Seminar 12, Analiză matematică, semestrul I, 2013–2014

1 Integrale duble

Exerciţiul 1.1 *Calculaţi următoarele integrale duble pe domeniiile specificate:*

1. $I = \iint\limits_D y \cdot (\ln x)\, dxdy$,unde: $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq 4\right\}.$

2. $I = \iint\limits_D \cos(x+y) \cdot dxdy$, unde D este mulţimea punctelor din plan, delimitată de axa Oy şi dreptele: $(d_1) : y = \pi$ şi $(d_2) : y = x$.

3. $I = \iint\limits_D (2x+y) \cdot dxdy$, unde D este mulţimea punctelor din planul xOy, delimitată de axa Ox şi dreptele: $(d_1) : y = 2x$ şi $(d_2) : x + y = 2$.

4. $I = \iint\limits_D x dxdy$, D fiind patrulaterul cu vârfurile $A_1(1,0)$; $A_2(2,0)$; $A_3(0,2)$ şi $A_4(0,1)$.

5. $I = \iint\limits_D \arccos\left(\sqrt{x+y}\right) dxdy$, D fiind porţiunea din planul xOy,cuprinsă între dreptele: $(d_1) : x + y = 0$, $(d_2) : x + y = 1$, $(d_3) : y = -3$ şi $(d_4) : y = 1$.

6. $I = \iint\limits_D \frac{x}{y} \cdot dxdy$, D fiind multimea punctelor din planul xOy delimitată de dreptele: $(d_1) : x = 2$, $(d_2) : y = x$ şi de hiperbola echilateră $(H) : xy = 1$.

7. $I = \iint\limits_D x \cdot e^{x+y} \cdot dxdy$, unde $D = [0,1] \times [0,1]$.

8. $I = \iint\limits_D (x+6y)\, dxdy$, unde D este triunghiul mărginit de dreptele: $(d_1) : y = x$, $(d_2) : y = 5x$, $(d_3) : x = 1$.

9. $I = \iint\limits_D \frac{xydxdy}{(x^2+y^2+1)^2}$, unde D este triunghiul (OAB) cu $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.

10. $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{3-y}}$, unde: $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \leq y \leq 1 + x^2,\ x \leq 0\right\}.$

11. $I = \iint\limits_D \frac{\sin^2 x}{x} dxdy$, unde: $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \leq y \leq 1 + x^2,\ x \geq 0\right\}.$

12. $I = \iint\limits_D \left(\sin^2 y + \cos^2 x\right) dxdy$, unde D este dreptunghiul $D = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

13. $I = \iint\limits_D (x-y)\, dxdy$, domeniul D fiind mărginit de dreapta $(d) : y = 2 - 1$ şi parabola $(P) : y = 2 - x^2$.

14. $I = \iint\limits_D (1-y)\,dxdy$, unde domeniul plan (D) este:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq y,\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ x \geq 0\right\}.$$

15. $I = \iint\limits_D xydxdy$, unde domeniul D este

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3x - 4y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 25,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

Exerciţiul 1.2 *Să se determine ariile domeniilor plane mărginite, date mai jos:*

1. Domeniul plan mărginit de dreapta $(d): y = x + 2$ şi parabola $(P): y = x^2$.
2. Domeniul plan mărginit de hiperbola echilaterală $(H): xy = 12$ şi de parabola $(P): x^2 + y - 13 = 0$, situat în primul cadran.
3. Domeniul plan mărginit de parabolele $(P_1): y^2 = 1 + 2x$ şi $(P_2): y^2 = 1 - 2x$.

Exerciţiul 1.3 *Se consideră placa plană omogenă (cu densitatea constantă $\rho(x,y) = 1$) de forma unei lentile, definită de intersecţia parabolelor: $(P_1): y^2 = 2ax$ şi $(P_2): x^2 = 2ay, a > 0$. Să se determine masa şi coordonatele centrului de greutate.*

Exerciţiul 1.4 *Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene (cu densitatea constantă $\rho(x,y) = 1$) mărginită de curbele de ecuaţii: $(P_1): y^2 = 4x + 4$ şi $(P_2): y^2 = -2x + 4$.*

Exerciţiul 1.5 *Să se determine masa şi coordonatele centrului de greutate ale plăcii plane omogene având densitatea materială de masă $\rho(x,y) = 2$, care ocupă domeniul plan*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \geq 2x,\ y \geq 0\right\}.$$

Exerciţiul 1.6 *Să se determine momentele de inerţie în raport cu axele de coordonatele ale plăcilor plane omogene (cu densitatea constantă $\rho(x,y) = 1$) care ocupă în planul xOy domeniile plane mărginite de curbele indicate.*

1. $C: x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y$.
2. $C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

Exerciţiul 1.7 *Să se determine momentul de inerţie faţă de origine al plăcii plane omogene (cu densitatea constantă $\rho(x,y) = 1$) care ocupă în planul xOy domeniul plan mărginit de curba*

$$C: \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 1, x = 0, y = 0.$$