## 1. Integrala definită

**Exerciţiul 1.** *Să se calculeze următoarele integrale definite folosind formula Leibniz-Newton:*

a) $\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}} dx$, b) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$,

c) $\int_{.\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} x \arcsin(x^2-4)\, dx$, d) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x\left(1+\sqrt{\ln x}\right)^2} dx$,

e) $\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$, f) $\int_{-1}^0 \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$,

g) $\int\limits_0^1 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}} dx$, f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + \sin^2 x}$.

**Exerciţiul 2.** *Demonstraţi că dacă* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *atunci*

a) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)dx$,

b) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_0^{b-a} f(b-x)dx$

c) $\int\limits_0^{2a} f(x)dx = \int\limits_0^a [f(x)+f(2a-x)]\, dx$, dacă $f \in \mathcal{R}([0,2a])$.

**Exerciţiul 3.** *Folosind formula de la punctul b), exerciţiul precedent, să se calculeze:*

a) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} x)dx$, f) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$,

b) $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

**Exerciţiul 4.** *Să se determine semnul următoarelor integrale:*

a) $\int\limits_0^{10} e^{x^2} dx$, b) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$, c) $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$.

**Exerciţiul 5.** *Să se determine cea mai mare dintre integrale, fără a se face calculul lor:*

a) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, $\int\limits_0^1 x dx$,

b) $\int\limits_0^1 x^2 \sin^2 x dx, \qquad \int\limits_0^1 x \sin^2 x dx,$

c) $\int\limits_1^2 e^{x^2} dx, \qquad \int\limits_1^2 e^x dx.$

**Exerciţiul 6.** *Să se demonstreze inegalităţile:*

a) $\frac{2}{3} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}},$

b) $\frac{1}{2} < \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{\sqrt{2}}.$

**Exerciţiul 7.** *Fie* $f : [-a, a] \to R, a > 0,$ *o funcţie continuă. Să se demonstreze că:*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)dx, & \text{dacă } f \text{ este o funţie pară,} \\ 0, & \text{dacă } f \text{ este o funţie impară.} \end{cases}$$

## 2. Tema

**Exerciţiul 8.** *Fără a calcula integrala, să se demonstreze inegalitatea*

$$\sqrt{10} \le \int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2+1} dx \le \sqrt{17}.$$

**Exerciţiul 9.** *Fără a calcula integralele, comparaţi*

$$\int_2^{10} x \operatorname{arctg} x dx \text{ şi } \int_2^{10} \ln(1+x^2) dx.$$

**Exerciţiul 10.** *Să se calculeze integralele:*

a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x} dx,$

b) $\int_2^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} dx,$

c) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$