Seminar 9

1. Numere complexe

1) Dovediţi identităţile operaţiilor $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\overline{z}$:

(i) $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$;

(ii) $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff z = \overline{z}$;

(iii) $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;

(iv) $z\overline{z} = |z|^2$, $|zz'| = |z|\,|z'|$;

(v) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$ şi $|z| = 0 \iff z = 0$.

2) Arătaţi că $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

3) Fie $z,\ z' \in \mathbb{C}$ cu $|z| = |z'| = 1$ şi $zz' \neq -1$. Să se arate că $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

4) Calculaţi suma $s = 1 + z + z^2 + ... + z^n$, unde $z = (1+i)/(1-i)$.

5) Rezolvaţi ecuaţia $z^3 = \overline{z}\left(|z|^2 - 1\right)$.

6) Fie $z, w \in \mathbb{C}$, $|w| < 1$, $z\overline{w} \neq 1$, $s = \dfrac{z-w}{1-z\overline{w}}$. Atunci $|s| \leq 1$ dacă şi numai dacă $|z| \leq 1$.

7) Fie $a, b \in \mathbb{C}$ distincte, de afixe A, respectiv B şi $r > 0$ dat. Stabiliţi locul geometric al afixelor numerelor complexe z ce satisfac:

a) $|z-a| = 0$; b) $|z-a| = r$; c) $|z-a| < r$; d) $|z-a| \leq r$; e) $|z-a| > r$;

f) $0 < |z-a| < r$; g) $|z-a| - |z-b| = 0$; h) $|z-a| - |z-b| = r$;

i) $|z-a| + |z-b| = r$; j) $r < |z-a| < 2r$.

8) Scrieţi sub formă trigonometrică şi exponenţială numerele 1, i, $1-i$, $-1+i$, $\sqrt{3}-i$, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$, $\sin a + i(1+\cos a)$, $a \in \mathbb{R}$.

9) Calculaţi: a) $z = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}$; b) $z = (-1-i)^{80}$; c) $z = \left(\sqrt{3}-i\right)^{50}$; d) $S_1 = 1 + \cos t + \cos 2t + ... + \cos nt$, $S_2 = \sin t + \sin 2t + ... + \sin nt$.

2. Funcţii monogene. Funcţii olomorfe. Condiţiile Cauchy- Riemann

1) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = |z|$ nu este derivabilă în nici un punct din $\mathbb{C}$.

2) Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R},$ astfel încât funcţia $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$, unde $z = x + iy$, să fie olomorfă pe $\mathbb{C}$. Să se scrie apoi f ca funcţie de z.

3) Să se determine punctele în care funcţia $f(z) = z^2 + z\overline{z} - \overline{z}^2 + 2z - \overline{z}$ este monogenă şi să se calculeze în acele puncte derivata sa.

4) Acelaşi enunţ pentru funcţiile: a) $f(z) = z^2 - 2z\overline{z} + \overline{z}^2 + 3z + 3\overline{z} + 3$; b) $f(z) = z^2 - z\overline{z} - \overline{z}^2 - 2z + \overline{z} + 4$; c) $f(z) = z^3 - z\overline{z} + z - 2$.

5) Se dă funcţia $f(z) = (chy + \lambda shy)\cos x + i(chy + \mu shy)\sin x$, cu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Să se găsească λ şi μ astfel ca f să fie olomorfă în tot planul complex. Să se scrie apoi f ca funcţie de z.

6) Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, ştiind că $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$, $z \neq 0$.

7) Acelaşi enunţ pentru funcţia $v(x, y) = e^x \sin y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ pentru $(x, y) \neq 0$ şi $f(1) = e$.

8) Determinaţi funcţiile olomorfe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, cunoscând partea reală $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, $z \neq 0$.

9) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia olomorfă $f = u + iv$ să satisfacă relaţiile de mai jos. Să se afle apoi această funcţie.

a) $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^3 + axy^2,\ f(0) = 2i$;

b) $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = y^3 + ax^2y,\ f(i) = i$;

c) $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = e^{3x} \sin ay,\ f(\pi i/2) = 1 + i$;

d) $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = e^{ax} \cos 2y,\ f(\pi i/4) = 1$.

10) Să se afle funcţiile olomorfe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, ştiind că $u = \varphi(x^2 + y^2)$, unde φ este o funcţie de două ori derivabilă.

11) La fel pentru $v = \varphi(y/x)$, $x \neq 0$, cu φ de două ori derivabilă.

12) Să se determine funcţia φ de clasă C^2, astfel încât funcţia olomorfă $f = u + iv$ să satisfacă relaţia:

a) $u(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$; b) $v(x, y) = \varphi(xy)$. Apoi să se găsească f în fiecare caz în parte.

13) Determinaţi funcţia olomorfă $f = u + iv$ astfel încât $g = v + iu$ să fie de asemenea olomorfă şi $f(1 + i) = 1 + i$.