

## 1 Limite și continuitate

**Exercițiul 1.1** Să se calculeze limitele:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow 4} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{xy}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$ .

**Exercițiul 1.2** Să se arate că următoarele funcții nu au limită în punctele specificate:

1.  $f(x, y) = \frac{x + y}{x + 3y}$   $(0, 0)$ .
2.  $f(x, y) = \frac{x + y^2}{2x + y^2}$   $(0, 0)$ .
3.  $f(x, y) = \frac{e^y - 1}{x - 1}$   $(1, 0)$ .
4.  $f(x, y) = \frac{xy^3}{3x^4 + y^4}$   $(0, 0)$ .
5.  $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{3x^2y^2}$   $(0, 0)$ .
5.  $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{xy(x^2 + y^2)}$   $(0, 0)$ .
6.  $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$   $(0, 0)$ .

**Exercițiul 1.3** Să se studieze continuitatea funcțiilor pe domeniile lor de definiție:

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & x = y = 0 \end{cases}$ .
2.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .
3.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ .

$$4. f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{4x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

$$5. f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$