4. Integrale curbilinii

1. Să se calculeze lungimile următoarelor arce de curbă γ plane:
a) $x = a\,(t - \sin t)\,,\; y = a\,(1 - \cos t)\,,\; t \in [0, 2\pi]$ (cicloida);
b) $y = \ln x - x^2/8$ care se proiectează pe axa Ox în intervalul $(2, 5)\,;$
c) $ay^2 = x^3$ de la $x = a$ la $x = b$ $(0 < a < b)$ (arcul parabolei semicubice).

2. Să se calculeze $\int\limits_\gamma ye^{-x}ds$, unde γ este curba dată parametric prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2arctgt - t + 1 \end{cases}, t \in [0, 1].$$

3. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa întâi: *a)* $I = \int\limits_{AB} yds$, unde AB este arcul definit prin $x = t,\; y = \sqrt{t},\; t \in [1, 2]\,;$ *b)* $I = \int\limits_\gamma xyzds$, unde γ este elicea circulară dată de $\gamma : x = \cos t,\; y = a\sin t,\; z = bt,\; t \in [0, 2\pi]\,.$

4. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa întâi: *a)* $I = \int\limits_\gamma (x^2 + y^2)\, ds$, $x = a\,(\cos t + t\sin t),\; y = a\,(\sin t - t\cos t)\,,\; t \in [0, 2\pi]\,;$ *b)* $I = \int\limits_\gamma \sqrt{x^2 + y^2} ds$, $\gamma : x^2 + y^2 = ax.$

5. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa I luate de-a lungul curbelor indicate: *a)* $\int\limits_\gamma xyzds,\; \gamma : x = t,\; y = \left(2\sqrt{2}/3\right) t^{3/2},\; z = t^2/2,\; t \in [0, 1]\,;$ *b)* $\int\limits_\gamma x^2 ds,\; \gamma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\; x + y + z = 0,\; a > 0.$

Calculaţi integralele curbilinii de speţa a doua:

6. $\int\limits_{AB} (xdy - ydx)$ de-a lungul parabolei $y = x^2$ între punctele $A\,(0, 0)$, $B\,(1, 1)$.

7. $\int\limits_C \left(\dfrac{dx}{y} - \sqrt{2x}dy\right)$ luată pe semicercul $x^2 + y^2 - 2x = 0,\; y \geq 0$ în sens pozitiv.

8. $\int\limits_C \dfrac{dy}{x+3}$ luată pe arcul elipsei $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ între $A\,(3, 0),\; B\,(0, 2)$.

9. $\int\limits_C x\dfrac{x+y}{x-y}dx - y\dfrac{x+y}{x-y}dy$, C este conturul sectorului circular de rază 1 şi deschidere $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4}$.

10. $\int\limits_C \left(y^2 - z^2\right) dx + 2yz\, dy - x^2 dz$, C: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ între $O\,(0,0,0)$ şi $A\,(1,1,1)$.

11. Calculaţi $I = \int\limits_C \left(2y^2 - 4y + x\right) dx + 4x\,(y-1)\, dy$, C: $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

12. Să se integreze diferenţiala totală exactă

$$\omega = \frac{\left(y^2 - xy\right) dx + \left(x^2 - xy\right) dy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, (x, y) \neq (0,0)\,.$$

13. Să se integreze diferenţiala totală exactă $dz = \dfrac{y\, dx - x\, dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ pe un domeniu simplu conex din $\mathbb{R}^2$ care nu conţine originea.

14. Calculaţi $\int\limits_C \dfrac{2xy\, dx + \left(1 - x^2\right) dy}{\left(1 - x^2\right)^2 + y^2}$, C fiind o curbă închisă ce conţine în interior punctul $(1, 0)$, dar nu conţine $(-1, 0)$.

15. (i) Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ a.î. expresia

$$\omega = \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^n} \left(x\, dy - y\, dx\right)$$

(a, b, c constante date) să fie o diferenţială totală exactă pe un domeniu ce nu conţine originea.

(ii) Pentru acest n găsit, să se calculeze $\int\limits_C \omega$, unde C este drumul ce uneşte două puncte A şi B ale axei Ox, de abscise x_0 şi x_1.

16. Să se determine funcţiile ale căror diferenţiale totale sunt:

$a)$ $\omega = (y+z)\, dx + (x+z)\, dy + (x+y)\, dz$;

$b)$ $\omega = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\right) dx + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right) dy - \dfrac{xy}{z^2} dz$.

17. Acelaşi enunţ pentru $\omega = \dfrac{y\, dx}{a-z} + \dfrac{x\, dy}{a-z} + \dfrac{xy\, dz}{(a-z)^2}$.

18. Să se calculeze lungimea arcului de elice circulară $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = ht$, $\theta \in [0, \pi]$.

19. Să se calculeze integralele curbilinii de prima speţă pe arcele de curbă din plan indicate:

$a)$ $I = \int\limits_\gamma xyds$, unde $\gamma : x = t$, $y = t^2$, $t \in [-1, 1]$;

$b)$ $I = \int\limits_{\gamma} \sqrt{y\,(2-y)}ds$, $\gamma : x = t - \sin t$, $y = 1 - cost$, $t \in [0, \pi/2]$;

$c)$ $I = \int\limits_{\gamma} x^2 y^2 ds$, $\gamma : x = a\cos^3 t$, $y = asin^3 t$, $t \in [0, \pi/2]$, $a > 0$.

20. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa întâi pe arcele de curbă din $\mathbb{R}^3$ indicate:

$a)$ $I = \int\limits_{\gamma} z\,(x^2 + y^2)\,ds$, unde $\gamma : x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in [0, 1]$;

$b)$ $I = \int\limits_{\gamma} (x + y + z)\,ds$, $\gamma : x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$, $t \in [0, \pi/2]$, $a, b > 0$.

21. $\int\limits_{C} y\,dx + z\,dy + x\,dz$ în sens pozitiv pe arcul elicei $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

22. Fie $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ drumul dat parametric prin $x = t^2$, $y = t$. Există integrala curbilinie de speţa a II-a $I = \int\limits_{\gamma} \frac{dx}{1+y^2} + \frac{dy}{1+x^2}$? În caz afirmativ, să se calculeze această integrală.

23. Forma diferenţială $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ este exactă? În caz afirmativ, să se calculeze valoarea integralei pe o curbă închisă arbitrară din plan.

24. Calculaţi $\int\limits_{C} (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$, unde C este o curbă închisă.

25. Să se calculeze $\displaystyle\int_{AB} y^2 dx + z^2 dy + xydz$ pe arcul definit de $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t$, $t \in [0, 2]$.

26. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \displaystyle\int_{AB} \frac{dy}{x+4}$ pe arcul de elipsă $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, cu $A\,(3, 0)$, $B\,(0, 2)$.

27. Să se determine valoarea integralei

$$\int_{AB} \left(x^3 - yz\right) dx + \left(2y^3 - zx\right) dy + \left(3z^3 - xy\right) dz$$

pe un drum ce uneşte punctele $A\,(1, 1, 1)$, $B\,(2, 3, 4)$.

28. Se dă integrala $\displaystyle\int_{AB} \left(\frac{y}{xy-1} + 2x\right) dx + \left(\frac{x}{xy-1} + 2y\right) dy$ pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ care nu intersectează hiperbola $xy = 1$. Arătaţi că in-

tegrala nu depinde de drum în D şi să se calculeze integrala pe un astfel de drum.

29. Să se determine valoarea integralei $\int \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ pe curbele: $a)$ o curbă închisă ce nu conţine originea în interior; $b)$ un cerc cu centrul în origine parcurs în sens direct.