2. Integrala definită (Riemann)

1. Fără a calcula integralele, să se demonstreze inegalităţile:

$a)$ $\sqrt{10} \leq \int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2+1}dx \leq \sqrt{17}$; $b)$ $0 \leq \int_{-1/2}^{0} x \ln\left(1-x^2\right) dx \leq \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{4}{3}$; $c)$ $\dfrac{1}{3} \leq \int_4^7 \dfrac{x-3}{x+5} dx \leq 1$; $d)$ $\int_0^{\pi/2} e^{-\sin x} dx \leq \pi/2$..

2. Fără a calcula integralele, comparaţi-le: $a)$ $\int_1^2 \ln\left(1+x\right) dx$ şi $\int_1^2 \dfrac{x}{x+1} dx$; $b)$ $\int_2^{10} xarctgxdx$ şi $\int_2^{10} \ln\left(1+x^2\right) dx$.

3. Fie $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0,1] \\ x^2, & x \in [1,2]. \end{cases}$ Să se arate că $f \in \mathcal{R}[0,2]$ şi să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$.

4. Arătaţi că funcţia $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = 1$ pentru $x \in [1,2]$ şi $f(x) = 2$ pentru $x \in (2,3]$ nu este continuă, dar este integrabilă Riemann pe $[1,3]$.

5. Arătaţi că $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \in [-1,0] \\ 1+x^2, & x \in (0,1] \end{cases}$ este integrabilă Riemann pe $[-1,1]$.

6. Arătaţi că funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

admite primitive pe intervalul compact $[0,1]$, dar nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

7. Să se arate că funcţiile $f_1, f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, x \in [-1,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} -1, x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, x \in [-1,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \end{cases}$$

nu sunt integrabile pe $[-1,1]$, dar $f_1 + f_2$ şi $f_1 f_2$ sunt integrabile pe $[-1,1]$.

8. Determinaţi punctele de maxim şi de minim pentru funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x e^{t^2} \left(t^2 - 2\right) dt$.

9. Funcţia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2} dt$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$? În caz afirmativ, să se determine derivata.

10. Arătaţi că

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\int_0^{\sin x} e^{t^2} dt}{\int_0^{tgx} e^{t^2} dt} = -1.$$

11. Se dă funcţia continuă $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{1/x}^{x} f(t)\, dt$.

12. Să se calculeze următoarele integrale Riemann:

$I = \displaystyle\int_0^{1/2} x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$; $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$; $I = \displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\, dx$; $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

13. Arătaţi că funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\left(x, \dfrac{2}{1+x^2}\right)$ este integrabilă Riemann pe $[0,2]$ şi să se calculeze $\int_0^2 f(x)\, dx$.

14. Arătaţi că funcţia $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x^2} \in \mathcal{R}\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ şi calculaţi integrala Riemann a lui f pe acest interval.

15. Fără a calcula integralele, comparaţi-le:

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ şi $\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx$; $0 < \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.

16. Calculaţi derivatele următoarelor funcţii specificând şi domeniile lor de derivabilitate: $a)$ $\int_0^{\sin x} \arcsin t dt$; $b)$ $\int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t} dt$.

17. Determinaţi valorile integralelor definite: $a)$ $\int_1^3 \sqrt{7x+3} dx$; $b)$ $\int_1^e \ln^3 x dx$.

18. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ continuă şi $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_t^{2t} f(x)\, dx$.

$a)$ Arătaţi că F este continuă;

$b)$ Arătaţi că F este derivabilă şi calculaţi F'.