1. Integrarea prin schimbări de variabilă

Exerciţiul 1. *Să se calculeze următoarele integrale nedefinite pe intervalul precizat:*

a) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx, x \in \mathbb{R};$ *b)* $\int \cos \sqrt{x}dx, x \in (0,+\infty);$

c) $\int \frac{1}{\sin x}dx, x \in (0,\pi);$ *d)* $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx, x \in (1,+\infty).$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx, x \in \mathbb{R};$ *f)* $\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{x+1}}dx, x \in \mathbb{R}.$

Rezolvări şi răspunsuri:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Calculăm integrala, aplicând prima teoremă de schimbare de variabilă de integrare.

Facem schimbarea de variabilă de integrare: $1+\cos^2 x = t$, $t \in [1,2] |$diferenţiem$\Rightarrow$ $-2\cos x \sin x = dt$

Înlocuim $\int \frac{-dt}{t} = -\ln t + C, \forall t \in [1,2], \forall C \in \mathbb{R}.$

Revenim la substituţie$\Rightarrow$ $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx = -\ln\left(1+\cos^2 x\right) + C, \forall x \in \mathbb{R}, \forall C \in \mathbb{R}$

b) Indicaţie. Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{x} = t$, $t \in (0,+\infty) |$

$\int \cos \sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$, $\forall x \in (0,+\infty), \forall C \in \mathbb{R}.$

c) Indicaţie.

$\int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}dx + \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx.$

2. Primitivele funcţiilor raţionale dependente de funcţii trigonometrice

Exerciţiul 2. *Să se calculeze următoarele integrale nedefinite pe intervalul precizat:*

a) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}, x \in (-\pi,\pi)$ *b)* $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5}, x \in (-\pi,\pi),$

c) $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}, x \in (-\pi,\pi),$

d) $\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}dx, x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right),$ *e)* $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}, x \in (0,\pi),$

f) $\int \frac{\sin 2x dx}{(2+\sin x)^2}, x \in \mathbb{R},$ *g)* $\int \frac{1}{(3+\cos^2 x)\sin x}dx, x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

h) $\int \frac{1}{\sin x \cos^2 x}dx, x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right),$ *i)* $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}dx, x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$

j) $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx, x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$. *k)* $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}dx, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

a) $\int \dfrac{dx}{\cos x+2\sin x+3}, (-\pi,\pi)$

Observăm că funcţia $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+2\sin x+3}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive.

Pentru calculul primitivei facem schimbarea de variabilă $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, x\in\mathbb{I}\subset((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$. Inversând funcţia, obţinem $x=2\operatorname{arctg} t$ şi $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$.

Pe de altă parte avem

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

În urma acestei schimbări de variabilă rezultă:

$$\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\frac{2t}{1+t^2}+3}=\int\frac{1}{t^2+2t+2}dt=\int\frac{1}{(t+1)^2+1}dt=\operatorname{arctg}(t+1)+C$$

$$\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1)+C.$$

f) $\int \dfrac{\sin 2x dx}{(2+\sin x)^2}, x\in\mathbb{R}$.

Observăm că funcţia $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive.

Putem scrie

$$\int\frac{\sin 2x dx}{(2+\sin x)^2}=\int\frac{2\sin x\cos x dx}{(2+\sin x)^2}$$

şi observăm că putem face schimbarea de variabilă $\sin x=t, \cos x dx=dt$,

$$\int\frac{2t dt}{(2+t)^2}=\int\frac{2}{t+2}dt-\int\frac{4}{(t+2)^2}dt=2\ln(t+2)+\frac{4}{t+2}+C$$

$$\frac{2t}{(2+t)^2}=\frac{2}{t+2}-\frac{4}{(t+2)^2}$$

$$\int\frac{\sin 2x dx}{(2+\sin x)^2}=2\ln(\sin x+2)+\frac{4}{\sin x+2}+C.$$

j) $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

Observăm că funcţia $f(x)=\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive.

Putem folosi formul trigonometrice
$\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2,\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2,$
$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cos^2 2x+\frac{1}{2}$
$\int \dfrac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\displaystyle\int \dfrac{2dx}{\cos^2 2x+1}dx$
Putem face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} 2x=t$, pentru $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$
$x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t, dx=\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}dt$
$\int \dfrac{\frac{1}{t^2+1}dt}{\frac{1}{1+t^2}+1}=\displaystyle\int\dfrac{dt}{2+t^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{\sqrt{2}}+C,$
$\int \dfrac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}+C.$

Sunt cazuri în care transformările de la funcţii iraţionale se pot înlocui cu altele mai simple.

Integrale de forma $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, x\in[-a,a]$, unde $R(u,v)$ este o funcţie raţională de argumentele u şi v, se transformă într-o integrală raţională de funcţii trigonometrice dacă facem substituţia $x=a\sin t$.

Exerciţiul 3. *Să se calculeze*
a) $\displaystyle\int\sqrt{9-x^2}dx.$
b) $\displaystyle\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Rezolvare. a) $9-x^2\geq 0\Rightarrow x\in[-3,3].$
Pentru $x\in[-3,3]$ vom calcula integrala.
Se face schimbarea de variabilă
$x=3\sin t\Rightarrow dx=3\cos t dt,$
$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\left|\cos t\right|,$
$I'=\displaystyle\int 3\left|\cos t\right|\cdot 3\cos t dt$
Dacă $\cos t>0, t\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$
$I'=9\displaystyle\int\cos^2 t dt=9\int\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$
Dacă $\cos t<0, t\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$

$I' = -9\int \cos^2 t dt = -\frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$
Rezultă, deoarece $t = \frac{1}{3}\arcsin x$,
$I = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin\left(2\frac{1}{3}\arcsin x\right)\right) + C.$♦

<u>*Integrale de forma* $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$</u> unde $R(u, v)$ este o funcţie raţională de argumentele u şi v, se transformă într-o integrală raţională de funcţii raţionale în e^t dacă facem substituţia $x = a \operatorname{ch} t$.

Primitivele funcţiilor raţionale dependente de funcţii trigonometrice

Exerciţiul 4. *Să se calculeze*
a) $\int x\sqrt{x^2 - a^2}dx, a > 0.$
b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$

Indicaţie. a) $x^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-a, a]$.
Pentru $x \in [-a, a]$ vom calcula integrala.
Se face schimbarea de variabilă
$x = a \operatorname{ch} t \Rightarrow dx = a \operatorname{sh} t dt.$
$I' = \int a^2 \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \,(a \operatorname{sh} t dt) = a^3 \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t dt = a^3 \frac{\operatorname{sh}^3 t}{3} + C,$
$\int x\sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^3 + C.$♦

<u>*Integrale de forma* $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$</u> unde $R(u, v)$ este o funcţie raţională de argumentele u şi v, se transformă într-o integrală raţională de funcţii raţionale în e^t dacă facem substituţia $x = a \operatorname{sh} t$.

Exerciţiul 5. *Să se calculeze integrala*
a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}dx.$
b) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}dx, x \neq 0.$
c) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1 + x^2}}dx, x \neq 0.$

Indicaţie. a) $x = \operatorname{sh} t \Rightarrow dx = \operatorname{ch} t \Rightarrow$
$I' = \int \frac{\operatorname{sh}^3 t}{\operatorname{ch} t} \operatorname{ch} t dt = \int \operatorname{sh}^3 t dt = \int \operatorname{sh} t \left(\operatorname{ch}^2 t - 1\right) dt = \frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 t - \operatorname{ch} t + C,$
$I = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 - \sqrt{1+x^2} + C.$♦

3. Primitivele funcţiilor raţionale dependente de funcţii exponenţiale

Exerciţiul 6. *Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:*
a) $\int \sqrt{e^x - 1} dx, x \in (0, \infty)$, b) $\int e^x \operatorname{ch} x dx, x \in \mathbb{R}$,
c) $\int \frac{e^x + 1}{e^{3x} + 1} dx, x \in \mathbb{R}$, d) $\int \operatorname{ch}^3 x dx, x \in \mathbb{R}$.

a) Funcţia $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ este continuă pe $(0, \infty)$, deci admite primitive.
Metoda I.
Facem schimbarea de variabilă $e^x = t, e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$
$I' = \int \frac{\sqrt{t-1}}{t} dt$
Mai schimbăm variabila încă o dată
$\sqrt{t-1} = u \Rightarrow t - 1 = u^2 \Rightarrow dt = 2udu$
$I'' = \int \frac{u}{u^2+1} 2udu = 2\int \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right) du = 2u - 2\operatorname{arctg} u + C,$
$I' = 2\sqrt{t-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{t-1} + C,$
$\int \sqrt{e^x - 1} dx = 2\sqrt{e^x - 1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C.$
Metoda II. Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{e^x - 1} = t \Rightarrow e^x - 1 = t^2, e^x dx = 2tdt$
$dx = \frac{2tdt}{t^2+1},$
$I' = \int t \frac{2tdt}{t^2+1} = 2t - 2\operatorname{arctg} t + C,$
$\int \sqrt{e^x - 1} dx = 2\sqrt{e^x - 1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C.$

Observaţia 1. *Există integrale nedefinite ce nu se pot exprima cu funcţii elementare, precum*

$\int e^{-x^2} dx, x \in \mathbb{R};$
$\int \frac{\sin x}{x} dx, x \in (0, +\infty);$
$\int \frac{\cos x}{x} dx, x \in (0, +\infty).$

4. Integrala definită

Exerciţiul 7. *Folosind noţiunea de integrală definită să se calculeze următoarele limite:*

a) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}, n \in \mathbb{N}^*;$

b) $a_n = \dfrac{2}{2n+1} + \dfrac{2}{2n+3} + ... + \dfrac{2}{4n-1}, n \in \mathbb{N}^*;$

c) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*;$

d) $a_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)}, n \in \mathbb{N}^*.$

Exerciţiul 8. *Să se calculeze următoarele integrale definite folosind formula Leibniz-Newton:*

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}}dx,$ b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx,$

c) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} x \arcsin\left(x^2-4\right)dx,$ d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x\left(1+\sqrt{\ln x}\right)^2}dx,$

e) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx,$ f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}dx.$

Răspunsuri: a) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, b) $-\cos 1 + 1$, c) 0, d) $2\ln 2 - \frac{5}{4}$, e) $3 - 4\ln 2$, f) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$.

5. Tema 2

Exerciţiul 9. *Să se calculeze integralele*

a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-1}dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx,$

d) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+3x-2}dx,$

e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx.$