# Note de Seminar

Silvia - Otilia Corduneanu

## 1 Numere complexe. Noţiuni teoretice

### 1.1 Introducere

Formal, mulţimea numerelor complexe reprezintă mulţimea tuturor perechilor ordonate de numere reale şi este notată cu $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Considerăm un plan notat $\omega$. Funcţia $f : \mathbb{C} \to \omega$ definită prin $f(x, y) = M$ în care $M \in \omega$ este punctul de coordonate carteziene $(x, y)$ (i.e. $M(x, y) \in \omega$) este o bijecţie, perechea $(x, y)$ se notează cu $z$ iar numărul complex $z = (x, y)$ se numeşte afixul punctului $M$.

Considerăm $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Numărul $r \in [0, +\infty)$ definit prin

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

se numeşte modulul numărului complex $z$ şi se notează cu $|z|$. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Sistemul

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\ \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}, \end{cases} \tag{1.1}$$

are soluţie unică $\varphi \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$. Notăm soluţia sistemului (1.1) din intervalul $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ cu $\arg_\alpha z$. Sistemul (1.1) are în $\mathbb{R}$ o infinitate de soluţii. Mulţimea acestor soluţii se notează $\mathrm{Arg}z$ şi se poate scrie:

$$\mathrm{Arg}z = \{\arg_0 z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mulţimea $\mathbb{C}$ este înzestrată cu operaţiile de adunare si înmulţire definite mai jos:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

unde $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C},\ z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$. Dotată cu aceste operaţii, mulţimea numerelor complexe formează o structură de corp, numit corpul numerelor complexe. Elementul neutru al operaţiei de adunare este $(0, 0)$ iar elementul neutru al operaţiei de înmulţire este $(1, 0)$. Deoarece pentru orice $z_1 = (x_1, 0) \in \mathbb{C},\ z_2 = (x_2, 0) \in \mathbb{C}$ sunt adevărate egalităţile

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$$

mulţimea numerelor reale, $\mathbb{R}$, poate fi privită ca submulţime a lui $\mathbb{C}$ identificând un număr $x$ cu perechea $(x, 0)$. Observăm că numărul complex $(0, 1)$ are proprietatea

$$(0, 1)^2 = (-1, 0)$$

deci $(0, 1)^2$ poate fi identificat cu numărul real $-1$. Numărul $(0, 1)$ se notează cu $j$, se numeşte unitate imaginară şi avem $j^2 = -1$.

## 1.2 Forma algebrică a numerelor complexe

Pentru orice $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ avem:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + jy. \tag{1.2}$$

Spunem că forma algebrică a numărului complex $z$ este

$$z = x + jy,$$

$x$ se numeşte partea reală a numărului $z$ şi notăm $x = \operatorname{Re} z$ iar $y$ se numeşte partea imaginară a numărului $z$ şi notăm $y = \operatorname{Im} z$.
Dacă $z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{C},\ z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{C}$ atunci cele două operaţii pot fi scrise

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + j(x_1y_2 + y_1x_2),$$

iar

$$(z_1 = z_2) \Longleftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)\,.$$

## 1.3 Forma trigonometrică a numerelor complexe

Fie $z = (x, y) \in \mathbb{C}^*$. Din relaţiile (1.1) obţinem

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.3}$$

Rezultă că

$$z = x + jy = r\cos\varphi + jr\sin\varphi = r(\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Spunem că forma trigonometrică a numărului complex $z$ este

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Dacă $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) \in \mathbb{C}$ atunci

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right),$$

iar dacă în plus $z_2 \neq 0$ atunci

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right). \tag{1.4}$$

Dacă $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ atunci

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Pentru $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ şi $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ avem

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

În cazul în care $z = \cos\varphi + j\sin\varphi \in \mathbb{C}$ (i. e. $r = 1$), din relaţia (1.5) rezultă formula lui Moivre:

$$z^n = \cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Din relaţia (1.4) rezultă că pentru $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \in \mathbb{C}^*$ (i. e. $r > 0$) avem:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - j\sin\varphi).$$

## 1.4 Conjugatul unui număr complex

Considerăm $z = x + jy \in \mathbb{C}$. Conjugatul numărului $z$ este numărul notat $\overline{z}$ definit prin

$$\overline{z} = x - jy.$$

Sunt adevărate egalităţile

(1) $(\forall z \in \mathbb{C})(\overline{\overline{z}} = z)$

(2) $(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2)(\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2)$

(3) $(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2)(\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2)$

(3) $(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\right)$

## 1.5 Exerciţii propuse şi rezolvate

**Exerciţiul 1.1** Să se arate că sunt adevărate propoziţiile

(1) $(\forall z \in \mathbb{C})\left(\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}\right)$;

(2) $(\forall z \in \mathbb{C})\left(\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2j}\right)$.

**Exerciţiul 1.2** Să se demonstreze propoziţiile

(1) $(\forall z \in \mathbb{C})(|z| \geq 0 \ \wedge \ |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0)$

(2) $(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2)(|z_1 z_2| = |z_1||z_2|)$

(3) $(\forall z \in \mathbb{C})(\forall n \in \mathbb{N})(|z|^n = |z^n|)$

(4) $(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)\left(\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\right)$

**Exerciţiul 1.3** Să se demonstreze propoziţia

$$(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2)(|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|).$$

*Soluţie.*

Fie $z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{C}, \quad z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{C}.$

$$
\begin{aligned}
&|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| \iff\\
&\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \iff\\
&x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2 \le\\
&x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \iff\\
&x_1x_2+y_1y_2 \le \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}.
\end{aligned}
$$

Deoarece

$$x_1x_2+y_1y_2 \le |x_1x_2+y_1y_2|,$$

este suficient să demonstrăm că

$$|x_1x_2+y_1y_2| \le \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}.$$

Avem

$$
\begin{aligned}
&|x_1x_2+y_1y_2| \le \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \iff\\
&x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2 \le x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2 \iff\\
&0 \le (x_1y_2-x_2y_1)^2.
\end{aligned}
$$

**Exerciţiul 1.4** Să se calculeze modulul numărului complex

$$z = 1+j+j^2+j^3+...+j^{2011}.$$

*Soluţie.* Observăm că

$$
j^n = \begin{cases}
1, & n=4k,\ k\in\mathbb{Z},\\
j, & n=4k+1,\ k\in\mathbb{Z},\\
-1, & n=4k+2,\ k\in\mathbb{Z},\\
-j, & n=4k+3,\ k\in\mathbb{Z},
\end{cases}
$$

şi mai departe că

$$1+j+j^2+j^3+...+j^{2011}=0.$$

În concluzie $|z|=0$.

**Exercițiul 1.5** Să se arate că dacă $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ $(\varphi \in [0, 2\pi))$, atunci

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & (x, y) \in (0, +\infty) \times [0, \infty), \\[2ex] \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & (x, y) \in (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \\[2ex] \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2\pi, & (x, y) \in (0, +\infty) \times (-\infty, 0), \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & (x, y) \in \{0\} \times (0, \infty), \\[2ex] \dfrac{3\pi}{2}, & (x, y) \in \{0\} \times (-\infty, 0). \end{cases}$$

**Exercițiul 1.6** Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe

(1) $z = \sqrt{2}$; $\quad z = \pi j$; $\quad z = -e$; $\quad z = -\dfrac{4}{3}j$;

(2) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$ $\quad z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j$; $\quad z = -1 - j$; $\quad z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$;

(3) $z = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}j)$ $\quad z = -1 + \sqrt{3}j$; $\quad z = -1 - \sqrt{3}j$; $\quad z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{3}j)$;

(4) $z = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + j)$ $\quad z = -\sqrt{3} + j$; $\quad z = -\sqrt{3} - j$; $\quad z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - j)$;

(5) $z = \sqrt{2} - j\sqrt{5}$;

(6) $z = \dfrac{2 + 3j}{(2 - j)^2}$.

*Soluție.*

(1.1) $\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(\cos 0 + j\sin 0)$;

(1.2) $\pi j = \pi\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + j\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(1.3) $-e = e\,(\cos\pi + j\sin\pi)$;

(1.4) $-\dfrac{4}{3}j = \dfrac{4}{3}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + j\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

(2.1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + j) = \cos\dfrac{\pi}{4} + j\sin\dfrac{\pi}{4}$;

(2.2) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}j = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + j\sin\dfrac{3\pi}{4}\right);$

(2.3) $-1-j = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + j\sin\dfrac{5\pi}{4}\right);$

(2.4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-j) = \cos\dfrac{7\pi}{4} + j\sin\dfrac{7\pi}{4};$

(3.1) $\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}j) = \cos\dfrac{\pi}{3} + j\sin\dfrac{\pi}{3};$

(3.2) $-1+\sqrt{3}j = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + j\sin\dfrac{2\pi}{3}\right);$

(3.3) $-1-\sqrt{3}j = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + j\sin\dfrac{4\pi}{3}\right);$

(3.4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{3}j) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + j\sin\dfrac{5\pi}{3}\right);$

(4.1) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+j) = \cos\dfrac{\pi}{6} + j\sin\dfrac{\pi}{6};$

(4.2) $-\sqrt{3}+j = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + j\sin\dfrac{5\pi}{6}\right);$

(4.3) $-\sqrt{3}-j = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + j\sin\dfrac{7\pi}{6}\right);$

(4.4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-j) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + j\sin\dfrac{11\pi}{6}\right).$

(5) $\sqrt{2}-j\sqrt{5} = \sqrt{7}\left[\cos\left(2\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) + j\sin\left(2\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\right].$

(6) Deoarece

$$\frac{2+3j}{(2-j)^2} = \frac{(2+3j)(2+j)^2}{(2^2+1^2)^2} = \frac{-6+17j}{25}$$

rezultă că

$$\frac{2+3j}{(2-j)^2} = \sqrt{\frac{36}{625}+\frac{289}{625}}\left[\cos\left(\pi - \mathrm{arctg}\frac{17}{6}\right) + j\sin\left(\pi - \mathrm{arctg}\frac{17}{6}\right)\right].$$

**Exerciţiul 1.7** Să se determine partea imaginară a numărului complex

$$z = \left(-1+\sqrt{3}j\right)^{11}.$$

*Soluţie.* Deoarece

$$-1+\sqrt{3}j = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

rezultă că

$$\left(-1+\sqrt{3}j\right)^{11} = 2^{11}\left(\cos\frac{22\pi}{3} + j\sin\frac{22\pi}{3}\right) =$$

$$2^{11}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

**Exerciţiul 1.8** Să se precizeze curba plană care are ecuaţia

(1) $|z| = 1$;

(2) $|z-1+2j| = 3$;

(3) $\mathrm{Re}\, z = 2$;

(4) $\mathrm{Re}\,\left(z^2\right) = 4$.

*Soluţie.*
(1)

$$|z| = 1 \Longleftrightarrow x^2+y^2 = 1.$$

În concluzie curba plană cerută este cercul

$$\mathcal{C}((0,0);1): \quad x^2+y^2 = 1.$$

(2)

$$|z-1+2j|=3 \Longleftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=3.$$

În concluzie curba plană cerută este cercul

$$\mathcal{C}((1,-2);3): \quad (x-1)^2+(y+2)^2=9.$$

(3)

$$\text{Re } z=2 \Longleftrightarrow x=2.$$

În concluzie curba plană cerută este dreapta

$$d: \quad x=2.$$

(4)

$$\text{Re } \left(z^2\right)=4 \Longleftrightarrow x^2-y^2=4.$$

În concluzie curba plană cerută este hiperbola

$$H: \quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1.$$

**Exerciţiul 1.9** Să se precizeze curba plană care are ecuaţia

$$\arg_0(z-j)=\frac{\pi}{6}.$$

**Exerciţiul 1.10** Să se precizeze curba plană care are ecuaţia

(1) $|z-j|=|z-2-3j|$;

(2) $|z-2|+|z+2|=6$.

*Soluţie.* (1)

$$|z-j|=|z-2-3j| \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \Longleftrightarrow$$

$$x^2+y^2-2y+1=x^2-4x+4+y^2-6y+9$$

$$\Longleftrightarrow x+y-3=0.$$

În concluzie curba plană cerută este dreapta de ecuaţie $y = 3 - x$.

$$(2) \quad |z-2| + |z+2| = 6 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 6 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \Longleftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 36 + x^2 + 4x + 4 + y^2 -$$

$$-12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \Longleftrightarrow$$

$$3\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2x + 9 \Longleftrightarrow$$

$$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 = 4x^2 + 81 + 36x \Longleftrightarrow$$

$$5x^2 + 9y^2 = 45 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

**Exerciţiul 1.11** Să se precizeze curba plană care are ecuaţia

(1) $|z - 2j| + |z + 4j| = 10$;

(2) $|z - 2j| - |z + 2j| = \pm 1$.

**Exerciţiul 1.12** Să se precizeze domeniul plan dat prin inecuaţia

(1) $\left|\dfrac{z}{z+3j}\right| < 1$;

(2) $\left|\dfrac{1-z}{1+z}\right| > 3$.

*Soluţie.*

(1)

$$\left|\frac{z}{z+3j}\right| < 1 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9} \Longleftrightarrow$$

$$y > -\frac{3}{2}.$$

În concluzie domeniul cerut este semiplanul dat prin inecuaţia $y > -\frac{3}{2}$.

(2)

$$\left|\frac{1-z}{1+z}\right| > 3 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} > 3\sqrt{x+1)^2+y^2} \Longleftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2 > 9x^2+18x+9+9y^2 \Longleftrightarrow$$

$$x^2+y^2+\frac{5}{2}x+1 > 0 \Longleftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+y^2 > \frac{9}{16}.$$

În concluzie domeniul cerut este exteriorul cercului

$$\mathcal{C}\left(\left(-\frac{5}{4},0\right);\frac{3}{4}\right).$$

**Exerciţiul 1.13** Să se precizeze domeniul plan dat prin inecuaţia

$$\left|\frac{2z}{1+z^2}\right| < 1.$$

**Exerciţiul 1.14** Se consideră funcţia

$$f:\mathbb{C}\setminus\{-1\}\to\mathbb{C},\quad f(z)=\frac{1-z}{1+z}.$$

Să se determine punctele $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ astfel încât

(a) $f(z)$ este număr real;

(b) $f(z)$ este număr pur imaginar.

*Soluţie.*

Observăm că pentru orice $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ avem

$$\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-x-jy}{1+x+jy}=$$

$$\frac{(1-x-jy)(1+x-jy)}{(1+x)^2+y^2}=\frac{1-x^2-y^2-2jy}{(1+x)^2+y^2}.$$

(a) Dacă $z = x + jy \in \mathbb{C}$, atunci $f(z)$ este număr real dacă şi numai dacă

$$y = 0 \ \wedge \ (x, y) \neq (-1, 0).$$

(b) Dacă $z = x + jy \in \mathbb{C}$, atunci $f(z)$ este număr pur imaginar dacă şi numai dacă

$$x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ (x, y) \neq (-1, 0).$$

## 2 Funcţii complexe de variabilă complexă

Considerăm o mulţime $E \subset \mathbb{C}$. O funcţie complexă de variabilă complexă este o funcţie

$$f : E \to \mathbb{C}.$$

O astfel de funcţie se reprezintă sub forma

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y), \quad z = x + jy \in E$$

în care funcţia

$$u : E \to \mathbb{R}$$

se notează cu Re $f$ ($u = \text{Re } f$) şi se numeşte partea reală a funcţiei $f$ iar

$$v : E \to \mathbb{R}$$

se notează cu Im $f$ ($v = \text{Im } f$) şi se numeşte partea imaginară a funcţiei $f$.

**Exemplul 2.1**

Considerăm funcţiile

$$(1) \quad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^3 + j;$$

$$(2) \quad f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{2j}{z^2} - 1;$$

$$(3) \quad f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + j\frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Notăm $f = u + jv, \quad u = \text{Re } f, \quad v = \text{Im } f.$

(1) Deoarece

$$z^3 + j = (x + jy)^3 + j =$$

$$x^3 - 3xy^2 + j(3x^2y - y^3) + j =$$

$$x^3 - 3xy^2 + j(3x^2y - y^3 + 1),$$

rezultă că

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 1.$$

(2) Deoarece

$$\frac{2j}{z^2} - 1 = \frac{2j(\overline{z})^2}{|z|^4} - 1 = \frac{2j(x-jy)^2}{(x^2+y^2)^2} - 1 =$$

$$\frac{2j(x^2-y^2-2jxy)}{(x^2+y^2)^2} - 1 = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} - 1 + 2j\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

rezultă că

$$u(x,y) = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} - 1, \quad v(x,y) = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) Avem

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

**Definiţia 2.1** Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. Mulţimea

$$\Delta(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\},$$

se numeşte disc deschis centrat în $z_0$ de rază $r$.

**Definiţia 2.2** O mulţime $E \subset \mathbb{C}$ se numeşte mulţime deschisă dacă

$$(\forall z \in E)(\exists r > 0)(\Delta(z, r) \subset E).$$

**Definiţia 2.3** Considerăm o mulţime $E \subset \mathbb{C}$. Un punct $z \in \mathbb{C}$ se numeşte punct de acumulare al mulţimii $E$ şi notăm

$$z \in E'$$

dacă

$$(\forall r > 0)((\Delta(z, r) \setminus \{z\}) \cap E \neq \emptyset).$$

**Definiţia 2.4**
Fie $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in E'$, $f : E \to \mathbb{C}$ şi $l \in \mathbb{C}$. Spunem că funcţia $f$ are limita $l$ în punctul $z_0$ şi notăm $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$, dacă

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall z \in E \setminus \{z_0\})$$

$$(|z - z_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon).$$

**Propoziţia 2.1**
*Fie* $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in E'$, $f : E \to \mathbb{C}$ *şi* $l \in \mathbb{C}$.
*Fie* $z_0 = x_0 + jy_0$, $l = l_1 + jl_2$ *şi* $f = u + jv$.
*Atunci*

$$(\lim_{z \to z_0} f(z) = l) \Longleftrightarrow$$

$$\left( \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = l_1 \ \wedge \ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = l_2 \right)$$

**Exerciţiul 2.1** Să se studieze limita în origine a funcţiei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ dată prin

$$f(z) = \frac{x^2}{x^2+y^2} + j\frac{y^4}{x^2+y^2}, \quad z = x + jy.$$

*Soluţie.* Notăm $f = u + jv$. Observăm că

$$u(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$$

şi

$$v(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*.$$

Considerăm două şiruri din $\left(\mathbb{R}^2\right)^*$, $((x_n^1, y_n^1))_n$, $((x_n^2, y_n^2))_n$ definite prin

$$(x_n^1, y_n^1) = \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

şi

$$(x_n^2, y_n^2) = \left(\frac{1}{n}, 0\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Cele două şiruri au aceeşi limită şi anume $(0,0)$. Deoarece

$$u(x_n^1, y_n^1) = 0, \quad \text{iar} \quad u(x_n^2, y_n^2) = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

rezultă că nu există limita în origine a funcţiei $u$ şi mai departe că nu există limita în origine a funcţiei $f$.

**Exerciţiul 2.2** Să se studieze limita în origine a funcţiei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ dată prin

$$f(z) = \frac{x^4}{x^2+y^2} + j\frac{y^4}{x^2+y^2}, \quad z = x + jy.$$

*Soluţie.* Notăm $f = u + jv$. Vom arăta că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0. \tag{2.1}$$

Considerăm $\varepsilon > 0$. Căutăm $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} &(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^*) \\ &\left(\sqrt{x^2+y^2} < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pentru orice $(x,y) \in (\mathbb{R}^2)^*$ sunt adevărate inegalităţile

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| \le x^2 \le (\sqrt{x^2+y^2})^2.$$

În concluzie, alegând $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, proprietatea (2.2) este verificată, deci relaţia (2.1) este adevărată. Analog demonstrăm că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} = 0. \tag{2.3}$$

Deoarece

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = 0,$$

rezultă că

$$\lim_{z\to 0} f(z) = 0.$$

**Definiţia 2.5**

Fie $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in E$ şi $f : E \to \mathbb{C}$. Spunem că funcţia $f$ este continuă în $z_0$ dacă

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall z \in E) \\ &(|z - z_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon). \end{aligned}$$

**Propoziţia 2.2**

*Fie $E \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $z_0 \in E$ şi $f : E \to \mathbb{C}$. Funcţia $f$ este continuă în $z_0$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

**Propoziţia 2.3**
*Fie $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in E$ şi $f : E \to \mathbb{C}$. Fie $z_0 = x_0 + jy_0$ şi $f = u + jv$. Atunci funcţia $f$ este continuă în $z_0$ dacă şi numai dacă funcţiile $u$ şi $v$ sunt continue în $(x_0, y_0)$.*

**Exerciţiul 2.3** Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \begin{cases} j\dfrac{\sin(x^4)}{x^2+y^2}, & (x,y) \in \mathbb{C}^* \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

în origine $[z = x + jy = (x, y)]$.

*Soluţie.* Observăm că

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

şi

$$v(x,y) = \frac{\sin(x^4)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^{2^*},$$

şi $v(0,0) = 0$. Vom arăta că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4)}{x^2+y^2} = v(0,0) = 0.$$

Considerăm $\varepsilon > 0$. Căutăm $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\begin{gathered} (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \\ \left( \sqrt{x^2+y^2} < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{\sin(x^4)}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon \right). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^{2^*}$ sunt adevărate inegalităţile

$$\left| \frac{\sin(x^4)}{x^2+y^2} \right| \le \frac{x^4}{x^2+y^2} \le x^2 \le \left( \sqrt{x^2+y^2} \right)^2.$$

În concluzie, alegând $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, proprietatea (2.4) este verificată, deci funcţia dată este continuă în origine.

**Definiţia 2.6**
Fie $E \subset \mathbb{C}$. Mulţimea $E$ se numeşte conexă, dacă oricare ar fi două puncte din mulţimea $E$, există o linie poligonală care uneşte aceste puncte şi care este inclusă în mulţimea $E$.

**Definiţia 2.7** Fie $D \subset \mathbb{C}$. Spunem că mulţimea $D$ este domeniu dacă este deschisă şi conexă.

**Definiţia 2.8**
Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $z_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{C}$. Spunem că funcţia $f$ este derivabilă sau monogenă în punctul $z_0$ dacă

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}. \tag{2.5}$$

Limita (2.5) se numeşte derivata funcţiei $f$ în punctul $z_0$ şi se notează cu $f'(z_0)$.

**Propoziţia 2.4** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $z_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{C}$. Dacă funcţia $f$ este monogenă în punctul $z_0$ atunci este continuă în punctul $z_0$.*

# 3 Funcţii olomorfe. Noţiuni teoretice

**Definiţia 3.1**
Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$. Spunem că funcţia $f$ este olomorfă pe mulţimea $D$ dacă este monogenă în toate punctele mulţimii $D$.

**Teorema 3.1** *Fie un domeniu $D \subset \mathbb{C}$, o funcţie $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + jv$ şi un punct $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. Dacă funcţia $f$ este monogenă în punctul $z_0$, atunci funcţiile $u$, $v$ sunt diferenţiabile în $(x_0, y_0)$ şi sunt adevărate egalităţile*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases} \tag{3.1}$$

**Observaţia 3.1** Egalităţile (3.1) poartă denumirea de *condiţiile Cauchy-Riemann.*

**Teorema 3.2** *Fie un domeniu* $D \subset \mathbb{C}$, *o funcţie* $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + jv$ *şi un punct* $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. *Dacă funcţia* $f$ *este monogenă în punctul* $z_0$, *atunci, pentru calculul derivatei funcţiei* $f$ *în punctul* $z_0$ *se poate folosi una din formulele*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + j\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \tag{3.2}$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{j}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + j\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right). \tag{3.3}$$

**Teorema 3.3**
*Fie un domeniu* $D \subset \mathbb{C}$, *o funcţie*

$$f : D \to \mathbb{C},\ f = u + jv$$

*şi* $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. *Dacă funcţiile* $u$ *şi* $v$ *admit derivate parţiale de ordinul întâi continue în* $(x_0, y_0)$ *şi verifică cele două condiţii Cauchy-Riemann în acest punct, atunci funcţia* $f$ *este monogenă în* $z_0$.

**Exerciţiul 3.1** Să se determine punctele în care funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dată prin

$$f(z) = z^2 + z \cdot \overline{z} - (\overline{z})^2 + 2z - \overline{z},$$

este monogenă. Să se calculeze derivata funcţiei $f$ în punctele găsite.

*Soluţie.* Observăm că

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x + j(4xy + 3y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Notând $u = \text{Re } f$ şi $v = \text{Im } f$, găsim

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 + y^2 + x, \\ \\ v(x, y) = 4xy + 3y. \end{cases}$$

Sistemul condiţiilor Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y), \end{cases}$$

este echivalent cu

$$\begin{cases} 2x+1 = 4x+3, \\ \\ 2y = -4y, \end{cases}$$

de unde rezultă $(x,y) = (-1,0)$. Funcţia $f$ este monogenă doar în punctul $(x,y) = (-1,0)$. Derivata în acest punct este

$$f'(-1,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(-1,0) + j\frac{\partial v}{\partial x}(-1,0) = -1.$$

**Definiţia 3.2** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi $u : D \to \mathbb{R}$ astfel încât $u \in \mathcal{C}^2(D)$. Funcţia $u$ se numeşte armonică pe mulţimea $D$ dacă este îndeplinită condiţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D.$$

**Teorema 3.4** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + jv$. Dacă $u \in \mathcal{C}^2(D)$ şi $v \in \mathcal{C}^2(D)$ iar funcţia $f$ este olomorfă pe domeniul $D$, atunci funcţiile $u$ şi $v$ sunt armonice pe mulţimea $D$.*

**Exemplul 3.1** Se consideră funcţia

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) = e^x \cos y.$$

Să se arate că uncţia $u$ este armonică pe mulţimea $\mathbb{R}^2$.

*Soluţie.*

Observăm că pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \cos y,$$

şi mai departe că

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

În concluzie funcţia $u$ este armonică.

**Teorema 3.5** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $u : D \to \mathbb{R}$, o funcţie armonică pe domeniul $D$. Atunci există $v : D \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + jv$ este olomorfă pe mulţimea $D$. În plus, dacă $(x_0, y_0) \in D$,*

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt.$$

*Demonstraţie.* Căutăm o funcţie $v : D \to \mathbb{R}$, pentru care sunt adevărate condiţiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases} \tag{3.4}$$

Diferenţiala funcţiei $v$ este

$$dv(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy,$$

iar din relaţiile (3.4) rezultă că

$$dv(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dy. \tag{3.5}$$

Deoarece $u$ este o funcţie armonică, este adevărată egalitatea

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{3.6}$$

În concluzie, în relaţia (3.5) avem o diferenţială totală exactă. Funcţia $v$ se obţine integrând diferenţiala sa, pe un drum convenabil, integrala curbilinie obţinută fiind independentă de drum.

Fie $M_0(x_0, y_0) \in D$ un punct fix şi $M(x, y) \in D$ un punct arbitrar. Alegând un drum paralel cu axele de coordonate:

$$M_0(x_0, y_0) \to M_1(x, y_0) \to M(x, y),$$

obţinem

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt. \quad \square$$

**Teorema 3.6** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $v : D \to \mathbb{R}$, o funcţie armonică pe domeniul $D$. Atunci există $u : D \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + jv$ este olomorfă pe mulţimea $D$. În plus, dacă $(x_0, y_0) \in D$,*

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(t, y_0)dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)dt.$$

**Exerciţiul 3.2** Se consideră funcţia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = e^x \cos y$. Să se determine funcţia $v$ astfel încât $f = u + jv$ să fie olomorfă şi $f(0) = 1$.

*Soluţie.*
Observăm că pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \cos y,$$

şi mai departe că

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

În concluzie funcţia $u$ este armonică, deci există $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f = u + jv,$$

este olomorfă pe mulţimea $\mathbb{C}$.

Din condiţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y), \end{cases} \tag{3.7}$$

rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y, \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y. \end{cases} \tag{3.8}$$

**Metoda I.** Integrăm prima relaţie din (3.14) în raport cu $x$ şi obţinem

$$v(x,y) = e^x \sin y + \varphi(y). \tag{3.9}$$

Derivăm relaţia (3.15) în raport cu $y$ şi obţinem

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y + \varphi'(y). \tag{3.10}$$

Folosind cea de a doua relaţie din (3.14) şi (3.16), rezultă că $\varphi'(y) = 0$, deci $\varphi(y) = c \in \mathbb{R}$. Considerăm familia de funcţii $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = e^x \cos y + je^x \sin y + jc, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Oricare dintre funcţiile acestei familii este olomorfă şi are ca parte reală funcţia $u$. Din condiţia $f(0) = 1$ obţinem $c = 0$. În concluzie, soluţia unică a problemei este $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = e^x(\cos y + j \sin y). \tag{3.11}$$

Funcţia (3.20) este olomorfă, are partea reală Re $f = u$ şi satisface condiţia $f(0) = 1$. Pentru a o scrie funcţia $f$ cu ajutorul variabilei $z$, în relaţia (3.20) facem trecerea

$$\begin{cases} x \to z, \\ \\ y \to 0, \end{cases}$$

şi obţinem $f(z) = e^z$.

**Metoda II.**

Conform relaţiilor (3.14) diferenţiala funcţiei $v$ este

$$\begin{aligned} dv(x,y) = {} & \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy = \\ & e^x \sin y dx + e^x \cos y dy. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Observăm că în relaţia (3.19) avem o diferenţială totală exactă, deci, funcţia $v$ se obţine integrând diferenţiala sa, pe un drum convenabil ales, integrala nedepinzând de drum.

Considerăm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punct fix şi $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punct arbitrar. Alegând un drum paralel cu axele de coordonate:

$$M_0(x_0, y_0) \to M_1(x, y_0) \to M(x, y),$$

obţinem

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} e^t \sin y_0 \, dt + \int_{y_0}^{y} e^x \cos t \, dt.$$

Relaţia de mai sus este echivalentă cu

$$v(x, y) = e^x \sin y - e^{x_0} \sin y_0.$$

Cum $M_0(x_0, y_0)$ poate fi orice punct din $\mathbb{R}^2$, rezultă că $v(x, y) = e^x \sin y + C$, unde $C$ este o constantă arbitrară reală. În acest moment reluăm raţionamentul din metoda precedentă. Singura funcţie din familia

$$f(x, y) = e^x \cos y + je^x \sin y + jc, \quad c \in \mathbb{R}$$

pentru care $f(0) = 1$ este

$$f(x, y) = e^x \cos y + je^x \sin y.$$

Prin procedeul de mai sus obţinem $f(z) = e^z$.

## 3.1 Exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 3.3** Să se studieze limita în origine a funcţiei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ dată prin

$$f(z) = \frac{xy}{x^2 + y^2} + 2jx, \quad z = x + jy.$$

*Soluţie.* Notăm $f = u + jv$. Observăm că

$$u(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$$

şi

$$v(x, y) = 2x, \quad (x, y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*.$$

Considerăm două şiruri din $\left(\mathbb{R}^2\right)^*$, $((x_n^1, y_n^1))_n$, $((x_n^2, y_n^2))_n$ definite prin

$$(x_n^1, y_n^1) = \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

şi

$$(x_n^2, y_n^2) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Cele două şiruri au aceeşi limită şi anume $(0,0)$. Deoarece

$$u(x_n^1, y_n^1) = 0, \quad \text{iar} \quad u(x_n^2, y_n^2) = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

rezultă că nu există limita în origine a funcţiei $u$ şi mai departe că nu există limita în origine a funcţiei $f$.

**Exerciţiul 3.4** Să se studieze olomorfia funcţiei

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \overline{z}.$$

*Soluţie.* Observăm că

$$f(x,y) = x - jy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Notând $u = \text{Re } f$ şi $v = \text{Im } f$, găsim

$$\begin{cases} u(x,y) = x, \\ \\ v(x,y) = -y. \end{cases}$$

Sistemul condiţiilor Cauchy-Riemann este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Derivatele parţiale ale funcţiilor $u$ şi $v$ sunt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -1, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că funcţia $f$ nu este monogenă în nici un punct.

**Exerciţiul 3.5** Să se determine punctele în care funcţia

$$f : \mathbb{C} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid x = 0\},$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + j\text{arctg } \frac{y}{x},$$

satisface condiţiile Cauchy-Riemann.

*Soluţie.* Notând $u = \mathrm{Re}\, f$ şi $v = \mathrm{Im}\, f$, găsim

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \\[2ex] v(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Sistemul condiţiilor Cauchy-Riemann este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Derivatele parţiale ale funcţiilor $u$ şi $v$ sunt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Rezultă că funcţia $f$ este monogenă în orice punct din

$$\mathbb{C} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid x = 0\}.$$

Fie $z_0 = x_0 + jy_0 \in \mathbb{C} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid x = 0\}$. Derivata funcţiei $f$ în punctul $z_0$ este

$$f'(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + j\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) =$$

$$= \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} - j\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}.$$

**Exerciţiul 3.6** Fie $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Să se determine punctele în care funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = x^2 + axy + by^2 + j(cx^2 + dxy + y^2), \quad z = x + jy$$

este monogenă.

*Soluţie.* Notând $u = \operatorname{Re} f$ şi $v = \operatorname{Im} f$, găsim

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 + axy + by^2, \\ \\ v(x,y) = cx^2 + dxy + y^2. \end{cases}$$

Sistemul condiţiilor Cauchy-Riemann este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Derivatele parţiale ale funcţiilor $u$ şi $v$ sunt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x + ay, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = dx + 2y, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = ax + 2by, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2cx + dy. \end{cases}$$

Sistemul condiţiilor Cauchy-Riemann este echivalent cu

$$\begin{cases} 2x + ay = dx + 2y, \\ \\ ax + 2by = -(2cx + dy) \end{cases}$$

şi mai departe cu

$$\begin{cases} x(d-2) + y(2-a) = 0, \\ \\ x(a+2c) + y(d+2b) = 0. \end{cases}$$

Determinantul sistemului de mai sus este

$$\Delta = \begin{vmatrix} d-2 & 2-a \\ \\ a+2c & d+2b \end{vmatrix}.$$

Dacă $\Delta \neq 0$ atunci singurul punct în care funcţia $f$ satisface sistemul condiţiilor Cauchy-Riemann, este $(0,0)$.

Dacă $\Delta = 0$ iar rangul matricei

$$\begin{pmatrix} d-2 & 2-a \\ a+2c & d+2b \end{pmatrix}$$

este 1 atunci sistemul liniar de mai sus este compatibil simplu nedeterminat şi are o infinitate de soluţii, funcţia fiind monogenă în oricare dintre acestea.

Dacă $d = 2,\ a = 2,\ c = -1,\ b = -1$, funcţia $f$ este monogenă în orice punct din $\mathbb{C}$, deci olomorfă pe mulţimea $\mathbb{C}$.

**Exerciţiul 3.7** Se consideră funcţia

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Să se arate că funcţia $v$ este armonică pe mulţimea $\mathbb{R}^2$.

*Soluţie.*
Observăm că pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avem

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \sin y,$$

şi mai departe că

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

În concluzie funcţia $v$ este armonică.

**Exerciţiul 3.8** Se consideră funcţia

$$v : \left(\mathbb{R}^2\right)^* \to \mathbb{R}, \quad v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Să se determine funcţia $u$ astfel încât $f = u + jv$ să fie olomorfă şi $f(1) = 0$.

*Soluţie.*

$$v : \left(\mathbb{R}^2\right)^* \to \mathbb{R}, \quad v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Observăm că pentru orice $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ derivatele de ordinul întâi ale funcţiei $v$ sunt

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Mai departe, pentru orice $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ derivatele de ordinul doi ale funcţiei $v$ sunt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = 2y\frac{(x^2+y^2)^2 - x\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$2y\frac{x^2+y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^3} = 2y\frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^3},$$

iar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2y(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$2y\frac{x^2+y^2-2y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^3} = 2y\frac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}.$$

În concluzie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*.$$

Rezultă că funcţia $v$ este armonică, deci există $u : \left(\mathbb{R}^2\right)^* \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad f = u + jv,$$

este olomorfă pe mulţimea $\mathbb{C}^*$.

Din condiţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y), \end{cases} \tag{3.13}$$

rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 + \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases} \tag{3.14}$$

**Metoda I.** Integrăm a doua relaţie din (3.14) în raport cu $y$ şi obţinem

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi(x). \tag{3.15}$$

Derivăm relaţia (3.15) în raport cu $x$ şi obţinem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x) = \\ &\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Folosind prima relaţie din (3.14) şi (3.16), rezultă că $\varphi'(x) = 1$, deci

$$\varphi(x) = x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Rezultă

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x + c. \tag{3.17}$$

Considerăm familia de funcţii $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x + c + j\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Oricare dintre funcţiile acestei familii este olomorfă şi are ca parte imaginară funcţia $v$. Din condiţia $f(1) = 0$ obţinem

$$1 + 1 + c + j \cdot 0 = 0$$

deci

$$c = -2.$$

În concluzie, soluţia unică a problemei este,

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad f(x,y) = \\ &\frac{x}{x^2+y^2} + x - 2 + j\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Funcţia (3.18) este olomorfă, are partea imaginară Im $f = v$ şi $f(1) = 0$. Pentru a o scrie funcţia $f$ cu ajutorul variabilei $z$, în relaţia (3.18) facem trecerea

$$\begin{cases} x \to z, \\ \\ y \to 0, \end{cases}$$

şi obţinem

$$f(z) = \frac{1}{z} + z - 2, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

**Metoda II.**

Conform relaţiilor (3.14) diferenţiala funcţiei $v$ este

$$\begin{gathered} du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dy = \\ \left[1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dx + \frac{(-2xy)}{(x^2+y^2)^2} dy. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Observăm că în relaţia (3.19) avem o diferenţială totală exactă, deci, funcţia $u$ se obţine integrând diferenţiala sa, pe un drum convenabil ales, integrala nedepinzând de drum.

Considerăm $M_0(x_0, y_0) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ un punct fix şi $M(x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ un punct arbitrar. Alegând un drum paralel cu axele de coordonate:

$$M_0(x_0,y_0) \to M_1(x,y_0) \to M(x,y),$$

obţinem

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left[1 + \frac{y_0^2 - t^2}{(t^2+y_0^2)^2}\right] dt - x\int_{y_0}^{y} \frac{2t}{(x^2+t^2)^2}\, dt.$$

Relaţia de mai sus este echivalentă cu

$$\begin{gathered} u(x,y) = t\,|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{t^2 + y_0^2 - 2t^2}{(t^2+y_0^2)^2}\, dt + \left.\frac{x}{x^2+t^2}\right|_{y_0}^{y} = \\ t\,|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^2+y_0^2}\, dt + \int_{x_0}^{x} \frac{(-2t^2)}{(t^2+y_0^2)^2}\, dt + \left.\frac{x}{x^2+t^2}\right|_{y_0}^{y} = \\ t\,|_{x_0}^{x} + \frac{1}{y_0}\operatorname{arctg} \left.\frac{t}{y_0}\right|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(-2t^2)}{(t^2+y_0^2)^2}\, dt + \left.\frac{x}{x^2+t^2}\right|_{y_0}^{y}. \end{gathered}$$

Pe de altă parte avem

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(-2t^2)}{(t^2+y_0^2)^2}\, dt = \int_{x_0}^{x} t \left(\frac{1}{t^2+y_0^2}\right)' dt =$$

$$\left.\frac{t}{t^2+y_0^2}\right|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^2+y_0^2}\, dt = \left.\frac{t}{t^2+y_0^2}\right|_{x_0}^{x} - \frac{1}{y_0}\operatorname{arctg} \left.\frac{t}{y_0}\right|_{x_0}^{x}.$$

Obţinem

$$u(x,y) =$$

$$t\,|_{x_0}^{x} + \frac{1}{y_0}\operatorname{arctg} \left.\frac{t}{y_0}\right|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(-2t^2)}{(t^2+y_0^2)^2}\, dt + \left.\frac{x}{x^2+t^2}\right|_{y_0}^{y} =$$

$$t\,|_{x_0}^{x} + \frac{1}{y_0}\operatorname{arctg} \left.\frac{t}{y_0}\right|_{x_0}^{x} + \left.\frac{t}{t^2+y_0^2}\right|_{x_0}^{x} - \frac{1}{y_0}\operatorname{arctg} \left.\frac{t}{y_0}\right|_{x_0}^{x} + \left.\frac{x}{x^2+t^2}\right|_{y_0}^{y} =$$

$$t\,|_{x_0}^{x} + \left.\frac{t}{t^2+y_0^2}\right|_{x_0}^{x} + \left.\frac{x}{x^2+t^2}\right|_{y_0}^{y} =$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} + x + \frac{x}{x^2+y_0^2} - \frac{x}{x^2+y_0^2} - x_0 - \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} =$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} + x + C.$$

Deoarece $M_0(x_0, y_0)$ poate fi orice punct din $\left(\mathbb{R}^2\right)^*$, rezultă că $C$ este o constantă arbitrară reală. În acest moment reluăm raţionamentul din metoda precedentă.

Considerăm familia de funcţii $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x + c + j\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Oricare dintre funcţiile acestei familii este olomorfă şi are ca parte imaginară funcţia $v$. Din condiţia $f(1) = 0$ obţinem

$$1 + 1 + c + j \cdot 0 = 0$$

deci

$$c = -2.$$

În concluzie, soluţia unică a problemei este,

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x - 2 + j\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right). \tag{3.20}$$

Funcţia (3.20) este olomorfă, are partea imaginară $\operatorname{Im} f = v$ şi $f(1) = 0$. Pentru a o scrie funcţia $f$ cu ajutorul variabilei $z$, în relaţia (3.20) facem trecerea

$$\begin{cases} x \to z, \\ y \to 0, \end{cases}$$

şi obţinem

$$f(z) = \frac{1}{z} + z - 2, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

**Metoda III.**

$$\begin{aligned} & f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + j\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \\ & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + j\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \\ & 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + j\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Facem trecerea

$$\begin{cases} x \to z, \\ y \to 0, \end{cases}$$

şi obţinem

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Rezultă

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + c, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Din relaţia $f(1) = 0$ obţinem $1 + 1 + c = 0$ şi mai departe $c = -2$.

$$f(z) = z + \frac{1}{z} - 2, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

# 4 Puncte ordinare, puncte singulare

**Definiţia 4.1**
Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$.

(1) Un punct $a \in D$ se numeşte punct ordinar pentru funcţia $f$ dacă există $r > 0$ astfel încât funcţia $f$ este olomorfă pe discul deschis $\Delta(a, r)$.

(2) Un punct $a \in C$ se numeşte punct singular pentru funcţia $f$ dacă pentru orice $r > 0$, discul $\Delta(a, r)$ conţine puncte în care funcţia $f$ sau nu este monogenă sau nu este definită.

**Definiţia 4.2** Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi o funcţie $f : D \to \mathbb{C}$. Un punct singular $a \in \mathbb{C}$ se numeşte punct singular izolat pentru funţia $f$, dacă există $r > 0$ astfel încât în discul deschis $\Delta(a, r)$ nu mai există alte puncte singulare ale lui $f$ în afară de $a$.

**Definiţia 4.3** Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ un punct singular pentru funcţia $f$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Punctul $a$ se numeşte pol de ordinul $n$ pentru funcţia $f$ , dacă $f$ este de forma

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}, \quad z \in D \setminus \{a\},$$

în care $\varphi : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ este o funcţie pentru care $a$ este punct ordinar şi $\varphi(a) \neq 0$.

**Definiţia 4.4** Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $a \in \mathbb{C}$ şi $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ o funcţie pentru care $a$ este punct singular izolat.
Spunem că punctul $a$ este punct singular esenţial pentru funcţia $f$ dacă nu există $\lim\limits_{z \to a} f(z)$.

**Definiţia 4.5** Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ şi $a \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat pentru funcţia $f$. Punctul $a$ se numeşte punct singular removabil pentru funcţia $f$ (sau eliminabil sau aparent) dacă există $\lim\limits_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$.

**Exemplul 4.1** Să se studieze singularităţile din mulţimea $\mathbb{C}$ în cazul funcţiilor următoare

(1) $f(z) = 2z^3 + 3z + 1$

(2) $f(z) = \dfrac{z - 2j}{z(z+j)^3(z^2+9)^2}$

(3) $f(z) = \dfrac{z^5}{z^2 + z(j+1) + j}$

(4) $f(z) = e^z$

(5) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

(6) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

(1) Funcţia nu are puncte singulare. Toate punctele din $\mathbb{C}$ sunt ordinare pentru funcţia $f$ deci funcţia este olomorfă pe mulţimea $\mathbb{C}$.

(2) Punctele singulare ale funcţiei $f$ sunt $0,\ -j,\ 3j,\ -3j$. Punctul $z = 0$ este pol simplu, punctul $z = -j$ este pol triplu iar punctele $z = \pm 3j$ sunt poli dubli.

Toate punctele din mulţimea

$$\mathbb{C} \setminus \{0,\ j,\ -3j,\ 3j\}$$

sunt ordinare, funcţia $f$ fiind olomorfă pe mulţimea

$$\mathbb{C} \setminus \{0,\ j,\ -3j,\ 3j\}.$$

(3) Punctele singulare ale funcţiei $f$ sunt $-1,\ -j$. Punctul $z = -1$ este pol simplu, iar punctul $z = -j$ este de asemenea pol simplu. Toate punctele din

mulţimea

$$\mathbb{C} \setminus \{-1,\ -j\}$$

sunt ordinare, funcţia $f$ fiind olomorfă pe mulţimea

$$\mathbb{C} \setminus \{-1,\ -j\}.$$

(4) Funcţia nu are puncte singulare. Toate punctele din $\mathbb{C}$ sunt ordinare pentru funcţia $f$ deci funcţia este olomorfă pe mulţimea $\mathbb{C}$.

(5) Funcţia are ca punct singular $z = 0$. Toate punctele din mulţimea $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sunt ordinare, funcţia $f$ fiind olomorfă pe mulţimea $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Deoarece

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

rezultă că $z = 0$ este punct singular removabil pentru funcţia $f$.

(6) Punctul $z = 0$ este punct singular izolat pentru funcţia

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Pe de altă parte

$$f(z) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \left( \cos \frac{y}{x^2+y^2} - j \sin \frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

Observăm că

$$\begin{cases} \operatorname{Re} f = u(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \dfrac{y}{x^2+y^2} \\[2ex] \operatorname{Im} f = v(x,y) = -e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} u\left(-\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n \to \infty} e^{-n} = 0$$

iar

$$\lim_{n \to \infty} u\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n \to \infty} e^{n} = \infty.$$

Deoarece nu există $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} u(x,y)$, rezultă că nu există $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ şi mai departe că punctul $z = 0$ este punct singular esenţial pentru funcţia $f$.

## 4.1 Punctul de la infinit

Funcţia
$$\psi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad \psi(z) = \frac{1}{z}$$
este o bijecţie. Prelungim această funcţie ataşând lui $z = 0$ un punct unic care se notează $\infty$ şi se numeşte punctul de la infinit. Mulţimea $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se numeşte planul complex extins şi se notează uneori cu $(z)$.

Punctul $z = \infty$ este punct ordinar (respectiv singular) pentru o funcţie $f$ dacă punctul $z = 0$ este punct ordinar (respectiv singular de aceeaşi natură) pentru funcţia $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

# 5 Funcţii elementare

## 5.1 Funcţia polinom

**Definiţia 5.1** Fie $n \in \mathbb{N}$. Se numeşte funcţie polinom de gradul $n$, o funcţie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

unde $a_k \in \mathbb{C}$ pentru $k = 0, 1, ..., n$ şi $a_n \neq 0$.

**Teorema 5.1** *Funcţia polinom este olomorfă pe mulţimea* $\mathbb{C}$.

## 5.2 Funcţia raţională

**Definiţia 5.2** Fie $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Se numeşte funcţie raţională, o funcţie $f : D \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0},$$

unde $a_k \in \mathbb{C}$ pentru $k = 0, 1, ..., n$ şi $a_n \neq 0$, $b_k \in \mathbb{C}$ pentru $k = 0, 1, ..., m$ şi $b_m \neq 0$, iar

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}.$$

(Am notat $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^m + ... + b_1 z + b_0$).

**Teorema 5.2** *Funcţia raţională este olomorfă pe domeniul de definiţie al acesteia.*

## 5.3 Funcţia exponenţială

**Definiţia 5.3** Funcţia exponenţială se notează

$$f(z) = e^z$$

şi este definită astfel

$$f(z) = e^x (\cos\ y + j \sin\ y), \quad z = x + jy \in \mathbb{C}.$$

**Teorema 5.3** *Funcţia exponenţială este olomorfă pe mulţimea* $\mathbb{C}$*, este periodică de perioadă* $2\pi j$ *şi are derivata* $f'(z) = e^z,\ z \in \mathbb{C}$.

**Propoziţia 5.1** *Funcţia exponenţială $f(z) = e^z$ are următoarele proprietăţi:*

$$(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2)\,(e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2})$$

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \left( e^{-z} = \frac{1}{e^z} \right)$$

$$(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2) \left( \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2} \right)$$

$$(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{C})\,((e^z)^m = e^{mz}).$$

*Demonstraţie.*

$$e^{z_1} e^{z_2} =$$

$$e^{x_1}(\cos\ y_1 + j \sin\ y_1) \cdot e^{x_2}(\cos\ y_2 + j \sin\ y_2) =$$

$$e^{x_1+x_2}[\cos\ (y_1 + y_2) + j \sin\ (y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

**Exerciţiul 5.1** Să se rezolve ecuaţia

$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1, \quad z \neq 0.$$

Avem

$$e^{\frac{1}{z^2}} = e^{\frac{(\overline{z})^2}{|z|^4}} = e^{\frac{x^2-y^2-2jxy}{(x^2+y^2)^2}} =$$

$$e^{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}} \left[ \cos \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + j \sin \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right] =$$

$$e^{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}} \left[ \cos \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - j \sin \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right].$$

Deci ecuaţia

$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1, \quad z \neq 0$$

este echivalentă cu

$$\begin{cases} e^{\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}} = 1 \\ \\ \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^*, \end{cases}$$

unde $(x, y) \neq (0, 0)$. Obţinem

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ \\ \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

şi mai departe

$$\begin{cases} x = \pm y \\ \\ \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

În cazul în care $x = y$, din a doua ecuaţie rezultă $k \in \mathbb{N}^*$ şi $x^2 = (4k\pi)^{-1}$. Deci

$$x = y = \pm \left(\sqrt{4k\pi}\right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

iar

$$z_k = \pm \left(\sqrt{4k\pi}\right)^{-1} (1 + j), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

În cazul în care $x = -y$, din a doua ecuaţie rezultă $k \in \mathbb{Z}_-^*$ şi $-x^2 = (4k\pi)^{-1}$. Deci

$$x = -y = \pm \left(\sqrt{-4k\pi}\right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}_-^*$$

iar

$$z_k = \pm \left(\sqrt{-4k\pi}\right)^{-1} (1 - j), \quad k \in \mathbb{Z}_-^*.$$

## 5.4 Funcţiile trigonometrice sinus şi cosinus

**Definiţia 5.4** Funcţia sinus se notează

$$f(z) = \sin\ z$$

şi este definită astfel

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin\ z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}.$$

**Definiţia 5.5** Funcţia cosinus se notează

$$f(z) = \cos\ z$$

şi este definită astfel

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \cos\ z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}.$$

**Teorema 5.4** *Funcţiile sinus şi cosinus sunt olomorfe pe mulţimea* $\mathbb{C}$ *şi sunt adevărate egalităţile*

$$(\sin\ z)' = \cos\ z, \quad (\cos\ z)' = -\sin\ z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Observaţia 5.1** Considerăm $z \in \mathbb{C}$ dat prin forma trigonometrică

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Numărul complex $z$ poate fi scris sub forma

$$z = re^{j\varphi}.$$

În particular (pentru $|z| = r = 1$) avem

$$\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}.$$

**Observaţia 5.2** Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $z_0 = x_0 + jy_0$ şi $r > 0$. Atunci

$$M(z) \in \mathcal{C}((x_0, y_0); r) \iff |z - z_0| = r \iff$$

$$z = z_0 + r(\cos\varphi + j\sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi) \iff$$

$$z = z_0 + re^{j\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

**Exemplul 5.1** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia

$$\sin\ z = 10. \tag{5.1}$$

*Soluţie.* Ecuaţia devine

$$\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = 10,$$

ultima egalitate putând fi rescrisă sub forma

$$e^{jz} - e^{-jz} - 20j = 0$$

şi mai departe sub forma

$$e^{2jz} - 20je^{jz} - 1 = 0 \tag{5.2}$$

Notăm $e^{jz} = u$. Din relaţia (5.2) obţinem ecuaţia

$$u^2 - 20ju - 1 = 0$$

care are soluţiile

$$u_{1;2} = (10 \pm \sqrt{99})j.$$

Relaţia $e^{jz} = (10 + \sqrt{99})j$ este echivalentă cu relaţia

$$e^{-y}(\cos\ x + j \sin\ x) = (10 + \sqrt{99})j.$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} e^{-y} \cos\ x = 0 \\ \\ e^{-y} \sin\ x = 10 + \sqrt{99} \end{cases}$$

Din cea de a doua ecuaţie rezultă că $\sin\ x > 0$. Deoarece, din prima ecuaţie, $\cos\ x = 0$ rezultă că $\sin\ x = 1$ şi mai departe că $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. De asemenea, din cea de a doua ecuaţie, găsim $y = \ln(10 - \sqrt{99})$. Am obţinut o primă familie de soluţii şi anume

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + j \ln(10 - \sqrt{99}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

În mod analog, din relaţia $e^{jz} = (10 - \sqrt{99})j$, găsim

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + j \ln(10 + \sqrt{99}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observăm putem scrie familia tuturor soluţiilor sub forma

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm j \ln(10 + \sqrt{99}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Exerciţiul 5.2** Să se arate că următoarele egalităţi sunt adevărate:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

*Soluţie.*

$$\cos^2 z + \sin^2 z =$$

$$\left(\frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4}\left(e^{2jz} + e^{-2jz} + 2 - e^{2jz} - e^{-2jz} + 2\right) = 1.$$

Pentru orice $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ avem

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{j(z_1+z_2)} + e^{-j(z_1+z_2)}}{2}.$$

Pe de altă parte

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 =$$

$$\frac{e^{jz_1} + e^{-jz_1}}{2} \cdot \frac{e^{jz_2} + e^{-jz_2}}{2} - \frac{e^{jz_1} - e^{-jz_1}}{2j} \cdot \frac{e^{jz_2} - e^{-jz_2}}{2j} =$$

$$\frac{1}{4}\Big(e^{j(z_1+z_2)} + e^{j(z_2-z_1)} + e^{j(z_1-z_2)} + e^{-j(z_1+z_2)} +$$

$$e^{j(z_1+z_2)} - e^{j(z_2-z_1)} - e^{j(z_1-z_2)} + e^{-j(z_1+z_2)}\Big) =$$

$$\frac{e^{j(z_1+z_2)} + e^{-j(z_1+z_2)}}{2}.$$

**Exerciţiul 5.3** Să se determine domeniul maxim de definiţie al funcţiei

$$f(z) = \mathrm{tg}\ z.$$

*Soluţie.* Evident

$$\mathrm{tg} : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\} \to \mathbb{C}.$$

Avem

$$\cos\ z = 0 \Longleftrightarrow \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$e^{jz} + e^{-jz} = 0 \Longleftrightarrow e^{2jz} + 1 = 0 \Longleftrightarrow e^{2jz} = -1 \Longleftrightarrow$$

$$e^{-2y+2jx} = -1 \Longleftrightarrow e^{-2y}(\cos 2x + j \sin 2x) = -1.$$

Obţinem

$$\begin{cases} x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ \\ y = 0 \end{cases}$$

Deci

$$\text{tg} : \mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \,| z = (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\} \to \mathbb{C}.$$

### 5.5 Funcţia radical în planul complex

**Definiţia 5.6** Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime nevidă. Se numeşte funcţie multivocă (sau multiformă) definită pe mulţimea $A$, o aplicaţie care asociază unui număr complex $z \in A$ o mulţime de valori din $\mathbb{C}$.

**Observaţia 5.3** O funcţie $f : A \to \mathbb{C}$, care asociază unui număr complex $z \in A$ o valoare unică $f(z) \in \mathbb{C}$ se mai numeşte funcţie univocă sau uniformă.

**Definiţia 5.7** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a \in \mathbb{C}$. Se numeşte funcţie radical în planul complex, funcţia notată

$$f(z) = \sqrt[n]{z - a}$$

care asociază unui număr complex $z$ numerele complexe $w$ pentru care $z = a + w^n$.

**Teorema 5.5** *Funcţia radical este o funcţie multivocă şi are $n$ ramuri care sunt funcţii (univoce). Cele $n$ ramuri sunt sunt $f_k : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}$,*

$$\begin{cases} f_k(z) = \sqrt[n]{r} \left( \cos \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \\ \\ k = 0, 1, ..., n-1, \end{cases}$$

*unde*

$$z - a = r(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

*$T$ este o semidreaptă cu originea în punctul $a$.*

**Propoziţia 5.2** *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$ şi $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Ramura $f_k$ a funcţiei*

$$f(z) = \sqrt[n]{z - a}$$

*este o funcţie olomorfă iar derivata acestei ramuri este*

$$f_k'(z) = \frac{f_k(z)}{n(z-a)}.$$

**Exemplul 5.2** Să se calculeze

$$\sqrt[5]{-2-2j}$$

considerându-se pentru funcţia $f(z) = \sqrt[5]{z}$ ramura care satisface

$$f_k(-1) = -1.$$

*Soluţie.* Fie

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Ramurile funcţiei $f$ sunt

$$\begin{cases} f_k(z) = \sqrt[5]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{5} + j\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{5}\right), \\ \\ k = 0, 1, ..., 4. \end{cases}$$

Deoarece $-1 = \cos\pi + j\sin\pi$, relaţia $f_k(-1) = -1$ este echivalentă cu egalitatea

$$\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} + j\sin\frac{\pi+2k\pi}{5} = -1$$

şi mai departe cu realaţiile

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi+2k\pi}{5} = -1 \\ \\ \sin\dfrac{\pi+2k\pi}{5} = 0. \end{cases}$$

Din $\dfrac{\pi+2k\pi}{5} = \pi$ rezultă $k = 2$. Deoarece

$$-2-2j = \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

rezultă că

$$f_2(-2-2j) = \sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{21\pi}{20} + j\sin\frac{21\pi}{20}\right).$$

### 5.6 Funcţia logaritm în planul complex

**Definiţia 5.8** Se numeşte funcţie logaritm în planul complex, funcţia notată $f(z) = \text{Ln}\, z$ care asociază unui număr complex $z$ numerele complexe $w$ pentru care $e^w = z$.

**Teorema 5.6** *Funcţia logaritm este o funcţie multivocă cu o infinitate de ramuri (determinări) şi acestea sunt* $f_k : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}$

$$f_k(z) = \ln r + j(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{5.3}$$

*unde $r$ şi $\varphi$ au semnificaţiile din forma trigonometrică a numărului complex $z$,*

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

*$T$ este o semidreaptă cu originea în punctul $z = 0$.*

**Observaţia 5.4** Alegând $k = 0$ în (5.3) obţinem

$$\text{Ln}_{|0}\, z = f_0(z) = \ln r + j\varphi. \tag{5.4}$$

Funcţia definită în relaţia (5.4) se numeşte determinarea principală a funcţiei $f(z) = \text{Ln}\, z$.

**Propoziţia 5.3** *Fie $k \in \mathbb{Z}$. Ramura $f_k$ a funcţiei $f(z) = \text{Ln}\, z$ este olomorfă iar derivata acestei funcţii este*

$$f_k'(z) = \frac{1}{z}.$$

**Exemplul 5.3** Să se calculeze

$$\text{Ln}\,(1 + j)$$

considerându-se pentru funcţia $f(z) = \text{Ln}\, z$, ramura care satisface

$$f_k(-3) = \ln 3 + 7\pi j.$$

*Soluţie.* Fie

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Ramurile funcţiei $f$ sunt

$$f_k(z) = \ln r + j(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Deoarece $-3 = 3(\cos\pi + j\sin\pi)$, relaţia

$$f_k(-3) = \ln 3 + 7\pi j$$

este echivalentă cu egalitatea

$$\ln 3 + j(\pi + 2k\pi) = \ln 3 + 7\pi j$$

deci $k = 3$. Deoarece

$$1 + j = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

rezultă că

$$f_3(1 + j) = \ln\sqrt{2} + \frac{25\pi}{4}j.$$

**Exemplul 5.4** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia

$$\sin z - \cos z = j. \tag{5.5}$$

*Soluţie.* Ecuaţia devine

$$\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} - \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = j,$$

ultima egalitate putând fi rescrisă sub forma

$$e^{jz}(1 - j) - e^{-jz}(1 + j) = -2. \tag{5.6}$$

Notăm $e^{jz} = u$. Din relaţia (5.6) obţinem ecuaţia

$$u^2(1 - j) + 2u - (1 + j) = 0$$

care are soluţiile

$$u_{1;2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})(1 + j).$$

Din

$$e^{jz} = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)(1+j)$$

rezultă că $jz = \mathrm{Ln}\ \left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)(1+j)\right]$ şi mai departe că

$$z_k = \frac{1}{j}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}\right) + j\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2k\pi - j\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

iar din

$$e^{jz} = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\right)(1+j)$$

rezultă $jz = \mathrm{Ln}\ \left[\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\right)(1+j)\right]$ şi mai departe că

$$z_k = \frac{1}{j}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}\right) + j\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{5\pi}{4} + 2k\pi - j\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

## 5.7 Funcţia putere în planul complex

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$. Vom defini funcţia

$$f(z) = z^{\alpha}.$$

Distingem următoarele cazuri

(1) Dacă $\alpha \in \mathbb{N}$ atunci funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^{\alpha}$, este o funcţie polinom.

(2) Dacă $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$ atunci funcţia $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ f(z) = z^{\alpha}$, este o funcţie raţională.

(3) Dacă $\alpha = \dfrac{1}{p}$ cu $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, funcţia $f(z) = z^{\alpha}$ este funcţia radical $f(z) = \sqrt[p]{z}$ definită anterior, deci este o funcţie multivocă având $p$ ramuri.

(4) Fie $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sau $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Funcţia $f(z) = z^\alpha$ asociază unui număr $z \in \mathbb{C}^*$ numerele complexe $w$ pentru care

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}.$$

**Exemplul 5.5** Să se calculeze $j^j$.

Deoarece $j = \cos\dfrac{\pi}{2} + j\sin\dfrac{\pi}{2}$ rezultă că

$$j^j = e^{j\mathrm{Ln}\, j} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Exerciţii rezolvate.**

**Exerciţiul 5.4** Să se rezolve ecuaţia

$$\mathrm{tg} z = \frac{1-3j}{5}.$$

*Soluţie.* Obţinem

$$\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \cdot \frac{2}{e^{jz} + e^{-jz}} = \frac{1-3j}{5} \Longleftrightarrow$$

$$5\left(e^{jz} - e^{-jz}\right) = (j+3)\left(e^{jz} + e^{-jz}\right) \Longleftrightarrow$$

$$e^{jz}(2-j) + e^{-jz}(-8-j) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$e^{2jz}(2-j) + (-8-j) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$e^{2jz} = \frac{8+j}{2-j} \Longleftrightarrow$$

$$e^{2jz} = \frac{(8+j)(2+j)}{4+1} \Longleftrightarrow e^{2jz} = 3+2j \Longleftrightarrow$$

$$z = \frac{1}{2j}\mathrm{Ln}(3+2j) \Longleftrightarrow$$

$$z = \frac{1}{2j}\left[\ln\sqrt{9+4} + j\left(\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + 2k\pi\right)\right] \Longleftrightarrow$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + 2k\pi\right) - \frac{j}{4}\ln 13.$$

**Exerciţiul 5.5** Se consideră o funcţie olomorfă

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Să se determine funcţia $f$ ştiind că există o funcţie $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{cases} u(x, y) + v(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right), \\ \\ f(1) = 0, \quad f(e) = 1 - j. \end{cases}$$

*Soluţie.* Notăm

$$w(x, y) = u(x, y) + v(x, y).$$

Deoarece $f$ este olomorfă rezultă că

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $w$ sunt

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = F'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = F'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \end{cases}$$

Derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei $w$ sunt

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) = F''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y^2}{x^4} + F'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{2y}{x^3} \\ \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) = F''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Relaţia

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

este echivalentă cu

$$F''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + F'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{2y}{x^3} = 0$$

şi mai departe cu

$$F''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + F'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{2y}{x} = 0.$$

Facem notaţia

$$t = \frac{y}{x}.$$

Rezultă
$$F''(t) \cdot \left(1+t^2\right) + F'(t) \cdot 2t = 0,$$
mai departe
$$\left[F'(t) \cdot \left(1+t^2\right)\right]' = 0,$$
apoi
$$F'(t) \cdot \left(1+t^2\right) = C_1$$
şi în final
$$F(t) = C_1 \text{ arctg } t + C_2.$$
Cu notaţiile de mai sus avem
$$F\left(\frac{y}{x}\right) = C_1 \text{ arctg}\frac{y}{x} + C_2$$
şi mai departe
$$u(x,y) + v(x,y) = C_1 \text{ arctg}\frac{y}{x} + C_2.$$
Derivăm relaţia de mai sus în raport cu $x$ şi cu $y$ şi obţinem
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{C_1 y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{C_1 x}{x^2+y^2}.$$
Folosind condiţiile Cauchy-Riemann deducem
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{C_1 y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{C_1 x}{x^2+y^2}.$$
Rezultă
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} \cdot \frac{C_1}{2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \cdot \frac{C_1}{2}.$$
Deoarece
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + j\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) =$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - j\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) =$$
$$\frac{x-y-j(x+y)}{x^2+y^2} \cdot \frac{C_1}{2},$$

rezultă
$$f'(z) = \frac{C_1}{2z}(1-j)$$
şi mai departe
$$f(z) = \frac{C_1}{2}(1-j)\mathrm{Ln}z + C_3.$$
Din $f(1) = 0$ rezultă $C_3 = 0$ iar din $f(e) = 1-j$ rezultă $C_1 = 2$. În concluzie
$$f(z) = (1-j)\mathrm{Ln}z.$$
Am considerat determinarea principală a funcţiei $f(z) = \mathrm{Ln}z$.

# 6 Integrala Curbilinie

**Definiţia 6.1** Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă şi

$$\gamma : \ z(t) = x(t) + jy(t), \ t \in [a, b]$$

o curbă netedă, inclusă în domeniul $D$. Se numeşte integrală curbilinie a funcţiei $f$ de-alungul curbei $\gamma$, numărul complex notat $\int_\gamma f(z)dz$ definit prin

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

**Propoziţia 6.1** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă şi*

$$\gamma : \ z(t) = x(t) + jy(t), \ t \in [a, b]$$

*o curbă netedă (sau netedă pe porţiuni) inclusă în domeniul $D$. Este adevărată egalitatea*

$$\int_\gamma f(z)dz =$$

$$\int_\gamma u(x, y)dx - v(x, y)dy + j \int_\gamma v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

(Am notat $f(z) = u(x, y) + jv(x, y), \ z = x + jy$).

**Exerciţiul 6.1** Să se calculeze integrala

$$I = \int_\gamma \overline{z}dz$$

în care $\gamma$ este pătratul ABCD parcurs în sensul

$$A \to B \to C \to D \to A,$$

vârfurile fiind: $A(1 + j)$, $B(-1 + j)$, $C(-1 - j)$, $D(1 - j)$.

Observăm că funcţia $f(z) = \overline{z}$ este continuă pe mulţimea $\mathbb{C}$ şi că este adevărată egalitatea

$$I = \int_{[AB]} \overline{z}dz + \int_{[BC]} \overline{z}dz + \int_{[CD]} \overline{z}dz + \int_{[DA]} \overline{z}dz.$$

Ecuaţiile parametrice ale celor patru segmente sunt

$$[AB]: \quad \begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = 1, \quad t \in [-1,1], \end{cases}$$

deci $z(t) = -t + j$ iar $z'(t) = -1$.

$$[BC]: \quad \begin{cases} x(t) = -1 \\ y(t) = -t, \quad t \in [-1,1], \end{cases}$$

deci $z(t) = -1 - jt$ iar $z'(t) = -j$.

$$[CD]: \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -1, \quad t \in [-1,1], \end{cases}$$

deci $z(t) = t - j$ iar $z'(t) = 1$.

$$[DA]: \quad \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t, \quad t \in [-1,1], \end{cases}$$

deci $z(t) = 1 + jt$ iar $z'(t) = j$.

Aplicând definiţia integralei obţinem

$$I_1 = \int_{[AB]} \overline{z} dz =$$

$$\int_{-1}^{1} (-t - j)(-1) dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-1}^{1} + 2j = 2j,$$

$$I_2 = \int_{[BC]} \overline{z} dz =$$

$$\int_{-1}^{1} (-1 + jt)(-j) dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-1}^{1} + 2j = 2j,$$

$$I_3 = \int_{[CD]} \overline{z} dz =$$

$$\int_{-1}^{1} (t+j)dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + 2j = 2j,$$

$$I_4 = \int_{[DA]} \overline{z} dz =$$

$$\int_{-1}^{1} (1-jt)jdt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + 2j = 2j.$$

În concluzie $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 8j$.

**Propoziţia 6.2** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f$ şi $g$ două funcţii complexe continue pe mulţimea $D$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ şi $\gamma$ o curbă netedă (sau netedă pe porţiuni) inclusă în domeniul $D$. Sunt adevărate următoarele propoziţii:*

$$(1) \quad \int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\, dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz$$

$$(2) \quad \left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M\ l(\gamma).$$

(Am notat cu $l(\gamma)$ lungimea curbei $\gamma$ şi

$$M = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|).$$

**Observaţia 6.1**

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă şi

$$\gamma : \ z(t) = x(t) + jy(t),\ t \in [a, b]$$

o curbă netedă inclusă în domeniul $D$. Notăm cu $A$ şi $B$ punctele corespunzătoare numerelor complexe $\gamma(a)$ respectiv $\gamma(b)$ şi cu $\gamma^-$ curba $\gamma$ parcursă în sens invers, de la $B$ la $A$. Dacă $c \in (a, b)$ atunci

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

unde

$$\gamma_1: \ z(t) = x(t) + jy(t), \ t \in [a, c]$$

şi

$$\gamma_2: \ z(t) = x(t) + jy(t), \ t \in [c, b].$$

În Propoziţia de mai jos utilizăm notaţiile din Observaţia 6.1.

**Propoziţia 6.3** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă şi*

$$\gamma: \ z(t) = x(t) + jy(t), \ t \in [a, b]$$

*o curbă netedă inclusă în domeniul $D$. Sunt adevărate următoarele propoziţii:*

(1) $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz$

(2) $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$

**Definiţia 6.2** Numim domeniu simplu conex, un domeniu $D$ cu proprietatea că orice curbă simplă şi închisă conţinută în $D$ delimitează un domeniu inclus în $D$.

**Definiţia 6.3** Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Numim domeniu multiplu conex, de ordin de conexitate $p + 1$, un domeniu care are frontiera formată din $p + 1$ curbe închise, $C_0, C_1, ..., C_p$ , astfel încât în interiorul curbei $C_0$ sunt incluse toate celelalte curbe, iar acestea din urmă sunt situate fiecare în exteriorul celeilalte.

## 6.1 Teorema fundamentală a lui Cauchy

**Teorema 6.1 (Teorema fundamentală a lui Cauchy pentru domenii simplu conexe)** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă având derivata continuă şi $\gamma$ o curbă netedă, închisă inclusă în domeniul $D$. Atunci*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

**Corolarul 6.1** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă având derivata continuă. Considerăm două puncte $A$, $B$ în domeniul $D$ şi două arce de curbă incluse în $D$ având extremităţile $A$, $B$. Notăm cele două arce de curbă $\gamma_1$ respectiv $\gamma_2$ şi presupunem că acestea sunt parcurse în sensul de la $A$ la $B$. Atunci*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

**Convenţia 6.1**
Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă şi $\gamma$ o curbă netedă, închisă, inclusă în domeniul $D$. Convenim că sensul de parcurgere al curbei $\gamma$ considerat în cazul integralei curbilinii $\int_\gamma f(z)dz$, este cel trigonometric.

**Exerciţiul 6.2** Să se calculeze integrala

$$I = \oint_\gamma z dz, \quad \gamma : \ x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

*Soluţie.* Metoda I.

Avem

$$\gamma : x^2 + (y+1)^2 = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = -1 + \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\gamma : z(t) = \cos t + j(-1 + \sin t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Pe de altă parte

$$z'(t) = -\sin t + j \cos t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Obţinem

$$I = \oint_\gamma z dz =$$

$$\int_0^{2\pi} [\cos t + j(-1 + \sin t)] [-\sin t + j \cos t] \, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} [-2 \sin t \cos t + \cos t] \, dt +$$

$$j \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 t - \sin^2 t + \sin t\right] dt = 0.$$

Metoda II.
Conform teoremei fundamentale a lui Cauchy

$$I = 0.$$

**Exerciţiul 6.3** Să se calculeze integrala

$$I = \oint_\gamma \overline{z} dz, \quad \gamma : \ x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

*Soluţie.*

Avem

$$\gamma : x^2 + (y+1)^2 = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = -1 + \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\gamma : z(t) = \cos t + j(-1 + \sin t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Pe de altă parte

$$z'(t) = -\sin t + j \cos t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Obţinem

$$I = \oint_\gamma \overline{z} dz =$$

$$\int_0^{2\pi} [\cos t - j(-1 + \sin t)] [-\sin t + j \cos t] \, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} [-\sin t \cos t + \sin t \cos t - \cos t] \, dt +$$

$$j \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 t + \sin^2 t - \sin t\right] dt = 2\pi j.$$

Nu putem aplica teorema fundamentală a lui Cauchy deoarece funcţia nu este monogenă în nici un punct.

**Teorema 6.2 (Teorema fundamentală a lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe)** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex având ordinul de conexitate $p+1$, $C_0$ fiind curba exterioară iar $C_0, C_1, ..., C_p$ fiind curbele din interiorul curbei $C_0$. Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă având derivata continuă, atunci*

$$\int_{C_0} f(z)dz =$$

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_p} f(z)dz.$$

**Exemplul 6.1** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{|z|=R} \frac{1}{z^2+1} dz, \quad R \in (0, +\infty) \setminus \{1\}.$$

Dacă $R < 1$ atunci, conform Teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii simplu conexe, $I = 0$.

Dacă $R > 1$, considerăm $\rho > 0$ astfel încât

$$\rho < \min\{1,\ R - 1\}$$

şi cercurile

$$\gamma_1 : \ z - j = \rho\, e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

şi

$$\gamma_2 : \ z + j = \rho\, e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Notăm cu $\gamma$ cercul dat prin ecuaţia $|z| = R$. Conform Teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii triplu conexe

$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+1} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+1} dz.$$

Observăm că

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+1}\, dz = \frac{1}{2j} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-j}\, dz - \frac{1}{2j} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z+j}\, dz$$

şi că

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+1}\, dz = \frac{1}{2j} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-j}\, dz - \frac{1}{2j} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z+j}\, dz.$$

Folosind egalităţile

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z+j}\, dz = 0, \quad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-j}\, dz = 0$$

şi calculând integralele

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-j}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{\rho j e^{jt}}{\rho e^{jt}} dt = 2\pi j$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z+j}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{\rho j e^{jt}}{\rho e^{jt}} dt = 2\pi j.$$

rezultă $I = \frac{1}{2j}\, 2\pi j - \frac{1}{2j}\, 2\pi j = 0.$

## 6.2 Formula integrală a lui Cauchy

**Teorema 6.3 (Formula integrală a lui Cauchy)** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă având derivata continuă şi $\gamma$ o curbă netedă, închisă inclusă în domeniul $D$. Notăm cu $\Delta$ domeniul delimitat de curba $\gamma$. Atunci, pentru orice $a \in \Delta$,*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

**Teorema 6.4 (Formula integrală a lui Cauchy generalizată)** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă având derivate continue de orice ordin şi $\gamma$ o curbă netedă, închisă inclusă în domeniul $D$. Notăm cu $\Delta$ domeniul delimitat de curba $\gamma$. Atunci, pentru orice $a \in \Delta$, $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

**Exerciţiul 6.4** Să se calculeze integralele

(1) $I_1 = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz, \quad C_1 : |z| = \frac{1}{4}$

(2) $I_2 = \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz, \quad C_2 : |z-1| = \frac{1}{4}$

(3) $I_3 = \oint_{C_3} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz, \quad C_3 : |z| = 2$

*Soluţie.*

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z} dz = 2\pi j f_1(0) = 2\pi j,$$

unde $f_1(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}$.

$$I_2 = -\oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3} dz = -\frac{2\pi j}{2!} f_2''(1) = -\pi e j,$$

unde $f_2(z) = \frac{e^z}{z}$.

$$I_3 = I_1 + I_2 = \pi j(2 - e).$$

## 6.3 Exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 6.5** Folosind definiţia să se calculeze integrala

$$I = \int_\gamma z dz$$

în care $\gamma$ este trapezul ABCD parcurs în sensul

$$A \to B \to C \to D \to A,$$

vârfurile fiind: $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(2,0)$, $D(1,0)$.

Observăm că funcţia $f(z) = z$ este continuă pe mulţimea $\mathbb{C}$ şi că este adevărată egalitatea

$$I = \int_{[AB]} zdz + \int_{[BC]} zdz + \int_{[CD]} zdz + \int_{[DA]} zdz.$$

Ecuaţiile parametrice ale celor patru segmente sunt

$$[AB]: \quad \begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 1 + 2t, \quad t \in [0, 1], \end{cases}$$

deci $z(t) = 1 + t + j(1 + 2t)$ iar $z'(t) = 1 + 2j$.

$$[BC]: \quad \begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = -t, \quad t \in [-3, 0], \end{cases}$$

deci $z(t) = 2 - jt$ iar $z'(t) = -j$.

$$[CD]: \quad \begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = 0, \quad t \in [-2, -1], \end{cases}$$

deci $z(t) = -t$ iar $z'(t) = -1$.

$$[DA]: \quad \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t, \quad t \in [0, 1], \end{cases}$$

deci $z(t) = 1 + jt$ iar $z'(t) = j$.

Aplicând definiţia integralei obţinem

$$I_1 = \int_{[AB]} z dz =$$

$$\int_0^1 [1 + t + j(1 + 2t)](1 + 2j)dt =$$

$$(1 + 2j)\left(1 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + j + jt^2 \,|_0^1\right) =$$

$$(1 + 2j)\left(1 + \frac{1}{2} + j + j\right) = (1 + 2j)\left(\frac{3}{2} + 2j\right) = 5j - \frac{5}{2},$$

$$I_2 = \int_{[BC]} z dz =$$

$$\int_{-3}^0 (2 - jt)(-j)dt = (-j)\left(6 - j\frac{t^2}{2}\Big|_{-3}^0\right) =$$

$$-6j + \frac{9}{2},$$

$$I_3 = \int_{[CD]} z dz =$$

$$\int_{-2}^{-1} (-t)(-1)dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{3}{2},$$

$$I_4 = \int_{[DA]} z dz =$$

$$\int_0^1 (1 + jt)jdt = j - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = j - \frac{1}{2}.$$

În concluzie $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$.

**Exerciţiul 6.6** Fie trei arce de curbă $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ având capetele originea $O$ şi $A(z = 1 + j)$. Să se calculeze integralele

$$I_m = \int_{\gamma_m} (x^2 + jy)dz, \quad m \in \{1, 2, 3\}$$

considerând curbele suport ale acelor trei arce, date prin ecuaţiile

$$\text{(a)} \quad \mathrm{y} = \mathrm{x}; \quad \text{(b)} \quad \mathrm{y} = \mathrm{x}^2; \quad \text{(c)} \quad \mathrm{y} = \mathrm{x}^3.$$

*Soluţie.* Ecuaţiile parametrice ale celor trei arce sunt

$$\gamma_1 : \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t, \quad t \in [0, 1], \end{cases}$$

deci $z(t) = t + jt$ iar $z'(t) = 1 + j$.

$$\gamma_2 : \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2, \quad t \in [0, 1], \end{cases}$$

deci $z(t) = t + jt^2$ iar $z'(t) = 1 + 2jt$.

$$\gamma_3 : \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3, \quad t \in [0, 1], \end{cases}$$

deci $z(t) = t + jt^3$ iar $z'(t) = 1 + 3jt^2$.

$$I_1 = \int_0^1 (t^2 + jt)(1 + j)dt =$$

$$(1 + j) \left( \frac{t^3}{3} \bigg|_0^1 + j\frac{t^2}{2} \bigg|_0^1 \right) = (1 + j) \left( \frac{1}{3} + \frac{j}{2} \right).$$

$$I_2 = \int_0^1 (t^2 + jt^2)(1 + 2jt)dt =$$

$$(1 + j)\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 + 2j\frac{t^4}{4}\bigg|_0^1\right) = (1 + j)\left(\frac{1}{3} + \frac{j}{2}\right).$$

$$I_3 = \int_0^1 (t^2 + jt^3)(1 + 3jt^2)dt =$$

$$\int_0^1 [(t^2 - 3t^5) + j(t^3 + 3t^4)]dt =$$

$$\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 - 3\frac{t^6}{6}\bigg|_0^1\right) + j\left(\frac{t^4}{4}\bigg|_0^1 + 3\frac{t^5}{5}\bigg|_0^1\right) =$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + j\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right).$$

**Exerciţiul 6.7** Să se calculeze integrala

$$I = \oint_\gamma z dz, \quad \gamma : \ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

*Soluţie.* Metoda I.

Avem

$$\gamma : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \Longleftrightarrow$$

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 1 + \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = 1 + \sqrt{2}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\gamma : z(t) = 1 + \sqrt{2}\cos t + j(1 + \sqrt{2}\sin t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Pe de altă parte

$$z'(t) = -\sqrt{2}\sin t + j\sqrt{2}\cos t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Obţinem

$$I = \oint_\gamma z dz =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[1+\sqrt{2}\cos t + j(1+\sqrt{2}\sin t)\right] \left[-\sqrt{2}\sin t + j\sqrt{2}\cos t\right] dt.$$

În concluzie $I = 0$.

Metoda II.

Conform teoremei fundamentale a lui Cauchy $I = 0$.

**Exerciţiul 6.8** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{|z|=R} \frac{1}{z^2+9} dz, \quad R \in (0, +\infty) \setminus \{3\}.$$

Dacă $R < 3$ atunci, conform Teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii simplu conexe, $I = 0$.

Dacă $R > 3$, considerăm $\rho > 0$ astfel încât

$$\rho < \min\{1,\ R-3\}$$

şi cercurile

$$\gamma_1 :\ z - 3j = \rho\, e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

şi

$$\gamma_2 :\ z + 3j = \rho\, e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Notăm cu $\gamma$ cercul dat prin ecuaţia $|z| = R$. Conform Teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii triplu conexe

$$I = \int_\gamma \frac{1}{z^2+9} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+9} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+9} dz.$$

Observăm că

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+9}\, dz = \frac{1}{6j} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-3j}\, dz - \frac{1}{6j} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z+3j}\, dz$$

şi că
$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+9}\,dz = \frac{1}{6j}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-3j}\,dz - \frac{1}{6j}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z+3j}\,dz.$$

Folosind egalităţile
$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z+3j}\,dz = 0, \qquad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-3j}\,dz = 0$$

şi calculând integralele
$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-3j}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\rho j e^{jt}}{\rho e^{jt}} dt = 2\pi j$$
$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z+3j}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\rho j e^{jt}}{\rho e^{jt}} dt = 2\pi j.$$

rezultă $I = \frac{1}{6j}\,2\pi j - \frac{1}{6j}\,2\pi j = 0.$

**Exerciţiul 6.9** Să se calculeze integralele

(1) $I_1 = \oint_{C_1} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2} dz, \quad C_1 : \ |z| = \frac{1}{2}$

(2) $I_2 = \oint_{C_2} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2} dz, \quad C_2 : \ x^2+8y^2-2=0$

(3) $I_3 = \oint_{C_3} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2} dz, \quad C_3 : \ 8x^2+y^2-2=0$

(3) $I_4 = \oint_{C_3} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2} dz, \quad C_4 : \ |z| = 2$

*Soluţie.*
$$I_1 = 0.$$

$$I_2 = \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{jz}}{(z-1)(z^2+1)^2}}{z+1} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{e^{jz}}{(z+1)(z^2+1)^2}}{z-1} dz =$$
$$2\pi j f_1(-1) + 2\pi j f_2(1).$$

unde

$$f_1(z) = \frac{e^{jz}}{(z-1)(z^2+1)^2},$$

$$f_2(z) = \frac{e^{jz}}{(z+1)(z^2+1)^2}.$$

$$I_3 = \oint_{\gamma_3} \frac{\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z+j)^2}}{(z-j)^2} dz + \oint_{\gamma_4} \frac{\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z-j)^2}}{(z+j)^2} dz =$$

$$\frac{2\pi j}{1!} f_3'(j) + \frac{2\pi j}{1!} f_4'(-j).$$

unde

$$f_3(z) = \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z+j)^2},$$

$$f_4(z) = \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z-j)^2}.$$

$$I_4 = I_2 + I_3.$$

**Exerciţiul 6.10** Să se calculeze integrala

$$I = \oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^3 - 1} dz, \quad \gamma : \ x^2 + y^2 = 2x.$$

*Soluţie.* Observăm că

$$\gamma : \ x^2 + y^2 = 2x \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

deci $\gamma$ este cercul $\mathcal{C}((1,0);\ 1)$.

Pe de altă parte, deoarece

$$1 = 1(\cos 0 + j \sin 0),$$

rezultă că ecuaţia $z^3 - 1 = 0$ are soluţiile

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + j \sin\frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Observăm că $z_0 = 1$ este în interiorul cercului $\mathcal{C}((1,0);\ 1)$, în timp ce

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

nu se află în interiorul cercului $\mathcal{C}((1,0);\ 1)$. Obţinem

$$I = \oint_\gamma \frac{\sin z}{z^3-1}dz = \oint_\gamma \frac{\frac{\sin z}{z^2+z+1}}{z-1}dz = 2\pi j g(1),$$

unde

$$g(z) = \frac{\sin z}{z^2+z+1}.$$

În concluzie

$$I = \oint_\gamma \frac{\sin z}{z^3-1}dz = 2\pi j\frac{\sin 1}{3}.$$

**Exerciţiul 6.11** Să se calculeze integrala

$$I = \oint_\gamma \frac{\cos z}{z^3-64}dz, \quad \gamma:\ x^2+y^2 = 12x.$$

*Soluţie.* Observăm că

$$\gamma:\ x^2+y^2 = 12x \Longleftrightarrow (x-6)^2+y^2 = 36,$$

deci $\gamma$ este cercul $\mathcal{C}((6,0);\ 6)$.

Pe de altă parte, deoarece

$$64 = 4^3(\cos 0 + j\sin 0),$$

rezultă că ecuaţia $z^3 - 64 = 0$ are soluţiile

$$z_k = 4\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + j\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k \in \{0,1,2\}.$$

Rezultă mai departe că $z_0 = 4$ este în interiorul cercului $\mathcal{C}((6,0);\ 6)$, în timp ce

$$z_1 = 4\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + j\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$z_2 = 4\left(\cos\tfrac{4\pi}{3} + j\sin\tfrac{4\pi}{3}\right) = 4\left(-\tfrac{1}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

nu se află în interiorul cercului $\mathcal{C}((6,0);\ 6)$. Obţinem

$$I = \oint_\gamma \frac{\cos z}{z^3 - 64} dz = \oint_\gamma \frac{\frac{\cos z}{z^2+4z+16}}{z-4} dz = 2\pi j g(4),$$

unde

$$g(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 4z + 16}.$$

În concluzie

$$I = \oint_\gamma \frac{\cos z}{z^3 - 16} dz = 2\pi j \frac{\cos 4}{64}.$$

**Exerciţiul 6.12** Să se calculeze integrala

$$I = \oint_\gamma \frac{e^z}{z^2 + 3z - 28} dz, \quad \gamma:\ x^2 + y^2 = 6x.$$

*Soluţie.* Observăm că

$$\gamma:\ x^2 + y^2 = 6x \Longleftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9,$$

deci $\gamma$ este cercul $\mathcal{C}((3,0);\ 3)$.

Pe de altă parte, ecuaţia $z^2 + 3z - 28 = 0$ are soluţiile $z_1 = 4$ şi $z_2 = -7$. Deoarece $z_1$ se află în interiorul cercului $\mathcal{C}((3,0);\ 3)$, iar $z_2$ nu se află în interiorul cercului $\mathcal{C}((3,0);\ 3)$ rezultă că

$$I = \oint_\gamma \frac{e^z}{z^2 + 3z - 28} dz = \oint_\gamma \frac{\frac{e^z}{z+7}}{z-4} dz = 2\pi j g(4),$$

unde

$$g(z) = \frac{e^z}{z+7}.$$

În concluzie

$$I = \oint_\gamma \frac{e^z}{z^2 + 3z - 28} dz = 2\pi j \frac{e^4}{11}.$$

**Exerciţiul 6.13** Să se calculeze integrala

$$I = \oint_\gamma \frac{e^{2z}}{(z^3 - 64)^2} dz, \quad \gamma:\ x^2 + y^2 = 10x.$$

*Soluţie.* Observăm că

$$\gamma: \; x^2 + y^2 = 10x \Longleftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 25,$$

deci $\gamma$ este cercul $\mathcal{C}((5,0);\; 5)$.

Pe de altă parte, deoarece

$$64 = 4^3(\cos 0 + j \sin 0),$$

rezultă că ecuaţia $z^3 - 64 = 0$ are soluţiile

$$z_k = 4\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + j\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k \in \{0,1,2\}.$$

Rezultă mai departe că $z_0 = 4$ este în interiorul cercului $\mathcal{C}((5,0);\; 5)$, în timp ce

$$z_1 = 4\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + j\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$z_2 = 4\left(\cos\tfrac{4\pi}{3} + j\sin\tfrac{4\pi}{3}\right) = 4\left(-\tfrac{1}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

nu se află în interiorul cercului $\mathcal{C}((5,0);\; 5)$. Obţinem

$$I = \oint_\gamma \frac{e^{2z}}{(z^3-64)^2}dz = \oint_\gamma \frac{\frac{e^{2z}}{(z^2+4z+16)^2}}{(z-4)^2}dz = 2\pi j g'(4),$$

unde

$$g(z) = \frac{e^{2z}}{(z^2+4z+16)^2}.$$

În concluzie

$$I = \oint_\gamma \frac{e^{2z}}{(z^3-64)^2}dz = 2\pi j\frac{104e^8}{64^3}.$$

## 6.4 Exerciţii propuse

**Exerciţiul 6.14** Să se calculeze integrala

$$I = \oint_\gamma \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz, \quad \gamma: \; |z| = 1.$$

**Exerciţiul 6.15** Să se calculeze integrala

$$I = \oint_\gamma \frac{z}{z(z^2-1)}dz$$

unde $\gamma$ este curbă simplă, netedă şi închisă având proprietatea că punctele $-1,\ 0,\ 1$ nu se află pe această curbă.

**Exerciţiul 6.16** Să se calculeze integrala

$$I = \int_\gamma \frac{\cos z}{(2z-\pi j)(z^2+8)}dz$$

în care $\gamma$ este pătratul ABCD parcurs în sensul

$$A \to B \to C \to D \to A,$$

vârfurile fiind: $A(2+2j)$, $B(-2+2j)$, $C(-2-2j)$, $D(2-2j)$.

# 7 Serii numerice. Serii de funcţii. Serii de puteri

**Definiţia 7.1** Se numeşte şir de numere complexe o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ notăm $f(n) = z_n$ atunci şirul definit mai sus poate fi notat

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{sau} \quad (z_n)_n \quad \text{sau} \quad (z_n).$$

**Observaţia 7.1** Dacă $(z_n)_n$ este un şir de numere complexe atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ numărul $z_n$ se poate reprezenta sub forma $z_n = x_n + jy_n$, astfel că şirului de numere complexe $(z_n)_n$ îi corespund două şiruri de numere reale $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$.

**Definiţia 7.2** Fie $(z_n)_n$ un şir de numere complexe şi $z \in \mathbb{C}$. Spunem că şirul $(z_n)_n$ are limita $z$ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, dacă

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |z_n - z| < \varepsilon).$$

**Definiţia 7.3** Fie $(z_n)_n$ un şir de numere complexe. Spunem că şirul $(z_n)_n$ este convergent în $\mathbb{C}$ dacă există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

În caz contrar şirul $(z_n)_n$ se numeşte divergent.

**Propoziţia 7.1** *Fie $(z_n)_n$ un şir de numere complexe astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ numărul $z_n$ se poate reprezenta sub forma $z_n = x_n + jy_n$ şi $z = x + jy \in \mathbb{C}$. Atunci*

$$(\lim_{n\to\infty} z_n = z) \Longleftrightarrow (\lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y)$$

**Exemplul 7.1** Să se studieze convergenţa şirului de numere complexe $(z_n)_n$ în care

(1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \left( z_n = \dfrac{1}{2^n} + j\dfrac{n}{n+1} \right)$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left( z_n = (-1)^n + j\dfrac{1}{n} \right)$

*Soluţie.* (1) Observăm că

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left( x_n = \frac{1}{2^n} \ \wedge y_n = \frac{n}{n+1} \right)$$

Deoarece şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ sunt convergente rezultă că şirul $(z_n)_n$ este convergent. Mai mult, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = j$.

(2) Observăm că

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left( x_n = (-1)^n \ \wedge y_n = \frac{1}{n} \right)$$

Deoarece şirul $(x_n)_n$ este divergent rezultă că şirul $(z_n)_n$ este divergent.

**Definiţia 7.4** Fie $(z_n)_n$ este un şir de numere complexe. Spunem că seria de numere complexe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă şi că are suma $S \in \mathbb{C}$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ este convergent şi are limita $S$. În acest caz notăm

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Dacă şirul sumelor parţiale este divergent, se spune că seria este divergentă.

**Propoziţia 7.2** *Fie $(z_n)_n$ un şir de numere complexe astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ numărul $z_n$ se reprezintă sub forma $z_n = x_n + jy_n$ şi $S = A + jB \in \mathbb{C}$. Sunt adevărate următoarele propoziţii*

(1) *Seria de numere complexe* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă seriile de numere reale* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *sunt convergente.*

(2) *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *are suma* $S$ *dacă şi numai dacă seriile de numere reale* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *au sumele* $A$ *respectiv* $B$.

**Exemplul 7.2** Să se studieze convergenţa seriei de numere complexe

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + j\frac{1}{n^2} \right)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + j\frac{1}{n^2} \right)$

*Soluţie.* (1) Seriei de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + j\frac{1}{n^2} \right)$ îi ataşăm seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Deoarece cele două serii de numere reale sunt convergente, rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + j\frac{1}{n^2} \right)$ este convergentă.

(2) Seriei de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + j\frac{1}{n^2} \right)$ îi ataşăm seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Deoarece seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + j\frac{1}{n^2} \right)$ este divergentă.

**Propoziţia 7.3** *Dacă seria de numere complexe* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *este convergentă, atunci* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

**Definiţia 7.5** Spunem că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ este convergentă.

**Propoziţia 7.4** *Dacă seria de numere complexe* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *este absolut convergentă, atunci ea este şi convergentă.*

**Observaţia 7.2** Există serii de numere complexe care sunt convergente dar nu sunt absolut convergente.

**Exemplul 7.3** Să se studieze convergenţa seriei de numere complexe

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{(-1)^n}{n}$

*Soluţie.* (1) Facem notaţia

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left[z_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right].$$

Observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $|z_n| = \frac{1}{n^2}$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ este absolut convergentă.

(2) Facem notaţia

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left[z_n = j\frac{(-1)^n}{n}\right].$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{(-1)^n}{n}$ nu este absolut convergentă. Pe de altă parte seriei de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{(-1)^n}{n}$ îi ataşăm seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ în care

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(x_n = 0 \wedge y_n = \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Deoarece cele două serii de numere reale sunt convergente, rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă.

**Definiţia 7.6** Fie $E \subset \mathbb{C}$ şi un şir de funcţii $(f_n)_n$, astfel încât pentru orice

$$(\forall n \in \mathbb{N})(f_n : E \to \mathbb{C}).$$

Seria notată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, care are proprietatea că pentru fiecare $z \in E$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ este o serie de numere complexe, se numeşte serie de funcţii complexe pe mulţimea $E$.

**Definiţia 7.7** Fie $E \subset \mathbb{C}$ şi o serie de funcţii complexe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ pe mulţimea $E$. Spunem că această serie este convergentă punctual sau simplu convergentă pe mulţimea $E$ dacă pentru orice $z \in E$, seria de numere complexe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ este o serie convergentă.

**Definiţia 7.8** Fie $E \subset \mathbb{C}$ şi o serie de funcţii complexe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ pe mulţimea $E$. Spunem că această serie este uniform convergentă pe mulţimea $E$ dacă

$$\begin{cases} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*) \\ \\ (\forall z \in E)(n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |f_{n+1}(z) + ... + f_{n+p}(z)| < \varepsilon). \end{cases}$$

**Teorema 7.1** *Fie $E \subset \mathbb{C}$ şi o serie de funcţii complexe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ pe mulţimea $E$. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulţimea $E$ atunci această serie este simplu convergentă pe mulţimea $E$. Reciproca acestei afirmaţii este falsă.*

**Teorema 7.2** (Criteriul lui Weierstrass) Fie $E \subset \mathbb{C}$, o serie de funcţii complexe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ pe mulţimea $E$ şi o serie convergentă de numere pozitive $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ astfel încât

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in E)(|f_n(z)| \leq a_n).$$

Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulţimea $E$.

**Exemplul 7.4**

Considerăm mulţimea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Să se studieze convergenţa seriei de funcţii

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

pe mulţimea $D$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : D \to \mathbb{C}, \quad f_n(z) = \frac{z^n}{n^2}.$$

*Soluţie.* Observăm că

$$(\forall z \in D)(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(|f_n(z)| \leq \frac{1}{n^2}\right).$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă rezultă, conform Criteriului lui Weierstrass, că seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulţimea $D$.

**Definiţia 7.9** Fie $a \in \mathbb{C}$ şi $(c_n)_n$ un şir de numere complexe. Se numeşte serie de puteri ale lui $(z - a)$, o serie de funcţii notată

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

în care termenul general este dat prin

$$f_n(z) = c_n(z-a)^n.$$

**Propoziţia 7.5** (Lema lui Abel) *Fie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

*o serie de puteri.*

*Există un număr unic $R \in [0, \infty]$ care are următoarele proprietăţi*

(1) *Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < R$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ este absolut convergentă.*

(2) *Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > R$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ este divergentă.*

În cazul în care $R > 0$, seria converge uniform pe orice pe orice disc $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, unde $\rho < R$.

**Definiţia 7.10** Numărul $R$ din Lema lui Abel se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri iar discul deschis $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ se numeşte discul de convergenţă al seriei de puteri.

**Teorema 7.3** *Fie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

*o serie de puteri. Considerăm*

$$l = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, \infty].$$

*Atunci*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & l \in (0, \infty), \\ 0, & l = \infty, \\ \infty, & l = 0. \end{cases}$$

**Propoziţia 7.6** *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ *o serie de puteri.*

(1) *Dacă există* $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| \in [0, \infty]$ *atunci*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

(2) *Dacă există* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \in [0, \infty]$ *atunci*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

**Observaţia 7.3** Lema lui Abel nu ne dă indicaţii referitoare la natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ în punctele cercului $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

**Exemplul 7.5** Să se studieze natura seriei

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

*Soluţie.*
(a) Notăm
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(c_n = \frac{1}{n^2}\right).$$
Deoarece
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$
rezultă $R = 1$. Seria este absolut convergentă în toate punctele cercului
$$C: \ |z| = 1.$$
(b) Notăm
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(c_n = \frac{1}{n}\right).$$
Deoarece
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$
rezultă $R = 1$. Seria nu este absolut convergentă în nici unul din punctele cercului
$$C: \ |z| = 1.$$
Observăm că, spre exemplu în punctul $z = -1$ seria este convergentă iar în punctul $z = 1$ seria este divergentă.
(c) Notăm
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(c_n = n!\right).$$
Deoarece
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = 0$$
rezultă $R = 0$. Cu alte cuvinte seria converge doar în punctul $z = 0$.
(d) Notăm
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(c_n = \frac{1}{n^n}\right).$$
Deoarece
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$
rezultă $R = +\infty$. Cu alte cuvinte seria converge în orice punct $z \in \mathbb{C}$.

## 7.1 Exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 7.1** Să se studieze convergenţa şirului de numere complexe $(z_n)_n$ în care

(1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(z_n = \sqrt[n]{n} + j\sqrt[n]{2}\right)$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(z_n = \cos(n\pi) + j\dfrac{1}{5^n}\right)$

*Soluţie.*

(1) Facem notaţia

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(z_n = x_n + jy_n)$$

Atunci

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(x_n = \sqrt[n]{n} \wedge y_n = \sqrt[n]{2}\right)$$

Deoarece şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ sunt convergente rezultă că şirul $(z_n)_n$ este convergent. Mai mult, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1 + j$.

(2) Observăm că

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(x_n = \cos(n\pi) \wedge y_n = \frac{1}{5^n}\right)$$

Deoarece şirul $(x_n)_n$ este divergent rezultă că şirul $(z_n)_n$ este divergent.

**Exerciţiul 7.2** Să se studieze convergenţa seriei de numere complexe

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + j\frac{1}{3^n}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + j\frac{n}{(n+1)^2}\right)$

*Soluţie.*

(1) Seriei de numere complexe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + j\frac{1}{3^n}\right)$ îi ataşăm seriile de numere reale $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ şi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Deoarece cele două serii de numere reale

sunt convergente, rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+j\frac{1}{3^n}\right)$ este convergentă. Mai mult, pentru seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

şirul sumelor parţiale este

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

iar pentru seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

şirul sumelor parţiale este

$$T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{2}$$

rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+j\frac{1}{3^n}\right)=1+j\frac{1}{2}.$$

(2) Seriei de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+j\frac{n}{(n+1)^2}\right)$ îi ataşăm seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}$. Ambele serii ataşate sunt divergente. Rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+j\frac{n}{(n+1)^2}\right)$ este divergentă.

**Exerciţiul 7.3** Să se studieze convergenţa seriei de numere complexe

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{\cos(n\pi)}{n}$

*Soluţie.*

(1) Facem notaţia

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left[z_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^n\right].$$

Observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $|z_n| = \frac{1}{n^2}$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^n$ este absolut convergentă deci şi convergentă.

(2) Facem notaţia

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left[z_n = j\frac{\cos(n\pi)}{n}\right].$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{\cos(n\pi)}{n}$ nu este absolut convergentă. Pe de altă parte seriei de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{\cos(n\pi)}{n}$ îi ataşăm seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ în care

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(x_n = 0 \wedge y_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}\right).$$

Deoarece cele două serii de numere reale sunt convergente, rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{\cos(n\pi)}{n}$ este convergentă.

**Exerciţiul 7.4** Să se studieze natura seriei

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(2n)!z^n \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(2n)^n}$$

*Soluţie.*

(a) Notăm

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(c_n = \frac{1}{n(n+1)}\right).$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n} = 1$$

rezultă $R = 1$. Seria este absolut convergentă în toate punctele cercului

$$C:\ |z| = 1.$$

(b) Notăm

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$$

rezultă $R = 1$. Seria nu este absolut convergentă în nici unul din punctele cercului

$$C:\ |z| = 1.$$

Observăm că, spre exemplu în punctul $z = -1$ seria este convergentă iar în punctul $z = 1$ seria este divergentă.

(c) Notăm

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(c_n = (2n)!\right).$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = 0$$

rezultă $R = 0$. Cu alte cuvinte seria converge doar în punctul $z = 0$.

(d) Notăm

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(c_n = \frac{1}{(2n)^n}\right).$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty}(2n) = +\infty$$

rezultă $R = +\infty$. Cu alte cuvinte seria converge în orice punct $z \in \mathbb{C}$.

# 8 Formula lui Taylor. Dezvoltări în serii Taylor

**Teorema 8.1** *Fie $D$ un domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Considerăm $a \in D$, $\Gamma$ un cerc inclus în $D$ cu centrul în $a$ şi de rază $\rho$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\}$. Atunci pentru orice $z \in \Delta$ este adevărată formula*

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + R_n(z) \tag{8.1}$$

*unde*

$$R_n(z) = (z-a)^{n+1}\frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)}dw.$$

**Observaţia 8.1** Formula (8.1) se numeşte formula lui Taylor pentru funcţia $f$ în punctul $a$.

**Teorema 8.2** *Fie $D$ un domeniu simplu conex, $a \in D$, $\Gamma$ un cerc inclus în $D$ cu centrul în $a$ şi de rază $\rho$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\}$. Atunci pentru orice $z \in \Delta$ are loc egalitatea*

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + .... \tag{8.2}$$

**Observaţia 8.2** Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + ....$$

din egalitatea (8.2) se numeşte seria Taylor ataşată funcţiei $f$ în jurul punctului $a$ si reprezintă dezvoltarea funcţiei $f$ în serie de puteri ale lui $z-a$.

**Exemplul 8.1** *Să se deducă egalităţile*

(1) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ..., \quad z \in \mathbb{C}$

(2) $\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \quad z \in \mathbb{C}$

(3) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad z \in \mathbb{C}$

(4) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ... + z^n ..., \quad |z| < 1$

(5) $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)^n z^n ..., \quad |z| < 1$

*Soluţie.*

(1) Considerăm $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. Ştim despre funcţia $f$ că este olomorfă şi observăm că

$$f'(z) = f''(z) = ... = f^{(n)}(z) = ... = e^z,$$

de unde rezultă că

$$f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = ... = 1.$$

Folosind formula (8.2) în care $a = 0$ rezultă că

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ..., \quad z \in \mathbb{C}. \tag{8.3}$$

(3) Din definiţia funţiei $f(z) = \cos\ z$ avem

$$\cos\ z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Din relaţia (8.3) rezultă

$$e^{jz} = 1 + \frac{jz}{1!} + \frac{(jz)^2}{2!} + ... + \frac{(jz)^n}{n!} + ..., \quad z \in \mathbb{C}$$

şi

$$e^{-jz} = 1 + \frac{(-jz)}{1!} + \frac{(-jz)^2}{2!} + ... + \frac{(-jz)^n}{n!} + ..., \quad z \in \mathbb{C}.$$

Deoarece

$$j^n + (-j)^n = j^n\,[1 + (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ 2\,(-1)^k, & n = 2k \end{cases}$$

rezultă

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad z \in \mathbb{C}.$$

(4) Notăm $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$. Funcţia $f$ este olomorfă pe domeniul simplu conex

$$D = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| < 1\}.$$

Observăm că

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left( f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \right)$$

şi mai departe că

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left( f^{(n)}(0) = n! \right).$$

Folosind formula (8.2) în care $a = 0$ rezultă că

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ... + z^n ..., \quad |z| < 1. \tag{8.4}$$

(5) Folosind relaţia (8.4) în care îl trecem pe $z$ în $-z$ obţinem

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)^n z^n ..., \quad |z| < 1.$$

### 8.1 Exerciţii propuse pentru rezolvare

**Exerciţiul 8.1** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \cos(3z);$$

$$f(z) = z^2 \sin z;$$

$$f(z) = \cos^2 z,$$

printr-o serie de puteri în jurul punctului 0.

## 9 Serii Laurent

Fie $(\rho_1, \rho_2) \in (0, \infty)^2$ astfel încât $\rho_1 < \rho_2$. Considerăm cercurile

$$\Gamma_1 : \; |z - a| = \rho_1, \quad \Gamma_2 : \; |z - a| = \rho_2$$

şi coroana circulară

$$\Delta : \; \rho_1 < |z - a| < \rho_2.$$

**Teorema 9.1** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex astfel încât $\Delta \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset D$ şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci pentru orice $z \in \Delta$ are loc egalitatea*

$$f(z) = ... + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ...+$$
$$+c_n(z-a)^n + ... = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k, \tag{9.1}$$

*unde*

$$c_k = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \frac{f(u)}{(u-a)^{k+1}}du; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

*$\Gamma$ fiind un cerc de ecuaţie $\Gamma : \ |z-a| = \rho$ cu $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$.*

**Observaţia 9.1** Seria

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k =$$
$$... + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ... \tag{9.2}$$

din egalitatea (9.1) se numeşte seria Laurent ataşată funcţiei $f$ în domeniul $\Delta : \ \rho_1 < |z-a| < \rho_2$.

**Observaţia 9.2** Într-o serie Laurent identificăm două părţi, seria

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k = ... + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a}$$

care se numeşte partea principală şi seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ...$$

care se numeşte partea tayloriană.

**Teorema 9.2** Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $a \in D$ şi $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Punctul $a$ este pol multiplu de ordin $p$ al lui $f$ dacă şi numai dacă dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f$ în jurul punctului $a$, (adică pe o coroană dată prin $\Delta : \varepsilon < |z-a| < r$ cu $\varepsilon > 0$ oricât de mic), este de forma:

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ...$$

cu $c_{-p} \neq 0$.

**Exemplul 9.1** Punctul $z = 0$ este pol triplu pentru funcţia $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$. Această funcţie are o dezvoltare în serie Laurent în jurul punctului $z = 0$, (în domeniul $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z|\} = \mathbb{C}^*$), iar această dezvoltare este

$$\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{1!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + ... + \frac{1}{n!}z^{n-3} + ..., \quad z \in \mathbb{C}^*$$

**Teorema 9.3** Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $a \in D$ şi $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Punctul $a$ este punct singular esenţial al lui $f$ dacă şi numai dacă partea principală a dezvoltării în serie Laurent a funcţiei $f$ în jurul punctului $a$, (adică pe o coroană $\Delta : \varepsilon < |z - a| < r$ cu $\varepsilon > 0$ oricât de mic) are o infinitate de termeni.
$\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k \text{ are o infinitate de termeni}\right)$.

**Exemplul 9.2** Punctul $z = 0$ este punct singular esenţial pentru funcţia $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Această funcţie are o dezvoltare în serie Laurent în jurul punctului $z = 0$,
(în domeniul $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z|\} = \mathbb{C}^*$), iar această dezvoltare este

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + ..., \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

**Teorema 9.4**
Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă iar $a \in D$ punct singular pentru funcţia $f$. Punctul $a$ este punct singular removabil al lui $f$ dacă şi numai dacă partea principală a dezvoltării în serie Laurent a funcţiei $f$ în jurul punctului $a$, (adică pe o coroană dată prin $\Delta : \varepsilon < |z - a| < r$ cu $\varepsilon > 0$ oricât de mic) este nulă ($c_k = 0,\ k \in \{-1, -2, ...\}$).

**Exemplul 9.3**
Deoarece dezvoltarea funcţiei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ în jurul punctului $z = 0$,
(în domeniul $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z|\} = \mathbb{C}^*$), este

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{1!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + ..., \quad z \in \mathbb{C}^*,$$

rezultă că punctul $z = 0$ este punct singular removabil al lui $f$.

## 9.1 Exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 9.1** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \frac{2z^2 + 3z - 1}{z^3 + z^2 - z - 1}$$

printr-o serie de puteri în jurul punctelor 0 şi $-1$.

*Soluţie.* Deducem egalitatea

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}.$$

Ştim că au loc egalităţile

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Din ultima egalitate deducem

$$-\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1) z^n,$$

$$|z| < 1.$$

Punctul $z = 0$ este un punct în care funcţia $f$ este monogenă iar funcţia $f$ are o dezvoltare în serie Taylor în jurul punctului $z = 0$, în domeniul simplu conex $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-1 + (-1)^n + (-1)^n(n+1)\right] z^n, \quad |z| < 1.$$

Pe de altă parte

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z+1)-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n,$$

$$|z+1| < 2.$$

Punctul $z = -1$ este pol dublu pentru funcţia $f$, astfel că vom obţine o dezvoltare în serie Laurent în jurul punctului $z = -1$, în domeniul

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 2\},$$

a cărei parte principală este $\dfrac{1}{z+1} + \dfrac{1}{(z+1)^2}$:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n,$$

$$0 < |z+1| < 2.$$

**Exercițiul 9.2** Să se reprezinte funcția

$$f(z) = \frac{2z^2 - 3z - 3}{z^3 - 2z^2 + z - 2}$$

printr-o serie de puteri în domeniul

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$$

și apoi în domeniul $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

*Soluție.* Este adevărată egalitatea

$$f(z) = \frac{2z^2 - 3z - 3}{z^3 - 2z^2 + z - 2} = -\frac{1}{5}\frac{1}{z-2} + \frac{11}{5}\frac{z}{1+z^2} + \frac{7}{5}\frac{1}{1+z^2},$$

pe care o rescriem sub forma

$$f(z) = \frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{11}{5z}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} + \frac{7}{5z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}. \tag{9.3}$$

Din relația (9.3) rezultă

$$f(z) = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} + \frac{11}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}} + \frac{7}{5z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}, \quad z \in D,$$

și mai departe

$$f(z) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{11}{z^{2n+1}} + \frac{7}{z^{2n+2}}\right] + \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}, \quad z \in D.$$

În cel de al doilea caz domeniul este simplu conex. Dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f$ este

$$f(z) = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} + \frac{11}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1} + \frac{7}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}, \quad z \in E.$$

**Exerciţiul 9.3** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \frac{z^2 + 3z + 2}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

printr-o serie de puteri în jurul punctelor $0,\ 1,\ 2,\ 4$.

Pentru reprezentarea funcţiei date ca serie de puteri în jurul punctului 0 avem de stabilit:

- Punctele sigulare ale funcţiei şi natura acestora.
- Descompunerea în fracţii simple.
- Reprezentarea fiecărei fracţii simple ca serie de puteri în jurul punctului 0.
- Reprezentarea funcţiei date ca serie de puteri în jurul punctului 0.
- Domeniul reprezentării funcţiei date ca serie de puteri în jurul punctului 0.

Avem egalitatea

$$f(z) = \frac{z^2 + 3z + 2}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6} =$$

$$\frac{z^2 + 3z + 2}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}.$$

Obţinem

$$f(z) = \frac{z^2 + 3z + 2}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6} =$$

$$\frac{z^2 + 3z + 2}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{3}{z-1} - \frac{12}{z-2} + \frac{10}{z-3}.$$

Reprezentarea funcţiei date ca serie de puteri în jurul punctului 0:

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3-z} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} =$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| < 3.$$

Obţinem

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[3 - \frac{12}{2^{n+1}} + \frac{10}{3^{n+1}}\right] z^n, \quad |z| < 1.$$

Reprezentarea funcţiei date ca serie de puteri în jurul punctului 1:

$$\frac{1}{z-1} = (z-1)^{-1}, \quad 0 < |z-1| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} =$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}, \quad |z-1| < 2.$$

Obţinem

$$f(z) = \frac{3}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[12 - \frac{5}{2^n}\right](z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

Reprezentarea funcţiei date ca serie de puteri în jurul punctului 2:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2+1} = \frac{1}{1+(z-2)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n, \quad |z-2| < 1.$$

$$\frac{1}{z-2} = (z-2)^{-1}, \quad 0 < |z-2| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}.$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-2-1} = -\frac{1}{1-(z-2)} =$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n, \quad |z-2| < 1.$$

Obţinem

$$f(z) = -\frac{12}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n 3 - 10\right](z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 1.$$

Reprezentarea funcţiei date ca serie de puteri în jurul punctului 4:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-4+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-4}{3}} =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-4)^n}{3^n}, \quad |z-4| < 3.$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-4+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-4}{2}} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-4)^n}{2^n}, \quad |z-4| < 2.$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-4+1} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-4)^n, \quad |z-4| < 1.$$

Obţinem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{1}{3^n} - \frac{6}{2^n} + 10\right](z-4)^n, \quad |z-4| < 1.$$

**Exerciţiul 9.4** Să se dezvolte funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 6z^2 + 9z + 4}$$

printr-o serie de puteri în jurul punctelor 0 şi $-1$.

*Soluţie.*

Reprezentarea funcţiei date ca serie de puteri în jurul punctului 0:

Deducem egalitatea

$$f(z) = -\frac{1}{9}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{z+4}.$$

Ştim că este adevărată egalitatea:

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Din ultima egalitate deducem

$$-\frac{1}{(z+1)^2} = \left(\frac{1}{z+1}\right)' =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)z^n,$$

$$|z| < 1.$$

De asemenea obţinem

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{4^n}, \quad |z| < 4.$$

Punctul $z = 0$ este un punct în care funcţia $f$ este monogenă iar funcţia $f$ are o dezvoltare în serie Taylor în jurul punctului $z = 0$, în domeniul simplu conex $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$:

$$f(z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{9}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}(-1)^n(n+1) + \frac{1}{36}(-1)^n\frac{1}{4^n}\right]z^n, \quad |z| < 1.$$

Reprezentarea funcţiei date ca serie de puteri în jurul punctului $-1$:

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{(z+1)+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z+1}{3}} =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z+1}{3}\right)^n, \quad |z+1| < 3.$$

Punctul $z = -1$ este pol dublu pentru funcţia $f$, astfel că vom obţine o dezvoltare în serie Laurent în jurul punctului $z = -1$, în domeniul

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 3\},$$

a cărei parte principală este $-\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(z+1)^2}$:

$$f(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(z+1)^n,$$

$$0 < |z+1| < 3.$$

**Exerciţiul 9.5** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \frac{4z^2 - 2z + 9}{z^3 - 3z^2 + 4z - 12}$$

printr-o serie de puteri în domeniile

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$$

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$$

$$F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}.$$

*Soluţie.* Este adevărată egalitatea

$$f(z) = \frac{4z^2 - 2z + 9}{z^3 - 3z^2 + 4z - 12} = \frac{3}{z-3} + \frac{z}{4+z^2} + \frac{1}{4+z^2}. \tag{9.4}$$

pe care o rescriem sub forma

$$f(z) = -\frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{z}\right)^2} + \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{z}\right)^2}. \tag{9.5}$$

Din relaţia (9.5) rezultă

$$f(z) =$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{z^{2n}} + \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{z^{2n}}, \quad z \in D,$$

şi mai departe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}\left[\frac{1}{z^{2n+1}} + \frac{1}{z^{2n+2}}\right] - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}, \quad z \in D.$$

Rescriem egalitatea (9.4) sub forma

$$f(z) = -\frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{z}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)^2}. \tag{9.6}$$

În cel de al doilea caz domeniul este simplu conex. Dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei $f$ este

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}}z^{2n+1} +$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}}z^{2n}, \quad z \in E.$$

Rescriem egalitatea (9.4) sub forma

$$f(z) = \frac{3}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{z}\right)^2} + \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{z}\right)^2}. \tag{9.7}$$

Obţinem

$$f(z) =$$

$$\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{z^{2n}} + \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{z^{2n}}, \quad z \in F,$$

şi mai departe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}\left[\frac{1}{z^{2n+1}} + \frac{1}{z^{2n+2}}\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{z^{n+1}}, \quad z \in F.$$

# 10 Teoria reziduurilor

**Definiţia 10.1**
Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă iar $a \in D$ punct singular izolat al funcţiei $f$. Se numeşte reziduul funcţiei $f$ în punctul $a$ numărul complex notat $Rezf(a)$ definit prin relaţia

$$Rezf(a) = c_{-1},$$

unde $c_{-1}$ este coeficientul corespunzător puterii

$$(z-a)^{-1}$$

din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f$ în jurul punctului $a$, (adică pe o coroană $\Delta : \varepsilon < |z-a| < r$ cu $\varepsilon > 0$ oricât de mic).

**Teorema 10.1**
Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă iar $a \in D$ punct singular izolat al funcţiei $f$. Reziduul funcţiei $f$ în punctul $a$ poate fi calculat după cum urmează:

(1) Dacă $a$ este pol de ordin $p$ pentru $f$ atunci

$$Rezf(a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \left[(z-a)^p f(z)\right]^{(p-1)}.$$

(2) Dacă $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, iar $g$ şi $h$ sunt funcţii olomorfe pe o vecinătate a punctului $a$, atunci $a$ este pol simplu pentru funcţia $f$ şi

$$Rezf(a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

**Teorema 10.2** (Teorema reziduurilor)
*Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, $C$ o curbă simplă, netedă pe porţiuni şi închisă inclusă în domeniul $D$, $\Delta$ domeniul (deschis) mărginit de curba $C$. Considerăm o funcţie $f$ care are în domeniul $\Delta$ un număr finit de puncte singulare izolate, de tip pol sau singularitate esenţială, notate $a_1, a_2, ..., a_n$ şi astfel încât $f : D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\} \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă. Atunci*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} Rezf(a_k).$$

**Exemplul 10.1** *Să se calculeze integrala*

$$I_k = \int_{C_k} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2} dz, \quad k \in \{1,2,3,4\},$$

*unde*

$$C_1: \ |z| = \frac{1}{2}$$

$$C_2: \ x^2 + 8y^2 - 2 = 0$$

$$C_3: \ 8x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$C_4: \ |z| = 2.$$

*Soluţie.* Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -1, j, -j\} \to \mathbb{C}$ dată prin

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$$

este olomorfă. Punctele $z = 1$ şi $z = -1$ sunt poli simpli ai funcţiei $f$ iar punctele $z = j$ şi $z = -j$ sunt poli dubli ai funcţiei $f$. În plus

$$Rezf(1) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^{jz}}{(z-1)(z+1)(z^2+1)^2}\right] = \frac{e^j}{8},$$

$$Rezf(-1) = \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{e^{jz}}{(z-1)(z+1)(z^2+1)^2}\right] = -\frac{e^{-j}}{8},$$

$$Rezf(j) = \lim_{z\to j}\left[(z-j)^2\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z+j)^2(z-j)^2}\right]' = \frac{3je^{-1}}{8}$$

$$Rezf(-j) = \lim_{z\to -j}\left[(z+j)^2\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z+j)^2(z-j)^2}\right]' = -\frac{je}{8}$$

Funcţia $f$ nu are puncte singulare în domeniul interior limitat de cercul $C_1$. Conform teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii simplu conexe $I_1 = 0$. Punctele singulare $z = 1$, $z = -1$ se află în domeniul interior limitat de elipsa

$$C_2: \quad \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

iar punctele singulare $z = j$, $z = -j$ se află în exteriorul acestei elipse. Deci

$$I_2 = 2\pi j \left[Rezf(1) + Rezf(-1)\right].$$

Punctele singulare $z = j$, $z = -j$ se află în domeniul interior limitat de elipsa

$$C_3: \quad \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

iar punctele singulare $z = 1$, $z = -1$ se află în exteriorul acestei elipse. Deci

$$I_3 = 2\pi j\,[Rezf(j) + Rezf(-j)].$$

Toate punctele singulare ale funcţiei $f$ se află în interiorul cercului $C_4$, de aceea

$$I_4 = 2\pi j\,[Rezf(1) + Rezf(-1) + Rezf(j) + Rezf(-j)].$$

**Exemplul 10.2** *Să se calculeze integrala*

$$I_k = \int_{C_k} \frac{\sin z}{(z^2-16)(z^2+9)^3} dz, \quad k \in \{1,2,3,4\},$$

*unde*

$$C_1: \ |z| = 1$$

$$C_2: \ |z-4| = 2$$

$$C_3: \ |z-3j| = 1$$

$$C_4: \ |z-4| = 6.$$

*Soluţie.* Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{4, -4, 3j, -3j\} \to \mathbb{C}$ dată prin

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z^2-16)(z^2+9)^3}$$

este olomorfă. Punctele $z = 4$ şi $z = -4$ sunt poli simpli ai funcţiei $f$ iar punctele $z = 3j$ şi $z = -3j$ sunt poli tripli ai funcţiei $f$. În plus

$$Rezf(4) = \lim_{z\to 4}\left[(z-4)\frac{\sin z}{(z-4)(z+4)(z^2+9)^3}\right],$$

$$Rezf(3j) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 3j}\left[(z-3j)^3\frac{\sin z}{(z^2-16)(z-3j)^3(z+3j)^3}\right]'',$$

$$Rezf(-3j) = \frac{1}{2}\lim_{z\to -3j}\left[(z+3j)^3\frac{\sin z}{(z^2-16)(z+3j)^3(z-3j)^3}\right]''.$$

Funcţia $f$ nu are puncte singulare în domeniul interior limitat de cercul $C_1$. Conform teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii simplu conexe

$I_1 = 0$. Punctul singular $z = 4$, este singurul care se află în domeniul interior limitat de cercul

$$C_2 : \quad |z - 4| = 2.$$

iar punctele singulare $z = \pm 3j$, $z = -4$ se află în exteriorul acestui cerc. Deci

$$I_2 = 2\pi j Rezf(4).$$

Punctul singular $z = 3j$, este singurul care se află în domeniul interior limitat de cercul

$$C_3 : \quad |z - 3j| = 1.$$

iar punctele singulare $z = \pm 4$, $z = -3j$ se află în exteriorul acestui cerc. Deci

$$I_3 = 2\pi j Rezf(3j).$$

Punctele singulare $z = 4$, $z = \pm 3j$ ale funcţiei $f$ se află în interiorul cercului $C_4$, iar punctul singular $z = -4$ se află în exteriorul acestui cerc, de aceea

$$I_4 = 2\pi j \left[Rezf(4) + Rezf(3j) + Rezf(-3j)\right].$$

**Exemplul 10.3** Să se calculeze integrala

$$I = \int_C z^4 e^{\frac{1}{z}} dz, \quad C : \ |z| = 3$$

*Soluţie.* Deoarece

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + ... + \frac{1}{n!}z^n + ..., \quad z \in \mathbb{C}$$

rezultă că dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $g(z) = e^{\frac{1}{z}}$ în jurul punctului $z = 0$ este

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + ..., \quad z \in \mathbb{C}^*$$

şi mai departe că dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$ în jurul punctului $z = 0$ este

$$z^4 e^{\frac{1}{z}} = z^4 + \frac{1}{1!}z^3 + \frac{1}{2!}z^2 + ... + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-4}} + ..., \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

În concluzie punctul $z = 0$ este punct singular esenţial al funcţiei $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$ şi avem

$$I = 2\pi j Rezf(0) = 2\pi j c_{-1}$$

unde unde $c_{-1}$ este coeficientul corespunzător puterii $z^{-1}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$ în jurul punctului $z = 0$. Obţinem

$$I = 2\pi j \frac{1}{5!}.$$

**Teorema 10.3** (Teorema semireziduurilor)
*Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, $C$ o curbă simplă, netedă şi închisă inclusă în domeniul $D$, $\Delta$ domeniul (deschis) mărginit de curba $C$. Considerăm o funcţie $f$ care are în domeniul $\Delta$ un număr finit de puncte singulare izolate, de tip pol sau singularitate esenţială, notate $a_1, a_2, ..., a_n$ şi un număr finit de poli de ordinul întâi situaţi pe curba $C$, notaţi $b_1, b_2, ..., b_m$, astfel încât*

$$f : D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m\} \to \mathbb{C},$$

*este o funcţie olomorfă. Atunci*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} Rezf(a_k) + \pi j \sum_{l=1}^{m} Rezf(b_l).$$

**Exemplul 10.4** *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_C \frac{z}{(z+1)^2(z^2 - 5z + 6)} dz, \quad C : |z+1| = 3.$$

*Soluţie.* Punctele singulare ale funcţiei

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z^2 - 5z + 6)}$$

sunt $z = -1$ (pol dublu), $z = 2$ (pol simplu) şi $z = 3$ (pol simplu). Punctul $z = -1$ se află în domeniul interior limitat de cercul $C : |z+1| = 3$, punctul $z = 2$ se află pe cerc iar punctul $z = 3$ se află în exterior. Conform teoremei semireziduurilor

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi j Rezf(-1) + \pi j Rezf(2) = \\
&= 2\pi j \lim_{z\to -1}\left[(z+1)^2 \frac{z}{(z+1)^2(z^2-5z+6)}\right]' + \\
&+ \pi j \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z}{(z+1)^2(z-2)(z-3)}\right] = \\
&= 2\pi j \lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2-5z+6-z(2z-5)}{(z^2-5z+6)^2}\right] + \\
&\pi j \lim_{z\to 2}\left[\frac{z}{(z+1)^2(z-3)}\right] = \\
&= -\frac{11\pi j}{72}.
\end{aligned}
$$

Considerăm un cerc $\Gamma_0 : \ |z| = R_0$, domeniul

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_0\}$$

şi o funcţie olomorfă pe domeniul $E$. Punctul de la infinit poate fi pentru $f$ punct ordinar, pol sau punct singular esenţial.

**Definiţia 10.2**
Se numeşte reziduul funcţiei $f$ în punctul de la infinit numărul complex notat $Rezf(\infty)$ definit prin

$$Rezf(\infty) = -\frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma f(z)dz$$

unde $\Gamma$ este un cerc de ecuaţie $|z| = R$ cu $R > R_0$.

**Teorema 10.4** *În contextul de mai sus este adevărată formula*

$$Rezf(\infty) = Rez\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right)(0).$$

**Teorema 10.5** *Dacă $f$ este o funcţie care are în $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ un număr finit de singularităţi de tip pol sau singularitate esenţială, iar singularităţile din $\mathbb{C}$ sunt notate $a_1, a_2, ..., a_n$, atunci suma tuturor reziduurilor acestei funcţii este nulă, adică*

$$Rezf(\infty) + \sum_{k=1}^{n} Rezf(a_k) = 0.$$

**Corolarul 10.1** *Dacă $f$ este o funcţie care are în $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ un număr finit de singularităţi de tip pol sau singularitate esenţială, singularităţile din $\mathbb{C}$ sunt notate $a_1, a_2, ..., a_n$, iar $C$ este o curbă netedă pe porţiuni, simplă şi închisă astfel încât punctele $a_1, a_2, ..., a_n$ se află în domeniul interior limitat de această curbă, atunci*

$$\int_C f(z)dz = -2\pi j Rezf(\infty).$$

**Exemplul 10.5** Să se calculeze integrala complexă:

$$\int_C \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2}dz, \quad C: \ 4x^2+9y^2-36=0.$$

*Soluţie.* Facem notaţia

$$f(z) = \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2}.$$

Observăm că

(a) punctul $z=2$ este pol de ordin 4 al funcţiei $f$;

(b) punctele

$$z_k = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} + j\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right),$$

$k\in\{0,1,2,3,4\}$

sunt poli dubli ai funcţiei $f$.

Deoarece toate punctele singulare ale funcţiei $f$ se află în domeniul interior limitat de elipsa

$$C: \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$$

este adevărată egalitatea

$$\int_C \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2}dz = -2\pi j Rezf(\infty).$$

Pe de altă parte

$$Rezf(\infty) = Rez\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right)(0).$$

Deoarece

$$-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z(1-2z)^4(1+3z^5)^2},$$

rezultă că

$$Rez\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right)(0) = -\lim_{z\to 0}\left[z\frac{1}{z(1-2z)^4(1+3z^5)^2}\right] = -1.$$

În concluzie

$$\int_C \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2}dz = -2\pi j(-1) = 2\pi j.$$

# 11 Aplicaţii ale teoremei reziduurilor în calculul unor integrale reale

**Teorema 11.1** *Considerăm o funcţie raţională reală* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *astfel încât*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(Q(x) \neq 0)$$

$$\text{grad } Q - \text{grad } P \geq 2.$$

*Atunci*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} Rezf(a_k), \tag{11.1}$$

*unde* $f(z) = R(z)$ *iar* $a_1, a_2, ...a_n$ *sunt polii funcţiei* $f$ *care au partea imaginară strict pozitivă.*

**Exemplul 11.1** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx.$$

*Soluţie.* Punctele singulare ale fumcţiei $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ sunt

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + j\sin 5\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aceste patru puncte sunt poli simpli iar în semiplanul superior se află $z_0$ şi $z_1$. Conform formulei (11.1)

$$I = 2\pi j\left(Rezf(z_0) + Rezf(z_1)\right) =$$

$$= 2\pi j\left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3}\right) = 2\pi j\left(-\frac{z_0}{4} - \frac{z_1}{4}\right) = -\frac{\pi j}{2} j\sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

**Teorema 11.2** *Considerăm o funcţie raţională*

$$R = R(x, y)$$

*astfel încât funcţia*

$$g(\theta) = R(\sin\theta, \cos\theta)$$

*este o funcţie continuă pe intervalul* $[0, 2\pi]$. *Atunci*

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta = \int_{|z|=1} f(z) dz =$$

$$= 2\pi j \sum_{k=1}^{n} Rezf(a_k),$$

*unde*

$$f(z) = \frac{1}{jz} R\left(\frac{z^2-1}{2jz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)$$

*iar* $a_1, a_2, ...a_n$ *sunt polii funcţiei* $f$ *pentru care* $|a_k| < 1,\ k = 1, 2, ..., n.$

**Exemplul 11.2** Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{5+4\sin\theta} d\theta.$$

*Soluţie.* Facem schimbarea de variabilă $z = e^{j\theta}$. Când $\theta$ parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, $z$ descrie cercul $C: \ |z| = 1$, o singură dată, în sens direct. Sunt adevărate egalităţile

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \frac{z^2-1}{2jz}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Pe de altă parte din relaţia $z = e^{j\theta}$ rezultă $d\theta = \frac{1}{jz}dz$. Integrala devine

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1 + \frac{z^2+1}{2z}}{5 + 4\frac{z^2-1}{2jz}} \frac{1}{jz} dz = \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 2z + 1}{2z(2z^2 + 5jz - 2)} dz.$$

Punctele singulare ale fumcţiei $f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{2z(2z^2 + 5jz - 2)}$ sunt $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{-j}{2}$ şi $z_3 = -2j$. Toate aceste puncte sunt poli simpli. În concluzie

$$I = 2\pi j \left( Rezf(z_1) + Rezf(z_2) \right).$$

Deoarece

$$Rezf(0) = \lim_{z \to 0} \left[ z \cdot \frac{z^2 + 2z + 1}{2z(2z^2 + 5jz - 2)} \right] = -\frac{1}{4}$$

iar

$$Rezf\left(\frac{-j}{2}\right) = \lim_{z \to \frac{-j}{2}} \left[ \left(z + \frac{j}{2}\right) \cdot \frac{z^2 + 2z + 1}{4z\left(z + \frac{j}{2}\right)(z + 2j)} \right] = \frac{3 - 4j}{12}.$$

În concluzie

$$I = \frac{2\pi}{3}.$$

**Teorema 11.3** *Considerăm $\alpha > 0$ şi o funcţie raţională reală $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ astfel încât*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(Q(x) \neq 0)$$

$$\text{grad } Q - \text{grad } P \geq 2.$$

*Atunci*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{j\alpha x} dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} Rezf(a_k), \tag{11.2}$$

*unde $f(z) = R(z)e^{j\alpha z}$ iar $a_1, a_2, ...a_n$ sunt polii funcţiei $f$ care au partea imaginară strict pozitivă.*

**Exemplul 11.3** Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

*Soluţie.* Funcţia
$$f(x) = \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}$$
este pară de aceea
$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx.$$

Notăm
$$A = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx, \quad B = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}dx.$$

Observăm că
$$C = A + jB = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}e^{jx}dx.$$

Conform formulei (11.2)
$$C = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}e^{jx}dx = 2\pi j Rez(g)(j) = \pi e^{-1}$$
unde $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}e^{jz}$.

În concluzie
$$I = \frac{\pi e^{-1}}{2}.$$

## 11.1 Exerciţii propuse

**Exerciţiul 11.1** Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-4)^2} dz, \quad C: \ |z-1| = 2.$$

**Exerciţiul 11.2** Să se calculeze integrala

$$I = \int_C z^2 e^{\frac{2z}{z+1}} dz, \quad C: \ x^2 + y^2 + 4x = 0.$$

**Exerciţiul 11.3** Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{\sin z}{z^2(z^4+1)} dz, \quad C: \ |z| = 2.$$

**Exerciţiul 11.4** Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1+\sin x}{2+\cos x} dx.$$

**Exerciţiul 11.5** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

**Exerciţiul 11.6** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

**Exerciţiul 11.7** Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx.$$

# 12 Serii Fourier

**Definiţia 12.1** Fie $L > 0$. Sistemul de funcţii

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}, \ \cos\frac{\pi x}{L}, \ \sin\frac{\pi x}{L}, \ \cos\frac{2\pi x}{L}, \ \sin\frac{2\pi x}{L}, ..., \\ &\cos\frac{n\pi x}{L}, \ \sin\frac{n\pi x}{L}, ... \end{aligned} \tag{12.1}$$

se numeşte sistem trigonometric de funcţii.

**Definiţia 12.2** Considerăm un şir de funcţii $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ astfel încât, pentru orice $i \in \mathbb{N}$, funcţia

$$g_i : [a, b] \to \mathbb{R},$$

este o funcţie integrabilă Riemann. Sistemul de funcţii $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se numeşte ortogonal pe intervalul $[a, b]$ dacă pentru $i \neq k$ avem

$$\int_a^b g_i(x)g_k(x)dx = 0, \tag{12.2}$$

şi pentru $i = k$ avem

$$\int_a^b g_i(x)g_k(x)dx > 0. \tag{12.3}$$

**Teorema 12.1** *Sistemul trigonometric de funcţii este un sistem ortogonal pe intervalul $[-L, L]$ iar funcţiile acestui sistem sunt periodice de perioadă principală comună $T = 2L$.*

Presupunem $m \neq n$. Obţinem

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]dx = 0.$$

Calcule similare ne arată că oricum am alege două funcţii diferite din sistemul trigonometric de funcţii (12.1), condiţia (12.2) este îndeplinită.

Pentru $n = m$ avem

$$\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L}\frac{1+\cos\frac{2n\pi x}{L}}{2} = L > 0,$$

$$\int_{-L}^{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L}\frac{1-\cos\frac{2n\pi x}{L}}{2} = L > 0,$$

şi

$$\int_{-L}^{L} \frac{1}{4} = 2L > 0.$$

**Definiţia 12.3** O serie de funcţii de forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \Big)$$

unde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt şiruri de numere reale, se numeşte serie trigonometrică.

**Definiţia 12.4** Dacă $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă, atunci o serie trigonometrică ai cărei coeficienţi sunt daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

se numeşte serie Fourier ataşată funcţiei $f$ faţă de sistemul trigonometric, sau serie Fourier trigonometrică.

**Observaţia 12.1** Dacă $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă, atunci vom scrie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \Big),$$

unde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

**Observaţia 12.2** Dacă $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă, atunci seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx)$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\, nxdx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\, nxdx.$$

**Observaţia 12.3** Dacă $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă, atunci seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx.$$

**Observaţia 12.4** Dacă $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă şi pară, atunci seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx.$$

**Observaţia 12.5** Dacă $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă şi impară, atunci seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

**Teorema 12.2** (Teorema lui Dirichlet de convergenţă a seriilor Fourier) *Considerăm o funcţie $f$, periodică de perioadă $T$, care satisface următoarele condiţii:*

(a) *Pe orice interval de lungime $T$ este continuă exceptând eventual un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi.*

(b) *Orice interval de lungime $T$ poate fi împărţit într-un număr finit de subintervale astfel încât pe fiecare subinterval funcţia $f$ este monotonă.*

*Atunci:*

(A) *Seria Fourier este convergentă pentru orice $x \in [0, T]$.*

(B) *Considerăm $S$, suma seriei Fourier pe care o ataşăm funcţiei $f$.*

*Dacă $x \in [0, T]$ este punct de continuitate pentru funcţia $f$, atunci $S(x) = f(x)$. Dacă $x \in [0, T]$ este punct de discontinuitate pentru funcţia $f$ atunci*

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

**Observaţia 12.6** Fie $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă, pentru care sunt satisfăcute ipotezele din teorema lui Dirichlet. Atunci, pentru orice punct $x$ în care funcţia $f$ este continuă, avem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \Big),$$

unde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Dacă $x \in [-L, L]$ este punct de discontinuitate pentru funcţia $f$ atunci

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \Big),$$

unde

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

**Observaţia 12.7** Considerăm o funcţie

$$f : [0, T) \to \mathbb{R}.$$

(1) Funcţia $f : [0, T) \to \mathbb{R}$ poate fi prelungită prin periodicitate pe toată axa reală, astfel că prelungirea acesteia, $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică.

(2) Funcţia $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ poate fi prelungită prin paritate la intervalul $[-L, L]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa reală. Astfel într-o primă etapă obţinem funcţia $\tilde{f} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ care este pară şi a cărei restricţie la intervalul $[0, L]$ este $f$ şi într-o a doua etapă obţinem funcţia $\tilde{\tilde{f}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care este periodică şi pară şi a cărei restricţie la intervalul $[-L, L]$ este $\tilde{f}$.

(3) Funcţia $f : [0, L) \to \mathbb{R}$, pentru care $f(0) = 0$, poate fi prelungită prin imparitate la intervalul $(-L, L)$ şi apoi prin periodicitate la mulţimea $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)L \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dacă $f(0) \neq 0$ atunci prelungim funcţia $f : (0, L) \to \mathbb{R}$ prin imparitate la mulţimea $(-L, L) \setminus \{0\}$ şi apoi prin periodicitate la mulţimea $\mathbb{R} \setminus \{kL \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

**Exemplul 12.1** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2\pi$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

*Soluţie.* Seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\, nx + b_n \sin\, nx)$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ nxdx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\ nxdx.$$

Deoarece,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi}{2}$$

şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n + jb_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\cos\ nx + j\sin\ nx\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{jnx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xe^{jnx}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\left(\frac{1}{jn}e^{jnx}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{x}{jn}e^{jnx}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{jn\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{jnx}dx =$$

$$= \frac{1}{jn}e^{-jn\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{(jn)^2}e^{jnx}\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{jn} + \frac{1}{n^2\pi} - \frac{(-1)^n}{n^2\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left(1 - (-1)^n\right) - j\frac{(-1)^n}{n},$$

rezultă

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{2}{n^2\pi}, & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

şi

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, obţinem

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos\ x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2n+1)^2\pi}\cos\ (2n+1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\ nx\right).$$

**Exemplul 12.2** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2L$ dată prin

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-L, L].$$

*Soluţie.* Funcţia $f$ este pară deci seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Deoarece

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{2L^2}{3}$$

şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx =$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \left( \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \right)' dx =$$

$$= \frac{2}{L} \frac{L}{n\pi} x^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \frac{2}{L} \frac{L}{n\pi} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} 2x dx =$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \int_0^L x \left( -\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right)' dx =$$

$$= \frac{4L}{n^2\pi^2} x \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \frac{4L}{n^2\pi^2} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx =$$

$$= \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n - \frac{4L}{n^2\pi^2} \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L = \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n.$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ obţinem

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

**Exemplul 12.3** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia dată prin
$$f(x) = \frac{\sin x}{5 + 3\cos x}.$$

*Soluţie.* Funcţia $f$ este periodică având perioada $T = 2\pi$, este continuă iar seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ pe intervalul $[0, 2\pi]$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx)$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\ nxdx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\ nxdx.$$

Facem schimbarea de variabilă $z = e^{jx}$. Când $x$ parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, $z$ descrie cercul $C :\ |z| = 1$, o singură dată, în sens direct. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem
$$a_n + jb_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{5 + 3\cos x} e^{jnx} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{\frac{z^2-1}{2jz}}{5 + 3\frac{z^2+1}{2z}} z^n \frac{1}{jz} dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)z^{n-1}}{3z^2 + 10z + 3} dz.$$

Considerăm funcţia $g(z) = -\frac{1}{\pi}\frac{(z^2-1)z^{n-1}}{3z^2 + 10z + 3}$. Punctele singulare ale funcţiei $g$ sunt $z = -3$ şi $z = -\frac{1}{3}$ ambele fiind poli simpli. Punctul $z = -\frac{1}{3}$ se află în domeniul interior limitat de cercul $C$ iar punctul $z = -3$ se află în exterior. De aceea
$$a_n + jb_n = 2\pi j Rez\ g\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Pe de altă parte

$$Rez\ g\left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{z\to -\frac{1}{3}}\left[\left(z+\frac{1}{3}\right)g(z)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{z\to -\frac{1}{3}}\left[\left(z+\frac{1}{3}\right)\frac{(z^2-1)z^{n-1}}{3\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{z\to -\frac{1}{3}}\left[\frac{(z^2-1)z^{n-1}}{3(z+3)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{9}-1\right)(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}}{3\left(-\frac{1}{3}+3\right)} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi 3^{n+1}}.$$

În concluzie

$$a_n + jb_n = 2\pi j Rez\ g\left(-\frac{1}{3}\right) = j\frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}$$

de unde rezultă

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}.$$

La fel procedăm pentru a calcula coeficientul $a_0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{5+3\cos x}dx = \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{\frac{z^2-1}{2jz}}{5+3\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{jz}dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^2-1}{z(3z^2+10z+3)}dz.$$

Considerăm funcţia $h(z) = -\frac{1}{\pi}\frac{z^2-1}{z(3z^2+10z+3)}$. Punctele singulare ale funcţiei $h$ sunt $z=0$, $z=-3$ şi $z=-\frac{1}{3}$ toate fiind poli simpli. Punctele $z=0$ şi $z=-\frac{1}{3}$ se află în domeniul interior limitat de cercul $C$ iar punctul $z=-3$ se află în exterior. De aceea

$$a_0 = 2\pi j\left[Rez\ h(0) + Rez\ h\left(-\frac{1}{3}\right)\right].$$

Deoarece

$$Rez\ h(0) = \lim_{z\to 0} zh(z) = \frac{1}{3\pi}$$

iar

$$Rez\ h\left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left[\left(z+\frac{1}{3}\right)h(z)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left[\left(z+\frac{1}{3}\right)\frac{z^2-1}{3z\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\frac{z^2-1}{3z(z+3)} = -\frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{9}-1}{3\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}+3\right)} = -\frac{1}{3\pi}$$

rezultă

$$a_0 = 2\pi j\left[Rez\ h(0) + Rez\ h\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = 2\pi j\left[\frac{1}{3\pi} - \frac{1}{3\pi}\right] = 0.$$

Deducem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\sin\ nx.$$

**Exemplul 12.4** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de sinus funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

*Soluţie.* Pentru a obţine o o serie Fourier trigonometrică de sinusuri prelungim prin imparitate funcţia $f$ la intervalul $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

Seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\ nx$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\ nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\ nxdx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin\ nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\frac{1}{n}\cos\ nx\right)' dx +$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\left(-\frac{1}{n}\cos\ nx\right)' dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}x\cos\ nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\ nxdx -$$

$$-\frac{2}{n\pi}(\pi - x)\cos\ nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\ nxdx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\frac{1}{n}\sin\ nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi}\sin\ nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

În concluzie, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\ nx.$$

## 12.1 Forma complexă a seriilor Fourier

Considerăm o funcţie periodică $f$ de perioadă $T = 2L$, astfel încât sunt satisfăcute ipotezele din teorema lui Dirichlet.

Pentru orice punct $x$ în care funcţia $f$ este continuă, avem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\Big),$$

unde

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{1}{2}\left(e^{\frac{jn\pi x}{L}} + e^{\frac{-jn\pi x}{L}}\right) - b_n\frac{j}{2}\left(e^{\frac{jn\pi x}{L}} - e^{\frac{-jn\pi x}{L}}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{\frac{jn\pi x}{L}}(a_n - jb_n) + e^{\frac{-jn\pi x}{L}}(a_n + jb_n)\right].$$

Avem

$$a_n - jb_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\left(\cos\frac{n\pi y}{L} - j\sin\frac{n\pi y}{L}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{-jn\pi y}{L}}dy$$

şi

$$a_n + jb_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\left(\cos\frac{n\pi y}{L} + j\sin\frac{n\pi y}{L}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{jn\pi y}{L}}dy.$$

Obţinem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{\frac{jn\pi x}{L}}(a_n - jb_n) + e^{\frac{-jn\pi x}{L}}(a_n + jb_n)\right] =$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)dy +$$

$$\frac{1}{2L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{\frac{jn\pi x}{L}}\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{-jn\pi y}{L}}dy + e^{\frac{-jn\pi x}{L}}\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{jn\pi y}{L}}dy\right] =$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)dy + \frac{1}{2L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{jn\pi x}{L}}\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{-jn\pi y}{L}}dy\right) +$$

$$+\frac{1}{2L}\sum_{-\infty}^{-1}\left(e^{\frac{jn\pi x}{L}}\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{-jn\pi y}{L}}dy\right) =$$

$$\frac{1}{2L}\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{\frac{jn\pi x}{L}},$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{-jn\pi y}{L}}dy, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## 12.2 Exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 12.1** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2\pi$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

*Soluţie.* Seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx)$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ nxdx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\ nxdx.$$

Deoarece,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx = \frac{1}{\pi}\pi = 1$$

şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n + jb_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\cos\ nx + j\sin\ nx\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{jnx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{jnx}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{jn}e^{jnx}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{jn\pi}\left(1 - e^{-jn\pi}\right) =$$

$$= -\frac{j}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right),$$

rezultă

$$a_n = 0$$

şi

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right).$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, obţinem

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)\sin\ nx.$$

**Exerciţiul 12.2** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2\pi$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & -\pi < x < 0 \\ \\ 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

*Soluţie.* Seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx\right)$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ nxdx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\ nxdx.$$

Deoarece,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1+2x)dx = 1 + \frac{1}{\pi}x^2\Big|_{-\pi}^{0} = 1-\pi$$

şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n + jb_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\cos\ nx + j\sin\ nx\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{jnx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1+2x)e^{jnx}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{jn}e^{jnx}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\left(\frac{1}{jn}e^{jnx}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{jn\pi}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{2}{\pi}\frac{x}{jn}e^{jnx}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{jn\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{jnx}dx =$$

$$= \frac{j}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{2}{jn}e^{-jn\pi} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{(jn)^2}e^{jnx}\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{j}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{2(-1)^n}{jn} + \frac{2}{n^2\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^2\pi} =$$

$$j\left[\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right] + \frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right),$$

rezultă

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

şi

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, obţinem

$$f(x) = \frac{1-\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)\cos\ nx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin\ nx\right].$$

**Exerciţiul 12.3** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2L$ dată prin

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-L, L].$$

*Soluţie.* Funcţia $f$ este pară deci seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Deoarece

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{2L^2}{3}$$

şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos\frac{n\pi x}{L}dx =$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L x^2\left(\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)' dx =$$

$$= \frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}x^2\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}2x dx =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^L x\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)' dx =$$

$$= \frac{4L}{n^2\pi^2}x\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \frac{4L}{n^2\pi^2}\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}dx =$$

$$= \frac{4L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n - \frac{4L}{n^2\pi^2}\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L = \frac{4L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n.$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ obţinem

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

**Exerciţiul 12.4** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia dată prin

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{5 + 3\cos x}.$$

*Soluţie.* Funcţia $f$ este periodică având perioada $T = 2\pi$, este continuă iar seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ pe intervalul $[0, 2\pi]$ este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx)$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\ nxdx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\ nxdx.$$

Facem schimbarea de variabilă $z = e^{jx}$. Când $x$ parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, $z$ descrie cercul $C: \ |z| = 1$, o singură dată, în sens direct. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$a_n + jb_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin x + \cos x}{5 + 3\cos x} e^{jnx} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{\frac{z^2-1}{2jz} + \frac{z^2+1}{2z}}{5 + 3\frac{z^2+1}{2z}} z^n \frac{1}{jz} dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{(z^2(1+j) + j - 1)z^{n-1}}{3z^2 + 10z + 3} dz.$$

Considerăm funcţia $g(z) = -\frac{1}{\pi}\frac{(z^2(1+j) + j - 1)z^{n-1}}{3z^2 + 10z + 3}$. Punctele singulare ale funcţiei $g$ sunt $z = -3$ şi $z = -\frac{1}{3}$ ambele fiind poli simpli. Punctul $z = -\frac{1}{3}$ se află în domeniul interior limitat de cercul $C$ iar punctul $z = -3$ se află în exterior. De aceea

$$a_n + jb_n = 2\pi j Rez\ g\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Pe de altă parte

$$Rez\ g\left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left[\left(z+\frac{1}{3}\right)g(z)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left[\left(z+\frac{1}{3}\right)\frac{(z^2(1+j)+j-1)z^{n-1}}{3\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left[\frac{(z^2(1+j)+j-1)z^{n-1}}{3(z+3)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{9}(1+j)+j-1\right)(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}}{3\left(-\frac{1}{3}+3\right)} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi 3^{n+1}}\left(1-\frac{5}{4}j\right).$$

În concluzie

$$a_n + jb_n = 2\pi j Rez\ g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\left(2j+\frac{5}{2}\right).$$

de unde rezultă

$$a_n = \frac{5(-1)^{n+1}}{2\cdot 3^{n+1}}, \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}.$$

La fel procedăm pentru a calcula coeficientul $a_0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin x+\cos x}{5+3\cos x}dx = \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{\frac{z^2-1}{2jz}+\frac{z^2+1}{2z}}{5+3\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{jz}dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^2(1+j)+j-1}{z(3z^2+10z+3)}dz.$$

Considerăm funcţia $h(z) = -\dfrac{1}{\pi}\dfrac{z^2(1+j)+j-1}{z(3z^2+10z+3)}$. Punctele singulare ale funcţiei $h$ sunt $z=0$, $z=-3$ şi $z=-\dfrac{1}{3}$ toate fiind poli simpli. Punctele $z=0$ şi $z=-\dfrac{1}{3}$ se află în domeniul interior limitat de cercul $C$ iar punctul $z=-3$ se află în exterior. De aceea

$$a_0 = 2\pi j\left[Rez\ h(0) + Rez\ h\left(-\frac{1}{3}\right)\right].$$

Deoarece

$$Rez\ h(0) = \lim_{z\to 0} zh(z) = \frac{1-j}{3\pi}$$

iar

$$Rez\ h\left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{z\to -\frac{1}{3}}\left[\left(z+\frac{1}{3}\right)h(z)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{z\to -\frac{1}{3}}\left[\left(z+\frac{1}{3}\right)\frac{z^2(1+j)+j-1}{3z\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{z\to -\frac{1}{3}}\frac{z^2(1+j)+j-1}{3z(z+3)} = -\frac{1}{3\pi}\left(1-\frac{5}{4}j\right).$$

rezultă

$$a_0 = 2\pi j\left[Rez\ h(0) + Rez\ h\left(-\frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$= 2\pi j\left[\frac{1-j}{3\pi} - \frac{1}{3\pi}\left(1-\frac{5}{4}j\right)\right] =$$

$$= \frac{2j}{3}\left(-j+\frac{5}{4}j\right) = -\frac{1}{6}.$$

Deducem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f(x) = -\frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5(-1)^{n+1}}{2\cdot 3^{n+1}}\cos\ nx + \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\sin\ nx\right].$$

**Exemplul 12.5** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de sinus funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

*Soluţie.* Pentru a obţine o o serie Fourier trigonometrică de sinusuri prelungim prin imparitate funcţia $f$ la intervalul $[-\pi,\pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \le x \le \frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

Seria Fourier trigonometrică ataşată funcţiei $f$ este

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\ nx$$

coeficienţii fiind daţi prin formulele

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\ nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\ nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin\ nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\frac{1}{n}\cos\ nx\right)' dx +$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\left(-\frac{1}{n}\cos\ nx\right)' dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} x\cos\ nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\ nx dx -$$

$$-\frac{2}{n\pi}(\pi - x)\cos\ nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\ nx dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\frac{1}{n}\sin\ nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi}\sin\ nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

În concluzie, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\ nx.$$

## 12.3 Exerciţii propuse

**Exerciţiul 12.5** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

**Exerciţiul 12.6** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2\pi$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin\, x, & 0 < x < \pi \\ \\ 0, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

**Exerciţiul 12.7** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2L$ dată prin

(a) $\quad f(x) = x, \quad x \in (-L, L]$

(b) $\quad f(x) = x^2, \quad x \in (0, 2L]$

**Exerciţiul 12.8** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia dată prin

$$f(x) = \frac{1}{5 - 4\cos x}.$$

**Exerciţiul 12.9** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de sinusuri funcţia

$$f(x) = x, \quad x \in [0, \pi).$$

**Exerciţiul 12.10** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de sinusuri funcţia

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, L).$$

**Exerciţiul 12.11** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de cosinusuri funcţia

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, L].$$

**Exerciţiul 12.12** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de cosinusuri funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3}, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{3} \\ \\ 0, & \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3} \\ \\ -\dfrac{\pi}{3}, & \dfrac{2\pi}{3} < x \le \pi \end{cases}$$

# 13 Integrala Fourier

**Teorema 13.1** (Formula lui Fourier)
*Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ o funcţie care satisface condiţiile lui Dirichlet pe orice interval de lungime finită şi astfel încât, în fiecare punct c de discontinuitate,*

$$F(c)=\frac{1}{2}\left[F(c-0)+F(c+0)\right].$$

*Dacă*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\xi)|d\xi<\infty,$$

*atunci*

$$F(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)e^{-jx\eta}d\eta\right)e^{jx\xi}dx. \tag{13.1}$$

**Observaţia 13.1** Formula (13.1) se numeşte formula lui Fourier, iar integrala dublă din formula lui Fourier se numeşte integrala Fourier.

## 13.1 Forma reală a integralei Fourier

**Teorema 13.2**
*Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ o funcţie care satisface condiţiile lui Dirichlet pe orice interval de lungime finită şi astfel încât, în fiecare punct c de discontinuitate,*

$$F(c)=\frac{1}{2}\left[F(c-0)+F(c+0)\right].$$

*Dacă*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\xi)|d\xi<\infty,$$

*atunci*

$$F(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\cos x(\xi-\eta)d\eta\right)dx. \tag{13.2}$$

*Demonstraţie.*

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)e^{-jx\eta}d\eta\right)e^{jx\xi}dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\cos x(\xi-\eta)d\eta\right)dx+$$

$$\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\sin x(\xi-\eta)d\eta\right)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\cos x(\xi-\eta)d\eta\right)dx.$$

Observăm că formula (13.2) poate fi scrisă

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\cos x(\xi-\eta)d\eta\right)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos x\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\cos x\eta d\eta\right)dx+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin x\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\sin x\eta d\eta\right)dx.$$

Dacă funcţia $F$ este pară atunci

$$F(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos x\xi\left(\int_{0}^{+\infty}F(\eta)\cos x\eta d\eta\right)dx, \tag{13.3}$$

iar dacă funcţia $F$ este impară atunci

$$F(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin x\xi\left(\int_{0}^{+\infty}F(\eta)\sin x\eta d\eta\right)dx. \tag{13.4}$$

Dacă facem notaţia

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)e^{-jx\eta}d\eta, \tag{13.5}$$

atunci conform formulei (13.1) avem

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{jx\xi} dx. \tag{13.6}$$

În formula (13.5), avem transformata Fourier $f$ a funcţiei $F$, iar în formula (13.6), avem transformata Fourier $F$ a funcţiei $f$.

Se mai face notaţia

$$\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi).$$

şi

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F](x).$$

Dacă funcţia $F$ este pară şi facem notaţia

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F(\eta) \cos x\eta d\eta, \tag{13.7}$$

atunci, conform formulei (13.3) avem

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos x\xi dx. \tag{13.8}$$

În formula (13.7), avem transformata Fourier $f$ a funcţiei $F$, iar în formula (13.8), avem transformata Fourier $F$ a funcţiei $f$.
Dacă funcţia $F$ este impară şi facem notaţia

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F(\eta) \sin x\eta d\eta, \tag{13.9}$$

atunci conform formulei (13.4) avem

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x) \sin x\xi dx. \tag{13.10}$$

În formula (13.9), avem transformata Fourier $f$ a funcţiei $F$, iar în formula (13.10), avem transformata Fourier $F$ a funcţiei $f$.

**Exerciţiul 13.1** *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\int_{0}^{\infty} F(\eta) \cos x\eta d\eta = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1] \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

*Soluţie.* Ecuaţia de mai sus este echivalentă cu

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(\eta)\cos x\eta d\eta = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-x)\,, & x\in[0,1] \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Facem notaţia

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-x)\,, & x\in[0,1] \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

astfel că ecuaţia devine de forma (13.7):

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F(\eta)\cos x\eta d\eta.$$

Conform relaţiei (13.8) rezultă

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos x\xi dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos x\xi dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos\xi}{\xi^2}.$$

# 14 Transformata Laplace

**Definiţia 14.1** Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ se numeşte funcţie original dacă

(1) $(\forall t\in(-\infty,0))(f(t)=0)$

(2) Pe orice interval de lungime finită funcţia $f$ are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate, iar acestea sunt de speţa întâi.

(3) $(\exists M\geq 0)(\exists p_0\geq 0)(\forall t\in\mathbb{R})\left(|f(t)|\leq Me^{p_0 t}\right)$

**Definiţia 14.2** Fie $f$ o funcţie original. Se numeşte transformata Laplace a funcţiei $f$ (imaginea prin transformarea Laplace a funcţiei $f$), funcţia $F:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definită prin

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \tag{14.1}$$

unde

$$D = \{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\, s > p_0\}.$$

**Observaţia 14.1** Funcţia $F : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită în relaţia (14.1) verifică inegalitatea

$$(\forall s \in D)\left(|F(s)| \leq \frac{M}{\text{Re } s - p_0}\right)$$

Într-adevăr, avem:

$$|F(s)| = \left|\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right| \leq \int_0^\infty |f(t)| \cdot |e^{-st}|dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty Me^{p_0t} \cdot e^{-\text{Re}s \cdot t}dt = M\int_0^\infty e^{(p_0-\text{Re}s)t}dt =$$

$$= \frac{M}{p_0 - \text{Re}s}\lim_{b\to\infty} e^{(p_0-\text{Re}s)t}\Big|_0^b = \frac{M}{\text{Re } s - p_0}.$$

**Notaţia 14.1** Notăm funcţia $F : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită în relaţia (14.1) prin

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s). \tag{14.2}$$

Numărul $p_0$ se numeşte indicele de creştere al funcţiei $f$. Având transformata Laplace $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ corespunzătoare funcţiei original $f$, putem determina funcţia $f$ şi notăm operaţia de trecere de la imagine la original prin

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t). \tag{14.3}$$

Se mai utilizează notaţia

$$f(t) \longleftrightarrow \mathcal{L}(f(t))(s).$$

**Exemplul 14.1**

Considerăm funcţia unitate a lui Heaviside

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Funcţia $\eta$ este o funcţie original şi are indicele de creştere $p_0 = 0$. Din Definiţia 14.2 rezultă, că pentru $s \in \mathbb{C}$ astfel încât Re$s > 0$, avem

$$\mathcal{L}(\eta(t))(s) = \int_0^\infty \eta(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^b = -\frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-sb} - 1\right) = \frac{1}{s},$$

deoarece

$$|e^{-sb}| = e^{-\text{Re}s\ b}$$

iar

$$\lim_{b\to\infty} e^{-\text{Re}s\ b} = 0.$$

**Observaţia 14.2** Deoarece prima condiţie din Definiţia 14.1 nu este în general îndeplinită, în calculul transformatei Laplace, vom considera că orice funcţie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

este în prealabil înmulţită cu funcţia $\eta$ şi notată apoi tot cu $f$.

**Exemplul 14.2** Considerăm $\lambda \in \mathbb{C}$ şi funcţia

$$f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funcţia $f$ este o funcţie original şi are indicele de creştere $p_0 = \max\{0,\ \text{Re}\lambda\}$. Din Definiţia 14.2 rezultă

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{s-\lambda}.$$

**Propoziţia 14.1** *Dacă $f$ şi $g$ sunt funcţii original iar $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ atunci*

$$\mathcal{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right](s) = \alpha\mathcal{L}[f(t)](s) + \beta\mathcal{L}[g(t)](s).$$

**Propoziţia 14.2** *Dacă $f$ este o funcţie original iar $\alpha > 0$ atunci*

$$\mathcal{L}\left[f(\alpha t)\right](s) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

**Propoziţia 14.3** *Dacă $f$ este o funcţie original iar $\lambda \in \mathbb{C}$ atunci*

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}f(t)](s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](s-\lambda).$$

**Propoziţia 14.4** *Dacă $f$ este o funcţie original iar $F$ este transformata Laplace a funcţiei $f$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem*

$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s) = F^{(n)}(s).$$

**Propoziţia 14.5**

*Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f$ o funcţie original, astfel încât derivatele $f', f'', ..., f^{(n)}$ sunt de asemenea funcţii original. Presupunem că*

$$f(0), f'(0), ..., f^{(n-1)}(0)$$

*sunt limitele la dreapta în origine ale funcţiilor*

$$f, f', ..., f^{(n-1)}.$$

*Dacă $F$ este transformata Laplace a funcţiei $f$, atunci*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n F(s) -$$

$$-\left(s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f'(0) + ... + f^{(n-1)}(0)\right).$$

**Propoziţia 14.6** *Dacă $f$ şi $g$ sunt funcţii original iar $F$ şi $G$ sunt transformatele Laplace ale funcţiilor $f$ şi $g$, atunci*

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = F(s)G(s),$$

*unde*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau. \tag{14.4}$$

**Observaţia 14.3** Operaţia definită în relaţia (14.4) se numeşte produs de convoluţie al funcţiilor $f$ şi $g$.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Următorul tabel conţine transformate Laplace calculate cu ajutorul definiţiilor şi rezultatelor de mai sus:

$$\eta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$e^{\lambda t} \longleftrightarrow \frac{1}{s-\lambda}$$

$$\cos\ \alpha t \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

$$\sin\ \alpha t \longleftrightarrow \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$t^n \longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

**Exerciţiul 14.1** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x'''(t) - 6x''(t) + 11x'(t) - 6x(t) = e^{4t} \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1. \end{cases} \tag{14.5}$$

*Soluţie.* Considerăm

$$x(t) \longleftrightarrow X(s).$$

Conform Propoziţiei 14.5 rezultă

$$x'''(t) \longleftrightarrow s^3X(s) - \left(s^2x(0) + sx'(0) + x''(0)\right) = s^3X(s) - 1$$

$$x''(t) \longleftrightarrow s^2X(s) - (sx(0) + x'(0)) = s^2X(s)$$

$$x'(t) \longleftrightarrow sX(s) - x(0) = sX(s)$$

Aplicând transformata Laplace ecuaţiei diferenţiale din (16.29) obţinem ecuaţia operaţională

$$X(s)\left(s^3 - 6s^2 + 11s - 6\right) - 1 = \frac{1}{s-4}$$

şi mai departe

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-4)}.$$

Deoarece

$$X(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-4},$$

rezultă

$$x(t) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{4t}.$$

**Exerciţiul 14.2** Să se rezolve ecuaţia integrală

$$f(t) = \sin t - \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{14.6}$$

*Soluţie.* Considerăm
$$f(t) \longleftrightarrow F(s).$$
Din (16.28) rezultă
$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} - F(s)\frac{1}{s^2}$$
şi mai departe
$$F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}.$$
Notăm $g(t) = \cos t$. Deoarece
$$\cos\ t \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+1},$$
obţinem
$$f(t) = (g * g)(t) = \int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\left(\sin t + t\cos t\right).$$

**Exerciţiul 14.3** Să se rezolve problema Cauchy
$$\begin{cases} x'''(t) - 3x''(t) + 2x'(t) = \cos t \\ \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1. \end{cases} \tag{14.7}$$

*Soluţie.* Considerăm
$$x(t) \longleftrightarrow X(s).$$
Conform Propoziţiei 14.5 rezultă
$$x'''(t) \longleftrightarrow s^3X(s) - \left(s^2x(0) + sx'(0) + x''(0)\right) = s^3X(s) - 1$$
$$x''(t) \longleftrightarrow s^2X(s) - (sx(0) + x'(0)) = s^2X(s)$$
$$x'(t) \longleftrightarrow sX(s) - x(0) = sX(s)$$
Aplicând transformata Laplace ecuaţiei diferenţiale din (14.7) obţinem ecuaţia operaţională
$$X(s)\left(s^3 - 3s^2 + 2s\right) - 1 = \frac{s}{s^2+1}$$
şi mai departe
$$X(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s-1)(s-2)(s^2+1)}.$$
Deoarece
$$X(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{3s+1}{s^2+1},$$

rezultă

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^t + \frac{7}{10}e^{2t} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t).$$

**Exerciţiul 14.4** Să se rezolve ecuaţia integrală

$$1 - \cos t = \int_0^t \mathrm{sh}(t-\tau)x(\tau)d\tau. \tag{14.8}$$

*Soluţie.* Considerăm

$$x(t) \longleftrightarrow X(s).$$

Din (14.8) rezultă

$$\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)X(s)$$

şi mai departe

$$X(s) = \frac{s^2-1}{s(s^2+1)}.$$

Deoarece

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2s}{s^2+1},$$

rezultă că

$$x(t) = -\eta(t) + 2\cos t.$$

**Exerciţiul 14.5** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x'' = x - y - z \\ y'' = -x + y - z \\ z'' = -x - y + z \end{cases} \tag{14.9}$$

ştiind că

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$$

*Soluţie.* Considerăm

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

$$y(t) \longleftrightarrow Y(s)$$

$$z(t) \longleftrightarrow Z(s).$$

Aplicând transformata Laplace fiecărei ecuaţii din sistemul (14.9) obţinem sistemul

$$\begin{cases} s^2X(s) - s = X(s) - Y(s) - Z(s) \\ s^2Y(s) = -X(s) + Y(s) - Z(s) \\ s^2Z(s) = -X(s) - Y(s) + Z(s) \end{cases} \tag{14.10}$$

care este echivalent cu

$$\begin{cases} X(s)(s^2-1) + Y(s) + Z(s) = s \\ X(s) + Y(s)(s^2-1) + Z(s) = 0 \\ X(s) + Y(s) + Z(s)(s^2-1) = 0 \end{cases} \tag{14.11}$$

Determinantul sistemului de mai sus este

$$\Delta = \begin{vmatrix} s^2-1 & 1 & 1 \\ 1 & s^2-1 & 1 \\ 1 & 1 & s^2-1 \end{vmatrix} = (s^2+1)(s^2-2)^2.$$

Obţinem

$$X(s) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} s & 1 & 1 \\ 0 & s^2-1 & 1 \\ 0 & 1 & s^2-1 \end{vmatrix} = \frac{s^3}{(s^2+1)(s^2-2)}.$$

Deoarece

$$X(s) = \frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{s-\sqrt{2}} + \frac{1}{s+\sqrt{2}}\right)$$

rezultă că

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3}e^{\sqrt{2}\,t} + \frac{1}{3}e^{-\sqrt{2}\,t}.$$

Analog calculăm $Y(s),\ Z(s),\ y(t),\ z(t)$.

Să se calculeze funcţia

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(x^2+a^2)}dx, \quad t > 0.$$

*Soluţie.* Calculăm transformata Laplace pentru funcţia $f$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(x^2+a^2)}dx\right) e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(x^2+a^2)}e^{-st}dt\right) dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x(x^2+a^2)} \left(\int_0^\infty \sin(tx)e^{-st}dt\right) dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x(x^2+a^2)} \cdot \frac{x}{x^2+s^2}dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2} \cdot \frac{1}{x^2+s^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}2\pi j \left(Rez\ g(aj) + Rez\ g(sj)\right),$$

unde am considerat $s > 0$ şi

$$g(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+s^2)}.$$

Obţinem

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \pi\ j \left(\frac{1}{2aj(s^2-a^2)} + \frac{1}{2sj(a^2-s^2)}\right) =$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{s^2-a^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{s(s+a)} = \frac{\pi}{2a^2} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right).$$

În concluzie

$$f(t) = \frac{\pi}{2a^2} \cdot \left(1 - e^{-at}\right).$$

**Exerciţiul 14.6** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x'''(t) - 6x''(t) + 11x'(t) - 6x(t) = e^{4t} \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1. \end{cases} \tag{14.12}$$

*Soluţie.* Considerăm

$$x(t) \longleftrightarrow X(s).$$

Conform Propoziţiei 14.5 rezultă

$$x'''(t) \longleftrightarrow s^3X(s) - \left(s^2x(0) + sx'(0) + x''(0)\right) = s^3X(s) - 1$$

$$x''(t) \longleftrightarrow s^2X(s) - (sx(0) + x'(0)) = s^2X(s)$$

$$x'(t) \longleftrightarrow sX(s) - x(0) = sX(s)$$

Aplicând transformata Laplace ecuaţiei diferenţiale din (16.29) obţinem ecuaţia operaţională

$$X(s)\left(s^3 - 6s^2 + 11s - 6\right) - 1 = \frac{1}{s-4}$$

şi mai departe

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-4)}.$$

Deoarece

$$X(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-4},$$

rezultă

$$x(t) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{4t}.$$

**Exerciţiul 14.7** Să se rezolve ecuaţia integrală

$$f(t) = \sin t - \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{14.13}$$

*Soluţie.* Considerăm

$$f(t) \longleftrightarrow F(s).$$

Din (16.28) rezultă

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} - F(s)\frac{1}{s^2}$$

şi mai departe

$$F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}.$$

Notăm $g(t) = \cos t$. Deoarece

$$\cos\ t \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+1},$$

obţinem

$$f(t) = (g * g)(t) = \int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\left(\sin t + t\cos t\right).$$

### 14.1 Exerciţii propuse

**Exerciţiul 14.8** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 9e^{3t} \\ \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases} \tag{14.14}$$

**Exerciţiul 14.9** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x'''(t) - 3x''(t) + 2x'(t) = e^t t \cos t \\ \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1. \end{cases} \tag{14.15}$$

**Exerciţiul 14.10** Să se rezolve ecuaţia integrală

$$t^3 = \int_0^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau. \tag{14.16}$$

## 15 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea

Vom considera ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea liniare de forma

$$\begin{aligned} & a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{15.1}$$

unde funcţiile $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ sunt continue pe o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^2$ iar

$$u : D \to \mathbb{R}$$

este o funcţie necunoscută, astfel încât $u \in \mathcal{C}^2(D)$.

Considerăm schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases} \tag{15.2}$$

Transformarea inversă este

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ \\ y = y(\xi,\eta). \end{cases}$$

Notăm cu $\tilde{u}$ funcţia definită prin relaţia

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)). \tag{15.3}$$

Relaţia (15.3) este echivalentă cu

$$u(x,y) = \tilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y)). \tag{15.4}$$

Din relaţiile (15.2) şi (15.4) rezultă

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}
\end{aligned} \tag{15.5}$$

şi mai departe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

În concluzie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ &+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{15.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 +$$

$$+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Considerăm următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul întâi:

$$a(x,y)\left(y'\right)^2 - 2b(x,y)y' + c(x,y) = 0. \tag{15.7}$$

Ecuaţia (15.7) se numeşte ecuaţia caracteristică. Notăm

$$\delta = b^2 - ac.$$

În funcţie de semnul lui $\delta$ distingem următoarele tipuri de ecuaţii:

(1) Ecuaţii de tip hiperbolic pentru $\delta > 0$.

(2) Ecuaţii de tip parabolic pentru $\delta = 0$.

(3) Ecuaţii de tip eliptic pentru $\delta < 0$.

(1) În cazul ecuaţiilor de tip hiperbolic soluţia ecuaţiei (15.7) este de forma:

$$\begin{cases} \xi(x,y) = c_1 \\ \eta(x,y) = c_2. \end{cases}$$

Vom face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia (15.1), derivatele (15.5) şi (15.6), obţinem forma canonică a ecuaţiei (15.1):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + e_1(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + f_1(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0.$$

(2) În cazul ecuaţiilor de tip parabolic soluţia ecuaţiei (15.7) este de forma:

$$\xi(x,y) = c.$$

Vom face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \\ \eta = x, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \\ \eta = y. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia (15.1), derivatele (15.5) şi (15.6), obţinem forma canonică a ecuaţiei (15.1):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + e_2(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + f_2(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0.$$

(3) În cazul ecuaţiilor de tip eliptic soluţia ecuaţiei (15.7) este de forma:

$$\begin{cases} \xi(x,y) + j\eta(x,y) = c \\ \\ \xi(x,y) - j\eta(x,y) = \overline{c}. \end{cases}$$

Vom face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia (15.1), derivatele (15.5) şi (15.6), obţinem forma canonică a ecuaţiei (15.1):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + e_3(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + f_3(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0.$$

## 16 Exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 16.1** Să se determine soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{16.1}$$

care verifică următoarele condiţii

$$\begin{cases} u(0, y) = 9y^3, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = y^2. \end{cases}$$

*Soluţie.* Din ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei (16.26)

$$2\left(y'\right)^2 + 7y' + 3 = 0$$

rezultă $y' = -\dfrac{1}{2}$ şi $y' = -3$. Obţinem familiile de soluţii

$$\begin{cases} x + 2y = C_1, \\ 3x + y = C_2. \end{cases}$$

Considerăm schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi = x + 2y, \\ \eta = 3x + y. \end{cases} \tag{16.2}$$

Transformarea inversă este

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{5}\xi + \dfrac{2}{5}\eta, \\ y = \dfrac{3}{5}\xi - \dfrac{1}{5}\eta. \end{cases}$$

Notăm cu $\tilde{u}$ funcţia definită prin relaţia

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)). \tag{16.3}$$

Relaţia (16.28) este echivalentă cu

$$u(x,y) = \tilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y)). \tag{16.4}$$

Din relaţiile (16.27) şi (16.29) rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + 3\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + 9\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 7\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + 3\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}.$$

Ecuaţia (16.26) devine

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{16.5}$$

iar aceasta din urmă are soluţia generală

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Rezultă că ecuaţia ecuaţia (16.26) are soluţia generală

$$u(x,y) = F(x+2y) + G(3x+y).$$

Din condiţia $u(0,y) = 9y^3$ obţinem

$$F(2y) + G(y) = 9y^3. \tag{16.6}$$

Pe de altă parte

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = F'(x+2y) + 3G'(3x+y)$$

deci

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = F'(2y) + 3G'(y).$$

Din condiţia $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = y^2$ obţinem

$$F'(2y) + 3G'(y) = y^2. \tag{16.7}$$

Din relaţiile (16.6) şi (16.7) rezultă sistemul

$$\begin{cases} 2F'(2y) + G'(y) = 27y^2, \\ F'(2y) + 3G'(y) = y^2, \end{cases}$$

care are soluţia

$$\begin{cases} F'(2y) = 16y^2, \\ G'(y) = -5y^2. \end{cases}$$

Obţinem

$$\begin{cases} F(y) = \dfrac{4}{3}y^3 + C_1, \\ G(y) = -\dfrac{5}{3}y^3 + C_2, \end{cases}$$

deci

$$u(x,y) = \frac{4}{3}(x+2y)^3 - \frac{5}{3}(3x+y)^3 + C.$$

Deoarece $u(0,y) = 9y^3$, deducem $C = 0$ deci

$$u(x,y) = \frac{4}{3}(x+2y)^3 - \frac{5}{3}(3x+y)^3.$$

**Exerciţiul 16.2** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{16.8}$$

în ipoteza $(x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$.

*Soluţie.* Din ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei (16.20)

$$y^2\left(y'\right)^2 + 2xyy' + x^2 = 0$$

rezultă $y' = -\dfrac{x}{y}$. Obţinem familia de soluţii

$$x^2 + y^2 = C.$$

Considerăm schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi = x^2 + y^2, \\ \eta = x. \end{cases} \tag{16.9}$$

Transformarea inversă este

$$\begin{cases} x = \eta, \\ \\ y = \sqrt{\xi - \eta^2}. \end{cases}$$

Notăm cu $\tilde{u}$ funcţia definită prin relaţia

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)). \tag{16.10}$$

Relaţia (16.22) este echivalentă cu

$$u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y)). \tag{16.11}$$

Din relaţiile (16.21) şi (16.23) rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 4x\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2y\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4y^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}.$$

Ecuaţia (16.20) devine

$$y^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} - x\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0. \tag{16.12}$$

Conform relaţiilor (16.21) ecuaţia (16.24) poate fi rescrisă sub forma

$$(\xi - \eta^2)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} - \eta\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0. \tag{16.13}$$

Facem notaţia

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = w.$$

Ecuaţia (16.13) devine

$$(\xi - \eta^2)\frac{\partial w}{\partial \eta} - \eta w = 0. \tag{16.14}$$

Ecuaţia (16.25) are soluţia generală

$$w(\xi,\eta)=\frac{F(\xi)}{\sqrt{\xi-\eta^2}}$$

Din

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=\frac{F(\xi)}{\sqrt{\xi-\eta^2}}$$

rezultă

$$\tilde{u}(\xi,\eta)=F(\xi)\mathrm{arcsin}\frac{\eta}{\sqrt{\xi}}+G(\xi).$$

În concluzie, soluţia generală a ecuaţiei (16.20) este

$$u(x,y)=F(x^2+y^2)\mathrm{arcsin}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+G(x^2+y^2).$$

**Exerciţiul 16.3** Să se aducă la forma canonică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{16.15}$$

*Soluţie.* Din ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei (16.31)

$$\left(y'\right)^2+6y'+10=0$$

rezultă $y'=-3+j$ şi $y'=-3-j$. Obţinem familiile de soluţii

$$\begin{cases} 3x+y+jx=C, \\ 3x+y-jx=\overline{C}. \end{cases}$$

Considerăm schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi=3x+y, \\ \eta=x. \end{cases} \tag{16.16}$$

Transformarea inversă este

$$\begin{cases} x=\eta, \\ y=\xi-3\eta. \end{cases}$$

Notăm cu $\tilde{u}$ funcţia definită prin relaţia

$$\tilde{u}(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)). \tag{16.17}$$

Relaţia (16.33) este echivalentă cu

$$u(x,y) = \tilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y)). \tag{16.18}$$

Din relaţiile (16.32) şi (16.34) rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}.$$

Ecuaţia (16.31) devine

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0. \tag{16.19}$$

**Exerciţiul 16.4** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{16.20}$$

*Soluţie.* Din ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei (16.20)

$$\left(y'\right)^2 - 4y' + 4 = 0$$

rezultă $y' = 2$. Obţinem familia de soluţii

$$2x - y = C.$$

Considerăm schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi = 2x - y, \\ \eta = x. \end{cases} \tag{16.21}$$

Notăm cu $\tilde{u}$ funcţia definită prin relaţia

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)). \tag{16.22}$$

Relaţia (16.22) este echivalentă cu

$$u(x,y) = \tilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y)). \tag{16.23}$$

Din relaţiile (16.21) şi (16.23) rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}.$$

Ecuaţia (16.20) devine

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = 0. \tag{16.24}$$

Facem notaţia

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = w.$$

Ecuaţia (16.20) devine

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0. \tag{16.25}$$

Ecuaţia (16.25) are soluţia generală

$$w(\xi,\eta) = F(\xi).$$

Din

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = F(\xi)$$

rezultă

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi)\cdot\eta + G(\xi).$$

În concluzie, soluţia generală a ecuaţiei (16.20) este

$$u(x,y) = F(2x-y)\cdot x + G(2x-y).$$

**Exerciţiul 16.5** Să se determine soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (x,y) \in (0,\infty)\times(0,\infty). \tag{16.26}$$

*Soluţie.* Din ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei (16.26)

$$x^2\left(y'\right)^2 - y^2 = 0$$

rezultă

$$y' = \pm\frac{y}{x}.$$

Obţinem familiile de soluţii:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = C_1, \\ xy = C_2. \end{cases}$$

Considerăm schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{y}{x}, \\ \eta = xy. \end{cases} \tag{16.27}$$

Notăm cu $\tilde{u}$ funcţia definită prin relaţia

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)). \tag{16.28}$$

Relaţia (16.28) este echivalentă cu

$$u(x,y) = \tilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y)). \tag{16.29}$$

Din relaţiile (16.27) şi (16.29) rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \left(-\frac{2y^2}{x^2}\right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \cdot y^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{2y}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{1}{x^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \cdot x^2.$$

Ecuaţia (16.26) devine

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{16.30}$$

iar aceasta din urmă are soluţia generală

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Rezultă că ecuaţia ecuaţia (16.26) are soluţia generală

$$u(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right) + G(x \cdot y).$$

**Exerciţiul 16.6** Să se aducă la forma canonică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{16.31}$$

*Soluţie.* Din ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei (16.31)

$$\left(y'\right)^2 + 4y' + 5 = 0$$

rezultă $y' = -2 + j$ şi $y' = -2 - j$. Obţinem familiile de soluţii

$$\begin{cases} 2x + y + jx = C, \\ 2x + y - jx = \overline{C}. \end{cases}$$

Considerăm schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi = 2x + y, \\ \eta = x. \end{cases} \tag{16.32}$$

Notăm cu $\tilde{u}$ funcţia definită prin relaţia

$$\tilde{u}(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)). \tag{16.33}$$

Relaţia (16.33) este echivalentă cu

$$u(x,y)=\tilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y)). \tag{16.34}$$

Din relaţiile (16.32) şi (16.34) rezultă

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\\
&\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}+4\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\partial \eta}\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}.
\end{aligned}$$

Ecuaţia (16.31) devine

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}+3\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}=0. \tag{16.35}$$

## 16.1 Exerciţii propuse

**Exerciţiul 16.7** Să se determine soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{16.36}$$

care verifică următoarele condiţii

$$\begin{cases} u(x,2x)=e^{-x},\\ u(x,3x)=e^{x}. \end{cases}$$

**Exerciţiul 16.8** Să se aducă la forma canonică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{16.37}$$

**Exerciţiul 16.9** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{16.38}$$

# 17 Exerciţii

## 17.1 Funcţii complexe de variabilă complexă

**Exerciţiul 17.1** Se consideră funcţia

$$u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) = e^x \sin y + \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Să se determine funcţia $v$ astfel încât $f = u + jv$ să fie olomorfă şi $f\left(j\frac{\pi}{2}\right) = -j\frac{2}{\pi}$.

**Exerciţiul 17.2** Se consideră funcţia

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) = e^x \left[(x^2 - y^2)\cos y - 2xy \sin y\right].$$

Să se determine funcţia $v$ astfel încât $f = u + jv$ să fie olomorfă şi $f\left(j\frac{\pi}{2}\right) = j\frac{\pi^2}{4}$.

**Exerciţiul 17.3** Se consideră funcţia

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad v(x,y) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy.$$

Să se determine funcţia $u$ astfel încât $f = u + jv$ să fie olomorfă şi $f(0) = 1$.

**Exerciţiul 17.4** Se consideră funcţia

$$v : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 0\} \to \mathbb{R}, \quad v(x,y) = xy \ln(x^2+y^2) + (x^2-y^2)\mathrm{arctg}\frac{y}{x}.$$

Să se determine funcţia $u$ astfel încât $f = u + jv$ să fie olomorfă şi $f(1) = 0$.

**Exerciţiul 17.5** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţiile

(a) $\sin z = 2$

(b) $\cos z = j$

(c) $e^z = 1 - j\sqrt{3}$.

**Exerciţiul 17.6** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \frac{z+4}{z^2 - 6z + 8}$$

printr-o serie de puteri în jurul punctului 3.

**Exerciţiul 17.7** Să se dezvolte funcţia

$$f(z) = \frac{z-1}{z-2}$$

printr-o serie de puteri în jurul punctelor 0 şi $j$.

**Exerciţiul 17.8** Să se dezvolte funcţia

$$f(z) = \frac{z+2}{(z+4)(z-2)^3}$$

printr-o serie de puteri în jurul punctului 2.

**Exerciţiul 17.9** Să se dezvolte funcţia

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$$

printr-o serie de puteri în jurul punctelor 0 şi $1+j$.

**Exerciţiul 17.10** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \frac{2z-1}{z^2+z-6}$$

printr-o serie de puteri în domeniile

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$$

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$$

$$F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}.$$

**Exercişiul 17.11** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

printr-o serie de puteri în domeniile

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$$

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z|\}.$$

**Exerciţiul 17.12** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \frac{2z^2 - 3z - 3}{z^3 - 2z^2 + z - 2}$$

printr-o serie de puteri în domeniile

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$$

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

$$F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}.$$

**Exerciţiul 17.13** Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{e^{j\pi z}}{(z^2+1)^2} dz,$$

unde

$$C : \quad 4x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

**Exerciţiul 17.14** Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(z+j)^3} dz, \quad C : \quad |z + 2j| = 2.$$

**Exerciţiul 17.15** Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{e^{2jz} - 5z}{z^2 + 4} dz, \quad C : \quad |2z - j| = 2.$$

**Exercițiul 17.16** Să se calculeze integrala *:*

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz, \quad C: \quad |z-1-j|=2.$$

**Exercițiul 17.17** Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{2z-1}{z^2(z^4-16)}dz, \quad C: \quad |z-1|+|z+1|=4.$$

**Exercițiul 17.18** Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z}dz, \quad C: \quad |z-2|+|z+2|=6.$$

**Exercițiul 17.19** Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{\sin(\pi z)}{z^2(z^2-1)^4}dz, \quad C: \quad |z|+|z-j|=2.$$

**Exercițiul 17.20** Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{1+\sin\frac{\pi}{z}}{1+z}dz, \quad C: \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

**Exercițiul 17.21** Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{1}{z^4+1}dz, \quad C: \quad |z-1|=\sqrt{2}.$$

**Exercițiul 17.22** Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^\infty \frac{x^2-1}{x^4+1}dx.$$

**Exerciţiul 17.23** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)(x^2+4)^2} dx.$$

**Exerciţiul 17.24** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13+12\cos x)^2} dx.$$

**Exerciţiul 17.25** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x} dx.$$

**Exerciţiul 17.26** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{13-5\cos x} dx.$$

**Exerciţiul 17.27** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx$$

**Exerciţiul 17.28** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+\pi^2)(x^2+4\pi^2)} dx$$

## 17.2 Serii Fourier

**Exerciţiul 17.29** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

**Exerciţiul 17.30** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2\pi$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

**Exerciţiul 17.31** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2\pi$ dată prin

$$f(x) = e^x, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

**Exerciţiul 17.32** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia dată prin

$$f(x) = \frac{1}{5 - 4\cos x}.$$

**Exerciţiul 17.33** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia dată prin

$$f(x) = \frac{\sin x}{13 - 12\cos x}.$$

**Exerciţiul 17.34** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de sinus funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

**Exercițiul 17.35** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de cosinus funcția

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, 2].$$

**Exercițiul 17.36** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de cosinus funcția

$$f(x) = x, \quad x \in [0, 1].$$

## 17.3 Transformata Laplace

**Exercițiul 17.37** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 12 + 9e^t + 5\sin 2t \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = -2. \end{cases}$$

**Exercițiul 17.38** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 9e^{3t} \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

**Exercițiul 17.39** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 18e^{-t}\sin 3t \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 3. \end{cases}$$

**Exercițiul 17.40** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x'''(t) + x''(t) = e^t \sin t \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$$

**Exerciţiul 17.41** Să se rezolve ecuaţia integrală

$$\sin t - \cos t = \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

**Exerciţiul 17.42** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x'' = -x + y + z \\ y'' = x - y + z \\ z'' = x + y - z \end{cases}$$

ştiind că

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$$

## 17.4 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea

**Exerciţiul 17.43** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

**Exerciţiul 17.44** Să se aducă la forma canonică, ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

**Exerciţiul 17.45** Să se aducă la forma canonică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 17\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

# 18 Tipuri de subiecte

## 18.1 Funcţii olomorfe. Condiţiile Cauchy-Riemann

**Exemplul 18.1** Se consideră funcţia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = e^x \cos y$. Să se determine funcţia $v$ astfel încât $f = u + jv$ să fie olomorfă şi $f(0) = 1$.

## 18.2 Funcţii elementare. Ecuaţii cu funcţii elementare

**Exemplul 18.2** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia

$$\sin z - \cos z = j. \tag{18.1}$$

## 18.3 Integrala curbilinie în planul complex

**Exemplul 18.3** Aplicând definiţia, să se calculeze integrala

$$I = \int_\gamma \overline{z} dz$$

în care $\gamma$ este pătratul ABCD parcurs în sensul

$$A \to B \to C \to D \to A,$$

vârfurile fiind: $A(1 + j)$, $B(-1 + j)$, $C(-1 - j)$, $D(1 - j)$.

## 18.4 Dezvoltarea funcţiilor în serii de puteri. Serii Taylor. Serii Laurent

**Exemplul 18.4** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \frac{z^2 + 3z + 2}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

printr-o serie de puteri în jurul punctelor $0,\ 1,\ 2,\ 4$.

**Exemplul 18.5** Să se dezvolte funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 6z^2 + 9z + 4}$$

printr-o serie de puteri în jurul punctelor 0 şi $-1$.

**Exemplul 18.6** Să se reprezinte funcţia

$$f(z) = \frac{4z^2 - 2z + 9}{z^3 - 3z^2 + 4z - 12}$$

printr-o serie de puteri în domeniile

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$$

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$$

$$F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}.$$

## 18.5 Teoria reziduurilor

**Exemplul 18.7** *Să se calculeze integrala*

$$I_k = \int_{C_k} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2} dz, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\},$$

*unde*

$$C_1 : \ |z| = \frac{1}{2}$$

$$C_2 : \ x^2 + 8y^2 - 2 = 0$$

$$C_3 : \ 8x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$C_4 : \ |z| = 2.$$

**Exemplul 18.8** Să se calculeze integrala

$$I = \int_C z^4 e^{\frac{1}{z}} dz, \quad C : \ |z| = 3$$

**Exemplul 18.9** *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_C \frac{z}{(z+1)^2(z^2-5z+6)} dz, \quad C : |z+1| = 3.$$

**Exemplul 18.10** Să se calculeze integrala complexă*:*

$$\int_C \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2} dz, \quad C : \ 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$$

## 18.6 Aplicaţii ale teoremei reziduurilor în calculul unor integrale reale

**Exemplul 18.11** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx.$$

**Exemplul 18.12** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{5+4\sin\theta} d\theta.$$

**Exemplul 18.13** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$$

## 18.7 Serii Fourier

**Exemplul 18.14** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2\pi$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

**Exemplul 18.15** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia periodică de perioadă $T = 2L$ dată prin

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-L, L].$$

**Exemplul 18.16** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică funcţia dată prin

$$f(x) = \frac{\sin x}{5+3\cos x}.$$

**Exemplul 18.17** Să se reprezinte printr-o serie Fourier trigonometrică de sinusuri funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

## 18.8 Transformata Laplace

**Exemplul 18.18** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x'''(t) - 3x''(t) + 2x'(t) = \cos t \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1. \end{cases} \tag{18.2}$$

**Exemplul 18.19** Să se rezolve ecuaţia integrală

$$1 - \cos t = \int_0^t \operatorname{sh}(t - \tau) x(\tau) d\tau. \tag{18.3}$$

**Exemplul 18.20** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x'' = x - y - z \\ y'' = -x + y - z \\ z'' = -x - y + z \end{cases} \tag{18.4}$$

ştiind că

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$$

## 18.9 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea

**Exemplul 18.21** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{18.5}$$

**Exemplul 18.22** Să se determine soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty). \tag{18.6}$$

**Exemplul 18.23** Să se aducă la forma canonică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{18.7}$$