

6. Funcții reale derivabile

Succinte preliminarii teoretice (+ exemple)

O funcție cu valori reale, definită pe o submulțime din $\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{c} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \cap \\ \mathbb{R} \end{array} \quad (6.1)$$

este *derivabilă* în punctul $x_0 \in D \cap \text{acc } D$ dacă există în $\mathbb{R}$ limita

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0).} \quad (6.2)$$

Limita din (6.2) este un număr real – derivata funcției în punctul x_0 . Dacă această limită nu există, sau dacă ea este infinită, sau dacă cel puțin una din limitele laterale nu există, funcția nu este derivabilă. Raportul dintre variația funcției

$$\Delta f(x_0, dx) = f(x) - f(x_0), \quad (6.3)$$

pentru (și supra) variația $dx = x - x_0$ a argumentului se numește *raport incremental*.

Ca și în cazul continuității (v. Secțiunea 5), derivabilitatea este definită punctual, deci este o proprietate locală. Dar ea se poate extinde la întregul domeniu de definiție D sau la un interval $I \subseteq D$. După cum continuitatea se poate defini și lateral (la stânga / la dreapta unui punct $x_0 \in I \subseteq D$), și derivata se poate defini astfel rezultând derivatele laterale :

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'_s(x_0), \quad \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'_d(x_0). \quad (6.4)$$

Evident, o funcție va fi derivabilă în $x_0 \iff f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$.

O funcție este *diferențiabilă* în punctul x_0 dacă variația funcției în acest punct, pentru variația $dx = x - x_0$ a argumentului, poate fi aproximată de o funcție liniară în această variație $dx = x - x_0$:

$$\Delta f(x_0, dx) = f(x) - f(x_0) = \delta(x - x_0) + \varepsilon(x_0, x)(x - x_0) = \delta dx + \varepsilon(x_0, dx) \quad (6.5)$$

unde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x_0, x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \varepsilon(x_0, dx) = 0. \quad (6.6)$$

La fel ca și variația funcției, primul termen din (6.5), adică $\delta dx = \delta(x - x_0)$, depinde de funcția f , de punctul x_0 și de variația argumentului. Acest termen se numește diferențiala funcției f în punctul x_0 , pentru variația $dx = x - x_0$ a argumentului. Ea se notează (de obicei) cu $df(x_0, dx)$, deci

$$df(x_0, dx) = \delta dx = \delta(x - x_0). \quad (6.7)$$

Al doilea termen din membrii secunzi ai expresiilor (6.5) reprezintă o abatere sau o eroare a aproximării variației funcției prin funcția liniară din (6.5) - (6.7). Ca orice eroare de aproximare, ea converge la zero atunci când $x \rightarrow x_0 \iff dx \rightarrow 0$. Cu aceste precizări, egalitatea din (6.5) se poate rescrie sub forma

$$\Delta f(x_0, dx) = f(x) - f(x_0) = df(x_0, dx) + \varepsilon(x_0, dx). \quad (6.8)$$

Dacă funcția este derivabilă în punctul x_0 , deci dacă există limita din (6.2), aceasta poate fi scrisă și sub forma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0. \quad (6.9)$$

Pe de altă parte, ținând seama de limita din (6.9) rezultă că raportul incremental este aproximat de derivată, diferența dintre ele fiind exact cea din limita (6.9), diferență pe care o putem nota ca în (6.6): $\varepsilon(x_0, x)$. Așadar, putem scrie

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) + \varepsilon(x_0, x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x_0, x)(x - x_0). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Comparând expresiile (6.8) & (6.10) ale variației funcției f rezultă expresia diferențialei unei funcții f în punctul x_0 , în care funcția este derivabilă :

$$df(x_0, dx) = f'(x_0) dx = f'(x_0)(x - x_0). \quad (6.11)$$

Din discuția de mai sus și din expresia (6.11) a diferențialei mai rezultă că o funcție este derivabilă într-un punct x_0 dacă și numai dacă este diferențiabilă în acel punct. Implicația $\Rightarrow$ tocmai a fost dedusă. Implicația inversă, $\Leftarrow$, de la diferențiabilitate la derivabilitate rezultă din (6.5) prin împărțire la $dx = x - x_0$ și prin trecere la limită :

(6.5) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta f(x_0, dx) &= \delta(x - x_0) + \varepsilon(x_0, x)(x - x_0) \Rightarrow \frac{\Delta f(x_0, dx)}{dx} = \delta + \varepsilon(x_0, x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x_0, dx)}{dx} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\delta + \varepsilon(x_0, x)) = \delta. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ultima egalitate din (6.12) a rezultat din (6.6). Dar limita din primul membru al relației (6.12) reprezintă exact definiția derivatei funcției f în punctul x_0 , conform cu (6.2). Așadar, funcția este derivabilă iar derivata sa este $f'(x_0) = \delta$.

Observații. Se folosește notația d pentru operatorul de diferențiere, iar legătura (6.11) de la derivată la diferențială justifică folosirea notației d/dx pentru operatorul de derivare. Mai exact,

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0). \quad (6.13)$$

Notația din (6.13) va permite și scrierea comodă a derivatelor de ordin superior. Dar ea are și o justificare numerică, precum și funcțională. Din definițiile anterioare s-a văzut că derivata unei funcții într-un punct fixat este un număr real, la fel ca și diferențiala dacă se dă o anumită valoare variației argumentului $dx = x - x_0 =_{\text{not}} h$. Iar derivata funcției apare, conform cu (6.11), ca raportul dintre diferențiala în acel punct și variația argumentului :

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0, dx)}{dx}. \quad (6.14)$$

Să mai observăm că derivata unei funcții f în punctul x_0 depinde atât de funcție cât și de punct, în timp ce diferențiala depinde de funcție, de punct dar și de variația argumentului. Dacă în loc de punctul fixat x_0 se consideră un punct curent x din domeniul (intervalul) pe care funcția este derivabilă, definiția (6.2) a derivatei se poate rescrie sub forma

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =_{\text{def}} f'(x) =_{\text{not}} \frac{df(x)}{dx}}. \quad (6.15)$$

Derivata și diferențiala pot fi extinse de la funcții reale (scalare) la funcții vectoriale. Dacă

$F: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_m(x)]$ atunci

$$F'(x) = [f'_1(x) \ f'_2(x) \ \dots \ f'_m(x)],$$

$$dF'(x, h) = [df_1(x, h) \ df_2(x, h) \ \dots \ df_m(x, h)].$$

Exemple (la formula (6.2))

E 6.1 Derivata funcției putere (naturală) $f(x) = x^n$ în punctul x_0 .

$$f'(x_0) = \frac{dx^n}{dx}(x_0) = \lim_{(6.2) \ x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \quad (6.23)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} = \quad (6.24)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n x_0^{n-1}. \quad (6.25)$$

În trecerea de la (6.23) la (6.24) s-a folosit o cunoscută identitate algebrică (pentru diferența de puteri naturale), iar limita din (6.25) a rezultat din continuitatea funcției polinom. □

Să mai constatăm că operatorul de derivare, considerat ca morfism liniar pe spațiul polinoamelor de ordinul n , $\text{POL}_n(\mathbb{R})$, aplică acest spațiu pe $\text{POL}_{n-1}(\mathbb{R})$. Liniaritatea acestei transformări rezultă din a doua dintre proprietățile (6.20) enunțate mai sus.

E 6.2 Derivata funcției $f(x) = \sin 3x$ în punctul $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$f'(\pi/4) = \frac{d \sin 3x}{dx}(\pi/4) = \lim_{(6.2) \ x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin 3x - \sin 3\pi/4}{x - \pi/4} = \quad (6.26)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \sin \frac{3}{2}(x - \pi/4) \cos \frac{3}{2}(x + \pi/4)}{x - \pi/4} = \quad (6.27)$$

$$= -\sqrt{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3}{2}y}{\frac{3}{2}y} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}. \quad (6.28)$$

Trecerea de la (6.26) la (6.27) s-a bazat pe o formulă calculabilă prin logaritmi din trigonometrie – diferența de sinusuri ca produs dintre un sinus și un cosinus), iar limita din (6.28) s-a obținut cu substituția evidentă $x - \pi/4 = y$, cu un mic artificiu și folosind cunoscuta limită în 0 a raportului $(\sin u)/u$. □

Să mai observăm că în determinarea derivatei oricărei funcții (continue) – după definiție – trebuie ridicată o nedeterminare de forma $0/0$.

E 6.3

Exemplu de funcție continuă care nu este derivabilă (punctual). Funcția

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

este o funcție continuă : limita sa în origine, $= 0$, a fost întâlnită în secțiunea precedentă. Însă derivata funcției în origine nu există întrucât

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}, \quad (6.29)$$

iar limita din (6.29), după cum se știe, nu există. □

Proprietăți ale funcțiilor derivabile

PFD.1 O funcție f derivabilă în punctul x_0 este continuă în acest punct.

Afirmația rezultă din (6.10) prin trecere la limită :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x_0, x)(x - x_0)] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \end{aligned}$$

PFD.2 Interpretarea geometrică a derivatei :

Derivata $f'(x_0)$ este egală cu panta (tangenta trigonometrică) a tangentei geometrice la graficul funcției G_f în punctul $(x_0, f(x_0))$.

$$\text{Ecuția analitică a acestei tangente este } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (6.30)$$

Teoremele clasice asupra funcțiilor derivabile pe intervale.

PFD.3 Teorema lui Rolle.

Dacă funcția f este continuă pe intervalul $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) atunci

$$f(a) = f(b) \Rightarrow (\exists c \in (a, b)) f'(c) = 0. \quad (6.31)$$

Corolar. Între două rădăcini (consecutive) ale funcției există cel puțin o rădăcină a primei sale derivate. Între două rădăcini (consecutive) ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcției.

PFD.4 Teorema lui Lagrange.

Dacă funcția f este continuă pe intervalul $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ pentru care

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (6.32)$$

PFD.5 Teorema lui Cauchy.

Dacă funcțiile f și g sunt continue pe intervalul $[a, b]$, derivabile pe (a, b) și $(\forall x \in (a, b)) \ g'(x) \neq 0$ atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ pentru care

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (6.33)$$

PFD.6 Operații cu funcții derivabile.

Dacă funcțiile f și g sunt derivabile (în punctul x_0 / pe intervalul (a, b)) atunci și funcțiile $f + g$, $\alpha f + \beta g$, fg , $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$), f^g ($f > 0$) sunt derivabile și

$$(f + g)' = f' + g', \quad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \quad (6.35)$$

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0), \quad (f^g)' = fg^{f-1}f' + g'f^g \ln f. \quad (6.36)$$

PFD.7 Derivarea funcțiilor compuse.

Dacă $h = g \circ f$, f este derivabilă în x_0 iar g este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$ atunci $h = g(f)$ este derivabilă în x_0 și

$$h'(x_0) = g'[f(x_0)] f'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0). \quad (6.37)$$

Desigur, toate aceste proprietăți sunt valabile atât într-un punct x_0 cât și pe un întreg interval în care funcțiile implicate sunt derivabile.

Toate proprietățile derivatei din (6.35) - (6.36) se transferă la diferențială. Scriem numai diferențiala produsului și a funcției compuse, celelalte formule rămânând ca exerciții.

$$d(fg) = (df)g + f(dg);$$

$$dh(x_0, dx) = d(g \circ f)(x_0, dx) = dg(y_0, dy) \text{ cu } y_0 = f(x_0) \ \& \ dy = df(x_0, dx).$$

Derivatele funcțiilor uzuale (elementare) sunt presupuse a fi cunoscute din **ANALIZA** studiată în liceu. Totuși listăm mai jos un număr de astfel de derivate.

Derivatele unor funcții uzuale (elementare)

$$1^{\circ} \quad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$2^{\circ} \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$3^{\circ} \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}};$$

$$4^{\circ} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$5^{\circ} \quad (\sin x)' = \cos x;$$

$$6^{\circ} \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$7^{\circ} \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$8^{\circ} \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$9^{\circ} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$10^{\circ} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$11^{\circ} \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$12^{\circ} \quad (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$13^{\circ} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$14^{\circ} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$15^{\circ} \quad (e^x)' = e^x;$$

$$16^{\circ} \quad (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$17^{\circ} \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$18^{\circ} \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$19^{\circ} \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$20^{\circ} \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Notă. Funcțiile de la $17^{\circ}, \dots, 20^{\circ}$ sunt *funcțiile hiperbolice*:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Homework: A se verifica formulele de derivare $7^{\circ}, \dots, 20^{\circ}$.

Aplicații cu funcții derivabile - I

FD-A.1 Să se calculeze derivatele funcțiilor ce urmează folosind definiția (6.2).

(i) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $x_0 = 7$;

(ii) $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$, $x_0 = 1$;

(iii) $f(x) = \sin 3x^2$, $x_0 = \sqrt{\pi}$;

(iv) $f(x) = \arcsin(x-1)$, $x_0 = 1$;

(v) $f(x) = e^{3x}$, $x_0 = 1$;

(vi) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

(vii) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

(viii) $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$, $x_0 = 1$;

(ix) $f(x) = \sqrt{5x+1}$, $x_0 = 3$;

(x) $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$, $x_0 = 2$.

Răspunsuri. (i) $f'(7) = \frac{1}{6}$;

(ii) $f'(1) = \frac{7}{6}$;

Limita funcției din (ii) se obține printr-un artificiu sub $\ln[(x^2 + 5x)/6]$, scriind $(x^2 + 5x)/6 = 1 + (x^2 + 5x - 6)/6 = 1 + u$, operând un alt artificiu la numitorul $x - 1$ și folosind limita

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \ln(1 + u) = \ln e = 1.$$

(iii) $f'(\sqrt{\pi}) = -6\sqrt{\pi}$;

(iv) $f'(1) = 1$;

(v) $f'(1) = 3e^3$;

(vi) $f'(\pi/4) = 2$;

(vii) $f'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2}$;

(viii) $f'(1) = \frac{7}{6}$;

(ix) $f'(3) = \frac{5}{8}$;

(x) $f'(x) = 8 \cos 9$.

Pentru fiecare dintre funcții urmează a se verifica valoarea indicată în răspuns, cu formula de definiție (6.2). Urmează a se efectua factorizări, simplificări și alte operații pentru a se ridica nedeterminarea. Valorile de mai sus se pot regăsi și determinând derivata cu regulile de derivare și calculându-i limita în punctul indicat, în condițiile în care ea este continuă : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

Aşa cum s-a menţionat la începutul acestei secţiuni, o funcţie f poate să nu fie derivabilă în punctul x_0 (în care este totuşi continuă) fie dacă limita din (6.2) nu există (ca în **Exemplul 6.3**), fie dacă ea există dar este infinită, cel puţin lateral (la stânga sau la dreapta). Un caz interesant este cel în care există derivatele laterale – definite în (6.4) – dar ele nu coincid. Urmează câteva exemple.

$$\boxed{\text{E 6.4}} \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} & \text{pentru } x \neq 1, \\ 0 & \text{pentru } x = 1. \end{cases} \quad (6.38)$$

Evident, punctul în care se pune problema derivabilităţii este cel în care funcţia îşi schimbă expresia, adică 1. Limita raportului incrementar în 1 este

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}. \quad (6.39)$$

Limita din (6.39) nu există întrucât limitele laterale diferă. Într-adevăr, folosind şi notaţiile cunoscute $\operatorname{arctg}(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$ & $\operatorname{arctg}(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x$, avem

$$\begin{aligned} f'_s(1) &= \lim_{x \nearrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{0^-} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\pi/2; \\ f'_d(1) &= \lim_{x \searrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{0^+} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \pi/2. \end{aligned}$$

În acest caz se spune că punctul $(x_0 = 1, f(x_0) = 0)$ este un punct unghiular pentru graficul funcţiei. $\square$

$$\boxed{\text{E 6.5}} \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{pentru } |x| \leq 1, \\ e^{-1} & \text{pentru } |x| > 1. \end{cases} \quad (6.40)$$

Şi această funcţie este evident continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Se poate verifica şi continuitatea în cele două puncte (chiar dacă nu se cere în mod explicit).

$$(6.40) \Rightarrow f(-1) = f(1) = e^{-1} = f(-1 - 0) = f(1 + 0)$$

de unde rezultă că funcţia este continuă pe întreaga axă $\mathbb{R}$.

$$f'_s(-1) = \lim_{x \nearrow -1} \frac{e^{-1} - e^{-1}}{x + 1} = 0 = \lim_{x \searrow -1} \frac{e^{-1} - e^{-1}}{x - 1} = f'_d(-1). \quad (6.41)$$

Celelalte două derivate laterale în -1 & 1 sunt (respectiv)

$$f_d'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 e^{-x^2} - e^{-1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2-1)e^{-x^2} + e^{-x^2} - e^{-1}}{x+1} = \quad (6.42)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)e^{-x^2} + \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{e^{-1}(x-1)(e^{1-x^2}-1)}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^2}{x+1} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)e^{-x^2} + \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{e^{-1}(e^{1-x^2}-1)}{1-x^2} \cdot (1-x) \right] =$$

$$= -2 \cdot e^{-1} + e^{-1} \cdot 2 = 0. \quad (6.43)$$

Limita din (6.43) a fost obținută prin artificiile indicate, prin descompunerea limitei din (6.42) în sumă de limite și prin folosirea limitei fundamentale

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \ln e = 1 \text{ cu } u = 1 - x^2.$$

Analog se va obține și derivata la stânga în punctul 1, tot = 0, de unde rezultă că funcția din (6.40) este derivabilă pe toată axa reală. Calculul lui $f_s'(1) (= 0)$ rămâne ca exercițiu pentru cititor. $\square$

E 6.6 Derivate laterale infinite.

Oferim și un exemplu (mult mai simplu decât precedentul) de funcție discontinuă în origine pentru care – totuși – se pot calcula derivatele laterale, dintre care cel puțin una este infinită.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } x < 0, \\ a & \text{pentru } x = 0, \\ 2 - x^2 & \text{pentru } x > 0. \end{cases} \quad (6.44)$$

Funcția este, evident, discontinuă în origine pentru orice $a \in \mathbb{R}$. Totuși, ea devine continuă la stânga în origine pentru $a = 0$, respectiv continuă la dreapta în $x_0 = 0$ pentru $a = 2$. În toate cazurile f prezintă în origine o discontinuitate de prima specie, cu salt sau salturi finite între valorile (limita funcției) la stânga / dreapta lui $x_0 = 0$ și valoarea ei în acest punct care este $f(0) = a \in \mathbb{R}$. Derivatele laterale vor depinde, în mod natural, de poziția lui a pe axa (Oy):

$$f_s'(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^2 - a}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{pentru } a < 0, \\ 0 & \text{pentru } a = 0, \\ +\infty & \text{pentru } a > 0. \end{cases} \quad (6.45)$$

$$f_d'(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2 - x^2 - a}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{pentru } a < 2, \\ 0 & \text{pentru } a = 2, \\ -\infty & \text{pentru } a > 2. \end{cases} \quad (6.46)$$

Combinând rezultatele din (6.45) și (6.46) se pot scrie ambele derivate laterale pentru fiecare din cele trei intervale și cele două valori (punctuale) posibile ale parametrului $a \in \mathbb{R}$:

Tabel 6.1 Derivatele laterale în 0 ale funcției din (6.44)

$a \in \mathbb{R}$	$f_s'(0)$	$f_d'(0)$
$a < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$a = 0$	0	$+\infty$
$0 < a < 2$	$+\infty$	$-\infty$
$a = 2$	$+\infty$	0
$a > 2$	$+\infty$	$-\infty$

Limitele laterale permit o caracterizare a extremelor locale ale unei funcții într-un punct dat, inclusiv în unul în care ea este discontinuă. Vom reveni la această caracterizare în subsecțiunea dedicată studiului variației funcțiilor (și al extremelor locale ale acestora) cu ajutorul derivatelor.

Derivatele laterale pot fi infinite și într-un punct în care funcția este continuă; în astfel de cazuri, ramura respectivă a funcției admite o tangentă verticală; a se vedea **PFD.2** la pag. 87.

E 6.7 Pentru funcțiile de mai jos, se cer derivatele laterale în origine.

$$(i) \quad f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{pentru } x > 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0. \end{cases} \quad (6.47)$$

$$(ii) \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{pentru } x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & \text{pentru } x = 0. \end{cases} \quad (6.48)$$

(i) Pentru funcția din (6.47) se poate calcula doar derivata la dreapta în origine:

$$f_d'(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty. \quad (6.49)$$

În toate punctele $x > 0$, derivata funcției f este $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Semiaxa (Oy) , $y \geq 0$ este tangentă verticală în origine la graficul funcției.

(ii) Pentru funcția din (6.48) se pot calcula ambele derivate laterale în origine :

$$g_s'(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt{-x}}{-(-x)} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{-\sqrt{-x}} = -\infty; \quad (6.50)$$

$$g_d'(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty. \quad (6.51)$$

Așadar, ambele derivate laterale în origine există și sunt infinite dar diferă ca semn. Semiaxa (Oy) , $y \geq 0$ este tangentă verticală la ambele ramuri ale graficului funcției în origine.

După cum se va vedea în subsecțiunea următoare, originea este punct de minim local și chiar global pentru ambele funcții f & g .

□

Aplicații cu funcții derivabile - II

FD-A.2 Să se calculeze derivatele laterale ale funcțiilor ce urmează în punctul indicat, cf. cu (6.4).

$$(i) \quad f(x) = |x|, \quad x_0 = 0; \quad (ii) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } x \leq 0, \\ 2x & \text{pentru } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$(iii) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{pentru } x \leq 0, \\ x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{pentru } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$(iv) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{pentru } x \leq 0, \\ x^2(2 + \cos \frac{1}{x}) & \text{pentru } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$(v) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 1, \\ \sqrt{x-1} & \text{pentru } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1; \quad (vi) \quad f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, \quad x_0 = 1;$$

$$(vii) \quad f(x) = \begin{cases} (x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} & \text{pentru } x \neq 1, \\ 0 & \text{pentru } x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$(viii) \quad f(x) = e^{1/|x-1|}, \quad x_0 = 1.$$

Răspunsuri.

$$(i) \quad f'_s(0) = -1, \quad f'_d(0) = 1;$$

$$(ii) \quad f'_s(0) = 0, \quad f'_d(0) = 2;$$

$$(iii) \quad f'_s(0) = -1, \quad f'_d(0) = 0;$$

$$(iv) \quad f'_s(0) = 0, \quad f'_d(0) = 0;$$

$$(v) \quad f'_s(1) = 0, \quad f'_d(1) = +\infty.$$

(vi) Pentru această funcție se poate calcula derivata sa cu regulile de derivare, inclusiv pentru funcțiile compuse, după care se va trece la limită spre $x_0 = 1$, din stânga și din dreapta. Se poate nota

$$u = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow u' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}; \quad (6.52)$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \stackrel{(6.52)}{=} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{|1-x^2|} = 2 \frac{\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}. \quad (6.53)$$

$$(6.53) \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{pentru } |x| < 1, \\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{pentru } |x| > 1. \end{cases}; \quad (6.54)$$

$$(6.54) \Rightarrow f'_s(1) = 1, \quad f'_d(1) = -1.$$

Cei interesați urmează a determina și derivatele laterale în $-x_0 = -1$.

$$(vii) \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

$$(viii) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} : \begin{cases} \lim_{x \nearrow 1} \frac{e^{|x-1|} - 1}{x-1} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{-(1-x)} = -1, \\ \lim_{x \searrow 1} \frac{e^{|x-1|} - 1}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = 1 \end{cases} \quad (6.55)$$

În determinarea limitelor laterale din (6.55) a intervenit limita fundamentală folosită și în **E 6.5**; cititorii interesați vor preciza preciza substituția folosită în fiecare din cele două cazuri și vor trage concluzia asupra derivabilității lui f în punctul indicat.

Studiul variației funcțiilor cu ajutorul derivatelor

Prin variația unei funcții înțeleg comportarea acesteia pe domeniul său de definiție, sub diverse aspecte : monotonia, intervalele de continuitate, eventualele puncte de discontinuitate și natura acestora, existența asimptotelor orizontale, verticale sau oblice, tangentele în anumite puncte ale graficului funcției, eventualele puncte de extrem local și natura acestora (inclusiv valoarea extremelor respective), puncte de extrem global, mulțimea valorilor $f(D)$ și marginile acesteia.

Pentru un astfel de studiu, noțiunile și exemplele oferite în § 4 - LIMITE ale FUNCȚIILOR REALE, § 5 - CONTINUITATE și (cele prezentate până aici în) § 6 - FUNCȚII DERIVABILE sunt nu numai utile ci chiar necesare. Mai trebuie doar amintite câteva proprietăți și noțiuni (studiate și la ANALIZA MATEMATICĂ în liceu).

Monotonia funcțiilor derivabile

Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) este monoton crescătoare / descrescătoare pe intervalul $I \subseteq D$ dacă

$$(\forall x_1, x_2 \in I) \ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) : f \nearrow \text{ pe } I; \\ f(x_1) \geq f(x_2) : f \searrow \text{ pe } I. \end{cases} \quad (6.56)$$

Dacă inegalitățile dintre valorile funcției care intervin în (6.56) sunt stricte, funcția va fi strict crescătoare / strict descrescătoare. Monotonia funcțiile derivabile este caracterizată prin

PFD.8 Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$), derivabilă pe intervalul $I \subseteq D$, este monoton crescătoare / descrescătoare pe I dacă și numai dacă $f'(I) \geq 0$ | $f'(I) \leq 0$.

Această caracterizare rezultă imediat din definiția (6.2) a derivatei, extinsă la întregul interval I , ținând seama de semnul raportului incrementar. Desigur, pentru monotonia strictă – în fiecare din cele două variante – semnul derivatei din această caracterizare va fi strict. De obicei, derivatele (implicit și semnul lor) se consideră pe *intervale deschise*; însă monotonia funcției este caracterizată și pe intervalul închis (sau semiînchis) rezultat prin completarea intervalului deschis cu (una sau ambele) extremități ale sale, dacă funcția este continuă. Urmează câteva exemple.

E 6.8 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x.$

Graficul acestei funcții este cunoscuta *sinusoidă*. Funcția este continuă și peste tot derivabilă, având derivata $f'(x) = \cos x$. Ea este crescătoare, respectiv descrescătoare, pe intervale de lungime π :

$$\begin{cases} (\forall x_1, x_2 \in [-\pi/2, \pi/2]), \\ (\forall x_1, x_2 \in [\pi/2, 3\pi/2]), \end{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \sin x_1 < \sin x_2 : \sin \nearrow \text{ pe } [-\pi/2, \pi/2]; \\ \sin x_1 > \sin x_2 : \sin \searrow \text{ pe } [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases}$$

Evident, $f'(x) = \cos x > 0$ pe $(-\pi/2, \pi/2)$ și $f'(x) = \cos x < 0$ pe $(\pi/2, 3\pi/2)$. Având în vedere periodicitatea sinusului, monotonia sa crescătoare / descrescătoare se verifică pe orice interval de forma $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$ (k întreg), respectiv $[2\ell\pi + \pi/2, 2\ell\pi + 3\pi/2]$ (ℓ întreg).

Cititorul interesat va descrie variația funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$. □

E 6.9

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3. \quad (6.57)$$

Aceste este unul din cele mai simple exemple de funcție (putere naturală) care este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \quad x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = \\ &= (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1). \end{aligned} \quad (6.58)$$

În membrul stâng din (6.58), al doilea factor din descompunerea diferenței de cuburi este strict pozitiv pentru orice valori ale celor două argumente. Pe de altă parte, derivata funcției este $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Singurul punct în care se anulează derivata este $x = 0$; acesta este un *punct de inflexiune*, în care graficul funcției își schimbă concavitățile: el prezintă concavitate orientată spre $y < 0$ pentru $x \leq 0$, respectiv spre $y > 0$ pentru $x \geq 0$. Acest exemplu simplu arată că o funcție poate fi strict crescătoare pe un interval chiar dacă prima sa derivată se anulează în unul (sau mai multe puncte) din acel interval. În origine, graficul funcției are ca tangentă chiar axa absciselor (Ox). Cititorii interesați vor putea verifica aceeași comportare pentru orice putere impară a lui x , de exemplu $g(x) = x^5$. □

E 6.10

(i) $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$;

(ii) $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2), g(x) = \operatorname{arctg} x$.

(i) Derivata tangentei a fost dată în lista de la pag. 87. Ea este strict pozitivă pe intervalul de definiție întrucât $f'(x) = 1/\cos^2 x$. Însă monotonia crescătoare a lui f poate fi stabilită și direct, conform cu definiția din (6.56).

$$(\forall x_1, x_2 \in (-\pi/2, \pi/2)) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 =$$

$$= \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2} > 0 \quad (6.59)$$

pe intervalul de definiție. Această inegalitate din (6.59) rezultă din monotonie strict crescătoare a funcției sinus pe intervalul $(-\pi/2, \pi/2)$, precum și din semnul funcției cosinus pe același interval. Să mai observăm că $f'(0) = 1/\cos^2 0 = 1$, de unde rezultă că funcția are ca tangentă în origine la graficul ei bisectoarea I-a, a cărei ecuație este $y = x$. Și pentru această funcție originea este un punct de inflexiune, la fel ca pentru funcția din exemplul precedent.

(ii) Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$, $g(x) = \arctg x$ este inversa funcției precedente. Se poate verifica că inversarea unei funcții strict monotone îi păstrează această proprietate, Într-adevăr, dacă f este (strict) crescătoare rezultă din (6.56) că

$$(\forall x_1, x_2 \in I) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow y_1 < y_2, \text{ cu } y_i = f(x_i), i = \overline{1, 2}. \quad (6.60)$$

Inversa unei funcții $g: I \rightarrow J$ (cu $g(I) = J$) se definește ca fiind o funcție

$$h: J \rightarrow I, (\forall y \in J) \quad h(y) = x \iff g(x) = y. \quad (6.61)$$

$$(6.61) \Rightarrow (\forall x \in I) \quad h[g(x)] = x \Rightarrow h \circ g = \text{id}_I \text{ cu } (\forall x \in I) \quad \text{id}_I(x) = x.$$

Inversa se notează $h = g^{-1}$. În cazul funcțiilor tg și arctg , notate cu f & g în (I) și (ii), avem $g^{-1} = f$ sau $g = f^{-1} \iff \text{arctg} = \text{tg}^{-1}$. Pentru a demonstra monotonie crescătoare a arc-tangentei, aplicăm funcția $f^{-1} = \text{arctg}$ inegalității din (6.60) și obținem

$$(\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}) \quad y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2)$$

întrucât $g(y_i) = g[f(x_i)] = \text{id}_I(x_i) = x_i$ ($i = \overline{1, 2}$) & $x_1 < x_2$.

Dar monotonie lui $g(x) = \arctg x$ rezultă și cu folosirea derivatei sale,

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow \arctg \nearrow \text{ pe } \mathbb{R}.$$

Să mai observăm că

$$f'(1) = \left[\frac{1}{1+x^2} \right]_{x=0} = 1,$$

deci și $g(x) = \arctg x$ are ca tangentă în origine bisectoarea I-a, ($y = x$).

HOMEWORK. A se studia variația (monotonie) funcțiilor

$$(iii) \quad f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \text{ctg } x;$$

$$(iv) \quad g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), \quad g(x) = \text{arcctg } x.$$

Să se arate că funcțiile de mai jos sunt descrescătoare pe domeniul lor de definiție.

$$(v) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{x+1}{x-1};$$

$$(vi) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{e^x}{x^2+1}.$$

Să se arate că funcțiile de mai jos sunt crescătoare pe domeniul lor de definiție.

$$(vii) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 10;$$

$$(viii) \quad f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \arcsin x - x\sqrt{1-x^2}.$$

Extremele (locale / globale ale) funcțiilor reale

Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) admite un *minim* / *maxim local* în punctul $x_0 \in \text{int } D$ dacă există (cel puțin) o vecinătate U_{x_0} a acestui punct pentru care

$$\boxed{f(U_{x_0} \cap D) \geq f(x_0)}, \text{ respectiv } \boxed{f(U_{x_0} \cap D) \leq f(x_0)}. \quad (6.62)$$

Cu alte cuvinte, $x_0 \in \text{int } D$ este un punct de minim & maxim local dacă valoarea funcției în acest punct este mai mică / mai mare decât valorile sale dintr-o vecinătate (suficient de mică). Condiția ca un astfel de punct de extrem local să fie un punct interior domeniului de definiție nu este una esențială. De exemplu, anumite funcții definite pe un interval închis pot avea extrem local (sau global) în capetele intervalului sau în unul dintre acestea.

Un punct $x_0 \in \text{int } D$ este un punct de *minim* / *maxim global* pentru funcția f dacă

$$\boxed{f(D) \geq f(x_0)}, \text{ respectiv } \boxed{f(D) \leq f(x_0)}. \quad (6.63)$$

Cu alte cuvinte, într-un punct de minim global funcția ia o valoare mai mică decât toate valorile sale pe domeniul de definiție; evident, valoarea funcției într-un punct de maxim global majorează valorile funcției pe întreg domeniul D . În mod firesc, un punct de minim global nu poate fi și unul de maxim global decât în cazul absolut banal în care funcția este constantă pe domeniul său de definiție: $f(D) = \{c\}$, $c \in \mathbb{R}$. Dar – în acest caz – toate punctele din domeniu sunt puncte atât de minim cât și de maxim; este un caz degenerat care nici nu merită discutat. Așa cum am notat și în § 1 - SUBMULȚIMI din $(\mathbb{R}, \leq)$, putem scrie

$$\min_{\text{not } D} f(D) = \min_D f = f(x_\star), \quad \max_{\text{not } D} f(D) = \max_D f = f(x^\star). \quad (6.64)$$

Evident unele funcții pot admite extreme locale sau/și globale iar altele nici măcar vreun extrem local. Un exemplu îl oferă funcțiile strict monotone pe tot domeniul, ca cele din E 6.9 și E 6.10, (i) - (iv) prezentate anterior.

E 6.11 (i) $f: (-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - (x - 1)^2;$

(ii) $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pentru } x \neq \pi/2, \\ \lambda & \text{pentru } x = \pi/2. \end{cases}$

(i) Graficul funcției reprezintă o porțiune din parabola cu concavitatea spre $y < 0$, având punctul de maxim în $x_0 = 1 \Rightarrow f(1) = 2$. Intervalul pe care este definită funcția limitează valorile acesteia la un interval marginit :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [2 - (x - 1)^2] = -2, f(3) = -2. \quad (6.65)$$

Rezultă din (6.65) precum și din valoarea în 1 menționată mai sus, că acest $x_0 = 1$ este un punct de maxim local, dar este și unul de maxim global conform cu definiția din (6.63) - (6.64), având în vedere că $f(D) = f((-1, 3]) = [-2, 2]$. Tot din (6.65) urmează că valoarea funcției în 3 este chiar minimul global. Așadar,

$$\begin{cases} \min f(D) = \min_{(-1, 3]} f = -2 = f(x_\star) \text{ cu } x_\star = 3, \\ \max f(D) = \max_{(-1, 3]} f = 2 = f(x^\star) \text{ cu } x^\star = 1. \end{cases}$$

Dacă se consideră comportarea funcției la dreapta punctului $a = -1$, într-o vecinătate suficient de mică, valoarea minimă $= -2$ este aici doar un infimum local.

□

(ii) Variația funcției $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pentru } x \neq \pi/2, \\ \lambda & \text{pentru } x = \pi/2 \end{cases} \quad (6.66)$

pe $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ este bine-cunoscută din variația funcției cosinus în primul semicerc al cercului trigonometric. Însă funcția g a fost modificată în centrul intervalului dându-i-se valoarea

$$g(\pi/2) = \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6.67)$$

De valoarea acestui parametru va depinde și natura punctului $x_0 = \pi/2$. Funcția $g(x) = \cos x$ este strict descrescătoare pe reuniunea $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, de la 1 la -1. Luând în considerare și valoarea din (6.67), apar următoarele situații posibile :

Tabel 6.2 Natura punctului $x_0 = \pi/2$ pentru g din (6.66)

$g(\pi/2) = \lambda \in \mathbb{R}$	$g(x_0)$ vs. $g(\dot{U}_{x_0})$	Natura punctului $x_0 = \pi/2$
$\lambda \leq -1$	$g(\dot{U}_{x_0}) > g(x_0)$	minim local și global
$\lambda = -1$	$g(\dot{U}_{x_0}) > g(x_0) = g(\pi)$	minim local și global
$-1 < \lambda < 0$	$g(\dot{U}_{x_0}) > g(x_0) > g(\pi)$	minim local, nu și global
$\lambda = 0$	$g(\dot{U}_{x_0}^-) > g(x_0) > g(\dot{U}_{x_0}^+)$	nu este punct de extrem
$0 < \lambda < 1$	$g(\dot{U}_{x_0}) < g(x_0)$	maxim local, nu și global
$\lambda = 1$	$g(\dot{U}_{x_0}) < g(x_0) = g(0)$	maxim local și global
$\lambda > 1$	$g(\dot{U}_{x_0}) < g(x_0)$	maxim local și global

Studentii interesați își vor putea confirma concluziile din coloana a III-a trasând graficul funcției, cu punctul $(\pi/2, g(\pi/2))$, în fiecare din cele 7 situații (poziții ale lui $g(\pi/2) = \lambda$) față de intervalul $[-1, 1]$ și față de valorile $g(\dot{U}_{x_0})$ dintr-o vecinătate punctată a punctului $x_0 = \pi/2$, $\dot{U}_{x_0} = U_{x_0} \setminus \{x_0\}$, precum și față de valorile din restul domeniului de definiție, adică $g([0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]) = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

Pe linia lui $\lambda = 0$ apar vecinătăți punctate laterale. □

Exemplul anterior, cu funcția din (ii), arată că pot exista extreme locale în care funcția nu este derivabilă și nici măcar continuă. Se poate verifica, totuși, că pentru fiecare caz în care $x_0 = \pi/2$ este un punct de extrem local, derivatele laterale în acest punct au dsemne contrare, inclusiv dacă aceste derivate laterale sunt infinite.

E 6.12

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{pentru } x \in [0, 3\pi/2], \\ \frac{4}{\pi^2}(x - 2\pi)^2 & \text{pentru } x \in (3\pi/2, 2\pi]. \end{cases} \quad (6.68)$$

Funcția își schimbă expresia analitică în punctele $x_1 = \pi$ și $x_2 = 3\pi/2$; aceasta este

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pentru } x \in [0, \pi], \\ -\sin x & \text{pentru } x \in [\pi, 3\pi/2], \\ \frac{4}{\pi^2}(x - 2\pi)^2 & \text{pentru } x \in (3\pi/2, 2\pi]. \end{cases} \quad (6.68')$$

Limitele funcției în cele două puncte sunt

$$\lim_{x \nearrow \pi} f(x) = \sin 0 = 0 = f(0) = \lim_{x \searrow \pi} (-\sin x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) ;$$

$$\lim_{x \nearrow 3\pi/2} f(x) = \lim_{x \nearrow 3\pi/2} (-\sin x) = 1 = f(3\pi/2) = \lim_{x \searrow 3\pi/2} \frac{4}{\pi^2} (x - 2\pi)^2 = \lim_{x \searrow 1} f(x) ;$$

Așadar, funcția este continuă pe întreg intervalul de definiție $[0, 2\pi]$. Derivata funcției este

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pentru } x \in [0, \pi], \\ -\cos x & \text{pentru } x \in [\pi, 3\pi/2], \\ \frac{8}{\pi^2} (x - 2\pi) & \text{pentru } x \in (3\pi/2, 2\pi]. \end{cases} \quad (6.69)$$

O imagine mai clară a variației funcției se poate obține cu ajutorul unui tabel al semnelor derivatei, care va indica și intervalele de monotonie.

Tabel 6.3 Variația funcției f din (6.68)

Intervalul	$(0, \pi/2)$	$(\pi/2, \pi)$	$(\pi, 3\pi/2)$	$(3\pi/2, 2\pi)$
$f'(x)$	1 + 0	0 - -1	1 + 0	-4/π - 0
$f(x)$	↗	↘	↗	↘
Extreme	0	$M = 1$	$m = 0$	$M = 1$ 0

Pe ultima linie a tabelului sunt indicate valorile de minim $m = 0$, respectiv cele de maxim $M = 1$. Constatăm că atât minimele cât și maximele nu sunt numai locale ci chiar globale:

$$\begin{cases} m = 0 = f(0) = f(\pi) = f(2\pi), \\ M = 1 = f(\pi/2) = f(3\pi/2). \end{cases} \quad (6.70)$$

Pentru o eventuală reprezentare cât mai fidelă a graficului funcției pot fi utile și derivatele laterale în extremitățile celor 4 subintervale ; acestea vor fi egale cu pantele tangentelor la graficul funcției în aceste puncte, spre interiorul fiecărui interval. Introducem aceste valori ale derivatelor laterale în **Tabelul 6.3** de mai sus, pe linia derivatei., scrise în culoare mauve. Cititorii interesați dispun de suficiente informații pentru a trasa graficul acestei funcții.

Aplicații cu funcții derivabile - III (Extreme locale)

Să se determine punctele de extrem și extremele locale / globale ale funcțiilor :

$$(i) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = 2 \cos x + x^2 ;$$

- (ii) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2(x-12)^2;$
- (iii) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x;$
- (iv) $k: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$

Asimptotele unei funcții reale

Asimptotele sunt drepte sau semidrepte din planul graficului funcției G_f față de care graficul funcției se apropie oricât de mult atunci când argumentul funcției tinde spre un anumit punct de acumulare al domeniului ei de definiție. Aceasta nu este o definiție riguroasă ci – mai curând – o descriere intuitivă. Fiecare dintre cele trei categorii de asimptote este caracterizată analitic printr-o ecuație, ceea ce presupune existența unor minime cunoștințe de **GEOMETRIE ANALITICĂ** asimilate în liceu.

Notă. Noțiunea de asimptotă nu este efectiv legată de cea de derivată / derivabilitate, dar cunoașterea asimptotelor (atunci când ele există) permite o evaluare mai exactă a comportării funcției.

Asimptote verticale. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) admite dreapta de ecuație $x = a$ drept *asimptotă verticală* dacă $a \in \text{acc } D$ și dacă cel puțin una dintre limitele laterale ale funcției în a este infinită :

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) \in \{-\infty, +\infty\} \text{ sau } \lim_{x \searrow a} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}. \quad (6.71)$$

Evident, limitele laterale din (6.71) pot fi și egale. Dacă, de exemplu, $f(a-0) = -\infty$ în timp ce $f(a+0) = \ell \in \mathbb{R}$, dreapta de ecuație $x = a$ este asimptotă verticală pentru graficul funcției situat în semiplanul caracterizat prin $(x < a)$.

E 6.13

Funcțiile

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ \& \ } g(x) = \frac{1}{x^2} \quad (6.72)$$

au ca asimptotă verticală axa ordonatelor $(Oy): x = 0$. Într-adevăr,

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Aceasta este cunoscuta hiperbolă echilaterală care are drept asimptote chiar axele de coordonate $(Oy): x = 0$ & $(Ox): y = 0$. Analog

$$\lim_{x \nearrow 0} g(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty = \lim_{x \searrow 0} g(x);$$

așadar, a doua funcție din (6.72) are ca asimptotă verticală nu întreaga axă a ordonatelor ci doar semi-axa sa pozitivă, $(Oy)^+ : x = 0 \text{ \& } y > 0$.

Asimptote orizontale. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) admite dreapta de ecuație $y = b$ dreptă asimptotă orizontală dacă $\pm\infty \in \text{acc } D$ și dacă cel puțin una dintre limitele funcției spre $-\infty / +\infty$ este $= b \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \text{ sau } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b. \quad (6.73)$$

Un prim exemplu îl oferă chiar ambele funcții din (6.72) întrucât

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0,$$

deci axa absciselor $(Ox) : y = 0$ le este asimptotă orizontală atât spre $-\infty$ cât și spre $+\infty$.

Două dintre funcțiile circulare inverse au și ele câte două asimptote orizontale:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(x) = -\pi/2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x) = \pi/2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arcctg}(x) = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arcctg}(x) = 0.$$

E 6.14

$$f(x) = \frac{3x - x^2 + 2}{x^2}. \quad (6.74)$$

$$(6.74) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - x^2 + 2}{x^2} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

Deci funcția are dreapta de ecuație $y = -1$ ca asimptotă orizontală spre $-\infty \text{ \& } +\infty$ și semi-axa $(Oy)^- : x = 0 \text{ \& } y < 0$ ca asimptotă verticală spre $-\infty$. $\square$

Asimptote oblice. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) admite dreapta de ecuație $y = mx + n$ dreptă asimptotă oblică dacă $\pm\infty \in \text{acc } D$, dacă cel puțin una dintre limitele funcției spre $-\infty / +\infty$ este $\pm\infty$ și dacă există în $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = n. \quad (6.75)$$

Evident, fiecare din limitele care intervin în (6.75) se determină separat spre $-\infty$, respectiv $+\infty$. Deci trebuie calculate 4 limite. Este posibil ca funcția să admită o singură asimptotă oblică spre $-\infty$, respectiv $+\infty$ sau să admită două asimptote oblice diferite.

$$\boxed{\text{E 6.15}} \quad (i) \quad f(x) = 2x + \frac{1}{x}; \quad (ii) \quad g(x) = \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}. \quad (6.76)$$

(i) Cu definițiile de mai sus, cititorul urmează să verifice că $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ din (6.76) admite dreapta de ecuație $y = 2x$ ca asimptotă oblică atât spre $-\infty$ cât și spre $+\infty$. Funcția mai are și axa ordonatelor (Oy): $x = 0$ ca asimptotă verticală, atât spre $-\infty$ cât și spre $+\infty$.

$$(ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = 3 \Rightarrow m = 3; \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} - 3x \right] = 9 \Rightarrow n = 9. \end{array} \right. \quad (6.77)$$

Așadar, funcția $g: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ admite dreapta de ecuație $y = 3x + 9$ ca asimptotă oblică. Cititorul interesat va putea constata că funcția admite și două asimptote verticale, ($x = 1$) & ($x = 2$). Se recomandă încercarea de a trasa graficul funcției; acesta va necesita un spațiu mare pe verticală. Se poate folosi și prima derivată pentru a determina intervalele de monotonie și extremele locale.

Aplicații cu funcții derivabile - IV (Variația funcțiilor, asimptote)

FD-A .3 Să se studieze variația (monotonie, extreme locale, asimptote) pentru funcțiile

$$(i) \quad f(x) = \frac{(1-x)^3}{x^2};$$

$$(ii) \quad f(x) = 2|x| + 3;$$

$$(iii) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1};$$

$$(iv) \quad f(x) = \frac{3x^2 - 4}{(x-2)^2(x+1)};$$

$$(v) \quad f(x) = \frac{3x+1}{x-x^2};$$

$$(vi) \quad f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3};$$

$$(vii) \quad f(x) = x e^{\frac{1}{x}};$$

$$(viii) \quad f(x) = \frac{10}{1 + e^{1/x}};$$

$$(ix) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-1} + \ln x^2;$$

$$(x) \quad f(x) = \ln(1 - 2 \cos x).$$

$$(xi) \quad f(x) = |x| e^{\frac{1}{x-2}};$$

$$(xii) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x-1|}}.$$

Derivate de ordin superior ; formula lui Taylor.

Derivatele de ordin n ($n \geq 2$) ale unei funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) se definesc mai întâi punctual, apoi pe întregi intervale, prin derivare repetată :

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{\text{def } x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}. \quad (6.78)$$

Evident, limita de mai sus trebuie să existe ; dacă ea este și finită, atunci funcția este *derivabilă de ordinul doi* în punctul respectiv. Derivatele de ordin superior (mai mare sau egal cu 2) se definesc recursiv prin

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0) = \lim_{\text{def } x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}. \quad (6.79)$$

Formula de derivare de ordinul n ($n \geq 2$) se poate defini și scrie și pentru un punct curent $x \in D_{n\text{-deriv}}(f)$:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) = \lim_{\text{def } h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}. \quad (6.80)$$

Ținând seama de notația pentru operatorul-derivare din (6.13), operatorul de derivare de ordinul n ($n \geq 2$) se poate scrie

$$\frac{d^n}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \right). \quad (6.81)$$

De asemenea, se poate defini *diferențiala de ordinul n ($n \geq 2$)* într-un punct fixat x_0 și apoi într-un punct curent x prin

$$d^n f(x_0, dx) = f^{(n)}(x_0) dx^n = f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n. \quad (6.82)$$

$$d^n f(x, dx) = f^{(n)}(x) dx^n = f^{(n)}(x) dx^n. \quad (6.83)$$

Precizăm că în ambele expresii (6.82) & (6.83) dx^n nu reprezintă diferențiala funcției putere ci puterea n a variației argumentului dx . Așa cum am văzut și la începutul acestei secțiuni (pag. 85) – formulele (6.13) - (6.15), variația argumentului față de un punct curent x se poate nota și h , iar expresia diferențialei de ordinul n din (6.83) devine

$$d^n f(x, h) = f^{(n)}(x) h^n = f^{(n)}(x) h^n. \quad (6.83')$$

Operatorului diferențial de ordinul n se definește recursiv, și se exprimă cu ajutorul operatorului de n -derivare din (6.81) astfel :

$$d^n = d d^{n-1}, \quad d^n = \frac{d^n}{dx^n} dx^n \text{ sau } d^n = \frac{d^n}{dx^n} h^n. \quad (6.84)$$

Unele funcții reale admit derivate de orice ordin, iar acestea se pot determina mai simplu sau mai dificil, în funcție de natura funcției. În cazul unor funcții elementare cum este funcția putere naturală sau funcția polinom, acestea se pot deriva de oricâte ori dar derivatele devin identic nule după un anumit ordin (egal cu exponentul puterii respective sau cu gradul / ordinul polinomului). Urmează câteva exemple.

E 6.16 Derivatele de ordinul n pentru funcția putere naturală și funcția polinom.

$$(i) \quad f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = n!.$$

$$(ii) \quad p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Derivata de orice ordin a funcției polinom se poate obține ușor cu formula de derivare a funcției putere. Se poate constata că ultima derivată nenula (nebanală) este cea de ordinul n , și anume $p^{(n)}(x) = a_0 n!$; toate derivatele de ordin $> n$ sunt identic nule.

Derivatele de ordinul n ale unor funcții trigonometrice.

$$(iii) \quad f(x) = \sin x,$$

$$(iv) \quad g(x) = \cos x.$$

Cele două funcții trigonometrice sunt indefinit derivabile, adică derivabile la infinit (de oricâte ori), iar expresiile derivatelor lor se repetă periodic cu perioada 4 (relativ la ordinul de derivare). Utilizând cele două formule specifice de derivare de la pag. 89 avem

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x & \text{pentru } n = 4k, \\ \cos x & \text{pentru } n = 4k + 1, \\ -\sin x & \text{pentru } n = 4k + 2, \\ -\cos x & \text{pentru } n = 4k + 3. \end{cases} \quad (6.85)$$

Evident, k din (4.85) este orice număr natural. Analog,

$$g'(x) = -\sin x, \quad g''(x) = -\cos x, \quad g^{(3)}(x) = \sin x, \quad g^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x & \text{pentru } n = 4k, \\ -\cos x & \text{pentru } n = 4k + 1, \\ \sin x & \text{pentru } n = 4k + 2, \\ \cos x & \text{pentru } n = 4k + 3. \end{cases} \quad (6.86)$$

Se poate verifica faptul că derivatele de ordinul n ale funcțiilor trigonometrice fundamentale se pot scrie mult mai simplu ținând seama de comportarea funcțiilor $\sin$ & $\cos$ la majorarea argumentului cu multipli de $\pi/2$:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2); (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2). \quad (6.85' - 6.86')$$

$$(v) \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad (vi) \quad g(x) = \ln x.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{(-1)(-2)}{x^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{x^4}, \dots$$

$$\dots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}. \quad (6.87)$$

Formula de derivare din (6.87) se poate verifica prin inducție / n : **HOMEWORK**.

(vi) Întrucât

$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

rezultă că derivata de ordinul n a logaritmului natural este cea din (6.87), dar “întârziată” cu o unitate de ordin :

$$g^{(n)}(x) = (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}. \quad (6.88)$$

E 6.17 Formula lui Leibniz de n -derivare a produsului de funcții.

Dacă funcțiile $u(x)$ & $v(x)$ sunt derivabile până la ordinul n inclusiv atunci

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x). \quad (6.89)$$

Formula (6.89) se demonstrează prin inducție după n : **EXERCİȚIU !**

Ca exemplu concret, se poate aplica formula lui Leibniz la funcția

$$f(x) = x^3 \ln x.$$

Ambii factori $u(x) = x^3$, $v(x) = \ln x$ sunt indefinit derivabili, însă derivatele primului factor $u(x) = x^3$ se anulează dincolo de ordinul 3, în timp ce al doilea factor are derivate nebanale de ordin oricât de mare. Așadar, în membrul drept al formulei (6.89) vor exista numai 4 termeni nenuli și nu are sens aplicarea formulei (6.89) pentru $n > 3$; pentru $n = 3$ scriem derivatele până la ordinul 3 sau 4 ale celor două funcții :

$$\begin{cases} u(x) = x^3, & u'(x) = 3x^2, & u''(x) = 6x, & u'''(x) = 6, & u^{(4)}(x) = 0; \\ v(x) = \ln x, & v'(x) = \frac{1}{x}, & v''(x) = -\frac{1}{x^2}, & v'''(x) = \frac{2}{x^3}, & v^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}. \end{cases}$$

Va rezulta expresia derivatei a 3-a a funcției ca o sumă de 4 termeni și anume

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= (x^3 \ln x)^{(3)} = \sum_{k=0}^3 C_n^k u^{(3-k)}(x) v^{(k)}(x) = \\ &= 6 \ln x + C_3^1 \cdot 6x \frac{1}{x} + C_3^2 \cdot 3x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) + x^3 \frac{2}{x^3} = \\ &= 6 \ln x + 18 - 9 + 2 = 6 \ln x + 11. \end{aligned}$$

□

Formula lui Taylor

Aceasta este o formulă de aproximare a unei funcții $f(x)$ care admite derivate până la un anumit ordin $n + 1$, printr-un polinom de ordinul n ; acesta se numește *polinomul lui Taylor*. Aproximarea este valabilă într-un punct x_0 din interiorul domeniului de n -derivabilitate a funcției. Expresia polinomului Taylor de ordinul n este

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (6.89)$$

Formula lui Taylor exprimă funcția $f(x)$ ca suma dintre polinomul Taylor din (6.89) și un termen care evaluează eroarea de aproximare și care se numește *rest*. Există mai multe variante pentru expresia analitică a restului; una din cele mai cunoscute și utilizate este cea a restului (sub forma) lui *Lagrange*, care implică derivata de ordin $n + 1$ într-o vecinătate a punctului x_0 :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (6.90)$$

Argumentul derivatei din expresia (6.90) este un punct situat între x_0 și x întrucât coeficientul $\theta \in (0, 1)$. Așadar, formula lui Taylor pentru funcția $f(x)$ este

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad (6.91)$$

unde cei doi termeni sunt polinomul Taylor din (6.89) și restul din (6.90).

Restul din formula lui Taylor, sub oricare din feormele sale, are o importanță specială întrucât el permite evaluarea preciziei sau acurateței cu care polinomul Taylor aproximează funcția dată. Dacă se precizează intervalul sau vecinătatea pe care se scrie formula lui Taylor, restul poate fi majorat cu o constantă care multiplică puterea $n + 1$ a variației argumentului în (6.90) sau chiar cu o constantă propriu-zisă, dacă se fixează ordinul n pentru care se scrie formula. Aceste considerații vor fi ilustrate în cadrul unor exemple și aplicații care urmează.

În cazul în care funcția și derivatele sale există (și sunt continue) într-o vecinătate a originii, se poate scrie formula lui Taylor pentru $x_0 = 0$; se obține astfel

Formula lui McLaurin : $f(x) = M_n(x) + R_n(x)$ unde

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (6.92)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (6.93)$$

E 6.18 Formula lui McLaurin aplicată funcțiilor elementare

$$e^x, \sin x, \cos x$$

– care sunt indefinit derivabile – conduce la aproximări ale acestora prin polinoame.

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}; \quad (6.94)$$

$$\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}; \quad (6.95)$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}. \quad (6.96)$$

Determinarea derivatelor de orice ordin pentru alte funcții indefinit derivabile, precum și scrierea formulei lui Taylor & McLaurin, fac obiectul aplicațiilor ce urmează.

Aplicații cu funcții derivabile – V :

Derivate de ordin superior ; formulele lui Taylor - McLaurin

FD-A .4 Să se determine derivata de ordinul n pentru fiecare din funcțiile :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & f(x) = \frac{1}{x+a}, \quad a \neq -1 ; \\ \text{(ii)} & f(x) = \sqrt[3]{x} ; \\ \text{(iii)} & f(x) = \ln(1+x) ; \\ \text{(iv)} & f(x) = \frac{2x-1}{(x-2)(x+1)} ; \end{array}$$

Pentru funcția din (iv) se recomandă descompunerea acestei funcții raționale în fracții simple, după care se aplică expresia derivatei găsite la exercițiul (i) ; a se vedea și n -derivata din (6.87).

$$\begin{array}{ll} \text{(v)} & f(x) = e^{ax} \cos(bx) ; \\ \text{(vi)} & f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}} . \end{array}$$

Să se scrie formula lui McLaurin pentru funcțiile :

$$\begin{array}{ll} \text{(vii)} & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+a}}, \quad a > -1 ; \\ \text{(viii)} & f(x) = 2 \cos^2 x ; \\ \text{(ix)} & f(x) = \ln(1+x) \text{ și să se evalueze restul } R_n(x) \text{ pe intervalul } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] ; \\ \text{(x)} & \text{Să se desvolte funcția } f(x) = e^x \text{ după puterile binomului } (x+1). \\ \text{(xi)} & \text{Să se desvolte polinomul } p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \text{ după puterile binomului } (x-2). \end{array}$$

Să se evalueze eroarea comisă în aproximările McLaurin pentru funcțiile :

$$\begin{array}{ll} \text{(xii)} & \sin x = x - \frac{x^3}{6}, \quad |x| < \frac{1}{2} ; \\ \text{(xiii)} & \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \quad x \in [0, 1] . \end{array}$$

Sugestii de rezolvare – răspunsuri.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{A se vedea (6.87)} ; \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}} . \\ \text{(ii)} & f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-5/3} \Rightarrow \dots \\ & \dots \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \dots \left(\frac{1}{3} - (n-1)\right) x^{\frac{1}{3} - n} = \end{array}$$

$$= \frac{1(-2)(-5) \dots [1 - (n-1)]}{3^n} x^{\frac{1}{3} - n}. \quad (6.97)$$

Cititorul interesat va putea verifica expresia din (6.97) prin inducție / n .

(iii) A se vedea E 6.16 - (vi), din care se obține

$$f^{(n)}(x) = [\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

(iv) Conform recomandării din enunț, funcție se poate rescrie sub forma

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} \Rightarrow_{(i)} f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right].$$

Pentru (v) se va aplica formula lui Leibniz de n -derivare a produsului de funcții, deci (6.89) de la pag. 108. Aceeași formulă se va aplica și la funcția din (vi), dar după scrierea acesteia ca o sumă de funcții.

(vii) Funcția se scrie ca o putere rațională și apoi se aplică repetat formula de derivare a unei puteri reale; faptul că argumentul este deplasat cu constanta a este un detaliu minor.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+a}} = (x+a)^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)(x+a)^{-3/2} \Rightarrow \dots \\ \dots \Rightarrow f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n} (x+a)^{\frac{1}{2} - (n+1)}. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Semifactorialul care apare la numărătorul coeficientului din (6.98) este produsul primelor n numere naturale impare. Cititorii interesați vor putea verifica expresia (6.98) a acestei n -derivate prin inducție / n . Formula McLaurin se scrie pe baza valorilor funcției și ale n -derivatei sale din (6.98), înlocuite în formula (6.92), adică

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x). \quad (6.99)$$

Valorile funcției și ale derivatei în origine sunt

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{a}}, f'(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)a^{-3/2}, \dots, f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n} a^{\frac{1}{2} - n - 1}. \quad (6.100)$$

Din (6.99) și (6.100) se obține expresia funcției din enunț sub forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2\sqrt{a^3}} x + \dots + \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n \sqrt{a^{2n+1}}} x^n + R_n(x)$$

unde restul se obține din formula (6.93) :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1} (n+1)! \sqrt{(a+\theta x)^{2n+3}}} x^{n+1}. \quad (6.101)$$

(viii) Pentru a simplifica obținerea n - derivatei acestei funcții, ea se poate rescrie dublând argumentul cosinusului :

$$f(x) = 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x ; \quad (6.102)$$

în continuare, derivatele se repetă ciclic la distanță de 4 ranguri, ca în expresiile din (6.86) pag.108, dar la fiecare derivare în fața funcției trigonometrice respective puterea coeficientului 2 se mărește cu o unitate. Pentru a exprima derivatele de ordinul n ale funcțiilor trigonometrice $\sin x$ & $\cos x$, se poate verifica (exercițiu pentru cititor !) că [acestea se pot scrie sub forma](#)

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2). \quad (6.103)$$

Cu a doua dintre formulele (6.99), putem continua șirul derivatelor din (6.99) scriind

$$f^{(n)}(x) = (\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos(2x + n\pi/2). \quad (6.104)$$

$$(6.104) \Rightarrow f^{(n)}(0) = 2^n \cos(n\pi/2). \quad (6.105)$$

Folosind simbolul sumă și observând că $f(0) = 2$, polinomul McLaurin și întreaga formulă se scriu mai simplu sub forma

$$f(x) = 2 \cos^2 x = 2 + \sum_{k=1}^n \frac{2^k \cos(n\pi/2)}{k!} x^k + \frac{2^{n+1} \cos(2\theta x + n\pi/2)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Evident, ultimul termen de mai sus este restul Lagrange pentru formula McLaurin.

(ix) Derivata de ordinul n a fost obținută mai sus, la exercițiul (iii) :

$$f^{(n)}(x) = [\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}. \quad (6.106)$$

$$(6.106) \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!, \quad f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^k + \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1} (n+1)!} x^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)} x^{n+1}. \quad (6.107)$$

Restul este ultimul termen din (6.107); evaluarea acestuia pe intervalul indicat în enunț se realizează plecând de la

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \underset{\text{not}}{=} I \iff |x| \leq \frac{1}{2}. \quad (6.108)$$

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)} x^{n+1} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta x|^{n+1}(n+1)} \stackrel{(6.108)}{\leq} \\ &\leq \frac{(1/2)^{n+1}}{|1+\theta x|^{n+1}(n+1)} < \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \quad (6.109)$$

În ultima majorare din (6.109) am minorat numitorul pe baza inegalităților

$$\begin{aligned} |x| \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow |\theta x| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \theta x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 + \theta x < \frac{3}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + \theta x = |1 + \theta x| > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Așadar, pe interval I din (6.108) am determinat pentru rest majorarea simplă din (6.109). Aceasta permite stabilirea numărului de termeni necesari în dezvoltarea funcției din enunț pentru a se obține o aproximare cu o precizie impusă. De exemplu, dacă se impune precizia $\varepsilon_0 = 0.05 = 1/20$ atunci vom găsi numărul de termeni necesari în polinomul McLaurin din

$$|f(x) - M_n(x)| = |R_n(x)| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow n+1 \geq 20 \Rightarrow n \geq 19.$$

Prin urmare, polinomul McLaurin cu $n = 19$ va asigura o aproximare a funcției $\ln(1+x)$, pe intervalul I , cu o precizie de 5%. Să observăm că polinomul respectiv ar avea efectiv 20 termeni, inclusiv $f(0)$, dar această valoare este $\ln(1+0) = \ln 1 = 0$. Să mai observăm că polinomul McLaurin din (6.107), scris explicit, are expresia simplă

$$\ln(1+x) \approx 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{x^n}. \quad \square$$

(x) Pentru funcția $f(x) = e^x$ trebuie scrisă formula lui Taylor (de ordinul n) în jurul punctului $x_0 = -1$:

$$e^x = e^{-1} + \frac{e^{-1}}{1!}(x+1) + \frac{e^{-1}}{2!}(x+1)^2 + \dots + \frac{e^{-1}}{n!}(x+1)^n + R_n(x) =$$

$$= e^{-1} \sum_{k=1}^n \frac{(x+1)^k}{k!} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{e^{\theta x - 1}}{(n+1)!} (x+1)^{n+1}. \quad (6.110)$$

Exercițiu adițional : A se evalua eroarea (valoarea absolută a restului) din această formulă în funcție de variația absolută a argumentului, pe intervalul $I = [-2, 0]$.

(xi) Desvoltarea polinomului $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ după puterile binomului $(x-2)$ revine la scrierea formulei lui Taylor în jurul punctului $x_0 = 2$; în principiu, ordinul polinomului Taylor poate fi oricare, dar este naturală alegerea ordinului 3 care va da o dezvoltare exactă (cu restul = 0)- Primele trei derivate ale polinomului, care sunt și cele nebanale, sunt

$$p'(x) = 3x^2 - 4x + 3, \quad p''(x) = 6x - 4, \quad p'''(x) = 6; \quad (6.111)$$

$$(6.111) \Rightarrow p'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 3, \quad p''(2) = 6 \cdot 2 - 4, \quad p'''(2) = 6; \quad (6.112)$$

$$(6.112) \Rightarrow p(x) = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3. \quad (6.113)$$

Cititorul interesat va verifica expresia din (6.113) cu formula lui Taylor (6.89); restul este identic nul întrucât a patra derivată a polinomului este = 0.

Erorile comise în aproximările McLaurin pentru funcțiile din (x) & (xi) se vor putea evalua prin inegalități asupra valorilor absolute ale resturilor respective, pe intervalele indicate.

(xii) Ținând seama de derivata de ordinul n a funcției sinus, avem

$$\begin{cases} (\sin x)' = \cos x \Rightarrow \sin'(0) = 1, \\ (\sin x)'' = -\sin x \Rightarrow \sin''(0) = 0, \\ (\sin x)''' = -\cos x \Rightarrow \sin'''(0) = -1, \\ (\sin x)^{(4)} = \sin x. \end{cases} \quad (6.114)$$

Cititorul va verifica, pe baza formulei McLaurin (6.92) pentru ordinul 3, că expresia lui $M_3(x)$ este cea din enunț. Restul este cel din formula (6.93) care – pentru funcția $\sin x$ și cu ultima derivată din (6.114) – devine

$$R_3(x) = \frac{\sin^{(4)}(\theta x)}{4!} x^4 = \frac{\sin(\theta x)}{4!} x^4; \quad (6.115)$$

pe intervalul din enunț avem

$$|R_3(x)| = \left| \frac{\sin(\theta x)}{4!} x^4 \right| \leq \frac{|x^4|}{4!} < \frac{1}{(4!)2^4} = \frac{1}{384} = 0.0026.$$

(xiii) Primele două derivate ale funcției $f(x) = \sqrt{1+x}$ sunt

$$(\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad (\sqrt{1+x})'' = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}. \quad (6.116)$$

$$(6.116) \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}.$$

Ținând seama și de valoarea 1 a funcției în origine, se obține cu formula McLaurin polinomul de gradul 2 din enunț. Evaluarea restului necesită și derivata a treia,

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}. \quad (6.117)$$

Cu derivata din (6.117), restul lui Lagrange - McLaurin este

$$R_2(x) = \frac{f'''(\theta x)}{3!} x^3 = \frac{3}{8 \cdot 3! \sqrt{(1+\theta x)^5}} x^3 = \frac{1}{16 \sqrt{(1+\theta x)^5}} x^3. \quad (6.118)$$

Procedând în maniera în care am evaluat restul din exercițiul (vii),

$$x \in [0, 1] \Rightarrow \theta x \in [0, 1] \Rightarrow 1 + \theta x \in [1, 2] \Rightarrow 1 + \theta x \geq 1. \quad (6.119)$$

Minorând numitorul din (6.118), sub puterea 5 și sub radicalul care conduc împreună la o funcție crescătoare, obținem

$$|R_2(x)| = \left| \frac{f'''(\theta x)}{3!} x^3 \right| = \frac{1}{16 \sqrt{(1+\theta x)^5}} |x^3| \leq \frac{1}{16} |x^3| \leq \frac{1}{16}. \quad (6.120)$$

Să mai observăm că polinomul din enunț este un polinom McLaurin de ordinul 2 pentru dezvoltarea funcției nu în centrul unui interval, cum se întâmplă în multe cazuri, ci în extremitatea stânga a acestuia. Însă funcția $f(x) = \sqrt{1+x}$ este definită pe $(-1, +\infty)$ și se putea discuta această dezvoltare lucrând cu intervalul $(-1, 1)$, de exemplu; dar atunci majorarea din (6.120) ar fi fost mai delicată.

Aplicații la teoremele clasice asupra funcțiilor derivabile pe intervale.

E 6.19

Să se studieze aplicabilitatea **Teoremei lui Rolle** pentru funcțiile de mai jos, pe intervalele indicate.

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pentru } x \in [0, \pi/4], \\ \sin x & \text{pentru } x \in (\pi/4, \pi/2]; \end{cases} \quad I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (6.121)$$

$$(ii) \quad f(x) = |x-1|^3, \quad I = [0, 2]. \quad (6.122)$$

Răspunsuri. Funcția din (i) este evident continuă pe intervalul I din (6.121) întrucât expresiile sale analitice conțin câte o funcție trigonometrică, iar în centrul intervalului limitele laterale sunt egale cu valoarea funcției :

$$f(\pi/4 - 0) = \lim_{\substack{x \nearrow \pi/4 \\ \text{not}}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = f(\pi/4) = \lim_{\substack{x \searrow \pi/4 \\ \text{not}}} f(x) = f(\pi/4 + 0).$$

$f(0) = f(\pi/2) = 1$. Însă funcția nu este și derivabilă în interiorul intervalului I întrucât nu este derivabilă în centrul acestui interval ; cele două derivate laterale s-ar putea calcula cu definițiile din (6.4), dar se poate trece și la limită în derivatele pe subintervalele stând și drept întrucât acestea sunt continue :

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{pentru } x \in (0, \pi/4) \Rightarrow f'_s(\pi/4) = -1/\sqrt{2}, \\ \cos x & \text{pentru } x \in (\pi/4, \pi/2) \Rightarrow f'_d(\pi/4) = 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Așadar funcția nu este derivabilă în centrul intervalului și nu verifică una din ipotezele Teoremei lui Rolle – **PFD.2** de la pag. 87.

Pentru funcția din (ii) situația este similară ; a se verifica de către cititor.

E 6.20 Șirul lui Rolle.

Sub această denumire se înțelege o metodă pentru localizarea rădăcinilor unei funcții f , continuă și derivabilă pe intervalul ei de definiție. Se determină derivata f' împreună cu rădăcinile ei

$$a_i \ (i = \overline{1, m}), \ a_1 < a_2 < \dots < a_m. \quad (6.123)$$

În continuare se calculează valorile funcției în cele m rădăcini,

$$f(a_i) \ (i = \overline{1, m}). \quad (6.124)$$

Este important că rădăcinile din (6.123) ale derivatei sunt numerotate consecutiv, în sensul că nu există nicio altă rădăcină a sa între a_k, a_{k+1} ; acestea se numesc rădăcini *consecutive* ale derivatei. Rădăcinile derivatei și valorile funcției din (6.124) se trec (eventual) într-un tabel, pe linia valorilor inserându-se și limitele funcției la $-\infty$, respectiv $+\infty$, dacă acestea sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție. Pe această linie a valorilor apar implicit semnele funcției în rădăcinile a_i ($1 \leq i \leq m$) precum și limitele spre $-\infty / +\infty$ dacă este cazul. Dacă între valorile funcției în două rădăcini consecutive a_k, a_{k+1} apare o *variație de semn*, conform corolarului la Teorema lui Rolle (pag. 67) și a proprietății lui Darboux, între aceste rădăcini ale derivatei va exista o rădăcină a funcției, deci a ecuației

$f(x) = 0$. Formal,

$$f'(a_k) = f'(a_{k+1}) = 0 \ \& \ f(a_k) = f(a_{k+1}) < 0 \Rightarrow (\exists x_k \in (a_k, a_{k+1})) f(x_k) = 0.$$

Aplicațiile mai interesante ale acestei metode o constituie cazul în care funcția depinde și de un parametru, de exemplu m ; implicit, și valorile funcției vor depinde de acesta, fiind de forma $f(a_i, m)$. În mod necesar, și semnele acestor valori vor depinde de parametru, așa încât discuția variației funcției depinde mai interesantă. Exemplul ce urmează ilustrează aceasta afirmație.

$$\text{Fie funcția } f(x, m) = x^2 - x - \ln x + m, \ x > 0. \quad (6.125)$$

$$(6.125) \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}; \quad (6.126)$$

$$f'(x) = 0 \xRightarrow{(6.126)} 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow a_{1,2} \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}. \quad (6.127)$$

Întrucât funcția este definită sau limitată) numai pentru $x > 0$, se reține doar rădăcina pozitivă din (6.127), cu valoarea corespunzătoare

$$f(1, m) = m. \quad (6.128)$$

Semnul acestei valori va depinde de parametrul m , dar înainte de a prezenta un prim tabel al semnelor să observăm că

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, m) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x - \ln x + m) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{m - \ln x}{x^2} \right] = +\infty. \quad (6.129)$$

Mai este necesară și limita (la dreapta) a funcției în capătul din stânga al intervalului care este originea :

$$f(0^+, m) = 0 - 0 + m - \ln(0^+) = +\infty. \quad (6.130)$$

Semnul valorii din (6.128) este caracterizat prin tabelul

Tabel 6.4 Semnul valorii din (6.128)

$m \in \mathbb{R}$	$f(1, m) = m$
$m < 0$	–
$m = 0$	0
$m > 0$	+

Urmează, din acest tabel, că vor trebui considerate trei cazuri, depinzând de poziția lui $m \in \mathbb{R}$ față de rădăcina funcției din (6.128).

1° $m < 0$

Tabel 6.5-1 Rădăcinile și variația funcției din (6.125)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ —	0	+ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘ — ↗ 0 ↗	$+\infty$
	$m < 0$		
Rădăcini	$x_1 \in (0, 1)$ $x_2 \in (1, +\infty)$		

Se observă din linia derivatei că limita la dreapta în origine a acesteia este $-\infty$, deci graficul funcției admite axa (Oy) ca asimptotă verticală (având în vedere și $f(0^+) = +\infty$). Punctul 1 este un punct de minim (local și global), valoarea acestuia fiind negativă.

2° $m = 0$

Tabel 6.5-2 Rădăcinile și variația funcției din (6.125)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ —	0	+ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	↘ $m = 0$ ↗ ↗	$+\infty$
Rădăcini	$x_1 = x_2 = 1$		

Se observă că $x_1 = 1 = x_2$ este unica rădăcină atât pentru funcție cât și pentru derivată, deci este o rădăcină dublă pentru funcție. Ca și în cazul precedent, 1 este un punct de minim (local și global), dar minimul respectiv este $= 0$; graficul funcției este situat în semiplanul ($x \geq 0$), mai exact în primul cadran al sistemului de coordonate, iar semidreapta

$$(y = 0, x \geq 0)$$

este tangentă la graficul funcției în punctul $T_1(1, 0)$. Să mai observăm că, pentru $m = 0$, funcția se reduce la $f(x, m) = x^2 - x - \ln x$.

3° $m > 0$

Tabel 6.5-3 Rădăcinile și variația funcției din (6.125)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ $-$	0	$+$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $+$ ↗ 0 ↗ $+\infty$	$m > 0$	
Rădăcini	nici o rădăcină reală : $G_f \cap (Ox) = \emptyset$		

E 6.21 Teorema lui Lagrange

Să se determine abscisa c a unui punct în care tangenta la graficul funcției

$$f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1} \quad (6.131)$$

este paralelă cu coarda ce unește punctele de abscise $x_1 = 0$ & $x_2 = 3$.

Cele două puncte de pe graficul funcției sunt $M_1(0, 1)$ & $M_2(3, 2)$. Panta coardei ($M_1 M_2$) este

$$m_{(M_1 M_2)} = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}. \quad (6.132)$$

$$\text{Derivata funcției este } f'(x) = (\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \quad (6.133)$$

Egalând expresia derivatei din (6.133) cu panta din (6.132) și trecând în necunoscuta notată c se obține

$$\frac{1}{2\sqrt{c+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\sqrt{c+1} = 3 \Rightarrow c+1 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{5}{4}. \quad (6.134)$$

Cititorii interesați vor putea scrie ecuația coardei ($M_1 M_2$) ca ecuație a unei drepte în plan determinată de două puncte, urmând să regăsească panta din (6.134). $\square$

E 6.22 Teorema lui Cauchy

Utilizând Teorema lui Cauchy, să se demonstreze inegalitatea

$$\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} \text{ pentru orice } x > 0. \quad (6.135)$$

Pentru orice $x > 0$ există un număr real $b > x > 0$. Așadar, vom putea aplica teorema lui Cauchy pe intervalul închis $[0, b]$ și pentru funcțiile

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) \text{ \& } g(x) = \operatorname{arctg} x \quad (6.136)$$

întrucât inegalitatea (6.135) este echivalentă, pentru $x > 0$, cu

$$f(x) - g(x) = (1+x)\ln(1+x) - \operatorname{arctg} x > 0. \quad (6.137)$$

Derivatele funcțiilor din (6-136) sunt

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 \text{ \& } g'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (6.138)$$

Scriem egalitatea (6.33) – pag. 88 pentru intervalul $[a, b] \rightarrow [0, x]$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{(1+x)\ln(1+x)}{\operatorname{arctg} x} = \frac{\ln(1+c) + 1}{1/(1+c^2)}; \quad (6.139)$$

$$(6.139) \operatorname{arctg} x = \frac{(1+x)\ln(1+x)}{(1+c^2)[\ln(1+c) + 1]} < (1+x)\ln(1+x)$$

întrucât

$$\begin{aligned} c \in (0, x) &\Rightarrow [1+c^2 > 1 \text{ \& } \ln(1+c) + 1 > 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1+c^2)[\ln(1+c) + 1] > 1. \end{aligned}$$

Așadar, inegalitatea (6.135) este demonstrată. Aceeași inegalitate se poate demonstra și pe baza monotoniei crescătoare a funcției din (6.137), având în vedere că

$$f(x) - g(x) \underset{\text{not}}{=} h(x) \Rightarrow h(0) = 1 \cdot \ln 1 = 0.$$

Această demonstrație alternativă rămâne ca exercițiu pentru cititor.

□

Pe lângă teoremele lui Rolle, Lagrange și Cauchy se consideră a fi o astfel de teoremă și

Teorema lui Fermat. Dacă funcția f este continuă pe intervalul $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) iar $c \in (a, b)$ este un punct de extrem local atunci

$$f'(c) = 0.$$

Demonstrația rezultă imediat din definiția (6.2) a derivatei și din definiția extremelor locale. Ca interpretare geometrică, în orice punct de extrem local în care funcția este și derivabilă, tangenta la graficul funcției în punctul respectiv este orizontală, adică $\parallel (Ox)$. Nu oferim exemple pentru această proprietate simplă; ea poate fi verificată pe oricare din funcțiile din exemple și exerciții anterioare, pentru care s-a solicitat studiul variației / monotoniei și al extremelor locale.

Convexitate și concavitate.

Funcția f definită pe domeniul D este *convexă* pe intervalul I , $I \subseteq D$ dacă

$$(\forall x_1, x_2 \in I) (\forall \lambda \in (0,1)) f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \quad (6.140)$$

Dacă în (6.140) inegalitatea este strictă atunci funcția este *strict convexă*. Funcția f este *concavă* pe intervalul I , $I \subseteq D$ dacă opusa ei $-f$ este convexă pe acest interval.

Interpretarea geometrică a convexității este simplă. Inegalitatea din (6.140) semnifică faptul că valoarea funcției în orice punct interior intervalului $[x_1, x_2]$, de forma

$$(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in (x_1, x_2), \quad (6.141)$$

valoarea funcției este mai mică decât ordonata punctului în care verticala ridicată prin acest punct întâlnește coarda $M_1 M_2$, unde $M_1(x_1, f(x_1))$ & $M_2(x_2, f(x_2))$. Se mai spune că o astfel de funcție convexă are concavitatea orientată spre y -ii pozitivi, adică ($y > 0$).

E 6.23 Una din clasele de funcții convexe / concave cele mai uzuale o formează funcțiile

de gradul 2, care se reprezintă grafic prin parabole cu axa de simetrie verticală :

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0. \quad (6.142)$$

O funcție de forma (6.142) este *strict convexă* pentru $a > 0$, respectiv *strict concavă* pentru $a < 0$. Să verificăm prima afirmație.

Va fi utilă folosirea unor notații care să simplifice calculele. Notând $f(x) = y$ ca în (6.141), putem scrie valorile funcției în x_1, x_2 și în punctul intermediar din (6.141) :

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] = y_\lambda. \end{cases} \quad (6.143)$$

Urmează dezvoltarea ultimei expresii din (6.143).

$$\begin{aligned} f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] &= a[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2]^2 + b[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] + c = \\ &= a[(1-\lambda)^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2] + b[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] + c = \end{aligned}$$

$$= (1 - \lambda)(ax_1^2 + bx_1 + c) + \lambda(ax_2^2 + bx_2 + c) + \\ + [(1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda)]ax_1^2 + (\lambda^2 - \lambda)ax_2^2 + 2a\lambda(1 - \lambda)x_1x_2 = \quad (6.144)$$

$$\stackrel{(6.143)}{=} (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 - \lambda(1 - \lambda)ax_1^2 + \lambda(\lambda - 1)ax_2^2 + 2a\lambda(1 - \lambda)x_1x_2 = \\ = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 + a\lambda(\lambda - 1)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = \\ = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 + a\lambda(\lambda - 1)(x_1 - x_2)^2 \underset{\text{not}}{=} y_\lambda. \quad (6.145)$$

În (6.144) s-au operat 2-3 artificii spre a se obține combinația liniară convexă a valorilor funcției în capetele intervalului :

$$(1 - \lambda)^2 = 1 - \lambda + (1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda) = 1 - \lambda - \lambda(1 - \lambda); \\ \lambda^2 = \lambda + (\lambda^2 - \lambda); \quad c = (1 - \lambda)c + \lambda c.$$

Valoarea în punctul intermediar, deci y_λ din (6.145), trebuie cumpărată cu ordonata punctului în care verticala prin x_λ întâlnește coarda M_1M_2 . Ecuația acestei coarde, (mai exact a dreptei sale suport (M_1M_2)), este

$$(M_1M_2): \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (6.146)$$

Întrucât funcția din (6.146) – pe care o putem nota cu g – este liniară în x , ea îl transformă pe $x_\lambda = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ din (6.141) în aceeași combinație liniară convexă a valorilor funcției în capetele coardei, deci

$$g(x_\lambda) = g[(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2] = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2. \quad (6.147)$$

Spre a deosebi valoarea din (6.147) de valoarea din (6.145), o vom nota pe aceasta din urmă supraliniată :

$$g(x_\lambda) = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 = \bar{y}_\lambda. \quad (6.148)$$

Convexitatea strictă a funcției pătratice din (6.142), pentru $a > 0$, va rezulta scăzând membru cu membru expresia din (6.147) - (6.148) și valoarea funcției din (6.145) :

$$\bar{y}_\lambda - y_\lambda = g(x_\lambda) - f(x_\lambda) = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 - \\ - (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 - [(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 + a\lambda(\lambda - 1)(x_1 - x_2)^2] = \\ = a\lambda(1 - \lambda)(x_1 - x_2)^2 > 0$$

întrucât $a > 0$, $\lambda \in (0, 1) \Rightarrow 1 - \lambda \in (0, 1) \ \& \ x_2 > x_1$.

Evident, în cazul coeficientului dominant $a < 0$ se va obține proprietatea de concavitate

a funcției de gradul 2. □

Caracterizări ale convexității / concavității. Utilizarea definiției din (6.140) spre a verifica dacă o anumită funcție este convexă / concavă pe un interval poate fi greoaie sau dificil de aplicat. Aceste proprietăți complementare pot fi caracterizate cu ajutorul unor funcții auxiliare, asociate funcției date.

Funcției f , definită pe domeniul D , i se poate asocia “funcția pantă” pentru un interval $I \subseteq D$ și un punct $a \in I$:

$$p_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (6.149)$$

P C/C 1 Caracterizarea convexității / concavității cu funcția-pantă

Funcția f este (strict) convexă / concavă pe $I \subseteq D$ dacă și numai dacă pentru orice $a \in I$ funcția pantă $p_a(x)$ este (strict) crescătoare / descrescătoare.

Demonstrația acestei caracterizări se realizează cu ajutorul altor funcții asociate, iar detalii pot fi găsite – de exemplu – în monografia Prof. Gh. Siretchi de la Universitatea București, [Siretchi, 1985 - Vol. I, pp.226-232]. După o serie de rezultate intermediare, se ajunge la caracterizarea convexității / concavității prin monotonia primei derivate, dacă funcția este și derivabilă pe intervalul $I \subseteq D$.

P C/C 2 Caracterizarea convexității / concavității cu ajutorul primei derivate

1° Funcția f , derivabilă pe $I \subseteq D$, este (strict) convexă / concavă pe acest interval

$$\iff f' : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ este (strict) crescătoare / descrescătoare pe } I.$$

2° Funcția f , derivabilă pe $I \subseteq D$, este (strict) convexă / concavă pe acest interval

$$\iff f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \text{ (resp. } f(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \text{)}.$$

Dacă funcția este de două ori derivabilă pe $I \subseteq D$ se obține, prin caracterizarea monotoniei primei derivate cu derivata a doua,

P C/C 3 Caracterizarea convexității / concavității cu ajutorul derivatei secunde

Funcția f , derivabilă pe $I \subseteq D$, este (strict) convexă / concavă pe acest interval

$$\iff f''(x) \geq 0 \text{ pe } I / f''(x) \leq 0 \text{ pe } I; \quad (6.150)$$

pentru concavitate, inegalitățile din (6.150) se inversează.

Puncte de inflexiune. În condițiile în care s-a definit și s-a caracterizat convexitatea / concavitățile unei funcții pe un interval $I \subseteq D$, punctul $x_0 \in \text{int } I$ este un punct de inflexiune al

funcției f , dacă există o vecinătate la stânga a acestuia, precum și o vecinătate la dreapta – suficient de mici – astfel încât funcția își schimbă convexitatea / concavitatea când se trece din

$$U_{x_0}^{st} \cap U_{x_0}^{dr} : \begin{cases} f(x) \sim \text{în } U_{x_0}^{st} \\ f(x) \sim \text{în } U_{x_0}^{dr} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} f(x) \sim \text{în } U_{x_0}^{st} \\ f(x) \sim \text{în } U_{x_0}^{dr} \end{cases} \quad (6.151)$$

Ținând seama de caracterizările anterioare ale convexității / concavității, în condițiile respective un punct de inflexiune va putea fi caracterizat prin schimbarea tipului de monotonie a primei derivate, respectiv prin schimbarea semnului derivatei a doua. Urmează câteva exemple.

E 6.23 Funcții circulare și funcții circulare inverse.

Funcția $f(x) = \sin x$ este concavă pe intervalul $[0, \pi]$, este convexă pe $[\pi, 2\pi]$; funcția prezintă puncte de inflexiune în toate punctele multipli întregi de π .

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \sim \text{pe } [0, \pi], \\ f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \sim \text{pe } [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (6.152)$$

Desigur, proprietatea din (6.152) se extinde la toate intervalele de forma $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, respectiv $[(2\ell-1)\pi, 2\ell\pi]$, k & ℓ întregi.

Exercițiu. Să se studieze convexitatea / concavitatea și punctele de inflexiune ale funcțiilor

$$g(x) = \cos x, \quad h(x) = \operatorname{tg} x, \quad k(x) = \operatorname{ctg} x, \quad \varphi(x) = \operatorname{arctg} x, \quad \psi(x) = \operatorname{arctctg} x.$$

E 6.24 Funcții putere naturală și funcții polinoame.

Funcția generală de gradul II a fost studiată în E 6.23. Concavitatea / convexitatea funcției putere naturală $f(x) = x^n$ ($n \geq 2$) depinde de paritatea exponentului :

$$f(x) = x^n \text{ este } \begin{cases} \text{convexă pentru } n = 2k \quad \& \quad x \in \mathbb{R}, \\ \text{concavă pentru } n = 2k+1 \quad \& \quad x \in \mathbb{R}_-, \\ \text{convexă pentru } n = 2k+1 \quad \& \quad x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (6.153)$$

Rezultă din (6.153) că toate funcțiile putere impară au originea ca punct de inflexiune. Cel mai simplu exemplu este oferit de funcția cubică

$$f(x) = x^3, \quad (6.154)$$

concavă în semiplanul $(x \leq 0)$ și convexă în $(x \geq 0)$. Inversa funcției din (6.154) este

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}. \quad (6.155)$$

Inversarea funcției cubice îi și inversează intervalele de concavitate & convexitate. Și funcția din (6.155) are punct de inflexiune în origine, dar ca tangentă verticală axa (Oy) . Cele două funcții au grafice simetrice față de bisectoarea I-a – a cadranelor I și III – și se intersectează în punctele $A(1, 1)$ & $A'(-1, -1)$ Situate pe acest[bisectoare. Se recomandă reprezentarea grafică a celor două funcții în același sistem de coordonate $(O; x, y)$.

Tangenta la graficele tuturor funcțiilor putere naturală în origine este însăși axa (Ox) .

Concavitatea funcțiilor polinom depinde atât de gradul lor cât și de coeficienți. De exemplu, polinomul

$$p(x) = 3x^4 - 6x^2 + 5 \quad (6.156)$$

este o funcție convexă întrucât el se poate rescrie sub forma

$$p(x) = 3(x^4 - 2x^2 + 1) + 2 = 3(x^2 - 1)^2 + 2.$$

Așadar, el este o compunere de funcții convexe care este tot o funcție convexă. Cititorul interesat va putea verifica această afirmație privind ceonvexitatea polinomului din (6.156) cu ajutorul derivatei a doua.

Polinoamele de grad impar au – în general – atât intervale de connvexitate cât și de concavitate, implicit și puncte de inflexiune.

□

E 6.25

Funcții exponențiale și logaritmice.

$$(i) \quad f(x) = a^x, \quad a > 1; \quad (6.157)$$

$$(ii) \quad g(x) = a^x, \quad 0 < a < 1. \quad (6.158)$$

Ambele exponențiale, de bază supraunitară cât și de bază subunitară, sunt convexe pe toată axa $\mathbb{R}$. Diferența între ele constă în tipul de monotonie.

$$(iii) \quad f(x) = \log_a x, \quad a > 1;$$

$$(iv) \quad g(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1.$$

Ambele funcții logaritmice sunt convexe. Cazuri particulare sunt cele ale exponnțialei și logaritmului de bază naturală e : $f(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$.

Cititorii inetersați sunt invitați să verifice proprietățile mai sus enunțate.

□

Regula lui l'Hospital.

Această regulă permite determinarea unor limute din funcții de tip raport (sau fracție) care conduc la nedeterminări, de forma $0/0$ sau $(\pm\infty)/(\pm\infty)$. Dar și alte tipuri de nedetrminări, dintre cele întâlnite la limite de șiruri și milite de funcții, care au fost întâlnite în secțiuni

anterioare, se pot reduce la nedeterminări de forma $0/0$ prin rescrierea adecvată a funcțiilor implicate. Ea reprezintă o altă aplicație a noțiunii de derivată.

Teoremă (l'Hospital). Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ & $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$. Fie $x_0 \in [a, b]$ și funcțiile $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile

$$1^\circ \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (\text{sau} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty),$$

$$2^\circ \quad f \text{ și } g \text{ sunt derivabile și } g(I \setminus \{x_0\}) \neq 0,$$

$$3^\circ \quad \text{există } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}};$$

Atunci există limita funcției raport al funcțiilor f & g în x_0 și

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.} \quad (6.159)$$

Înainte de a oferi câteva exemple, să observăm că această regulă a lui l'Hospital se poate aplica în mod repetat : dacă nici raportul derivatelor de primul ordin nu are limită în punctul x_0 , în sensul că se menține nedeterminarea, se poate continua cu derivarea celor două funcții.

E 6.26 Se cere determinarea limitelor :

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{\sqrt[4]{x+16} - 2}; \quad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x}.$$

Ambele limite revin la nedeterminări de forma $0/0$.

$$(i) \quad \left(\sqrt[3]{x+27} - 3 \right)' = \frac{1}{3 \sqrt[3]{(x+27)^2}}, \quad \left(\sqrt[4]{x+16} - 2 \right)' = \frac{1}{4 \sqrt[4]{(x+16)^3}}; \quad (6.160)$$

$$(6.159) \text{ \& } (6.160) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{\sqrt[4]{x+16} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sqrt[4]{(x+16)^3}}{3 \sqrt[3]{(x+27)^2}} = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 9} = \frac{32}{27}.$$

$$(ii) \quad \left(\sin \frac{x}{2} + \cos x \right)' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin x, \quad \left(1 + \sin^2 x + \cos x \right)' = 2 \sin x \cos x - \sin x; \quad (6.161)$$

$$(6.159) \text{ \& } (6.161) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{2 \sin x \cos x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{\sin 2x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} - \cos x}{2 \cos 2x - \cos x} = \frac{-\frac{1}{4} + 1}{2 + 1} = -\frac{1}{4}.$$

La cea de a doua limită a fost necesară o aplicare repetată a regulii lui l'Hospital întrucât nedeterminarea $0/0$ se menținea. $\square$

Aplicații cu funcții derivabile – VI :

Teoremele clasice, convexitate - inflexiuni, regula lui l'Hospital

FD-A .6 Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcțiile

(i) $f(x) = |x - 1|$ & $g(x) = |x - 1|^3$ pe intervalul $[0, 2]$;

(ii) $f(x) = |\sin x|$ & $g(x) = |\sin^3 x|$ pe intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$.

(iii) Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n & \text{pentru } x \in [-1, 0] . \\ px^2 + 4x + 4 & \text{pentru } x \in (0, 1] . \end{cases}$$

Să se determine parametrii $m, n, p \in \mathbb{R}$ astfel încât ipotezele teoremei lui Rolle să fie verificate pe intervalul $[-1, 1]$ și să se determine abscisa c din enunțul teoremei.

(iv) Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru funcțiile

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \in [1, 2] . \\ \frac{x^2}{4} + 1 & \text{pentru } x \in (2, 3] \end{cases} \quad \text{pe intervalul } [2, 3] ;$$

$$(v) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } x \in [0, 1] . \\ 2x - 1 & \text{pentru } x \in (1, 2] \end{cases} \quad \text{pe intervalul } [0, 2] ;$$

$$(vi) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{pentru } x \in (0, 3] . \\ \frac{x}{2} + 1 & \text{pentru } x \in [-4, 0] \end{cases} \quad \text{pe intervalul } [-4, 3] ;$$

$$(vii) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{pentru } x \in [0, 1] . \\ \frac{1}{x} & \text{pentru } x \in (1, 2] \end{cases} \quad \text{pe intervalul } [0, 2] .$$

Pentru fiecare funcție să se determine abscisa c (abscisele c_i) a punctului (ale punctelor) în

care tangenta la grafic este paralela cu coarda AB .

(viii) Să se determine abscisa c a punctului în care tangenta la graficul funcției

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & \text{pentru } x \leq 0, \\ \sqrt{x+1} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

este paralelă cu coarda $M_1 M_2$ care unește punctele de abscise $x_1 = -4$ & $x_2 = 3$. c

(ix) Utilizând Teorema lui Lagrange, să se verifice inegalitățile

a) $\operatorname{tg} x > \frac{x}{3}$, $x \in (0, \pi/2)$; b) $e^x > x + 1$, $x \neq 0$.

(xi) Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Cauchy pentru cuplurile de funcții de mai jos, pe intervalul comun de definiție (care este indicat).

a) $f, g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(x) = \ln x$ & $g(x) = \frac{e}{x}$;

b) $f, g: [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{pentru } x \in [-2, 1). \\ \frac{x+7}{4} & \text{pentru } x \in [-4, 0] \end{cases}$ & $g(x) = x$;

c) $f, g: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 & \text{pentru } x \in [1, 3]. \\ -x + \frac{4}{3} & \text{pentru } x \in [0, 1] \end{cases}$ & $g(x) = x$.

FD-A.7 Să se studieze convexitatea / concavitățile și inflexiunile funcțiilor :

(i) $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; (ii) $f(x) = \operatorname{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

Pentru ambele funcții se recomandă construirea tabelului lor de variație și trasarea graficului.

Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcțiile :

(iii) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{pentru } x > 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$

$$(iv) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1 + x^2).$$

$$(v) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pentru } x > 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Pentru toate cele trei funcții se recomandă și folosirea derivatei secunde, determinarea limitelor în extremitățile intervalelor de definiție etc.

Regula lui l'Hospital

FD-A .8 Să se determine, folosind regula lui l'Hospital, limitele de mai jos.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x \sin x}{x - \sin x};$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x [\ln x - \ln(x+1)] + 1}{e x [\ln(e x + 1) - \ln x] - 1};$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x e^{ax} - 2ax};$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{\sqrt{x}};$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi/2 - \operatorname{arctg} x)^{1/\ln x}.$$

Răspunsuri - recomandare.

$$(i) \quad \ell = 5; \quad (ii) \quad \ell = -e; \quad (iii) \quad \ell = 0 \text{ pentru } a \neq 0, 1/2;$$

$$(iv) \quad \ell = \frac{2e}{0^+} (1 - e) = -\infty; \text{ se aplică regula l'Hospital. și se factorizează limita.}$$

(v) Este o nedeterminare de forma $0^{+\infty}$ care se transformă, prin formula $u^v = e^{v \ln u}$; se ajunge la o limită de forma

$$\ell = e^{\ell_1} \text{ cu } \ell_1 = 0 \Rightarrow \ell = 1.$$

A se detalia calculele.