Seminar 7, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Diferenţiale pentru funcţii de mai multe variabile

Exerciţiul 1.1 *Pentru fiecare dintre funcţiile următoare, să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi, diferenţialele de ordinul întâi şi doi:*

1. $f(x,y) = x^y$.
2. $f(x,y,z) = (3x - 4y + 7z) \cdot e^{x^2+y^2-z^2}$.
3. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.
4. $f(x,y) = x^3y - xy^3 + 5xy$.
5. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$.
6. $f(x,y) = e^{3xy^2}$.
7. $f(x,y,z) = e^{(x^2+2y^2-z^2)}$.
8. $f(x,y,z) = (11x + 6y + 4z)e^{-(2x^2+y^2+z^2)}$.
9. $f(x,y,z) = \cos(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$.
10. $f(x,y,z) = \sin(x + 2y^2 - 3z^3)$.
11. $f(x,y,z) = \ln(xy + xz + yz + 1)$.
12. $f(x,y,z) = \ln(x - 3y^2 + 2z^3)$.
13. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x-y}$.
14. $f(x,y,z) = x^{y+z}$.
15. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$.

Exerciţiul 1.2 *Fie funcţiile:*

a) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$
b) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 24$
c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 2$
d) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$
e) $f(x,y) = x^2 + y^2 - e^{xy}$
f) $f(x,y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$
g) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 8z - 5$
h) $f(x,y,z) = y \cdot ln(x^2 + z^2 + 1)$
i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$
j) $f(x,y,z) = xye^z$
k) $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 6x + 6y$
l) $f(x,y) = 2x^2 + y - ln\frac{x}{y^2}$
m) $f(x,y,z) = x^2y + yz + 32x - z^2$
n) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
p) $f(x,y,z) = x + y^2 + 3z^3 - ln(x + y + z)$
q) $f(x,,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x} + yz$
Pentru fiecare dintre acestea se cere:

i. Să se determine diferenţiala în punct curent;

ii. Să se rezolve ecuaţia $df(x,y)=0$ (sau $df(x,y,z)=0$, după caz);

iii. Să se calculeze toate derivatele parţiale de ordinul 2 şi să se construiască matricea hessiană.

iv. Să se scrie diferenţiala de ordinul 2 în punct curent.

Exerciţiul 1.3 *Să se arate că funcţia $z = y\sin(x^2-y^2)$ verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$$

Exerciţiul 1.4 *Să se arate că funcţia $f(x,y)=(x^2+y^2)arctg\frac{y}{x}$ verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2f(x,y)$$

Exerciţiul 1.5 *Să se arate că funcţia*

$$f(x,y)=x^n e^{\frac{y}{x}}+y^n arctg\frac{x}{y}$$

verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-nf=0$$

Exerciţiul 1.6 *Să se arate că funcţia $z=y\cdot ln(x^2-y^2)$ verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$$

Exerciţiul 1.7 *Să se arate că funcţia $z=xy\sin(x^2-y^2)$ verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2(z+xy)$$

Exerciţiul 1.8 *Să se arate că funcţia reală de două variabile reale*

$$u(x,t)=\sin x\cdot e^{-k^2t},$$

unde k este o constantă reală numită constantă de difuzie, satisface ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$k^2\frac{\partial u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

numită ecuaţia propagării căldurii.

Exerciţiul 1.9 *Să se arate că funcţia $z=xy+x\cdot arctg\frac{y}{x}$ verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$$

Exerciţiul 1.10 *Să se arate că funcţia* $u(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z}$ *verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

Exerciţiul 1.11 *Să se arate că funcţia* $f(x,y,z) = ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ *verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}.$$

Exerciţiul 1.12 *Să se arate că funcţia* $f(x,y,z) = \|(x,y,z)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\Delta f = \frac{2}{f},$$

unde Δ *este operatorul Laplace:*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Generalizaţi rezultatul pentru norma euclidiană în spaţiul $\mathbb{R}^k$.