Seminar 6, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Derivabilitate şi diferenţiabilitate pentru funcţii de o variabilă reală

Exerciţiul 1.1 *Să se calculeze derivatele funcţiilor:*

1. $f(x) = x^6 - 5x^4 + 2x^2 + 3x - 9$. 2. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 5x$. 3. $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} - \sqrt[5]{2}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$. 5. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. 6. $f(x) = (x^2 - 3x + 7)^{10}$.
7. $f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$. 8. $f(x) = \sqrt{x^6 - 4x^3 + 6}$.
9. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. 10. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$. 11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$.
12. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 8)$ 13. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$. 14. $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$.
15. $f(x) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. 16. $f(x) = (x-1)e^{2x}$. 17. $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
17. $f(x) = \dfrac{x}{4^x}$. 19. $f(x) = 10^{2x-3}$. 20. $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$.
21. $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$. 22. $f(x) = \sin 3x + \cos 5x$. 23. $f(x) = (3 - 2\cos x)^5$.
24. $f(x) = \sqrt{3 \sin x - 2 \cos x}$. 25. $f(x) = \ln \cos \dfrac{x-1}{x}$. 26. $f(x) = \ln \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{2 \sin^2 x}$.
27. $f(x) = \sin^2(\cos 3x)$. 28. $f(x) = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$. 29. $f(x) = \ln \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right)$.
30. $f(x) = \arcsin 2x$. 31. $f(x) = \arccos e^x$. 32. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.
33. $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{1+x}{1-x}$. 34. $f(x) = \arcsin \ln x$. 35. $f(x) = \arcsin \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
36. $f(x) = \operatorname{arctg} \left(x - \sqrt{1 + x^2} \right)$. 37. $f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x)$. 38. $f(x) = x^{\sin x}$.
39. $f(x) = x^{x^2}$. 40. $f(x) = \sin x^{\cos x}$. 41. $f(x) = x^{x^x}$.

Exerciţiul 1.2 *Să se determine numerele reale a, b astfel încât funcţiile următoare să fie derivabile pe domeniul de definiţie:*

1. $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \le 0 \\ \ln(1 + 4x), & x > 0 \end{cases}$.

2. $f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1 \\ \ln(x^2 + ax + b), & x \ge 1 \end{cases}$.

3. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \\ ae^x + be^{-x}, & x > 0 \end{cases}$.

Exerciţiul 1.3 *Calculaţi derivata de ordinul n a funcţiilor:*

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$ 2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$.
3. $f(x) = \sin ax \sin bx$. 4. $f(x) = \cos ax \cos bx$.

Exerciţiul 1.4 *Determinaţi parametrii m, n, p astfel încât funcţiile să satisfacă condiţiile teoremei lui Rolle, pe domeniul de definiţie, şi să se aplice această teoremă:*

1. $f(x) = \begin{cases} mx^2 - 5x + n, & x \in [-1, 0] \\ x^2 + px + 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$.
2. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, x \in [-1, 0] \\ mx^2 + nx + p, & x \in (0, 1] \end{cases}$.

Exerciţiul 1.5 *Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:*

1. $x^3 - 12x + m = 0$.
2. $3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + m = 0$.

Exerciţiul 1.6 *Determinaţi parametrii m, n astfel încât funcţiile să satisfacă condiţiile teoremei lui Lagrange, pe domeniul de definiţie, şi să se aplice această teoremă:*

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{mx}{x^2+1} + n, & x \in [1, 2) \\ \dfrac{(x+1)^2}{x-1}, & x \in [2, 3] \end{cases}$.
2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x+4}, x \in [0, 1) \\ mx + n, & x \in [1, 2] \end{cases}$.

Exerciţiul 1.7 *Să se arate că f este constantă pe anumite intervale. Să se determine intervalele şi valoarea efectivă a constantei:*

1. $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \arccos x$. 2. $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.
3. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$.

Exerciţiul 1.8 *Să se demonstreze următoarele inegalităţi:*

1. $\dfrac{a-b}{a} \leq \ln\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a-b}{b}, \qquad 0 < a < b.$
2. $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}, \qquad 0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}.$
3. $e^x > 1 + x, \qquad x \neq 0.$
4. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x), x > 0.$
5. $x^{\frac{1}{x}} < 1 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}, \qquad x \in (1, e).$
6. $\cos x + x \sin x > 1, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$
7. $e^x > x^e, x > 0.$

2 Derivate parţiale

Exerciţiul 2.1 *Fie funcţia* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Arătaţi că:

(i) f are derivate direcţionale în origine în orice direcţie;

(ii) f nu este continuă în origine, deşi este continuă când este restricţionată la orice dreaptă care trece prin origine.

Exerciţiul 2.2 *Arătaţi că funcţia* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în origine, dar admite derivată în orice direcţie $v \in \mathbb{R}^2, \|v\| = 1$.

Exerciţiul 2.3 *Pentru fiecare dintre funcţiile următoare, să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi:*

1. $f(x,y) = x^y$.
2. $f(x,y,z) = (3x-4y+7z)\cdot e^{x^2+y^2-z^2}$.
3. $f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.
4. $f(x,y) = x^3y - xy^3 + 5xy$.
5. $f(x,y) = x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$.
6. $f(x,y) = e^{3xy^2}$.
7. $f(x,y,z) = e^{(x^2+2y^2-z^2)}$.
8. $f(x,y,z) = (11x+6y+4z)e^{-(2x^2+y^2+z^2)}$.
9. $f(x,y,z) = \cos(x^2+2y^2+3z^2)$.
10. $f(x,y,z) = \sin(x+2y^2-3z^3)$.
11. $f(x,y,z) = \ln(xy+xz+yz+1)$.
12. $f(x,y,z) = \ln(x-3y^2+2z^3)$.
13. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$.
14. $f(x,y,z) = x^{y+z}$.
15. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$.

Exerciţiul 2.4 *Fie funcţia* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Arătaţi că derivatele parţiale există pe $\mathbb{R}^2$, *dar*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Exercițiul 2.5 *Fie mulțimea* $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq -2\right\}$ *și funcțiile*

$$f : A \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = \left(\sqrt{x}, \sqrt{x^2+3y^2}, \sqrt{y+2}\right),$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g(u,v,w) = \left(u^2+v^2+2w^2, u^2-v^2\right),$$

$$h = g \circ f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Notăm cu $a := (1,-1) \in A$ *și cu* $b := f(a) = (1,2,1)$.

Calculați $J_f(a)$, $J_g(b)$ *și* $J_h(a)$. *Ce legătură există între acestea?*

Exercițiul 2.6 *Să se calculeze laplacianul următoarelor funcții:*

a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \ln(x^2+y^2).$

b) $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Exercițiul 2.7 *Să se afle* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *știind că funcția* $u(x,y) = f(x^2-y^2)$ *este armonică pe* $\mathbb{R}^2$.