispersie σ^2 cunoscută, densitatea de repartiţie a unei variabile normal repartizate $\xi\in N(m,\sigma^2)$ fiind: $f(x,\lambda)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$.

Formulăm ipoteza nulă H_0:m=m_0 cu alternativa H_1:m=m_1>m_0 şi dorim să deducem o regiune critică la nivelul de semnificaţie α (probabilitatea comiterii erorii de ordinul unu impusă). În acest scop alcătuim o selecţie $x_1,x_2,...,x_n$ de volum n prin sondaj pur aleator. Fiind cazul unei repartiţii depinzând de un singur parametru (m), conform lemei Neyman-Pearson, regiunea critică este definită prin inegalitatea:

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,m_1)\ge k\prod_{i=1}^{n} f(x_i,m_0).$$

Înlocuind f(x,λ) în inegalitatea de mai sus, după câteva calcule elementare rezultă:

$$2(m_1-m_0)\sum_{i=1}^{n}x_i\ge 2\sigma^2\ln k+\sum_{i=1}^{n}(m_1^2-m_0^2).$$

Deoarece, prin ipoteza alternativă m_1>m_0, rezultă:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ge[m_1^2-m_0^2+2(\sigma^2/n)\ln k]/2(m_1-m_0)=x_c$$

deci regiunea critică este $\overline{x}\ge x_c$, unde $\overline{x}$ este media de selecţie. Dar x_c nu poate fi determinat decât dacă se cunoaşte valoarea lui k. Ceea ce constituie avantajul lemei este faptul că precizează forma regiunii critice. Valoarea lui k poate fi determinată impunând probabilitatea comiterii erorii de ordinul unu, deci: $P[\overline{x}>x_c/m=m_0]=1-P[\overline{x}<x_c/m=m_0]=\alpha$,sau $P[\overline{x}<x_c/m=m_0]=1-\alpha$ dar, după cum se ştie, media de selecţie este normal distribuită $\overline{x}\in N(m,\sigma^2/n)$, deci ultima egalitate devine:

$$\int_{-\infty}^{x_c} f_{\overline{x}}(x,m_0)dx=1-\alpha=\phi[\sqrt{n}(x_c-m_0)/\sigma]$$

de unde rezultă: $x_c=m_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi^{-1}(1-\alpha)$.

Desigur putem determina valoarea lui k dar în acest caz nu este necesar. Deci dacă media de selecţie este mai mare decât x_c calculat cu relaţia anterioară, respingem ipoteza nulă si acceptăm alternativa. Puterea testului în raport cu ipoteza alternativă este:

$$\Pi(m_1)=P[\overline{x}\ge x_c/m=m_1]=\int_{x_c}^{\infty}f(x,m_1)dx=1-\beta=1-\phi[\sqrt{n}(x_c-m_1)/\sigma].$$

Înlocuind pe x_c, după câteva calcule intermediare rezultă:

$$\Pi(m_1)=1-\phi[\phi^{-1}(1-\alpha)-\sqrt{n}(m_1-m_0)/\sigma].$$

În acest caz particular, din ultima egalitate se poate determina volumul eşantionului pentru ca β (probabilitatea comiterii erorii de ordin doi) să aibă o valoare dorită, şi anume:

$$n=\sigma^2[\phi^{-1}(\beta)-\phi^{-1}(1-\alpha)]/(m_0-m_1)^2.$$

Observaţie: Dacă ipoteza alternativă este H_1:m=m_1<m_0, forma regiunii critice se schimbă si anume $\overline{x}$<x_c. Impunând aceeaşi probabilitate de comitere a erorii de ordinul unu, rezultă:

$x_c=m_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi^{-1}(\alpha)$ iar puterea testului va fi: $\Pi[m_1]=P[\overline{x}<x_c/m=m_1]=\phi[\phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{n}(m_0-m_1)/\sigma]$.

Exemplul 2. Testul **Student** privind media repartiţiei normale de dispersie necunoscută. Fie $\xi\in N(m,\sigma^2)$ cu parametrii m şi σ necunoscuţi. Formulăm ipoteza nulă H_0:m=m_0 cu alternativa H_1:m=$m_1\ne m_0$ şi dorim să deducem o regiune critică la nivelul de semnificaţie α dat. În acest scop se efectuează o selecţie de volum n , **X**=($x_1,x_2,..,x_n$) şi se calculează media $\overline{x}$ şi dispersia $\overline{s}^2$ de selecţie. Cunoaştem succesiv următoarele:

1. $x_i\in N(m,\sigma^2)$ 2. $\overline{x}\in N(m,\sigma^2/n)$ 3. $\frac{\overline{x}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\in N(0,1)$

4. $\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \in N(0,1)$ 5. $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right]^2 \in \chi^2_{(n-1,1)}$ 6. $\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - m)}{\bar{s}} \in T(n-1)$

Pe ceastă bază putem deduce un interval de încredere pentru media m, la nivelul de semnificaţie α dat:

$$P\left[a \le \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - m)}{\bar{s}} \le b\right] = 1 - \alpha = \int_a^b f_{T(n-1)}(x)dx .$$

În cazul unui interval centrat, ultima egalitate furnizează valorile $\hat{a}$ şi $\hat{b}$. Regiunea de acceptare a ipotezei nule este determinată de probabilitatea condiţionată:

$$P\left[\hat{a} \le \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - m)}{\bar{s}} \le \hat{b} / m = m_0\right] = 1 - \alpha = P\left[\hat{a} \le \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - m_0)}{\bar{s}} \le \hat{b}\right]$$

Regiunea critică va fi:

$$V(X) = \left\{X / \bar{x} < m_0 + \hat{a}\bar{s} / \sqrt{n}\right\} \cup \left\{X / \bar{x} > m_0 + \hat{b}\bar{s} / \sqrt{n}\right\}.$$

Dacă alternativa la ipoteza nulă este H_1:m<m_0, regiunea critică va fi: $V(X) = \{X / \bar{x} < m_0 + \hat{a}\bar{s} / \sqrt{n}\}$, iar dacă alternativa este H_1:m>m_0, regiunea critică va fi: $V(X) = \{X / \bar{x} > m_0 + \hat{b}\bar{s} / \sqrt{n}\}$.

Exemplul 3. Testul **Fischer** se utilizează pentru verificarea egalităţii dispersiilor a două variabile independente repartizate normal. Fie $\xi_1 \in N(m_1,\sigma^2{}_1)$ şi $\xi_2 \in N(m_2,\sigma^2{}_2)$. Se cere să se verifice ipoteza nulă $H_0:\sigma^2{}_1=\sigma^2{}_2$ cu alternativa $H_0:\sigma^2{}_1>\sigma^2{}_2$ la nivelul de semnificaţie α dat. În acest scop se efectuează măsurătorile $x_{11},x_{12},...,x_{1n_1}$ şi $x_{21},x_{22},..,x_{2n_2}$ pe selecţiile de volum n_1 şi respectiv n_2 din cele două populaţii. Cunoaştem succesiv următoarele:

1. $\bar{s}_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$ şi $\bar{s}_1^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2$
2. $x_{1i} \in N(m_1,\sigma_1^2)$ şi $x_{2i} \in N(m_2,\sigma_2^2)$
3. $(x_{1i} - \bar{x}_1) \in N(0,\sigma_1^2)$ şi $(x_{2i} - \bar{x}_2) \in N(0,\sigma_2^2)$
4. $\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \in \chi^2(n_1,\sigma_1)$ şi $\sum_{i=1}^{n_1}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \in \chi^2(n_2,\sigma_2)$
5. $\eta = \frac{\bar{s}_1^2}{\bar{s}_2^2} = \frac{n_2}{n_1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2} \in F(n_1,n_2)$ dacă $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Dacă alternativa este $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ atunci regiunea critică este generată de probabilitatea condiţionată:

$$P\left[\eta = \frac{\bar{s}_1^2}{\bar{s}_2^2} > x_c / \sigma_1^2 = \sigma_2^2\right] = \alpha = 1 - \int_0^{x_c} f_{F(n_1,n_2)}(x)dx .$$

Valoarea x_c rezultă din ultima egalitate. Ea poate fi găsită şi în tabele pentru diferite valori ale nivelului de semnificaţie. În consecinţă dacă în urma măsurătorilor variabila η este mai mare decât x_c respingem ipoteza nulă si acceptăm alternativa.

2. Teste neparametrice

Testul χ^2. Fie ξo variabilă aleatoare cu distribuţia în probabilitate $\xi = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$ i=1,m şi $\nu_1,\nu_2,...,\nu_m$ frecvenţele absolute de apariţie a valorilor x_i într-o selecţie de volum n. Se demonstrează că variabila aleatoare:

$$\eta = \sum_{i=1}^{m}\frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} \in \chi^2(m-1,1).$$

Ne propunem să verificăm ipoteza nulă H_0:p_i=p_{i0} i=1,m , cu alternativa H_1: $p_I \ge p_{i0}$. Regiunea critică este generată de probabilitatea condiţionată:

$$P[\eta \geq \eta_c / H_0 : p_i = p_{i0}] = \alpha = 1 - \int_0^{\eta_c} f_{\chi^2(m-1,1)}(x)dx .$$

Ultima egalitate permite determinarea lui η_c.

Să aplicăm cele de mai sus la verificarea normalităţii unei variabile aleatoare, deci la verificarea unei ipoteze H_0:$\xi \in N(..)$ în care presupunem că o variabilă ξ este repartizată normal. În acest scop se fac măsurători pe un eşantion de volum n şi rezultă valorile $x_1,x_2,...,x_m$ cu frecvenţele absolute $\nu_1,\nu_2,..,\nu_m$, având media şi dispersia de selecţie $\overline{x}$ şi respectiv $\overline{s}^2$. Dacă ipoteza nulă este adevărată atunci variabila $(x_i - \overline{x})/\overline{s} \in N(0,1)$ iar probabilităţile p_{i0} sunt:

$\phi[(x_i - \overline{x})/\overline{s}] - \phi[(x_{i-1} - \overline{x})/\overline{s}]$.

Pentru test procedăm în felul următor:
- se calculează frecvenţele absolute;
- se calculează abaterile faţa de medie şi abaterile normate;
- se calculează probabilităţile p_{i0} în ipoteza repartiţiei normale a variabilei;
- se construieşte variabila η;
- se deduce (sau se citeşte din tabel) η_c pentru α şi m date;
- dacă $\eta > \eta_c$ respingem ipoteza nulă (în caz contrar o acceptăm).

Exemplul 4. Vrem să verificăm ipoteza normalitătii variabilei ξ, (de exemplu parametrul β la un tranzistor), pentru , α=0,05. În acest scop aplicăm testul χ^2. Efectuăm măsurătorile de volum n = 160. Datele sunt grupate în seria de tip S_3 din tabel, pentru care n=160; $\overline{x}$ =463, $\overline{s}$ =8,94.

	Interval	ν_i	x_i	$(x_i - \overline{x})/s$	$\phi[(x_i - \overline{x})/s]$	p_{i0}	$(\nu_i - np_{i0})^2/np_{i0}$
M=1	(-∞,445]	5	445	-2,01	0,0222	0,0222	0,59
M=2	(445,448]	7	448	-1,67	0,0475	0,0252	2,15
M=3	(448,451]	3	451	-1,34	0,0901	0,0426	2,13
:	------------	--	---	-----	--------	------	-------
	(460,463]	24	463	0	0,5	0,1293	0,53
:	------------	--	---	-----	--------	------	-------
:	(478,481]	3	481	2,01	0,9778	0,0253	0,27
m=12	(481,∞)	2	∞	∞	1	0,0222	0,66

$\eta = \sum_{i=1}^{12} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_{i0}} = 14,241$. Din tabele rezultă $\eta_c = \chi^2_{11;0,05} = 19,7$.

Deoarece $\eta < \eta_c$ acceptăm ipoteza nulă.

Teste neparametrice de tip Kolmogorov

Teorema Kolmogorov serveşte ca bază pentru verificarea concordanţei dintre repartiţia teoretică si cea empirică. Dacă pe baza analizei repartiţiei în frecvenţe deducem funcţia empirică $F_n^*(x)$, putem genera un test de verificare a ipotezei nule $H_0 : F_n^*(x) = F(x)$ unde F(x) este o funcţie de repartiţie precizată. Regiunea critică este determinată de probabilitatea condiţionată:

$$P[\max_x |F_n^*(x) - F(x)| \geq (\lambda/\sqrt{n}) \cdot H_0] = \alpha = 1 - K(\lambda)$$

unde K(λ) este funcţia Kolmogorov, α este nivelul de semnificaţie şi n volumul eşantionului. Ultima egalitate permite determinarea valorii $\hat{\lambda}$. În consecinţa regiunea critică este:

$$V(X) = \left\{ x / \max_x |F_n^*(x) - F(x)| > \hat{\lambda}/\sqrt{n} \right\} .$$

Pentru verificarea normalitătii se procedează în felul următor (testul Massey):
- din datele de selecţie se alcătuieşte seria statistică şi se calculează frecvenţele relative f_i, i=1,n.
- se calculează valorile $F_n^*(x_i)$, i=1,n
- se calculează media şi dispersia de selecţie
- se normalizează variabila, calculând valorile $y_i = (x_i - \overline{x})/\overline{s}$

- se calculează valorile $\phi(y_i)$ şi diferenţele $\left|F_n^*(y_i)-\phi(y_i)\right|$ şi se alege valoarea maximă a acestor diferenţe
- pentru nivelul de semnificaţie α se calculează (din tabele) $\hat{\lambda}$ şi $\hat{\lambda}/\sqrt{n}$
- dacă diferenţa maximă este mai mică decât $\hat{\lambda}/\sqrt{n}$ se acceptă ipoteza nulă prin care variabila examinată are repartiţie normală, în caz contrar o respingem.

Observaţie:
Testul Massey se poate aplica şi pentru eşantioane de volum mic $n \leq 30$.

Exemplul 5. Se încearcă 16 imprimante de acelaşi tip şi se constată timpii de funcţionare din tabel. Se verifică ipoteza conform căreia repartiţia timpului de funcţionare fără defecţiuni este normală. Din date rezultă $\overline{T} = 150h$; $\overline{s} = 73h$.

Nr.	T_i	$y_i = (T_i - \overline{T})/\overline{s}$	f_i	$F_n^*(y_i)$	$\phi(y_i)$	$\left\|F_n^* - \phi(y_i)\right\|$
1	50,5	-1,36	1/16	0,06	0,09	0,03
2	60,5	-1,16	1/16	0,12	0,13	0,01
3	71,6	-1,02	1/16	0,18	0,14	0,04
:	:	:	:	:	:	:
13	212	0,85	1/16	0,78	0,80	0,02
14	260	1,1	1/16	0,86	0,86	0,00
15	285	1,3	1/16	0,93	0,9	0,07
16	304	2,1	1/16	1,00	0,98	0,02

Se constată că $d_n = \max_y \left|F_n^*(y_i)-\phi(y_i)\right| = 0,09$. Din tabele rezultă $\hat{\lambda}/\sqrt{n}$ =0.126 pentru α=0,05. Cum d_n<0,126 acceptăm ipoteza nulă. Pe baza aceloraşi date se pot efectua teste privind media şi dispersia repartiţiei.

Probleme propuse

P1. Fie ξ o variabilă aleatoare distribuită exponenţial negativ, având densitatea de repartiţie $f(x,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$. Să se determine o regiune critică, la nivelul de semnificaţie α, pentru testarea ipotezei nule $H_0:\lambda=\lambda_0$ cu alternativa $H_1:\lambda=\lambda_1>\lambda_0$.

P2. Se efectuează o selecţie de volum n=40 pentru cercetarea unei variabile aleatoare ξ, valorile obţinute prin măsurători fiind aranjate în seria statistică:
0.047 0.216 0.228 0.282 0.374 0.386 0.442 0.503 0.594 0.600 0.625 0.633 0.648 0.786 0.887 0.893 0.933 0.960 1.044 1.055
1.089 1.099 1.176 1.203 1.234 1.254 1.271 1.350 1.351 1.353 1.377 1.421 1.430 1.514 1.529 1.530 1.568 1.724 1.792 1.880
Să se testeze, cu un nivel de semnificaţie α=0,05, ipoteza nulă $H_0:\xi \in N(m=1,\sigma^2=6)$.

P3. Durata de funcţionare a unui dispozitiv oarecare poate fi considerată o variabilă aleatoare $T \in N(1500h, 200^2h^2)$. O selecţie de volum n=25 obţinută prin sondaj pur aleator dă o medie $\overline{T}$=1380h. Să se verifice ipoteza $H_0:m=m_0=1500h$, faţa de alternativa $H_1:m=m_1<1500h$, la un nivel de semnificaţie α=0,01. Care este puterea testului pentru m_1=1400h?

P4. Se supun încercărilor 50 de dispozitive electronice de acelaşi tip şi se constată că timpii de funcţionare până la defectare (exprimaţi în ore) sunt cei din tabel:

2	4	7	8	10	11	19	22	24	35	38	39	42	57	62	76	78
79	85	89	101	116	118	119	120	152	157	159	165	174	211	214	231	236
241	242	244	263	267	269	285	300	325	326	367	405	485	545	570	585	

a) Să se verifice ipoteza nulă prin care timpul de funcţionare până la defectare este repartizat exponenţial negativ cu funcţia de repartiţie $F(t)=1-e^{-t/160}$, cu un risc α=0,1.
b) Să se verifice ipoteza prin care acelaşi timp este repartizat normal de medie m=160h şi dispersie $\sigma^2=150^2h^2$.