

1 Șiruri

Exercițiul 1.1 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3n^2 - n^4)$. | g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$. |
| b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 4n - n^4}{2 + 3n + 5n^4}$. | h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8n^3 + n^2 + 1} - 2n)$. |
| c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - n^2 + 5n^4}{3 + n^3}$. | i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 - n^2}}$. |
| d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 3n + n^3}{6 + 3n^2 + n^4}$. | j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1}}$. |
| e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 5n + 3}$. | k) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8n^3 + 4n^2 - 5} - \sqrt{4n^2 - n - 1})$. |
| f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 - n^2}$. | l) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + n})$. |

Exercițiul 1.2 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot 2^n, \quad a \in \mathbb{R}$. | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 4^{n+3} + 2^{3n+4}}{2^n \cdot 3 \cdot 2^{3n+1}}$. |
| b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (10 \cdot 7^n - 8^n)$. | g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^{20} + 1}$. |
| c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 7^n - 8^n}{7^n + 2 \cdot 8^n}$. | h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n}}{\sqrt{n} + n^2}$. |
| d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 8^n}{2^{3n} + 1}$. | i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{3n+1} + 2 \cdot 3^{2n+1}}{9^{n+1} - 3^{2n+1}}$. |
| e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3^n + 6^n}{2^n + 2^{2n} + 2^{3n}}$. | |

Exercițiul 1.3 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2)}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + \dots + 3n(3n+1)}{1 \cdot 5 + 5 \cdot 9 + \dots + (4n+1)(4n+5)}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{2^n}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{3^n}}$

Indicație: în aflarea limitelor se vor folosi formulele:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Exercițiul 1.4 Să se afle parametrii reali a și b astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 1} - bn) = 1$.

Exercițiul 1.5 Să se afle $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{xa^n + yb^n}{za^n - tb^n}$ în funcție de parametrii reali a, b, x, y, z, t .

Exercițiul 1.6 Să se studieze monotonia și mărginirea următoarelor șiruri de numere reale:

a) $a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n + 1)}{5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n + 1)}$

b) $a_n = \frac{3n + 1}{5n + 1}$

c) $a_{n+1} = 5 + \frac{1}{3}a_n$

Exercițiul 1.7 Aflați limitele următoarelor șiruri de numere reale:

a) $x_n = \frac{\sin n}{n}$

b) $x_n = \frac{\cos n}{n}$

c) $x_n = (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

d) $x_n = \frac{1}{n} \cdot \cos \frac{n\pi}{2}$

e) $x_n = \frac{1}{n^2} (3 \sin n + 6 \cos n)$

f) $x_n = \sin \frac{1}{n} \sin n$

Exercițiul 1.8 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n^2 + 1}{2n^4 + n^3 - n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^3 + 1} \cos n + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n}{n + 1} \right)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+1}}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n + 1}} - \sqrt{n - \sqrt{n + 1}} \right)$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\left(\frac{3n + 1}{n + 2} \right)^2} - 1$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3n^3 - 2n}{2n^4 + n^3 - n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2}{\alpha^n + \beta^n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n + \beta^n}{\beta \cdot \alpha^{n+1} + \alpha \cdot \beta^{n+1}}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} + 2n - 3\sqrt{n^2 - n} \right)$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1)(n + 2) - \frac{n^4}{4}}{(n^2 + 1)^2 - n^4 - n^3}$