3. Integrale improprii

1. Folosind definiţia, să se cerceteze convergenţa integralelor:
$a)\ \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2};\qquad b)\ \int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx,\ a>0;\qquad c)\ \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^4}dx.$

2. Studiaţi convergenţa integralei probabilităţilor $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx.$

3. Studiaţi convergenţa integralelor cu ajutorul criteriului în α:
$a)\ \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^4};\quad b)\ \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx;$

4. Să se analizeze convergenţa integralei $\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}dx,\ a>0,\ \lambda>0.$

5. Arătaţi că $\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x}dx\ (a>0)$ nu este absolut convergentă.

6. Să se studieze convergenţa integralei improprii $\int\limits_1^\infty \cos x^2 dx.$

7. Fie $I=\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}dx$. Să se arate că:

$a)$ Pentru $\lambda>0$, integrala I converge.

$b)$ Pentru $0<\lambda\le 1$, integrala I este semiconvergentă (I converge, dar $J=\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\lambda}\right| dx$ diverge), iar pentru $\lambda>1$, I este absolut convergentă.

8. Studiaţi convergenţa integralelor improprii de speţa a II-a:
$a)\ \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\qquad b)\ \int\limits_{-1}^{-1/3} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}};\qquad c)\ \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

9. Studiaţi convergenţa integralei $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

10. Studiaţi convergenţa integralelor cu ajutorul Criteriului în α:
$a)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} c\operatorname{tg} x\,dx;\quad b)\ \int\limits_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}};\quad c)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$

11. Arătaţi că $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ converge pentru $0<\lambda<2$ şi diverge pentru $\lambda\ge 2$.

12. Stabiliţi convergenţa integralelor $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx;\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx.$

13. Este $\int\limits_0^\infty \dfrac{\ln x}{1+x^2}dx$ convergentă?

14. Să se cerceteze natura integralei improprii $\int_1^\infty xe^{-2x}\sin x dx$.

15. $\int_1^\infty (\sin 2x/x^p)dx, p > 0$.

16. $\int_0^\infty \sin x dx$.

17. $\int_0^\infty x\cos x dx$.

18. Să se cerceteze natura integralelor şi în caz de convergenţă să se calculeze valoarea lor:

$a)$ $\int_a^\infty \dfrac{dx}{x^2+x-2}$, $a > 0$; $b)$ $\int_1^\infty \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

19. Studiaţi convergenţa integralei $\int_0^1 \dfrac{dx}{(2+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.