1. Serii Fourier

Exerciţiul 1. *Să se dezvolte în serii Fourier funcţiile:*

a) $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\pi-x,$

b) $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, x\in(-\pi,0]\\ x+1, x\in(0,\pi]\end{cases},$

c) $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}0, x\in(-\pi,0]\\ x, x\in(0,\pi]\end{cases},$

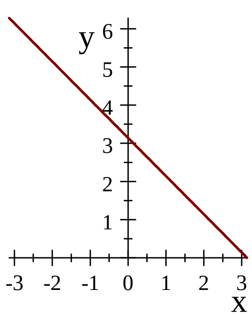
d) $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2,$

e) $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=x,$

f) $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\pi-|x|$. *Aplicând egalitatea lui Parseval să se deducă* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$

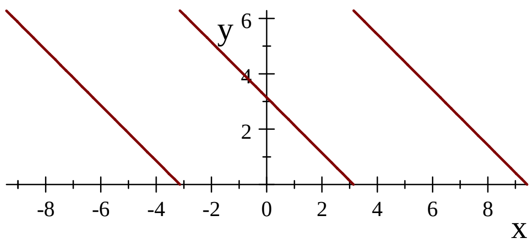
h) $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-\cos x, x\in(-\pi,0),\\ 0, x\in\{-\pi,0,\pi\}\\ \cos x, x\in(0,\pi)\end{cases}$. *Pentru* $x=\frac{\pi}{4}$ *să se deducă suma* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, *iar aplicând egalitatea lui Parseval să se deducă* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n^2-1}\right)^2=\frac{\pi^2}{64}.$

a) -trasam graficul funcţiei



-studiem paritatea Observă că nu este nici pară nici impară.

-prelungim prin periodicitate functia



- calculăm coeficienţii

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\,dx = 2\pi$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}-x\cos(nx)\,dx$

Prima integrală este o funcţie pară, deci

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\pi\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0,$

iar cea de a doua funcţie este o funcţie pară si deci integrala este zero. Rezultă că $a_n = 0$.

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}-x\sin(nx)\,dx =$

$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}-x\sin(nx)\,dx = \frac{2(-1)^n}{n}.$

Atasăm seria Fourier

$S(x) = \pi + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n}\sin(nx).$

Observăm că funcţia este o funcţie continuă pe $(-\pi, \pi)$, punctele $x = (2k-1)\pi$ sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi, de exemplu

$\lim\limits_{x\to\pi-0}(\pi - x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\pi+0}(\pi - x) = 2\pi$ (datorită periodicităţii, limita este aceeaşi cu limita pentru $x \to \pi + 0$)

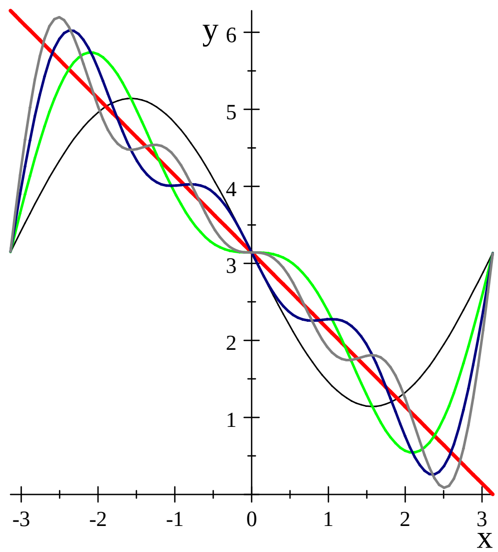
Satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet.

În punctele de continuitate, $x \neq (2k-1)\pi$,

$\pi - x = \pi + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n} \sin(nx).$

În punctele $x = (2k-1)\,\pi$

$S((2k-1)\,\pi) = \dfrac{f(k\pi - 0) + f(k\pi + 0)}{2} = \pi.$

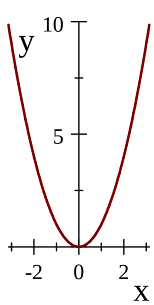


b) analog cu a).

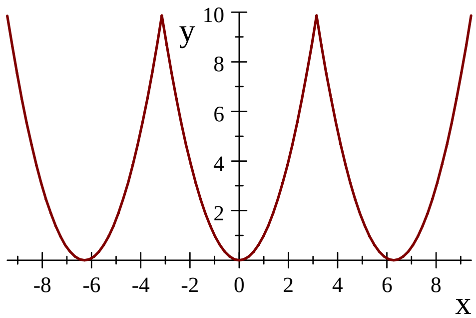
c) $a_0 = \dfrac{\pi}{2}, a_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}, b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}.$

Se poate deduce cu ajutorul acestei dezvoltări suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}.$

d) Graficul funcţiei



Observă că este o funcţie pară. O prelungim prin periodicitate.



Datorită parităţii avem $b_n = 0$.

Atasăm seria Fourier

$S(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$.

Datorită continuităţii avem

$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \forall x \in [-\pi, \pi]$.

Se poate deduce suma seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Prima pentru $x = \pi \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ pentru $x = 0$.

Observăm că din dezvoltarea în serie Fourier a unor funcţii putem afle sumele anumitor serii numerice convergente.

f) $S(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$.

h) $S(x) = \frac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \sin nx$.

Exerciţiul 2. *Să se dezvolte în serii Fourier funcţia*

$f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$

şi să se deducă din această dezvoltare o aproximare a lui π^2.

R: $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \forall x \in (-\pi, \pi]$.

Exercițiul 3. *Să se dezvolte în serie de sinusuri funcția* $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos 2x.$

R: $\cos 2x=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{(2n+1)(2n-3)}\sin(2n-1)x, \forall x\in(0,\pi].$

Exercițiul 4. *Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcția* $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=e^x.$

R: $e^x=\dfrac{1}{\pi}\left(e^{2\pi}-1\right)+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(e^{2\pi}-1\right)(-1)^n-1}{n^2+1}\cos nx, \forall x\in(0,\pi].$

2. TEMA

Exercițiul 5. *Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcția*

$$f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, |x|\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0, \dfrac{\pi}{4}<|x|\le\pi\end{cases}.$$

Să se deducă sumele $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{8}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}=\dfrac{3\pi^2}{32}.$

$$S(x)=\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n}\cos nx.$$

Exercițiul 6. *Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcția*
$f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\cosh x.$

$$S(x)=\frac{\sinh\pi}{\pi}+2\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx.$$

Exercițiul 7. *Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcția*
$f:(0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=x(\pi-x).$

$$S(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x.$$

Exercițiul 8. *Să se dezvolte în serie funcția*
$f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=x(\pi-x).$

$$S(x)=-\tfrac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{2}{n}\cos nx+\pi\sin nx\right).$$