Seminar 14, Analiză matematică, semestrul I, 2013–2014

1 Integrale triple

Exerciţiul 1.1 *Calculaţi următoarele integrale duble pe domeniiile specificate:*

1. $I = \iiint_V (x+y+z)\cdot dxdydz$, unde $V = [0,a]\times[0,a]\times[0,a]$.

2. $I = \iiint_V xydxdydz$, unde $V = [1,2]\times[-2,1]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

3. $I = \iiint_V \sin(x+y+z)dxdydz$, unde $V = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

4. $I = \iiint_V \cos(x+y+z)dxdydz$, unde V este mulţimea punctelor din spaţiu limitată de planele: $x=0$, $y=0$, $z=0$ şi $x+y+z=\frac{\pi}{2}$.

5. $I = \iiint_V xdxdydz$, unde

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq r^2\right\}.$$

6. $I = \iiint_V x^3y^2z\ dxdydz$, unde

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in[0,1], y\in[0,1], 0\leq z\leq xy\right\}.$$

7. $I = \iiint_V (2x+3y-z)\ dxdydz$, unde V este corpul mărginit de planele: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=a>0$ şi $x+y=b>0$.

8. $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, unde V este teraedrul limitat de planele de coordonate şi de planul de ecuaţie: $x+y+z=1$.

9. $I = \iiint_V (x^2+y^2\cdot z)\ dxdydz$, unde V este corpul mărginit de paraboloidul $z=x^2+y^2$ şi de sfera $x^2+y^2+z^2=6$, $z\geq 0$.

10. $I = \iiint_V z\cdot\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, unde V este corpul mărginit de suprafeţele de ecuaţii: $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=a>0$.

11. $I = \iiint_V xyz$ dxdydz, unde $V = [0,1]\times[2,4]\times[5,8]$.

12. $I = \iiint_V z\ dxdydz$, unde V este dat de: $\begin{cases} 0\leq x\leq\frac{1}{2} \\ x\leq y\leq 2x \\ 0\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2}. \end{cases}$

13. Aflaţi volumul tetraedrului mărginit de planele de coordonate şi planul de ecuaţie $3x+3y+z=3$.

14. Calculaţi $\iiint_V \frac{x}{x^2+y^2}dxdydz$, unde V este regiunea din primul octant mărginită de sfera de rază 3.

15. Găsiţi masa cilindrului solid $V = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leq 9,\ 0\leq z\leq 1\right\}$ având densitatea $\rho(x,y,z)=3-2z$.

16. Folosing coordonatele cilindrice, să se calculeze $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, unde V este regiunea din cilindrul $x^2+y^2 \leq 4$ situată între planul xOy şi planul $y=z$.

17. Calculaţi integrala $I = \iiint_B x^2 dxdydz$, unde B este bila unitate:

$$B = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}.$$

18. Să se determine volumul regiunii mărginite de suprafeţele $z = x^2+y^2$ şi $z = 2-x^2-y^2$.

19. Să se determine masa porţiunii din conul solid $x^2+y^2 \leq z^2$ mărginită de sfera unitate, situată în semispaţiul $z \geq 0$ ştiind că are densitatea $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

20. Aflaţi volumul tetraedrului mărginit de planele de coordonate şi de planul $x+2y+z=6$. Aflaţi apoi masa M a tetraedrului ştiind că are densitatea $\rho(x,y,z) = 6-x$.

21. Să se determine volumul porţinuii din bila cu centrul în origine şi rază 2 situată deasupra planului $z=1$.

22. Să se calculeze $I = \iiint_V zdxdydz$ unde V este regiunea situată în interiorul sferei $x^2+y^2+z^2=2$, în interiorul cilindrului $x^2+y^2=1$ şi deasupra planului xOy.

23. Calculaţi integrala $I = \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_1^{e^y} \frac{e^y}{xz^2}dx\right)dy\right)dz$.

24. Fie V.regiunea din $\mathbb{R}^3$ mărginită de paraboloidul $x^2+y^2=z$, planul $z=0$ şi cilindrul $x^2+y^2=1$. Calculaţi integrala $I = \iiint_V x^2 dxdydz$.

25. Aflaţi volumul regiunii $V \subset \mathbb{R}^3$din cilindrul $x^2+y^2=9$ mărginită de paraboloidul $z = x^2+y^2$ şi situată deasupra planului xOy.

26. Calculaţi integrala triplă $I = \iiint_V ydxdydz$, unde V este porţiunea din cilindrul $x^2+y^2=9$ mărginită superior de planul $z = x-2$ şi inferior de planul $z = 2-x$.

27. Găsiţi volumul corpului mărginit de paraboloidul $z = 4-x^2-y^2$ şi panul $z=0$.

28. Găsiţi volumul porţiunii din cilindrul $x^2+y^2=4$ situată între planele $z=0$ şi $y+z=4$.

29. Folosing integrala triplă, calculaţi volumul porţiunii din cilindrul $x^2+y^2=1$ situată deasupra planului xOy şi în interiorul sferei cu centrul în origine şi rază 2.

30. Calculaţi intergala $\iiint_V dxdydz$ unde V este tetraedrul

$$V = \left\{(x,y,z) \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7} \leq 1\right\}.$$