Algebra Liniară & Geometrie - II : Test semestrial (1) $\boxed{\mathbf{A}}$

$\boxed{\mathbf{A.1}}$ Să se ortogonalizeze (cu procedeul Gram-Schmidt) baza din $\mathbb{R}^3$

$$A : \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{A.2}}$ Dați fiind vectorii $\mathbf{a} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, cu $u = 5$, $v = 3$, $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi/6$, să se calculeze $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{a}$, $pr_{\mathbf{v}}\, \mathbf{a}$, şi aria paralelogramului $OADB$ construit pe vectorii $\mathbf{a}$ & $\mathbf{b}$.

Algebra Liniară & Geometrie - II : Test semestrial (1) $\boxed{\mathbf{B}}$

$\boxed{\mathbf{B.1}}$ Să se ortogonalizeze (cu procedeul Gram-Schmidt) baza din $\mathbb{R}^3$

$$A : \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{B.2}}$ Dați fiind vectorii $\mathbf{a} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, cu $u = 4$, $v = 3$, $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi/3$, să se calculeze $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{a}$, $pr_{\mathbf{v}}\, \mathbf{a}$, aria paralelogramului $OADB$ construit pe vectorii $\mathbf{a}$ & $\mathbf{b}$. și volumul tetraedrului $OABM$ unde $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ și $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \overrightarrow{OM}$.

Sugestie : *Pentru calculul volumului tetraedrului se poate utiliza fie produsul mixt, fie definiția produsului vectorial.*

Algebra Liniară & Geometrie - II : Test semestrial (1) $\boxed{\mathbf{C}}$

$\boxed{\textbf{C.1}}$ Se consideră, în spațiul $\mathbb{R}^4$, vectorii

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Să se determine (o bază pentru) subspațiul $U^{\perp}$ ştiind că $U = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Ortogonalitatea se consideră în report cu produsul euclidean uzual din $\mathbb{R}^4$. Să se determine $\|\mathbf{a}_1\|$, $\|\mathbf{a}_2\|$, $d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ şi $\text{Proj}_{\mathbf{a}_1} \mathbf{a}_2$ ştiind că

$$\text{Proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}.$$

$\boxed{\textbf{C.2}}$ Dați fiind vectorii $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n} + \mathbf{p}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n} - 2\mathbf{p}$, $\mathbf{c} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ cu vectorii $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ necoplanari, să se verifice că $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt linear independenți şi să se exprime $\mathbf{m}$ în funcție de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Algebra Liniară & Geometrie - II : Test semestrial (1) $\boxed{\textbf{D}}$

D.1 Într-un spațiu euclidean V oarecare, să se demonstreze proprietățile :

(*i*) $\left\{\begin{array}{l} u \perp (v+w) \\ v \perp (w-u) \end{array}\right. \Rightarrow w \perp (u+v)$;

(*ii*) $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow (u+v) \perp (u-v)$.

D.2 Să se determine mulțimea vectorilor ortogonali pe vectorii $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Să se găsească cei doi versori din această mulțime. Să se calculeze $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ și $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Algebra Liniară & Geometrie - II : Test semestrial (1) $\boxed{\textbf{E}}$

E.1 Se consideră, în spațiul $\mathbb{R}^4$, vectorii

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine (o bază pentru) subspațiul $U^{\perp}$ știind că $U = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Ortogonalitatea se consideră în report cu produsul euclidean uzual din $\mathbb{R}^4$. Să se determine $\|\mathbf{a}_1\|$, $\|\mathbf{a}_2\|$, $d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ şi $\mathrm{Proj}_{\mathbf{a}_1} \mathbf{a}_2$ ştiind că

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}.$$

E.2 Să se determine proiecțiile – vectorială şi scalară – ale vectorilor $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ şi $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ pe suma şi diferența lor. Să se determine $\|\mathbf{v}_1\|$, $\|\mathbf{v}_2\|$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ şi aria paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

Algebra Liniară & Geometrie - II : Test semestrial (1) $\boxed{\textbf{F}}$

$\boxed{\textbf{F.1}}$ Se consideră, în spațiul $\mathbb{R}^4$, vectorii

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},.\ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}_i$ $(i = \overline{1,4})$ şi că $\mathbf{b}_i$ $(i = \overline{1,4})$ sunt liniar dependenți. Să se determine o relație de liniară dependență între aceşti 4 vectori.

$\boxed{\textbf{F.2}}$ Să se determine (valorile lui) $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, şi $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ şi $\mathbf{v}_3 = \lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ să fie $= 5$. Cu una din aceste valori să se determine şi dublele produse vectoriale $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ şi $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3$.

Algebră liniară & Geometrie - II: Test semestrial (2) $\boxed{\textbf{A}}$

$\boxed{\textbf{A.1}}$ Să se studieze pozițiile relative ale planelor

$$\begin{cases} (p_1): \quad ax + y - z - 2 = 0, \\ (p_2): \quad x - 3y + z + b = 0, \\ (p_3): \quad cx + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

în funcție de $a, b, c \in \mathbf{R}$. Pentru $a = 2$ şi $b = c = 1$ să se scrie ecuația planului care trece prin punctul comun al celor 3 plane şi care este paralel cu planul

$(p_0): x + 2y - 2z = 0.$

$\boxed{\textbf{A.2}}$ Să se scrie ecuația planului (p) care conține cele două perpendiculare din punctul $M_0(-3, 1, 4)$ pe planele

$(p_1): 4x + 2y - 3z - 12 = 0,\ (p_2): x - 2y + z + 10 = 0.$

Să se calculeze şi (cosinusul) unghiul(ui) θ dintre aceste două plane.

Algebră liniară & Geometrie - II: Test semestrial (2) $\boxed{\mathbf{B}}$

$\boxed{\mathbf{B.2}}$ Să se scrie ecuațiile proiecției ortogonale a dreptei

(d) : $\begin{cases} x - 4y + 2z - 5 = 0 \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ pe planul $(p)\,:\, 2x + 3y + z - 5 = 0.$

$\boxed{\mathbf{B.3}}$ Să se determine punctele de intersecție ale parabolei $(P)\,:\, y^2 - 8x = 0$ cu dreapta $(d)\,:\, y = 2x + n$ care trece prin focarul F al lui (P).

Algebră liniară & Geometrie - II: Test semestrial (2) $\boxed{\textbf{C}}$

$\boxed{\textbf{C.1}}$ Să se determine unghiul dintre planele

$(p_1) : 4x - 5y + 3z - 1 = 0$ şi $(p_2) : x - 4y - 3z - 1 = 0$.

Să se găsească punctul în care dreapta lor comună intersectează planul (xOz). Să se determine planul din fasciculul cu axa $(d) = (p_1) \cap (p_1)$, care trece prin originea $O(0,0,0)$.

$\boxed{\textbf{C.2}}$ Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbola $(H) : 4x^2 - y^2 - 16 = 0$ din punctul $M_0(1,2)$.

Recomandare. Se va impune ca ecuația de ordinul II care rezultă din ecuația hiperbolei şi ecuația unei drepte de pantă m ce trece prin $M_0(1,2)$ să aibă o singură rădăcină (dublă), de unde va (vor) rezulta una (sau două) valori ale pantei m.

Răspunsuri - indicații de rezolvare

Algebra vectorială. Rezolvarea aplicațiilor $\boxed{\textbf{A.2}}$, $\boxed{\textbf{B.2}}$, $\boxed{\textbf{C.2}}$ se bazează pe proprietatea de liniaritate a operațiilor de tip produs cu vectori. De exemplu, la prima dintre cele trei aplicații,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{u} + 2\,\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - 3\,\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 3\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{2}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - 6\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} =$$

(folosind simetria produsului scalar si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2$ etc.)

$$= u^2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 6\,v^2. \qquad (1)$$

Folosind datele geometrice din enunț, relative la vectorii $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v}$, precum şi definiția produsului scalar (a doi vectori nebanali), se obtine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 15\sqrt{3}\,/2$ şi, cu expresia din (1),

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 25 - 15\sqrt{3}\,/2 - 6 \cdot 9 = -29 - 15\sqrt{3}\,/2. \qquad (2)$$

Cele două proiecții ortogonale ale vectorului $\mathbf{a}$ *pe* $\mathbf{v}$ se obțin din definițiile acestora:

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\,\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{u} + 2\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 2\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} + 2\right)\mathbf{v}\,.$$

Cu datele geometrice din enunț şi cu valoarea lui $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ anterior găsită se obține

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{a} = \left(\frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 9} + 2\right)\mathbf{v} = \frac{5\sqrt{3} + 12}{6}\,\mathbf{v} \;\Rightarrow\; pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{a} = \frac{5\sqrt{3} + 24}{2}.$$

Această valoare a proiecției scalare s-a determinat pe baza legăturii între cele două proiecții, $\mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{a} = (pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{a})\,\mathbf{v}^{\circ}$.

Aria paralelogramului $OADB$ construit pe vectorii $\mathbf{a}$ & $\mathbf{b}$ va fi egală, conform definiției produsului vectorial, cu $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Conform expresiilor din enunț ale vectorilor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ în $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{u} + 2\,\mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - 3\,\mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{u} - 3\,\mathbf{u} \times \mathbf{v} + 2\,\mathbf{v} \times \mathbf{u} - 3\,\mathbf{v} \times \mathbf{v}. \qquad (3)$$

Având în vedere proprietățile de anulare ale produsului vectorial precum şi antisimetria sa + expresia lungimii lui $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, din această ecuație (3) se obține

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -5\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \Rightarrow \sigma_{\overline{[OADB]}} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 5\,|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin(\pi/6) = \frac{75}{2}\,.$$

La aplicația $\boxed{\textbf{C.2}}$, independența liniară a vectorilor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ se poate verifica fie cu definiția din Algebra liniară (Cap. 1 din sem. I), fie folosind produsul mixt cu liniaritatea acestuia în cele trei argumente. În prima variantă, se va scrie ecuația care intervine în definiția independenței / dependenței liniare, adică

$$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\,\mathbf{b} + \lambda_3\,\mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \lambda_1(2\,\mathbf{m} - 3\,\mathbf{n} + \mathbf{p}) + \lambda_2(\mathbf{m} + \mathbf{n} - 2\,\mathbf{p}) + \lambda_3(\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,\mathbf{m} + (-3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,\mathbf{n} + (\lambda_1 - 2\lambda_2)\,\mathbf{p} = \mathbf{0}\,; \tag{5}$$

Întrucât $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ au fost presupuşi *necoplanari*, deci *liniar independenți*, ecuația (5) nu puate fi verificată decât pentru toți cei trei coeficienți (din paranteze) egali cu 0. Prin urmare, scalarii λ_j $(j = \overline{1,3})$ trebuie să verifice sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} . \tag{6}$$

Matricea sistemului (6) este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ cu } \det A = 10 \neq 0,$$

deci acest sistem admite numai soluția banală şi – cu ecuația (4) – rezultă independența liniară a vectorilor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

A doua modalitate de a verifica această proprietate utilizează produsul mixt

$$<\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}> = \langle 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n} + \mathbf{p}, \mathbf{m} + \mathbf{n} - 2\mathbf{p}, \mathbf{m} + \mathbf{n} \rangle \quad .$$
(7)

Dezvoltarea produsului mixt din (7), pe baza liniarității sale (simultane) în cele 3 argumente, ar conduce la un număr de 18 termeni, fiecare din ei fiind un produs mixt al vectorilor $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$, cu posibilitatea repetării unui factor şi cu cei trei factori $(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p})$ într-o anumită ordine. Dar proprietățile de anulare ale produsului mixt conduc la o dezvoltare cu numai 4 termeni nebanali, fiecare din produsele mixte nebanale ($\neq 0$) conținând factori **diferiți**, deci pe toți cei trei vectori $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ într-o anumită ordine. Aşadar se obține

$$\begin{aligned} <\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}> &= \langle 2\mathbf{m}, -2\mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle + \langle -3\mathbf{n}, -2\mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \\ &= -4\langle \mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle + 6\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Ținând seama de comportarea unui produs mixt la permutări sau inversări de factori, ultima expresie a lui $<\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}>$ din (8) devine

$$<\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}> = (4 + 6 - 1 + 1)\langle \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle = 10\langle \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle\,. \tag{9}$$

Întrucât vectorii $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ sunt necoplanari, deci $\langle \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle \neq 0 \Rightarrow <\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}> \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt linear independenți.

În fine, *exprimarea liniară a lui* $\mathbf{m}$ *în funcție de* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ revine la o ecuație de forma

$$\mathbf{m} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \boldsymbol{\gamma}\,\mathbf{c}\,. \tag{10}$$

Înlocuind vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ cu expresiile lor în funcție de $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ (exact ca în (7)), se obține din (10) ecuația vectorială

$$\begin{aligned} &\mathbf{m} = \alpha(2\mathbf{m} - 3\mathbf{n} + \mathbf{p}) + \beta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - 2\mathbf{p}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2\alpha - 1 + \beta + \boldsymbol{\gamma})\,\mathbf{m} + (-3\alpha + \beta + \boldsymbol{\gamma})\,\mathbf{n} + (\alpha - 2\beta)\,\mathbf{p} = \mathbf{0}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Având din nou în vedere liniara independență a vectorilor $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$, ecuația vectorială (11) conduce la sistemul liniar

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \boldsymbol{\gamma} &= 1, \\ -3\alpha + \beta + \boldsymbol{\gamma} &= 0, \\ \alpha - 2\beta &= 0. \end{cases} \quad . \tag{12}$$

S-a obținut un sistem liniar neomogen care poate fi uşor rezolvat pe matricea sa lărgită

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ -3 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ -5 & 0 & 0 & | & -1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/5 \\ 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \backsim$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/5 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1/5 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3/5 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/10 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3/5 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2/10 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5/10 \end{bmatrix}.$$

Aşadar, expresia cerută va fi

$$\mathbf{m} = \frac{1}{10}(2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 5\mathbf{c}).. \tag{13}$$

Verificare. Deşi nu s-a cerut verificarea expresiei liniare (13), aceasta este oportună. Utilizând expresiile vectorilor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ funcție de $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ (ca în (7)), se obține

$$\frac{1}{10}[2(2\mathbf{m} - 3\mathbf{n} + \mathbf{p}) + (\mathbf{m} + \mathbf{n} - 2\mathbf{p}) + 5(\mathbf{m} + \mathbf{n})] = \frac{1}{10}(10\mathbf{m} + 0\mathbf{n} + 0\mathbf{p}) = \mathbf{m};$$

deci expresia găsită în (13) este cea corectă.

Aplicații cu vectori exprimați în reperul standard $\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix}$

.

D.2 Versorii din mulțimea (subspațiul) $U^{\perp} \perp U = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se pot obține fie considerând un vector oarecare $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{k}$ şi determinând cele trei coordonate din condițiile (*i*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = 0$ şi (*ii*) $|\mathbf{u}| = 1$. O modalitate mai simplă constă în determinarea produsului vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$ şi determinarea versorului lui $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^{\circ} = \mathbf{u}$. Evident, opusul lui $\mathbf{u}$ va fi cel de al doilea versor cerut în enunțul acestui exercițiu. Cu expresia produsului vectorial (sub formă de determinant simbolic) avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = -2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \mathbf{v} \quad \Rightarrow \tag{1}$$

$$\Rightarrow\ |\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\,. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) + observaţia anterioară se găsesc cei doi versori,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^{\circ} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) \ \text{ şi } \ \mathbf{u}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\,.$$

Produsul scalar se obţine din expresia sa analitică,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{i}+\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}) = -1+1 = 0\,;$$

aşadar, cei doi vectori sunt ortogonali şi – deci – $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \pi/2$. Produsul vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ a fost găsit în (1).

$\boxed{\mathbf{F.2}}$ Volumul cerut este egal cu valoarea absolută a produsului mixt ale celor 3 vectori.

$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\rangle = \langle 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k},\, \mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k},\, \lambda\mathbf{i}+2\mathbf{j}\rangle = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5\lambda+10\,. \tag{3}$$

$$(3) \Rightarrow \ \boldsymbol{Vol}_{[OM_1M_2M_3]} = |5\lambda+10|\,. \tag{4}$$

Condiția din enunț + (4) conduce la ecuația

$$|5\lambda+10| = 5 \ \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda+10 = 5 \\ -5\lambda-10 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}. \tag{5}$$

Se observă din expresia (4) a volumului că ambele valori din (5) sunt acceptabile. Dacă se alege prima dintre ele, al treilea vector devine $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Pentru calculul celor două produse dublu vectoriale, formulele bazate pe determinanți simbolici de ordinul 2 (cu vectorii din paranteză pe una dintre linii) sunt cele mai convenabile. Ele necesită calculul a trei produse scalare,

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = -3,\ \ \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 = -8,\ \ \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3 = 1\,; \tag{6}$$

$$\mathbf{v}_1\times(\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = 3\mathbf{v}_3 - 8\mathbf{v}_2 = \ldots = -11\mathbf{i}-2\mathbf{j}+16\mathbf{k}$$

;

$$(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)\times\mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{vmatrix} = -8\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \ldots = -10\mathbf{i}-5\mathbf{j}+15\mathbf{k}$$

.

Geometrie analitică - plane şi drepte

$\boxed{\text{A.2}}$ Planul (p) conţine punctul $M_0(-3,1,4)$, aceasta fiind una din cele două condiţii geometrice care interveneau în primul caz – $\boxed{1}$ – la deducerea ecuaţiei unui plan în spaţiu. Mai trebuie găsită o direcţie normală la (ortogonală pe) planul (p). Ecuaţiile celor două plane oferă direcţiile respectiv normale la aceste plane :

$$\begin{cases} (p_1) : 4x + 2y - 3z - 12 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{n}_1(4,2,-3), \\ (p_2) : x - 2y + z + 10 = 0. \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{n}_2(1,-2,1) \end{cases} \tag{1}$$

Cei doi vectori normali din (1) sunt chiar vectori directori ai perpendicularelor din enunţ. Acestea trebuind să fie conţinute în planul căutat, produsul vectorial al direcţiilor normale din (1) va fi ortogonal pe planul (p) :

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = -(4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 10\mathbf{k}). \tag{2}$$

Se poate adopta $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \perp (p)$ şi, cu punctul $M_0(-3,1,4)$ dat, ajungem la ecuaţia căutată :

$$(p) : 4(x+3) + 7(y-1) + 10(z-4) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{(p) : 4x + 2y - 3z - 12 = 0.} \tag{3}$$

Unghiul θ dintre planele .(p_1) & (p_2) este egal cu unghiul dintre două direcţii normale la aceste plane, de exemplu cele care apar în (1) :

$$\theta = \widehat{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}{n_1 n_2} = \frac{4-4-3}{\sqrt{29}\,\sqrt{6}} = \frac{-3}{\sqrt{174}} = -0.2274 \qquad \Rightarrow$$

$\theta \simeq \pi - \arccos(0.2274)$.

Notă şi extensie a aplicaţiei. Se poate observa că deducerea ecuaţiei planului (p) din enunţ se încadrează şi în cazul $\boxed{2}$ din Secţiunea **2.1** a cursului : cele două direcţii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ paralele cu planul (p) sunt exact vectorii $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ din (1). Aşadar, ecuaţia (3) a planului se paote regăsi cu formula care a fost prezentată în cazul $\boxed{2}$ din curs,

$$(p) : \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-4 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \ldots\;\ldots\;\ldots \;\Rightarrow\; \ldots.\;\ldots\; (3).$$

Cititorul (eventual) interesat va putea verifica implicaţia de mai sus.

Extensia aplicaţiei priveşte *ecuaţiile dreptei în spaţiu.* În configuraţia geometrică din enunţ, se poate cere determinarea ecuaţiilor dreptelor perpendiculare din punctul M_0 pe planele $.(p_1)$ & (p_2), drepte pe care le putem nota $.(d_1)$ & (d_2). Direcțiile lor fiind exact $\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}_1$ & $\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_2$ (conform discuției de mai sus), cele două perechi de ecuații se obțin imediat conform cu cazul $\boxed{1}$ din Secțiunea **2.2** – Dreapta în spațiu – a cursului :

$$(d_1) : \frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-3}, \tag{4}$$

$$(d_2) : \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{1}. \tag{5}$$

$\boxed{\text{B.2}}$ Ecuațiile *proiecției ortogonale* a dreptei

$$(d) : \begin{cases} x-4y+2z-5 = 0 \\ 3x+y-z+2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

pe planul $(p) : 2x+3y+z-5 = 0$ (7)

se pot obține, cel mai simplu, determinând ecuația unui al doilea plan, care poate fi notat $(p^{\perp})$ şi care este definit prin condițiile

$$(p^{\perp}) : \begin{cases} (d) \subset (p^{\perp}), \\ (p^{\perp}) \perp (p). \end{cases} \tag{8}$$

Prima condiția din (8) conduce - în mod firesc - la necesitatea de a găsi planul $(p^{\perp})$ ca fiind unul din planele fasciculului de plane cu axa (d), care are ecuația generală (obținută din (6))

$$\mathcal{F}_{(d)} : x-4y+2z-5+\lambda(3x+y-z+2) = 0 \iff$$

$$\iff (p_{\lambda}) : (3\lambda+1)x +: (\lambda-4)y+(2-\lambda)z+2\lambda-5 = 0. \tag{9}$$

$$(9) \Rightarrow \mathbf{n}_{\lambda}(3\lambda+1, \lambda-4, 2-\lambda) \perp (p_{\lambda}). \tag{10}$$

Întrucât planul (p_{λ}) cu normala din (10) trebuie să fie ortogonal pe planul (p) din enunț, având vectorul normal $\mathbf{n}(2,3,1)$, se ajunge la ecuația

$$2(3\lambda+1)+3(\lambda-4)+2-\lambda = 0 \Rightarrow 8\lambda-8 = 0 \Rightarrow \lambda = 1. \tag{11}$$

Valoarea din (11) introdusă în ecuația (9) conduce la ecuația planului ortogonal din (8) :

$$(p^{\perp}) : 4x-3y+z-3 = 0. \tag{12}$$

Ecuațiile (7) şi (12) sunt tocmai ecuațiile proiecției ortogonale din enunț :

$$\mathsf{Proj}_{(p)}(d) \underset{\text{not}}{=} (d') :: \begin{cases} 2x+3y+z-5 = 0, \\ 4x-3y+z-3 = 0 \end{cases}.$$

Cei interesați sunt invitați să schițeze configurația geometrică formată din (p), (d), $(p^{\perp})$ şi (d').
