1. Primitive

1. Folosind substituţii trigonometrice, să se calculeze:
$a)\ I=\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1);\quad b)\ I=\int \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx,$
$x\in(0,+\infty);\quad c)\ I=\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},\ x\in(1,+\infty).$

2. Utilizând metoda integrării prin părţi, calculaţi:
$a)\ I=\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}dx,\ x\in(-1,1);\quad b)\ I=\int e^x\cos x\,dx,\ x\in\mathbb{R};$
$c)\ I_n=\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n},\ n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\mathbb{R}.$

3. Calculaţi următoarele integrale nedefinite pe intervale care nu conţin punctele în care se anulează numitorii: $a)\ I=\int \dfrac{x+3}{x^3-x}dx;$
$b)\ I=\int \dfrac{dx}{(x^3-1)^2}.$

4. Să se calculeze următoarele primitive din funcţii raţionale depinzând de funcţii trigonometrice:
$a)\ \int \dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x},\ x\in\mathbb{R};\quad b)\ \int \dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx,\ x\in\mathbb{R};$
$c)\ \int \dfrac{dx}{(\sin x+\cos x)^2},\ x\in(0,\pi/2);\quad d)\ \int \sin 3x\cos 5x\,dx,\ x\in\mathbb{R}.$

5. Calculaţi integralele de tip Euler pe intervale pe care funcţiile sunt bine definite:
$a)\ \int \dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}};\quad b)\ \int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}};$
$c)\ \int \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

6. Să se arate că următoarele funcţii admit primitive pe $\mathbb{R}$:

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases};b)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x^2}, x\neq 0\\ 0,\ x=0.\end{cases}$$

7. Calculaţi următoarele integrale nedefinite: $a)\ \int\sin^2 xdx,\ x\in\mathbb{R};\ b)\ \int\cos^3 xdx,\ x\in\mathbb{R};\ c)\ \int e^{\sin 2x}\cos 2xdx,\ x\in\mathbb{R}.$

8. Arătaţi că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi pară (respectiv impară), atunci f' este impară (respectiv pară). Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie pară (respectiv impară) care admite primitive. Este adevărat că orice primitivă G a lui g pe $\mathbb{R}$ este pară sau impară?

9. Să se determine o primitivă a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$, $x \in (0, \infty)$.

10. Arătaţi că funcţia $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x}, x \in (-\infty, 1) \\ (\ln^2 x)/x, \ x \in [1, \infty) \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi calculaţi o primitivă.