1 Problemă Ariel 11 decembrie 2017

Problema 1 *Să se calculeze limita:*

$$\lim_{x\to 1_-} \sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}.$$

Soluţie. Vom folosi următorul rezultat (care se demonstrează destul de uşor (exerciţiu!)):

Propoziţia 1.1 *Fie seriile de puteri $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n x^n$ cu $(a_n), (b_n) \subset (0,\infty)$. Notăm razele lor de convergenţă cu R_A, R_B, iar sumele lor cu $A(x)$ şi $B(x)$. Presupunem că $\dfrac{a_n}{b_n} \to \ell \in (0,\infty)$. Atunci $R_A = R_B = R$ şi $\lim_{x\to R-} \frac{A(x)}{B(x)} = \ell$.*

În cele ce urmează, vom nota $\dfrac{a_n}{b_n} \to \ell$ prin $a_n \sim \ell b_n$, iar $\lim_{x\to R-} \frac{A(x)}{B(x)} = \ell$ prin $A(x) \sim \ell B(x)$.

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$. Evident, aceasta este o serie de puteri cu raza de convergenţă egală cu 1.

Vom considera şirul (a_n) dat prin $a_n = 1$ dacă n este pătrat perfect şi 0 în rest. Atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

Pentru a arăta ultima relaţie, în care $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$, se poate folosi o regulă de sumare Abel.

Se observă însă că

$$S_n = 1 + \left[\sqrt{n}\right] \sim \sqrt{n},$$

deci

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \sim (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^n \sim x(1-x)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n\right)'.$$

Fie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n. \tag{1.1}$$

Cum

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\sqrt{\pi}$$

din formula lui Wallis, rezultă că în locul seriei (1.1) putem studia seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1.$$

Aşadar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \sqrt{\pi} x(1-x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)' = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{x}{\sqrt{1-x}}.$$

Rezultă atunci faptul că

$$\lim_{x\to 1_-} \sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad \square$$