

1 Integrale nedefinite. Integrale Riemann

Exercițiul 1.1 Să se calculeze, folosind metoda de integrare prin părți:

$$1) \int \ln x dx. \quad 2) \int \operatorname{arctg} x dx. \quad 3) \int \ln^2 x dx. \quad 4) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$5) \int x^2 e^{2x} dx. \quad 6) \int e^{2x} \sin 3x dx. \quad 7) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

Exercițiul 1.2 Folosind regulile de integrare și prima metodă de schimbare de variabilă, calculați integralele:

$$1) \int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} dx. \quad 2) \int \frac{\ln x}{x} dx. \quad 3) \int \operatorname{tg} x dx. \quad 4) \int \frac{e^x}{4 * e^{2x}} dx.$$

Exercițiul 1.3 Calculați următoarele primitive de funcții raționale:

$$1) \int \frac{1}{x+3} dx. \quad 2) \int \frac{3}{(x-5)^3} dx. \quad 3) \int \frac{5x+8}{(x^2+3x+4)^3} dx.$$

$$4) \int \frac{5x+1}{x^3+x^2+x+6} dx. \quad 5) \int \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2} dx.$$

$$6) \int \frac{x^5+3x^4-4x-16}{x^3+5x^2+3x-9} dx. \quad 7) \int \frac{x^5}{x^3-2x^2+x+4} dx.$$

Integrarea expresiilor de tipul $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$.

Se face schimbarea de variabilă $t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$.

Substituțiile lui Euler, sau integrarea expresiilor de tipul $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$.

Se face schimbarea de variabilă:

- (1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$, dacă $a > 0$;
- (2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, dacă $c > 0$;
- (3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$, dacă funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are rădăcini reale.

Dacă $P(x)$ este un polinom de gradul n atunci are loc egalitatea:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

unde $Q(x)$ este un polinom de gradul $n - 1$ și are coeficienți nedeterminați, iar λ este constantă reală. Determinarea coeficienților polinomului Q și a constantei λ se face identificând coeficienții puterilor lui x din diferențierea relației anterioare.

Integrala

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

se reduce, prin substituția $x - \alpha = \frac{1}{t}$, la tipul examinat mai înainte.

Exercițiul 1.4 *Calculați primitivele următoarelor funcții:*

1. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}, x > 0.$
2. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)}, x > 0.$
3. $\int \frac{x(1-x^2)}{x^4+1} dx.$
4. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx, x < 0.$
5. $\int (x^2 - 3x + 1)^{10} \cdot (2x - 3) dx.$
6. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx.$
7. $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx.$
8. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx.$
9. $\int \frac{x \cdot e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx, x \in (-1, 1).$
10. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx, x > 0.$
11. $\int e^{ax} \cdot \cos bx dx.$
12. $\int \sqrt{x^2+1} dx.$
13. $\int \sqrt{9-x^2} dx, x \in (-3, 3).$
14. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}} dx, x \in (0, 1).$
15. $\int \sqrt{x^2+x+1} dx.$
16. $\int \sqrt{-x^2+3x-2} dx, x \in (1, 2).$
17. $\int \frac{x^4+1}{x^3+1} dx.$
18. $\int \frac{dx}{x^3+x^5}, x \neq 0.$
19. $\int \frac{x+1}{x^4+x^2+1} dx.$
20. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$
21. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3 \cdot (x+3)} dx.$
22. $\int \frac{dx}{5+4 \sin x}.$
23. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}.$
24. $\int \operatorname{tg}^5 x dx.$

Exercițiul 1.5 *Calculați următoarele integrale definite:*

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$
2. $\int_4^9 \frac{1}{1-\sqrt{x}} dx.$
3. $\int_1^2 x \cdot \ln x dx.$
4. $\int_1^e (\ln x)^x dx.$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2(5 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})} dx.$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}.$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$
8. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$
9. $\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$
10. $\int_1^3 \frac{x^2}{1+x^2} dx.$
11. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$
12. $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 13}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2} dx.$