Seminar 8

1. Transformata Laplace

Să se calculeze transformata Laplace a următoarelor funcţii original:

1) $f(t) = \begin{cases} a, \ 0 < t < b \\ 0, \ t < 0, \ t > b \end{cases}$ cu $b > 0$ fixat; 2) $\sin at$, $\cos at$, $sh\ at$, $ch\ at$, $\cos^2 at$, $sh^2 at$; 3) $e^{2t}\sin 5t$, $e^{-4t}\cos 7t$, $t^3 e^{9t}$, $e^{-at}\cos\omega t$; 4) $t\sin\omega t$, $t^n e^{\alpha t}$, $te^{\lambda t}\cos\omega t$; 5) $(e^{-at}\sin t)/t$.

Să se determine funcţia original $f(t)$ a cărei imagine Laplace $F(s)$ este:
6) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$; 7) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)s^3}$; 8) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$; 9) $F(s) = \dfrac{a^2}{(s^2+a^2)s^2}$; 10) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}$; 11) $F(s) = \ln(s+a)$; 12) $F(s) = \ln\dfrac{s+a}{s+b}$.

2. Rezolvarea ecuaţiilor si sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi cu ajutorul transformatei Laplace

Să se rezolve problemele Cauchy de mai jos utilizând transformata Laplace:
1) $x'' + 3x; +2x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$;
2) $x'' - 2x' = e^{2t} + t - 1$, $x(0) = 1/8$, $x'(0) = 1$;
3) $x''' - 2x'' - x' + 2x = 5\sin 2t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = -1$;
4) $x'' - 2x' + 5x = e^t\cos 2t$, $x(0) = x'(0) = 1$;
5) $\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 2y + z + 1 \end{cases}$ cu $y(0) = 0$, $z(0) = 5$;
6) $\begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ x'' + 2y' = 2t - \cos 2t \end{cases}$ cu $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $y(0) = -1$;
7) $\begin{cases} x' - 4x - y + 36t = 0 \\ y' + 2x - y + 2e^t = 0 \end{cases}$ cu $x(0) = 0$, $y(0) = 1$;
8) $\begin{cases} 2y'' - y' + 9y - z'' - z' - 3z = 0 \\ 2y'' + y' + 7y - z'' + z' - 5z = 0 \end{cases}$ cu $y(0) = y'(0) = 1$, $z(0) = z'(0) = 0$;

9) $\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = -x + y + 2z \end{cases}$ cu $x\,(0) = 1,\ y\,(0) = 0,\ z\,(0) = -1;$

10) $\begin{cases} x' = x + 2y - 3z \\ y' = x + y + 2z \\ z' = x - y + 4z \end{cases}$ cu $x\,(0) = y\,(0) = z\,(0) = 0;$

11) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3 \end{cases}$ cu $y_1\,(0) = y_2\,(0) = y_3\,(0) = 0;$

12) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_2 + 4y_3 \\ y_3' = y_1 - y_3 \end{cases}$ cu $y_1\,(0) = y_2\,(0) = y_3\,(0) = 0.$