5. Continuitatea functiilor reale

Succinte preliminarii teoretice (+ exemple)

O funcţie cu valori reale, definită pe o submulţime din $\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{l} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \cap\! | \\ \quad \mathbb{R} \end{array} \tag{5.1}$$

este *continuă* în punctul $x_0 \in D \cap \operatorname{acc} D$ dacă ea admite limită în acest punct iar limita coincide cu valoarea funcţiei în x_0. Formal,

$$x_0 \in D_{\text{cont}}(f) \iff [\exists\, \ell = \lim_{x \to x_0} f(x) \;\&\; \ell = f(x_0).] \tag{5.2}$$

Evident, atât punctul de acumulare cât şi limita din (5.2) nu pot fi decât elemente din $\mathbb{R}$, adică finite.

Această continuitate definită într-un punct se numeşte – în mod firesc – o continuitate *punctuală*. Se mai spune că este o proprietate locală. Dar ea poate fi verificată pe un întreg interval, pe o reuniune de intervale sau pe întreg domeniul de definiţie al funcţiei ; astfel, ea poate fi concepută şi ca o proprietate globală.

În sectiunea precedentă a fost prezentată caracterizarea limitei unei funcţii în limbajul vecinătăţilor – a se vedea (4.19). Având în vedere definiţia (5.2), şi continuitatea în $x_0 \in D \cap \operatorname{acc} D$ poate fi astfel formulată :

$$f \text{ este continuă în } x_0 \in D \cap \operatorname{acc} D \underset{\text{def}}{\iff}$$

$$\iff [(\forall\, V_{f(x_0)})(\exists\, U_{x_0})(\forall x \in D)\; x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) \in V_{f(x_0)}]. \tag{5.3}$$

Înainte de a oferi câteva comentarii, să observăm că proprietatea din (5.3) se poate scrie mai simplu folosind o notaţie “globală” pentru mulţimea valorilor funcţiei pe o vecinătate, în particular pe o întreagă submulţime sau interval din domeniul său de definiţie.

$$\begin{array}{c} \boxed{f \text{ este continuă în } x_0 \in D \cap \operatorname{acc} D} \\ \Updownarrow \\ \boxed{(\forall\, V_{f(x_0)})(\exists\, U_{x_0})\; f(U_{x_0} \cap D) \subseteq V_{f(x_0)}.} \end{array} \tag{5.4}$$

Cu alte cuvinte, oricărei vecinătăţi V a valorii funcţiei $f(x_0)$ îi corespunde o vecinătate U a punctului $x_0 \in D \cap \operatorname{acc} D$ astfel încât imediat ce argumentul x al funcţiei intră în U valorile funcţiei intră în V. În această interpretare mai descriptivă (şi mai intuitivă) nu am mai indexat vecinătăţile cu elementele respective. Să mai observăm că prin "*oricare vecinătate V a valorii funcţiei*" se înţelege o vecinătate oricât de mică, în timp ce U va fi o vecinătate suficient de mică în jurul punctului x_0.

Comentarii. În caracterizarea din (5.3) - (5.4), ca şi în cazul caracterizării limitei din Secţiunea 4, vecinătatea lui $x_0 \in D \cap \operatorname{acc} D$ depinde de vecinătatea valorii funcţiei $f(x_0)$, însă această dependenţă este mai greu de evidenţiat. Ea va deveni explicită imediat ce vom reformula carcaterizarea (5.3) - (5.4) cu vecinătăţi fundamentale, ţinând seama de poziţia elementelor

$$x_0 \in \mathbb{R} \;\&\; \ell = f(x_0) \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Aşadar, din toate cele 9 cazuri posibile în caracterizarea limitei, doar cazul (2,2) din Tabelul 4.1 - pag. 45 este posibil în caracterizarea continuităţii punctuale. Cu alte cuvinte, vom putea utiliza caracterizareaa în "limbaj $\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$" din (4.20).

Funcţia f din (5.1) este continuă în punctul $x_0 \in D \cap \operatorname{acc} D$ dacă şi numai dacă (prin def.)

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$$\Updownarrow \tag{5.6}$$

$$\boxed{(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta(\varepsilon) = \delta > 0)\;\; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).}$$

Să mai observăm că apartenenţele la vecinătăţile simetrice din această caracterizare se pot scrie cu ajutorul valorilor absolute. Aşadar, f este continuă în punctul $x_0 \in D \cap \operatorname{acc} D$ dacă şi numai dacă

$$\boxed{(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta(\varepsilon) = \delta > 0)\;\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.} \tag{5.6'}$$

Constatăm că din vecinătatea punctului x_0 nu se mai elimină acest punct, ca în cazul limitei. Există un motiv oarecum tehnic dar şi unul de principiu, în acest sens. Pe de o parte, funcţia este definită in x_0 aşa încât $f(x_0) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ în mod banal, valoarea respectivă fiind chiar centrul vecinătăţii. Pe de altă parte, dacă s-ar elimina punctul x_0 din vecinătatea sa de rază δ ar putea interveni situaţii în care funcţia are limită dar este discontinuă în x_0, iar prin eliminarea acestui punct s-ar deduce că funcţia ar fi continuă.

E 5.1 Cel mai simplu exemplu este cel al unei funcţii de forma

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } x \in \mathbb{R}^*, \\ 1 & \text{pentru } x = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Evident, funcţia din (5.7) are limita 0 în origine însă valoarea ei în acest punct este = 1. Pentru $x \in (-\delta, +\delta) \setminus \{0\}$ cu $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ avem $f(x) = x^2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ în timp ce această apartenenţă nu se mai verifică pentru $x \in (-\sqrt{\varepsilon}, +\sqrt{\varepsilon}) \setminus \{0\}$ din cauza valorii 1 a funcţiei în origine ; într-adevăr, este suficient să alegem un ε particular, de exemplu

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4} \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon} = \tfrac{1}{2} \text{ cu } 0 \in (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \text{ însă } f(0) = 1 \notin (-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}).$$

□

Continuitatea unei funcţii într-un punct din domeniul său de definiţie (care să fie şi punct de acumulare) se poate verifica determinând limita în acel punct şi comparând-o cu valoarea funcţiei. În cazul negativ, adică spre a demonstra că funcţia nu este continuă în punctul x_0, se pot determina limitele laterale : dacă ele sunt diferite va rezulta că limita în punct nu există, deci funcţia nu poate fi continuă. În alte cazuri, se poate utiliza caracterizarea limitei, implicit a continuităţii, prin şiruri. A se vedea exemplul ④ de la pag. 48, din secţiunea precedentă. Dar putem considera ambele funcţii de acest tip, în exemplul ce urmează.

E 5.2 (*i*)

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \in \mathbb{R}^*, \\ a & \text{pentru } x = 0\ ; \end{cases} \tag{5.8}$$

(*ii*)

$$g(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \in \mathbb{R}^*, \\ b & \text{pentru } x = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Am demonstrat cu exemplul citat din **Secţiunea 4 - LIMITE** că funcţia ce intervine în (5.9) nu admite limită în origine. În acest exemplu ea a fost prelungită dândui-se valoarea b în origine, ca să se poată pune problema continuităţii. Indiferent cine ar fi acest $b \in \mathbb{R}$, limita în origine nu există şi deci funcţia nu este continuă ; pentru a fi şi mai concludentă această afirmaţie, se poate alege un $b \in \mathbb{R}$ cu $|b| > 1$ şi funcţie care oscilează în intervalul $[-1, 1]$ nu va putea avea o limită egală cu un astfel de b. Cititorul este invitat să verifice non-continuitatea funcţiei din (5.8). □

Caracterizarea din (5.6') este comodă şi poate fi uşor folosită pentru demonstrarea continuităţii unor funcţii elementare, cum sunt cele trigonometrice de exemplu.

E 5.3 Funcţiile $f(x) = \cos x$ & $g(x) = \sin x$ sunt continue în orice $x_0 \in \mathbb{R}$. Scriem

$$|f(x) - f(x_0)| = |\cos x - \cos x_0| = \left|-2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}\right| = \tag{5.10}$$

$$= 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x + x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \le 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \varepsilon .$$

Rezultă din majorările care au condus la ultima inegalitate din (5.10) că s-a verificat caracterizarea din (5.6') cu $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Pe parcurs s-a folosit şi cunoscuta inegalitate

$$(\forall\ \alpha \in \mathbb{R})\ |\sin \alpha| \le |\alpha| . \tag{5.11}$$

Exerciţiu: Să se verifice (similar) continuitatea lui $g(x) = \sin x$ în orice $x_0 \in \mathbb{R}$.
□

O funcţie care admite limite laterale dar acestea nu sunt egale poate fi continuă (uni)lateral : la stânga sau la dreapta.

E 5.4 Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x < 0, \\ 1 - x^2 & \text{pentru } x \ge 0 . \end{cases} \tag{5.11}$$

Funcţia are limite laterale în origine.

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (1 - x^2) = 1 \underset{\text{not}}{=} f(0^+) = f(0),$$

în timp ce limita la stânga este $f(0^-) = 0$; cititorul va putea verifica această afirmaţie cu "proprietatea cleşte" folosind, de exemplu, inegalitatea evidentă $x < 0 \Rightarrow |f(x)| \le |x|$. Aşadar, funcţia este continuă numai la dreapta. □

Cei interesaţi vor putea formula astfel de exemple consultând aplicaţii cu limite laterale din secţiunea precedentă, LIMITE.

Proprietăţi ale funcţiilor continue.

O serie de proprietăţi ale funcţiilor continue provin din proprietăţile corespunzătoare ale funcţiilor : este cazul continuităţii punctuale. Altele sunt specifice, în special în cazul continuităţii globale / pe intervale. Un prim set de proprietăţi se referă la *operaţii cu funcţii continue*.

PFC .1 Dacă $f, g : D \to \mathbb{R}$ sunt continue în $x_0 \in D$ atunci

$$f \pm g\,,\ f \cdot g\,,\ \frac{f}{g}\ ((\exists\ V_{x_0})\ g(V_{x_0}) \neq 0)\,,\ f^g\,,\ \alpha f + \beta g$$

şi alte funcţii obţinte prin operaţii cu cele două sunt de asemenea continue în $x_0 \in D$. Evident, toate aceste proprietăţi se extind (dacă este cazul) de la puncte la intervale sau la întreg domeniul (comun) de definiţie.

Continuitatea se transmite şi prin *compunerea funcţiilor*, dar este necesară atenţie la compunerea prin punctele unor vecinătăţi specifice.

PFC .2 Dacă $f : D_f \to \mathbb{R}$ şi $g : D_g \to \mathbb{R}$ sunt continue în $x_0 \in D_f \cap \operatorname{acc} D_f$, respectiv în $y_0 \in D_g \cap \operatorname{acc} D_g$ cu $y_0 = f(x_0)$ atunci $h = g \circ f$ este continuă în x_0.

Dacă $y_0 = f(x_0)$ rezultă prin definirea funcţiilor compuse că

$$h(x_0) = (g \circ f)(x_0) \underset{\text{def}}{=} g[f(x_0)] = g(y_0). \tag{5.12}$$

Conform cu caracterizările (5.6) - (5.6'),

$$\begin{aligned} & x_0 \in D_{\text{cont}}(f) \Rightarrow \\ & \qquad (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon) = \delta > 0)\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,; \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} & y_0 = f(x_0) \in D_{\text{cont}}(g) \Rightarrow \\ & \qquad (\forall\ \eta > 0)(\exists\ \varepsilon(\eta) = \varepsilon > 0)\ \ |y - y_0| < \varepsilon \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \eta\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Combinând caracterizările din (5.13) & (5.14) obţinem

$$\begin{aligned} & (\forall\ \eta > 0)(\exists\ \delta(\eta) = \delta(\varepsilon(\eta)) = \delta > 0)\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow \\ & \quad \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |y - y_0| < \varepsilon \Rightarrow \\ & \quad \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| = |h(x) - h(x_0)| < \eta\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Evident, în acest lanţ de implicaţii şi inegalităţi a intervenit şi definiţia funcţiei compuse din (5.12). ■

PFC .3 **Mărginirea locală a funcţiilor punctual continue**.

Aşa cum am menţionat, continuitatea într-un punct este o proprietate <u>locală</u> a unei funcţii. Implicit, anumite consecinţe ale acestei continuităţi vor fi tot proprietîăţi locale. Una din ele este tocmai mărginirea locală. O funcţie $f: D \to \mathbb{R}$ este *local mărginită* în punctul $x_0 \in D \cap \operatorname{acc} D$ dacă există două numere reale $m, M \in \mathbb{R}$ $(m \le M)$

$$(\exists\, U_{x_0})(\forall\, x \in D)\; x \in U_{x_0} \;\Rightarrow\; m \le f(x) \le M. \tag{5.16}$$

Cele două bariere $m, M \in \mathbb{R}$ care intervin]n (5.16) depind în mod firesc de natura (sau expresia analitică a) funcţiei f şi de dimensiunea vecinătăţii U_{x_0}: o vecinătate mai mică va conduce (în general) la bariere mai apropiate. În aplicaţii concrete, se poate alege o rază convenabilă a vecinătăţii U_{x_0} din (5.16), $\delta_0 > 0$ astfel încât

$$(\forall\, x \in D)\; x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in [m, M]. \tag{5.17}$$

Aceste proprietăţi de mărginire locală din (5.16) - (5.17) rezultă imediat din caracterizările (5.6) - (5.6'), eventual alegând un $\varepsilon_0 > 0$ convenabil care-l va determina şi pe $\delta_0 > 0$ astfel încât

$$(\exists\, \varepsilon_0 > 0)(\exists\, \delta(\varepsilon_0) = \delta_0 > 0)\;\; |x - x_0| < \delta_0 \;\Rightarrow\; f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0).$$

Extremităţile vecinătăţii lui $f(x_0)$ care intervine mai sus pot fi chiar barierele din (5.17).

E 5.4 Să se arate că funcţia

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = 2(x-1)^2 \tag{5.18}$$

este local mărginită în jurul punctului $x_0 = 3$.

Putem alege, de exemplu, $\delta_0 = 2$ şi vom obţine

$$|x - x_0| < \delta_0 \;\Rightarrow\; |x - 3| < 2 \iff 1 < x < 5 \;\Rightarrow\; 0 < x - 1 < 4 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 0 < (x-1)^2 < 16 \;\Rightarrow\; 0 < 2(x-1)^2 = f(x) < 32.$$

Deci, barierele din (5.16) pot fi, în acest caz, $m = 0$ & $M = 32$. Evident, funcţia nu este şi global marginită – adică mărginită pe întregul ei domeniu de definiţie $D = \mathbb{R}$ – întrucât $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. □

Există funcţii care nu sunt (local) mărginite în nicio vecinătate a unui anumit punct. Exemplul ce urmează ilustrează o astfel de situaţie.

E 5.5 Fie funcţia

$$f:\ [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{pentru } x \neq 1\,, \\ 2 & \text{pentru } x = 1\,. \end{cases} \tag{5.19}$$

În orice vecinătate $V_1 = (1-\delta\,,1+\delta)$ *funcţia este nemărginită*. Într-adevăr,

$$(\forall\ \delta > 0)\ \ |x-1| < \delta \ \Rightarrow\ (x-1)^2 < \delta^2 \ \Rightarrow\ f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > \delta^2 = \alpha(\delta). \tag{5.20}$$

De fapt, având în vedere caracterizările limitelor infinite din **Secţiunea 4**, ar trebui de arătat că orice vecinătate a elementului $+\infty$ conţine valori ale funcţiei în puncte dintr-o vecinătate $V_1 = (1-\delta\,,1+\delta)$:

$$(\forall\ \alpha > 0)(\exists\ x_\alpha \in (1-\delta\,,1+\delta))\ f(x_\alpha) > \alpha\,. \tag{5.21}$$

Însă

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > \alpha \iff (x-1)^2 < \frac{1}{\alpha} \iff$$
$$\iff |x-1| < 1/\sqrt{\alpha} \iff x \in (1-1/\sqrt{\alpha}\,,1-1/\sqrt{\alpha}\,). \tag{5.22}$$

Deci orice argument precum cele din vecinătatea simetrică ce intervine în (5.22) este un x_α ca cel din (5.21). □

Funcţii uniform continue.

O funcţie $f:\ D \longrightarrow \mathbb{R}$ este *uniform continuă* pe domeniul D sau pe un subdomeniu $D_0 \subseteq D$ dacă pentru orice $x_1\,, x_2 \in D_0 \subseteq D$ are loc implicaţia

$$\boxed{(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon, D) = \delta > 0)\ \ |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\,.} \tag{5.23}$$

Intuitiv, caracterizarea cu vecinătăţi fundamentale din (5.23) a uniformei continuităţi afirmă că două valori ale funcţiei în punctele $x_1\,, x_2 \in D_0 \subseteq D$ sunt oricât de apropiate dacă punctele respective sunt suficient de apropiate. Raza $\delta(\varepsilon, D)$ depinde, în general, şi de domeniul D pe care se studiază această proprietate (aşa cum se va vedea şi din exemple).

E 5.6 Să se arate că $f(x) = x^2$ este uniform continuă pe $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Scriem inegalitatea din (5.23) pentru funcţia putere pătratică şi pentru două puncte $x_1, x_2 \in [a, b]$. Dar, înainte de acesta, să observăm că

$$a \le x_1, x_2 \le b \;\Rightarrow\; 0 \le |x_i| \le \max\{|a|, |b|\} \underset{\text{not}}{=} M \text{ pentru } i = \overline{1,2}. \tag{5.24}$$

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \iff |x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon \iff$$

$$\iff |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| < \varepsilon\,; \tag{5.25}$$

ţinând seama de o inegalitate care implică valorile absolute a două numere reale şi de majorarea din (5.24) obţinem

$$\left.\begin{array}{r} a \le x_1, x_2 \le b \;\Rightarrow\; 0 \le |x_1|, |x_2| \le M \\ |x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2| \end{array}\right\} \Rightarrow |x_1 + x_2| \le 2M. \tag{5.26}$$

În fine, rezultă din (5.25) & (5.26) că

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta(\varepsilon, D) = \delta > 0)\ \delta = \frac{\varepsilon}{2M} : |x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| < \frac{\varepsilon}{2M} 2M = \varepsilon. \tag{5.27}$$

Aşadar, s-a verificat uniforma continuitate a funcţiei $f(x) = x^2$ pe un interval mărginit de numere reale. Apartenenţa celor două puncte la intervalul $[a, b]$ a fost esenţială pentru verificarea caracterizării din (5.27), pentru care majorarea din (5.24) a intervenit în mod esenţial.

Să mai arătăm că aceeaşi funcţie $f(x) = x^2$ nu mai este uniform continuă pe întreaga axă reală . Pentru aceasta vom verifica faptul că funcţia satisface contrariul caracterizării din (5.23) şi anume :

$$(\exists\, \varepsilon_0 > 0)(\forall\, \delta > 0)(\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ |x_1 - x_2| < \delta \text{ însă } |f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon_0. \tag{5,28}$$

În această “anti-caracterizare” din (5.28) cele două argumente x_1, x_2 depind în mod natural de $\delta > 0$ întrucât ele sunt obiectul cuantificatorului existenţial $\exists$ care urmează după cel universal $\forall$; însă această dependenţă nu este esenţială. Cele două puncte trebuie să fie oricât de apropiate şi le vom alege de forma

$$x_1 = n + \frac{1}{n} \;\&\; x_2 = n \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{1}{n} < \delta \text{ pentru orice } \delta > 0 \;\&\; n > \frac{1}{\delta}.$$

Evaluând diferenţa care intervine în (5.25) sau (5.27), cu factorizarea respectivă, avem

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| = 2 + \frac{1}{n^2}. \tag{5.29}$$

Urmează din evaluarea (5.29) că, pentru naturalul n suficient de mare,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 = \varepsilon_0.$$

Aşadar funcţia de gradul 2, deşi continuă pe toată axa reală, nu este şi uniform continuă. Proprietatea de uniformă continuitate a apărut în momentul în care am "amputat" ramurile spre $+\infty$ ale parabolei de ecuaţie $y = x^2$.

□

E 5.7 Să se arate că $f(x) = \operatorname{arctg} x$ este uniform continuă pe intervalul $[0, +\infty)$.

Se poate folosi identitatea

$$\operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}; \tag{5.30}$$

$$(5.30) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |y_1 - y_2| = |\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| = \tag{5.31}$$

$$= \left|\operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2}\right| \le \frac{|x_1 - x_2|}{|1 + x_1 x_2|} \le |x_1 - x_2| \tag{5.32}$$

întrucât $|1 + x_1 x_2| \ge 1$ pe intervalul considerat în enunţ. Aşadar, caracterizarea din (5.23) se verifică pentru $\delta = \delta(\varepsilon, D) = \varepsilon$.

PFC .4 Este ca şi evidentă proprietatea:

Orice funcţie uniform continuă pe un domeniu / interval este şi punctual continuă pe acesta. Verificarea rămâne ca exerciţiu.

Aplicaţii cu funcţii continue - I

FC-A .1 Să se determine valorile constantei reale α astfel încât funcţiile de mai jos să fie continue.

$$(i) \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 3|\alpha| \cdot x & \text{pentru } x < 1, \\ \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} x^2 + \alpha x + 1} & \text{pentru } x \ge 1. \end{cases}$$

$$(ii) \qquad g : [-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \; g(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \in [-1, 0) \\ \alpha & \text{pentru } x = 0, \\ 2^{-(\sqrt{1+x}-1)/x^2 e^x} & \text{pentru } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea funcţiilor :

$$(iii) \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{pentru } x \le 0, \\ x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x > 0; \end{cases}$$

$$(iv) \qquad g : (-\frac{\pi}{2}, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \; g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{pentru } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \\ e^{-1/x} \cos \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x > 0; \end{cases}$$

$$(v) \qquad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; h(x) = \begin{cases} e^x + x - 1 & \text{pentru } x \le 1, \\ x^{\frac{1}{x-1}} & \text{pentru } x > 1; \end{cases}$$

$$(vi) \qquad k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; k(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & \text{pentru } x < 0, \\ 1 & \text{pentru } x \ge 0. \end{cases}$$

Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$(vii) \qquad f : (-\infty, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{pentru } x < 0, \\ a \sin x + b \cos x & \text{pentru } x \ge 0 \end{cases}$$

să fie continuă pe domeniul său de definiţie.

Sugestii pentru rezolvări, răspunsuri.

(i) Se calculează limitele laterale în 1 şi se impune egalitatea lor ; atenţie la ecuaţia cu valori absolute care rezultă. Se vor obţine două valori posibile pentru parametru: $\alpha = 2/5 \vee \alpha = -2/7$.

(ii) Ambele limite laterale în origine sunt nule (a se verifica).

(iii) Funcţia este continuă (şi) în origine ; pentru limita la dreapta se poate folosi "proprietatea cleşte" - verificare.

(iv) $g(0^-) = g(0) = g(0^+)$; a se verifica limitele laterale în origine. De asemenea, să se studieze limitele funcţiei în capetele intervalului pe care este ea definită.

(v) Limita la stânga în 1 (care se poate nota) $h(1-0)$ este banală. Pentru limita la dreapta se poate rescrie exponenţiala prin ridicare la exponent (de bază e) sau, mai simplu, se poate nota $x-1 = u$ şi se va ajunge la limita elementară / fundamentală (4.32) din **LFE-5**, **Secţiunea 4 - LIMITE**.

(vi) Să se justifice discontinuitatea funcţiei k în origine.

(vii) Limita la stânga în 0 este banală ; impunând condiţia de continuitate se va putea determina doar unul dintre parametri. Să se determine şi celălalt parametru din condiţia ca $\lim_{x \nearrow \pi/2} f(x) = 2$.

FC-A .2 Să se verifice uniforma continuitate a funcţiilor de mai jos, pe domeniul indicat.

(i) $f(x) = x^2 - x + 3$ pe intervalul $[-2, 2]$;

(ii) $f(x) = \sin x$ pe toată axa reală ;

(iii) $f(x) = \cos x$ pe toată axa reală ;

(iv) $f(x) = \operatorname{tg} x$ pe intervalul $[-\pi/4, \pi/4]$; este f u.c. pe $(-\pi/2, \pi/2)$?

(v) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ nu este u.c. pe $\mathbb{R}$ dar este u.c. pe $[a, +\infty)$, $a > 0$.

Sugestii pentru rezolvări, răspunsuri.

(i) Funcţia este u.c. pe intervalul indicat. Se pot nota cele două argumente cu x', x'' şi se va proceda ca pentru funcţia x^2 din **E 5.6** ; factorul care multiplică diferenţa (în valoare absolută) se va majora cu inegalitatea pentru valoarea absolută a unei sume. Se va determina $\delta(\varepsilon, D)$.

(ii) & (iii) Se vor transforma în produse diferenţele $\sin x' - \sin x''$, analog pentru cosinus. Se va folosi apoi o bine-cunoscută inegalitate pentru $|\sin \alpha|$. A se detalia calculele.

(iv) Şi pentru această funcţie se poate utiliza o formulă din trigonometrie pentru $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$ (exprimată în sin & cos), apoi se va minora numitorul ţinând seama de variaţia funcţiei cosinus în intervalul indicat şi se va obţine uşor un $\delta(\varepsilon, D)$ care intervine în caracterizarea uniformei continuităţi din (5.23).

Pe intervalul extins $(-\pi/2, \pi/2)$ funcţia nu va fi u.c. din cauza celor două ramuri spre $-\infty, +\infty$ ale funcţiei $\operatorname{tg} x$ în vecinătăţile respective (şi laterale) ale extremităţilor intervalului. Se vor căuta două şiruri adecvate, cu termeni oricât de apropiaţi, care converg către $\pi/2$ $(x'_n, x''_n \nearrow \pi/2)$ pe care diferenţa absolută a valorilor funcţiei nu scade sub un $\varepsilon_0 > 0$.

(v) $f(x) = 1/x^2$ nu este u.c. pe $\mathbb{R}$ din cauza celor două ramuri ale (graficului) funcţiei către $+\infty$, din stânga şi dreapta asimptotei verticale. Pentru a demonstra neuniforma continuitate a funcţiei în orice vecinătate a originii sugerăm, de exemplu, utilizarea şirurilor $x'_n = 1/n$, $x''_n = 2/n$ care converg din dreapta spre 0. Se va evalua diferenţa (absolută) a valorilor funcţiei pe cele două şiruri şi se va minora cu un $\varepsilon_0 > 0$ adecvat.

Funcţia devine u.c. imediat ce se elimină o vecinătate a originii (în care funcţia este nemărginită), de exemplu prin restricţia la intervalul $[a, +\infty)$, $a > 0$. Diferenţa

$$|f(x') - f(x'')|$$

se va factoriza ca diferenţa absolută a argumentelor multiplicată cu o sumă de fracţii pozitive, iar fiecare dintre acestea se va putea majora pe intervalul indicat. A se detalia calculele şi a se găsi $\delta(\varepsilon, D)$.

Alte proprietăţi locale ale funcţiilor (local) continue

PFC .5 Păstrarea semnului într-o vecinătate a lui x_0: dacă $f(x_0) > 0 \mid < 0$ atunci există o vecinătate U_{x_0} astfel încât

$$(\forall\, x \in U_{x_0} \cap D)\ f(x) > 0 \mid < 0 \underset{\text{not}}{\Longleftrightarrow} f(U_{x_0} \cap D) > 0 \mid < 0. \tag{5.33}$$

Proprietatea rezultă imediat din caracterizarea (5.6'), pentru o rază a vecinătăţii lui $f(x_0) > 0 \mid < 0$ aleasă adecvat, de exemplu

$$\begin{cases} f(x_0) > 0 \Rightarrow \varepsilon_0 = f(x_0)/2, \\ f(x_0) < 0 \Rightarrow \varepsilon_0 = |f(x_0)|/2; \end{cases} \tag{5.34}$$

în ambele cazuri din (5.34) există o vecinătate $U_{x_0} = (x_0 - \delta_0, x_0 - \delta_0)$ cu $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0)$, pentru care se verifică proprietatea din (5.33). Într-adevăr, în cazul valorii pozitive

(5.6') & $0 < |x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow 0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < 3\frac{f(x_0)}{2}.$$

E 5.8 Pentru funcţia $f(x) = \sin x$, $f(\pi/2) = 1 > 0$ şi cu $\varepsilon_0 = 1/2$ găsim $\delta_0 = \pi/6$ astfel încât

$$[0 < |x - \pi/2| < \pi/6 \iff x \in (\pi/3, 2\pi/3) \setminus \{\pi/2\}] \Rightarrow f(x) = \sin x \in (1/2, 1) > 0.$$

Proprietăţi globale ale funcţiilor continue

Funcţii lipschitziene ; proprietatea lui Darboux.

O funcţie $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ este *lipschitziană* pe intervalul $I \subseteq D$ dacă există o constantă pozitivă $L > 0$ astfel încât

$$\boxed{(\forall\, x_1, x_2 \in I)\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.} \tag{5.35}$$

În unele manuale constanta lui **Lipschitz** L se notează cu λ, dar notaţia nu este esenţială. Funcţiile lipschitziene au proprietăţi remarcabile şi sunt implicate în teoremele de existenţă a soluţiilor pentru ecuaţii şi sisteme diferenţiale, cu numeroase aplicaţii practice. Această proprietate se defineşte şi în spaţii mai generale decât $\mathbb{R}$, cum sunt spaţiile metrice.

O proprietate imediată a funcţiilor lipschitziene este formulată în rezultatul ce urmează.

Teorema 5.1. *Orice funcţie $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, **lipschitziană** pe intervalul $I \subseteq D$, este **uniform continuă** pe acest interval.*

Proprietatea rezultă imediat ţinând seama de definiţia din (5.33) şi de caracterizarea U-continuităţii din (5.23). Într-adevăr, (5.33) $\Rightarrow$ (5.23) întrucât

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta(\varepsilon, I) = \delta > 0)\ \delta = \frac{\varepsilon}{L} : |x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \underset{(5.33)}{\leq} L|x_1 - x_2| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Înainte de a oferi exemple concrete de funcţii lipschitziene, să observăm că în toate exemplele din această secţiune în care se ilustra proprietatea de uniformă continuitate pe un anumit subdomeniu (sau interval), sau se cerea verificarea acestei proprietăţi intervenea – la un moment dat – o majorare a variaţiei absolute a funcţiei $|f(x_1) - f(x_2)|$ sau $|f(x') - f(x")|$ cu o constantă care multiplica variaţia absolută a argumentului. Aceasta era tocmai o constantă a lui Lipschitz.

Aşadar, ar fi normal să se utilizeze notaţia $L = L(f, I)$: în fiecare caz în care se verifică proprietatea lui Lipschitz pentru o anumită funcţie f, pe un interval dat I, constanta lui Lipschitz depinde atât de funcţie cât şi de interval. Urmează câteva exemple.

E 5.9 $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ este lipschitziană pe intervalul $I = [1, +\infty)$. Într-adevăr,

$$(\forall\, x_1, x_2 \in [0, 4])\ \ |f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \le$$

$$\le \frac{|x_1 - x_2|}{2} = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|. \tag{5.36}$$

Aşadar, funcţia din enunţ este lipschitziană cu $L = 1/2$. În majorarea de mai sus a intervenit în mod esenţial poziţia celor două argumente în intervalul din enunţ. Evident, funcţia este uniform continuă cu $\delta(\varepsilon, I) = 2 = 1/L$ în caracterizarea (5.23).

P.D. O funcţie $f: D \dashrightarrow \mathbb{R}$ are *proprietatea lui Darboux* pe intervalul $I \subseteq D$ dacă pentru orice două puncte $x_1, x_2 \in I$ $(x_1 < x_2)$ şi orice număr real c situat între $f(x_1)$ & $f(x_2)$

$$(\exists\ \xi \in (x_1, x_2)\ \ c = f(\xi). \tag{5.37}$$

Desigur, în (5.37) se poate considera şi intervalul închis $[x_1, x_2]$]ns[aceast[extindere la capetele intervalului nu este semnificativĂ : încele două puncte se obţin valorile funcţiei $f(x_1)$ & $f(x_2)$ iar numărul c situat între acestea implică, în mod natural, inegalităţi stricte. Dacă trecem la intervale închise (sau compacte), această proprietate poate fi formulată şi astfel : funcţia f are proprietatea lui Darboux pe intervalul $I \subseteq D$ dacă ea acoperă tot intervalul dintre orice două valori ale funcţiei în puncte $x_1, x_2 \in I$. În particular, dacă $I = [a, b]$, funcţia f este monotonă şi $x_1 = a, x_2 = b$ atunci

$$\begin{cases} f(I) = [f(a), f(b)] \text{ dacă } f(a) \le f(b), \\ f(I) = [f(b), f(a)] \text{ dacă } f(a) \ge f(b). \end{cases} \tag{5.38}$$

Proprietatea din (5.38) se poate citi în sensul că orice funcţie continuă pe un domeniu *transformă intervale din acest domeniu tot în intervale*. Evident, există şi cazul banal în care funcţia este constantă pe intervalul $I = [a, b]$: dacă $(\forall\, x \in I = [a, b])\ f(x) = c$ atunci "intervalul" dintre valorile funcţiei se reduce – de fapt – la un punct : $f(I) = f([a, b]) = \{c\}$.

Proprietatea lui Darboux intervine în aplicaţii practice, de exemplu spre a verifica dacă o funcţie continuă admite o rădăcină într-un interval dat ; sau dacă o astfel de funcţie atinge o anumită valoare dată. Cele două probleme se pot exprima formal precum urmează :

$$f(a)\,f(b) < 0 \;\Rightarrow\; (\exists\ \xi \in (a, b))\ f(\xi) = 0\,; \tag{5.39}$$

$$I = [a, b] \subseteq D_{\text{cont}}(f)\ \&\ \begin{cases} c \in [f(a), f(b)] \\ \quad\textbf{sau} \\ c \in [f(b), f(a)] \end{cases} \Rightarrow\ (\exists\ \gamma \in I)\ c = f(\gamma). \tag{5.40}$$

Reciproca proprietăţii lui Darboux nu este valabilă în general, în sensul că pot exista funcţii care au această proprietate fără să fie continue (pe un anumit interval). Să mai observăm că această proprietate a lui Darboux, sub forma din (5.38), se poate aplica şi în cazul în care intervalul care intervine în definiţia este unul deschis ; însă în acest caz se pot considera fie puncte $x_1, x_2 \in I$ ca şi în cazul general, fie se poate lucra cu limitele în capetele intervalului.

E 5.10 Să se arate că funcţia $f(x) = x\,2^x - 1$ se anulează într-un punct $\xi \in (0, 1)$.

Funcţia fiind definită pe $\mathbb{R}$, putem considera valorile ei în capetele intevalului copact $I = [0, 1]$ care sunt

$$f(0) = 0\cdot 1 - 1 = -1,\ f(1) = 1\cdot 2 - 1 = 1 \;\Rightarrow\; f(0)\,f(1) < 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (\exists\ \xi \in (0, 1))\ f(\xi) = 0. \tag{5.41}$$

Concluzia din (5.41) este ccea ce în matematică se numeşte un rezultat de existenţă. Găsirea efectivă a acestei rădăcini $\xi \in (0, 1)$ poate fi o problemă mai puţin simplă întrucât ecuaţia $f(x) = 0 \Rightarrow x\,2^x - 1 = 0$ este o ecuaţie transcendentă : ea nu se poate reduce la o ecuaţie care să implice funcţii elementare de o aceeaşi natură (algebrice, logaritmice, exponenţiale, trigonometrice etc.). Totuşi, ea poate fi rezolvată cu metode aproximative (sau numerice), inclusiv cu metoda grafică. Ecuaţia de mai sus este echivalentă cu

$$2^x = \frac{1}{x}. \tag{5.42}$$

Se pot reprezenta grafic exponenţiala de bază 2 şi ramura din primul cadran a hiperbolei echilatere şi se va constata că punctul de intersecţie al celor două grafice este chiar unic ; coordonatele sale aproximative sunt $(\xi, f(\xi)) \approx (0.64, 0)$. □

E 5.11 Funcţia $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pentru } x \le 0, \\ x - 1 & \text{pentru } x > 0 \end{cases} \tag{5.43}$$

este evident discontinuă în origine şi totuşi ea transformă orice interval într-un alt interval. Într-adevăr, dacă $I = [a, b] \le 0$ atunci $f(I) = [2a, 2b]$, iar dacă $I = [a, b] > 0$ atunci $f(I) = [a - 1, b - 1]$. Dar dacă originea cade în interiorul intervalului atunci

$$a < 0 < b \Rightarrow f(I) = [2a, b - 1]. \tag{5.44}$$

Formal, membrul drept din (5.44) reprezintă un interval, dar trebuie să se verifice dacă extremitatea sa stânga o precede pe cea dreaptă. Avem două alternative disjuncte :

$$[2a \le b - 1 \iff b \ge 2a + 1] \Rightarrow f(I) = [2a, b - 1] \ \& \tag{5.45}$$

$$[2a > b - 1 \iff b < 2a + 1] \Rightarrow f(I) = [b - 1, 2a]. \tag{5.46}$$

Deci imeginea intervalului I este – în toate cazurile posibile – tot un interval. Cititorul este invitat să reprezinte grafic această funcţie biliniară (graficul fiind format din două semidrepte respectiv situate în semiplanele $(x \le 0)$ şi $(x > 0)$), precum şi intervalul $I = [a, b]$ cu cele trei poziţii posibile ale sale şi fiecare imagine a acestuia prin funcţia f. □

Aplicaţii cu funcţii continue - II

FC-A .3 Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiilor (pe intervalul indicat) :

(*i*) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \dashrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x}, \quad I = (1, +\infty)$;

(*ii*) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad I = (0, +\infty)$;

(*iii*) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \dashrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{x+2}{x+1} \sin^2 x^2, \; I = [0, +\infty)$;

(*iv*) $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \dashrightarrow \mathbb{R}, \; g(x) = \frac{x+2}{x+1} \cos^2 x^2, \; I = [0, +\infty)$;

(*v*) Folosind proprietatea lui Darboux, să se arate că funcţa $f(x) = x^5 - 3x - 1$ se anulează într-un punct $\xi \in (1, 2)$.

Pentru funcţiile de mai jos, să se verifice uniforma continuitate pe intervalul precizat, cu identificarea razei $\delta(\varepsilon, I)$ şi a constantei lui Lipschitz, atunci când este cazul..

(*vi*) $f(x) = \sqrt{2x+3}, \; I = [0, 2]$;

(*vii*) $f(x) = \sin x + \cos x, \; I = \mathbb{R}$;

(*viii*) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}, \; I = [1, +\infty)$.

Să se determine imaginea intervalului I prin fiecare din funcţiile :

(*ix*) $f(x) = \sqrt{2x-1}, \; I = [1, 5]$;

(*x*) $f(x) = x^2 - 3x + 2, \; I = [0, 5]$.

Sugestii pentru rezolvări, răspunsuri.

(*i*) Se va scrie variaţia absolută, între punctele $x_1, x_2 \in I$, a funcţiei şi se va constata că ea coincide cu cea a funcţiei $\operatorname{arctg} x$, folosind formula (5.30). Se va minora numitorul pe intervalul dat. Se va găsi $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2| < \ldots$

(*ii*) Deşi continuă pe intervalul indicat, funcţia nu este şi unifrom continuă. Se poat alege două argumente sub formă de şiruri, anume

$$x_1(n) = (n+1)^{1/2} = \sqrt{n+1} \;\;\&\;\; x_2(n) = n^{1/2} = \sqrt{n} \tag{5.47}$$

a căror diferenţă absolută converge la 0 : a se verifica. Însă variaţia absolută a funcţiei este

$$|f(x_2(n)) - f(x_1(n))| = \ldots = \left| n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| ; \tag{5.48}$$

diferenţa de cosinusuri se va transformată în produs de sinusuri şi – trecând la limită – se va obţine

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_1(n)) - f(x_2(n))| = \ldots = 1 .$$

Prin urmare, variaţia absolută a funcţiei va fi minorată de o constantă pozitivă ; a se găsi o astfel de constantă alegând un $\varepsilon_0 \in (0\,,1)$.

(iii) & (iv) Nici aceste două funcţii nu sunt uniform continue. Se pot alege şirurile

$$x_1(n) = (2n\pi)^{1/2} \ \ \& \ \ x_2(n) = (2n\pi + \pi/2)^{1/2} \ \ \text{cu}$$

pentru care se va obţine Se va ajunge la

$$|f(x_2(n)) - f(x_1(n))| = \ldots = 1 + \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \pi/2} + 1} > 1 .$$

A se detalia calculele, inclusiv pentru funcţia din (iv) .

Observaţie. Cele două funcţii din (iii) & (iv) au fost preluate dintr-un exerciţiu, din culegerea de probleme [S. Chiriţă, 1989]. Ele conţin funcţiile trigonometrice la puterea a 2-a întrucât exerciţiul respectiv cere şi demonstrarea uniformei continuităţi a sumei lor $S(x) = f(x) + g(x)$, care are o expresie mult mai simplă ; aceasta arată că suma a două funcţii care nu sunt U-continue poate fi U-continuă. Această completare rămâne ca homework pentru cei interesaţi.

(v) Concluzia rezultă imediat din $f(1)f(2) < 0$. A se verifica.

(vi) Rescriind şi majorând variaţia absolută $|\sqrt{2x_1 + 3} - \sqrt{2x_2 + 3}\,|$ se va ajunge la constanta lui Lipschitz

$$L = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \delta(\varepsilon, I) = \sqrt{3}\,\varepsilon .$$

(vii) Rescriind variaţia absolută a funcţiei cu formulele de transformare a diferenţelor în produse şi aplicând majorări imediate se va ajunge la

$$|f(x') - f(x'')| \le \dots \le 2\,|\sin\frac{x' - x''}{2}|$$

iar o cunoscută majorare pentru valoarea absolută a sinusului va conduce la $L = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \delta(\varepsilon, I) = \varepsilon$; de fapt, raza $\delta(\varepsilon, I) = \varepsilon$ nici nu depinde de vreun interval, funcţia fiind lipschitziană şi uniform continuă pe toată axa reală. A se detalia calculele.

(*viii*) Variaţia funcţiei se poate rescrie (prin aducere la acelaşi numitor) sub forma

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{x'}{x'^2 + 2} - \frac{x''}{x''^2 + 2}\right| = \dots = \frac{(x'x'' + 2)\,|x' - x''|}{(x'^2 + 2)(x''^2 + 2)}; \qquad (5.49)$$

se vor verifica (justifica) majorările pentru ultimul membru din (5.49) şi anume

$$\frac{(x'x'' + 2)\,|x' - x''|}{(x'^2 + 2)(x''^2 + 2)} \le \frac{x'x''}{x'^2 x''^2}\,|x' - x''| \le |x' - x''|.$$

şi se va identifica $\delta(\varepsilon, I)$. Acest $\delta(\varepsilon, I)$ depinde efectiv de intervalul pe care se verifică uniforma continuitate ?

Imaginea intervalului I prin fiecare din funcţiile de mai jos s-ar putea determina riguros pe baza monotoniei funcţiilor respective, proprietate care – în general – necesită utilizarea derivatei. Dar pentru funcţiile elementare date variaţia lor este bine-cunoscută şi se pot folosi inegalităţi deduse pas cu pas.

(*ix*) $x \in I = [1, 5] \Rightarrow 1 \le x \le 5 \Rightarrow 1 \le 2x - 1 \le 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x - 1} \in [1, 3]. \qquad (5\text{-}50)$$

Mai exact, $f(I) = [1, 3]$. Se vor justifica implicaţiile din (5-50) pe baza compunerii de funcţii monotone precum şi acoperirea efectivă a intervalulul imagine cu proprietatea lui Darboux.

(*x*) Funcţia din enunţ este o funcţie de gradul 2, pentru care urmează a se găsi rădăcinile şi punctul de minim + valoarea minimă ; variaţia acestei funcţii va permite identificarea intervalului-imagine $f(I)$.

Cei interesaţi vor putea trasa şi graficele funcţiilor din (*ix*) şi (*x*) .

Alte proprietăţi de continuitate globală a funcţiilor sunt enunţate mai jos.

Teorema 5.2. *Orice funcţie $f: D \to \mathbb{R}$, continuă pe intervalul compact $I = [a, b] \subseteq D$, este **uniform continuă** pe acest interval.*

Teorema 5.3. *Orice funcţie $f: D \to \mathbb{R}$, continuă pe intervalul compact $I = [a, b] \subseteq D$, este **mărginită** pe acest interval şi îşi atinge efectiv marginile. .*

Aceste două rezultate pot fi exprimate formal precum urmează.

$\boxed{\textbf{Th . 5.2}}$
$$I = [a, b] \subseteq D_{\text{cont}}(f) \Rightarrow (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon, I) = \delta > 0)(\forall\ x_1, x_2 \in I)$$
$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$\boxed{\textbf{Th . 5.3}}$
$$I = [a, b] \subseteq D_{\text{cont}}(f) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (\exists\ m, M \in \mathbb{R})\ m \leq f(I) \leq M, \\ (\exists\ x_*, x^* \in I)\ f(x_*) = \inf\limits_I f = \min\limits_I f,\ f(x^*) = \sup\limits_I f = \max\limits_I f. \end{cases}$$

Se va vedea, în cazul funcţiilor de mai multe variabile

$$f: D \to \mathbb{R}^m,\ D \subseteq \mathbb{R}^n$$

care sunt continue pe un (sub)domeniu compact $D_0 \subseteq D$, că o generalizare a proprietăţii din **Th . 5.3** este de asemenea valabilă.
