Seminar 13, Analiză matematică, semestrul I, 2013–2014

1 Schimbarea de variabilă în integrala dublă

Exercițiul 1.1 *Calculați următoarele integrale duble pe domeniiile specificate:*

1. $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} \cdot dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \le x^2+y^2 \le 4x\right\}$.

2. $I = \iint\limits_D x dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le xy \le 2,\ x \le y \le 2x,\ x > 0\right\}$.

3. $I = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$, unde
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \le 0,\ y \le 0\right\}.$$

4. $I = \iint\limits_D \arcsin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot dxdy$, unde
$$D \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ y \ge \sqrt{3}x,\ y \ge -\sqrt{3}x,\ y \ge 0\right\}.$$

5. $I = \iint\limits_D \dfrac{y-x}{x+3y} dxdy$, domeniul D din planul xOy fiind delimitat de dreptele: $(d_1) : y = x+1$, $(d_2) : y = x-3$, $(d_3) : y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{7}{3}$ şi $(d_4) : y = -\dfrac{1}{3}x + 5$.

6. $I = \iint\limits_D \dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le e^2\right\}$.

7. $I = \iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a^2,\ a > 0,\ y \ge 0\right\}$.

8. $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax \le x^2+y^2 \le 2ax,\ a > 0,\ y \ge 0\right\}$.

9. $I = \iint\limits_D \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \le (x-1)^2+(y-1)^2 \le 4\pi^2\}$.

10. $I = \iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2+4} dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1,\ x \ge 0\}$.

11. $I = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{1+xy}$,unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le xy \le 2,\ x \le y \le 3x\right\}$.

    Indicaţie: Schimbăm variabilele prin $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

12. $I = \iint\limits_D e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dxdy$, unde D este exteriorul elipsei de ecuaţie: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Exerciţiul 1.2 *Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate şi în raport cu originea a plăcii plane materiale ce ocupă domeniul*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, a, b > 0 \right\}$$

şi care are densitatea materială de masă dată de

$$\rho^* (x, y) = \frac{1}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2}}, (x, y) \in D.$$

2 Formula Riemann-Green

Exerciţiul 2.1 *Utilizând formula integrală Riemann-Green, calculaţi următoarele integrale curbilinii:*

1. $I = \oint\limits_C -x^2ydx + xy^2dy$, unde $C : x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$.

2. $I = \oint\limits_C (x - 2y)\, dx + dy$, C fiind frontiera domeniului $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0\right\}$, parcursă în sens trigonometric.

3. $I = \oint\limits_C (xy - y)\, dx + (xy + x)\, dy$, unde C este elipsa de ecuaţie: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, unde $a, b > 0$.

4. $I = \oint\limits_C e^{x^2+y^2} \cdot (-ydx + xdy)$,unde C este cercul cu centrul în origine şi de rază 1, parcurs în sens trigonometric.

5. $I = \oint\limits_C x \cdot (\operatorname{arctg} 2y)\, dx + \ln(1 + x) \cdot dy$, unde C este reuniunea dintre segmentul de dreaptă şi arcul din parabola $(P) : y^2 = 3x$, având extremităţile în punctele $A\left(\dfrac{4}{3}, 2\right)$ şi $B\left(\dfrac{16}{6}, -4\right)$.

6. $I = \oint\limits_C e^x \cdot [(1 - \cos y) \cdot dx + (\sin y - y)\, dy]$, unde C este frontiera domeniului

$$D \equiv \left\{\left(x, y \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x\right)\right\}.$$

7. $I = \oint\limits_C e^{x^2+y^2} \cdot (\operatorname{ch} 2xydx + \operatorname{sh} 2xydy)$, unde

$$C : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases},\ t \in [-\pi, \pi].$$

8. $I = \oint\limits_C (xy + x + y)\, dx + (xy + x - y)\, dy$, unde $C : x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

9. $I = \oint\limits_C (x + y)^2 \cdot dx - \left(x^2 + y^2\right) dy$, unde C este conturul triunghiului ABC cu $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 5)$, parcurs în sens trigonometric.

10. $I = \oint\limits_C x^2y dx - \left(x^2 + y^2\right) dy$, unde $C : x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.

11. $I = \oint\limits_C (xy + x + y)\, dx + (xy + x - y)\, dy$, dacă $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

12. $I = \oint\limits_C - x^2y \cdot dx + xy^2 \cdot dy$, unde C este circumferinţa cercului cu centrul în origine şi de la bază $r > 0$.

13. $I = \oint\limits_C \left[x + \ln\left(x^2 + y^2\right)\right] dx + y \cdot \ln(x^2 + y^2) dy$, unde C este frontiera domeniului

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2y,\ y \geq 1\right\},$$

parcursă în sens trigonometric.

14. $I = \oint\limits_C \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) \cdot dx - x^2 \cdot dy$, unde C este frontiera domeniului

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 10,\ y + 2x \geq 5\right\}.$$

15. $I = \oint\limits_C - y^3 \cdot dx + x^3 \cdot dy$, unde $C : x^2 + y^2 = 1$.

16. $I = \oint\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx + y \cdot \left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right] dy$, unde

$$C : \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 1 + \cos t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi].$$

17. Să se calculeze $I = \oint\limits_C (x + y) \cdot dx - (x - y)\, dy$, unde C este elipsa de ecuaţie : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, parcursă în sens trigonometric .