Seminar 10

Funcţii elementare. Puncte ordinare. Puncte singulare

1) Determinaţi punctele singulare şi natura lor pentru funcţiile $f(z) = z^2+1$, $g(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+4}$, $h(z) = \dfrac{z^2+1}{(z^2+4)^2}$, $k(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2(z^2+4)^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

2) Aflaţi punctele singulare ale funcţiilor: a) $f(z) = 2 - z + z^3$; b) $f(z) = \dfrac{z^7 - 3z^2}{z^2 - 6z + 9}$; c) $f(z) = \sqrt{z+9}$;

d) $f(z) = \mathrm{Log}\ (z^2 - 4)$.

3) Să se scrie ramurile funcţiei $f(z) = w = \sqrt[3]{/z}$ şi să se determine ramura pentru care $f_k(i) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

4) Calculaţi $\sqrt[5]{-2+2i}$ pe acea ramură a funcţiei $f(z) = \sqrt[5]{z}$ pe care avem $f(-1) = -1$.

5) Fie $f(z) = Log\ z$, $z \neq 0$. Determinaţi ramura pentru care $f_k(-3) = \ln 3 + 7\pi i$ şi apoi calculaţi $f(1+i)$ pe această ramură.

6) Arătaţi că pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$ are loc egalitatea $e^{\mathrm{Log}\ z} = z$ şi pentru orice $z \in \mathbb{C}$ avem $\mathrm{Log}\ e^z = z + i\,\mathrm{Arg}\ 1$.

7) Considerăm funcţia $f(z) = \dfrac{1}{z}\mathrm{Log}\ z$, $z \neq 0$. a) Să se scrie ramurile funcţiei folosind tăietura $T = \{z = x + iy,\ y = 0,\ x \leq 0\}$. b) Să se găsească ramura care ia valori reale pentru $z = x > 0$.

8) Să se rezolve in $\mathbb{C}$ ecuaţiile: a) $\cos z = -1/2$; b) $\mathrm{th}\ z = 2$.

9) Să se rezolve ecuaţiile: $z^6 + 1 = 0$, $z^3 - i = 0$, $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

10) Să se calculeze $\sin(1-i)$, $\cos(2-3i)$, $\mathrm{ch}\ (1+i)$, $\mathrm{tg}\ \left(1 + i\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{Log}\ \left(i - \sqrt{3}\right)$, $i^{\sqrt{2}}$, i^i.

11) Să se calculeze

$$E = sh\ 2i + \cos(1-i) + tg\,(1-2i) + \mathrm{Log}\ \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} + \left(1 + i\sqrt{3}\right)^i + e^{\sqrt{i}},$$

unde, pentru funcţiile multivoce, se ia ramura principală ($k = 0$).