

Automatică și Calculatoare, Statistică și Prelucrarea Datelor
SEMINAR 5, semestrul II, 2016–2017

1 V.a. continue

1.1 Funcția caracteristică

Problema 1.1 Să se determine funcția caracteristică pentru v. a. $X \in \text{Exp}[\lambda]$.

Problema 1.2 Să se determine funcția caracteristică pentru v. a. $X \in \text{Gama}[p, \lambda]$.

Problema 1.3 Fie $X \in \text{Pois}[\lambda]$ și $Y \in \text{Pois}[\mu]$, v.a. independente. Demonstrați că $X + Y \in \text{Pois}[\lambda + \mu]$.

Problema 1.4 Fie $n, m \in \mathbb{N}$ și $p \in (0, 1)$. Fie X și Y două variabile aleatoare discrete independente cu repartițiile binomiale $\text{Bin}(n, p)$ și respectiv $\text{Bin}(m, p)$. Să se găsească repartiția variabilei aleatoare discrete $X + Y$.

Problema 1.5 Determinați funcția caracteristică pentru v.a. $X \in N[m, \sigma]$.

Problema 1.6 Fie $X \in N[m_1, \sigma_1]$ și $Y \in N[m_2, \sigma_2]$ două v.a. independente. Atunci $X + Y \in N[m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}]$.

Problema 1.7 Dacă $X_1, \dots, X_n \in N[m, \sigma]$ sunt v.a. independente, atunci $X_1 + \dots + X_n \in N\left[m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Problema 1.8 Să se determine funcția caracteristică pentru v. a. $X \in \chi^2[n]$.

Problema 1.9 Fie n v.a. independente $X_1, \dots, X_n \in N[0, 1]$ și $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Atunci $Y \in \chi^2[n]$.

Problema 1.10 Fie X, Y v.a. independente de tip χ^2 , cu n , respectiv m grade de libertate, astfel încât $m + n = 4$. Să se găsească legea de repartiție a variabilei $X + Y$.

1.2 Funcții de v.a.

Problema 1.11 Fie $X \in \text{Unif}[0, 1]$. Să se determine densitatea de probabilitate, media și dispersia variabilei aleatoare $Y = \ln \frac{1}{X^6}$.

Problema 1.12 Fie $X_1, X_2 \in N(0, 1)$, v.a. independente. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

Problema 1.13 Fie variabila aleatoare X care are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = e^{-X}$.

Problema 1.14 Fie variabila aleatoare X care are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = e^X$, $M[Y]$ și $D[Y]$.

Problema 1.15 Fie $X \in N(0, \sigma)$. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = X^2$.

Problema 1.16 Fie X, Y două variabile aleatoare independente, $X \in \text{Exp}[2]$, $Y \in \text{Unif}[2, 5]$. Să se calculeze $M[X^2 + Y^2]$ și $D[X + Y]$.

Problema 1.17 Fie X o variabilă aleatoare independentă, $X \in \text{Unif}[0, 5]$. Care din evenimentele $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < 2.5\}$ și $B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 2.5\}$ este cel mai probabil?

Problema 1.18 Fie X, Y două variabile aleatoare independente, $X \in N(1, 2)$, $Y \in \text{Unif}[0, 1]$, $Z = -\frac{\ln X}{3}$. Să se calculeze $M[X + Y^2]$ și $D[X + Z]$.

2 Elemente de statistică

2.1 Metoda verosimilității maxime

Problema 2.1 Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & 0 < x \leq 1, \theta > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Se face o selecție x_1, x_2, \dots, x_n . Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă pentru parametrul θ al repartiției.

Problema 2.2 Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \lambda)x^\lambda, & 0 \leq x \leq 1, \lambda > 0 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Se face o selecție x_1, x_2, \dots, x_n . Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă pentru parametrul λ al repartiției.

Problema 2.3 Fie x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) o selecție de valori ale variabilelor X_1, X_2, \dots, X_n care au o distribuție normală, i. i. r. cu v. a. $X \in N(m, \sigma^2)$. Determinați, prin metoda verosimilității maxime:

- (i) Media m , dacă dispersia σ^2 este cunoscută;
- (ii) Dispersia σ^2 , dacă media m este necunoscută;
- (iii) Media m și dispersia σ^2 (ambele necunoscute).

Problema 2.4 Presupunem că timpul de viață a unui aparat este distribuit $\text{Exp}[\theta]$ unde $\theta \in (0, \infty)$ este necunoscut. Determinați $\hat{\theta}$, estimatorul de verosimilitate maximă.