Seminar 12
Serii. Serii Taylor. Serii Laurent

1) Să se dezvolte în serie Taylor de puteri ale lui z funcţia $f(z) = e^z$ în interiorul unui cerc cu centrul în punctul a arbitrar. Caz particular $a = 0$. Să se deducă dezvoltările în serie în jurul originii pentru $\sin z$, $\cos z$, $sh\ z$, $ch\ z$.

2) Să se dezvolte în serie Taylor în jurul originii funcţia $f(z) = (1+z)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ dat, unde pentru f s-a ales ramura pentru care $f(0) = 1$. Cazuri particulare: $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$, $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$, $f(z) = Log(1+z)$, $f(z) = Log(1-z)$.

3) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcţiile

$$f(z) = \frac{1}{z^5 - 1}, \quad g(z) = \frac{z+1}{z-1}, \; h(z) = \frac{z}{z+3}.$$

4) Dezvoltaţi în serie Taylor de puteri ale lui $z-1$, funcţiile $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, $g(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z + 2}$; $h(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 5}$; $j(z) = e^{z-2}$; $k(z) = \cos(z-1)$.

5) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcţia

$$f(z) = 1/\left(z^3 - 6z^2 + 11z - 6\right)$$

în domeniile: a) $|z| < 1$; b) $1 < |z| < 2$; c) $2 < |z| < 3$. Să se precizeze punctele singulare ale lui f şi natura lor.

6) Se dă funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

Dezvoltaţi f în serie Laurent în vecinătatea lui $z = 0$ pe domeniile:

$$a)\ 0 < |z| < 1; b)\ 1 < |z| < 2; c)\ \ |z| > 2$$

şi apoi în vecinătatea lui $z = 1$ pe coroana circulară $0 < |z-1| < 1$. Specificaţi punctele singulare ale lui f şi natura lor.

7) Să se dezvolte în serie Laurent în vecinătatea lui $z = 1$ funcţia $f(z) = \sin \dfrac{z}{z-1}$.

8) Dezvoltaţi în serie Taylor în vecinătatea lui $z = 0$ funcţia $f(z) = \sin^3 z$.

9) Dezvoltaţi în serie în vecinătatea lui $z = 2$ funcţiile $f(z) = \cos z$; $g(z) = e^{z+1}(z-2)$; $h(z) = \dfrac{\sin(z-2)}{z-2}$.

10) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z în vecinătatea lui $z = 0$ funcţiile $f(z) = z^3 \sin(1/z)$, $g(z) = Log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$, $ab \neq 0$.