8. Funcţii reale de mai multe variabile

8.4 Derivate parţiale şi diferenţiale de ordin superior − continuare.

Notă. Paginile care urmează reprezintă ultima parte a Secţiunii 8 . Funcţii reale de mai multe veriabile, şi anume a subsecţiunii dedicate derivatelor parţiale şi diferenţialelor de ordin superior pentru funcţii definite pe domenii din $\mathbb{R}^n$. Aşadar, aceste pagini urmează imediat după pagina 180 din textul **Secţiunii 8** postată în pagina web, text care a fost finalizat cu editorul **WP11** dar ale cărui ultime 5 pagini nu au mai putut fi rescrise prin conversie din formatul wpd în pdf.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{8.115}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{8.116}$$

Exemplu.

$\boxed{\text{Ex. 8.14}}$ Se cer derivatele parţiale până la ordinul al doilea ale funcţiei

$$f(x,y,z) = e^{xz}\cos y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xz}\cos y) = z e^{xz}\cos y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xz}\cos y) = -e^{xz}\sin y\,, \tag{8.117}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(e^{xz}\cos y) = x e^{xz}\cos y\,, \tag{8.118}$$

$$(8.117-1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(z e^{xz}\cos y) = z^2 e^{xz}\cos y, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(z e^{xz}\cos y) = -z^2 e^{xz}\sin y, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}(z e^{xz}\cos y) = (z^2+1) e^{xz}\cos y. \end{cases}$$

$$(8.117-2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(z e^{xz}\cos y) = -z e^{xz}\sin y, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}(-e^{xz}\sin y) = -z e^{xz}\cos y, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}(-e^{xz}\sin y) = -x e^{xz}\cos y. \end{cases}$$

$$(8.118) \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z}(z e^{xz} \cos y) = (z^2+1) e^{xz} \sin y, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x e^{xz} \cos y) = -x e^{xz} \sin y, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}(x e^{xz} \cos y) = x^2 e^{xz} \cos y. \end{cases}$$

Au fost determinate toate cele *nouă* ∂erivate de ordinul II posibile, dar se constată că *numai şase* dintre ele sunt distincte întrucât cele trei perechi de ∂erivate mixte constă din ∂erivate mixte identice ca expresie, situaţie previzibilă confom teoremei lui Schwarz. Să mai observăm că funcţia din enunţ este simetrică în variabilele x & z aşa încât ∂erivatele numai în raport cu aceste variabile se pot obţine unele din altele prin interşanjarea acestor variabile în expresiile respective.

Diferenţiale de ordin superior

Dacă o funcţie de n variabile $f(X)$ admite ∂erivate până la ordinul k, înttr-un punct fixat sau într-un punct curent, iar acestea sunt continue, atunci ea admite şi diferenţiale de ordine până la k ; aceste diferenţiale se definesc recursiv :

$$\boxed{d^m f = d(d^{m-1} f), \;\; m \geq 2.} . \tag{8.119}$$

oferim formulele pentru diferenţialele până la ordinul 3 pentru o funcţie de două variabile $f(x,y)$, cu ∂erivate continue până acest ordin ; astfel, conform Teoremei lui Schwarz, vom scrie o singură derivată mixtă de ordinul 2 sau 3, care coincide şi cu celelalte.

Plecăm de la formula (8.108), fără a mai scrie cele 2 + 2 argumente pentru diferenţialele de ordine ≥ 2.

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy} \; ; \tag{8.120}$$

$$d^2 f = d(df) \underset{(8.120)}{=} d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2} \; ;. \tag{8.121}$$

$$d^3 f = d(df) \underset{(8.120)}{=} d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \right) dx +$$

$$+\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}dx\,dy^2+$$

$$+\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{d^3 f=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3\ .}\ ;. \quad (8.122)$$

Aşa cum am mai menţionat, grupările de termeni care au condus la expresiile din (8.121) & (8.122) au implicat egalitatea dintre unele ∂erivate mixte de ordinul II (şi respectiv III), pe baza Teoremei lui Schwarz.

Să mai observăm că aceste expresii din (8.121) & (8.122) se pot reţine mai uşor şi se pot generaliza la diferenţiale de orice ordin m dacă se pune în evidenţă operatorul diferenţial de primul ordin :

$$\boxed{d\ =\ \frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy}\ ; \qquad (8.123)$$

Operatorii diferenţiali de ordine superioare se obţin din acest operator de primul ordin ceea ce se poate numi operaţia de ridicare la "*puteri simbolice*" a căror semnificaţie va fi explicată.

$$\boxed{d^2\ =\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2+2\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2}\ ; \quad (8.124)$$

$$\boxed{d^3\ =\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(3)}=\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3\ .}$$

(8.125)

Aceste puteri simbolice funcţionează în spiritul produsului de operatori ca şi *compunere* a acestora, iar pentru variaţiile argumentelor acestea sunt puteri obişnuite :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{(2)}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,,\quad \frac{\partial}{\partial x}\bullet\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\,,\quad dx^{(2)}=dx^2\,,.\text{etc.}$$

Cu aceste convenţii, se poate scrie operatorul diferenţial de ordinul m (oarecare) :

$$\boxed{d^m\ =\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k\frac{\partial^m}{\partial x^{m-k}\partial y^k}dx^{m-k}dy^k\ .} \qquad (8.126)$$

Aplicarea practică a formulelor (8.124 - 126) se realizează introducând funcţia a cărei diferenţială urmează a fi scrisă sub operatorii de derivare parţială.

Exemplu. Didiferenţiala de ordinul m a funcţiei $f(x, y) = \cos(3x + 2y)$ este

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m \cos(3x + 2y)}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k = .$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cos\left(3x + 2y + m\frac{\pi}{2}\right) 3^{m-k} 2^k dx^{m-k} dy^k. \qquad (8.127)$$

În obţinerea acestei expresii (8. 127) s-a aplicat o formulă pentru derivarea funcţiilor trigonometrice fundamentale : la fiecare derivare argumentul funcţiei se majorează cu câte un $\pi/2$: v. Secţiunea 6. De asemenea, s-a aplicat regula de derivare a funcţiilor compuse : la fiecare ∂erivare după x a funcţiei $f(x, y) = \cos(3x + 2y)$ în faţa funcţiei (sau după aceasta) apare câte un coeficient $= 3$, iar la fiecare ∂erivare după y apare câte un coeficient $= 2$.

□

Aplicaţii (exerciţii) cu ∂erivate şi diferenţiale.

8.6 - A Să se determine ∂erivatele şi diferenţiale pentru funcţiile de mai jos, în punctele indicate sau într-un punct curent.

1° $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi df pentru $f(x, y) = \frac{x}{y}$ în $M_0(1,2)$ & $M(x,y)$;

2° $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi df pentru $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ în $M_0(\pi/4, \pi/3)$ & $M(x, y)$
;

3° Se cer ∂erivatele până la ordinul II şi $d^2 f$ pentru funcţia $f(x, y) = \ln(xy)$ în punctele $M_0(2, 1)$ & $M(x, y)$;

4° Să se verifice că funcţiile $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ şi $g(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ verifică ecuaţia lui Laplace $\triangle u = 0$ unde

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

5° Să se scrie diferenţiala de ordinul m , într-un punct curent $M(x, y)$, pentru funcţia $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$.

6° Se cer ∂erivatele şi diferenţiala de ordinul I pentru funcţiile $f(x, y) = e^{x - y^2}$ în $M_0(0, 1)$ şi $g(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ în $M(x,y)$, $y \neq 0$;

7° Se cer ∂erivatele şi diferenţiala de primul ordinul pentru funcţia $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$ în $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

8° Folosind definiţia, să se calculeze

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \text{ şi } df(1,1;h,k) \text{ pentru } f(x,y) = \ln(1+x+y^2)\,.$$

9° Să se determine $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2)$ şi $df(-2,2;h,k)$ pentru

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}\ ;$$

10° Să se determine $d^m f$ pentru funcţia $f(x,y,z) = e^{xy}\sin z$.

Răspunsuri - recomandări de rezolvare.

1° ∂erivatele în punctele $M(x,y)$ sunt imediate iar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{1}{2}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{1}{4}\,.$$

2° Se recomandă calculul acestor derivate parţiale în $M_0(\pi/4, \pi/3)$ folosind definiţia şi formula de transformare a diferenţei de sinusuri în produs. Derivatele parţiale într-un punct curent se obţin cu regulile de derivare a funcţiilor compuse.

3° $\frac{\partial}{\partial x}\ln(xy) = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\ln(xy) = \frac{1}{y}$ de unde se obţin imediat derivatele secunde şi

$$d^2 f = -\frac{dx^2}{x^2} - \frac{dy^2}{y^2}\,.$$

Particularizarea la punctul M_0 se poate realiza pe baza continuităţii derivatelor parţiale.

4° $\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

iar ∂erivatele după y se obţin prin simetrizare.

5° Se va proceda ca în exemplul anterior, cu funcţia $f(x,y) = \cos(3x+2y)$.

6° Pentru ∂erivatele în punct curent ale lui g se aplică regulile de derivare. Pentru prima funcţie se poate aplica definiţia sau ∂erivatele se pot obţine prin continuitatea derivatelor parţiale în punctul curent, trecând la limită către M_0; $f'_x(0,1) = 1/e$, $f'_x(0,1) = -2/e$.

7° Se aplică regulile de derivare. Funcţia este separabilă, în sensul că se poate scrie ca produs de trei funcţii, fiecare depinzând de câte o singură variabilă.: se scrie exponenţiala sub forma

$$e^{x^2+y^2} = e^{x^2} e^{y^2}.$$

8° Folosind definiţia se vor găsi ∂erivatele de primul ordin ; ele se pot verifica şi trecând la limită către M_0 în $f'_x(x,y)$ & $f'_y(x,y)$.

9° Se pot determina $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi df într-un punct curent, înlocuind apoi coordonmatele punctului dat. Funcţia este separabilă (se poate factoriza ca produs de funcţii în fiecare variabilă, acestea fiind puteri raţionale).

10° Rezolvarea este similară cu cea de la exerciţiul **7°** dar exponenţiala nu mai este separabilă.

8.5 Extreme locale ale funcţiilor de mai multe variabile.

Fie $f : D \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de n variabile reale şi $M_0 \in \operatorname{acc} D \cap D$. Eventual, acest punct M_0 poate fi un punct interior al domeniului de definiţie. Înainte de a caracteriza formal definiţia lui M_0 ca punct de extrem local, putem formula o descriere a acestei situaţii ceva mai intuitiva.

M_0 este un *punct de minim* / *maxim local al funcţiei* f dacă există o vecinătate a punctului astfel încât valorile funcţiei în punctele acesteia majoreazâ / minoreazâ valoarea funcţiei în punct. Formal,

$$M_0 \in \text{P-MIN}(f) \Leftrightarrow (\exists\, U_{M_0})\ f(U_{M_0} \cap D) \geq f(M_0)\ ; \tag{8.128}$$

$$M_0 \in \text{P-MAX}(f) \Leftrightarrow (\exists\, U_{M_0})\ f(U_{M_0} \cap D) \leq f(M_0)\ . \tag{8.129}$$

Dacă inegalităţile din (8.128) / (8.129) sunt stricte pentru toate punctele vecinătăţii cu excepţia lui M_0 atunci acesta este un punct de minim / maxim local *strict*. Punctele de **extrem global** se definesc analog, dar valoarea $f(M_0)$ nu se mai compară cu valorile funcţiei într-o vecinătate a punctului ci cu valorile sale pe întreg domeniul de definiie. Aşadar,

$$M_0 \in \text{P-MIN}_G(f) \Leftrightarrow f(D) \geq f(M_0)\ ; \tag{8.130}$$

$$M_0 \in \text{P-MAX}_G(f) \Leftrightarrow f(D) \leq f(M_0)\ . \tag{8.131}$$

Valoarea $f(M_0)$ a funcţiei într-un punct de extrem local va fi un *minim* / *maxim local*, respectiv *global* al acesteia. De multe ori, printr-un extrem local (global) se înţelege perechea $\big(M_0, f(M_0)\big)$.

Observaţie. *Problema determinarii extremelor* (*locale sau glabale ale*) *unei funcţii de mai multe variabile are o importanţă practică deosebită, fiind - în esenţă - nucleul oricărei probleme de optimizare.*

În principiu, un punct de extrem global ar fi mai curând unic, dar există funcţii care admit o întreagă mulţime de puncte de minim / maxim global, valorile funcţiei în toate aceste puncte fiind identice. Vom ilustra şi astfel de cazuri în exemple care urmează.

Determinarea punctelor de extrem se poate realiza şi folosind doar această definiţie, dar nu pentru orice funcţie acest lucru este posibil.

Ex. 8.15 Funcţiile

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \ \ \& \ \ g(x, y, z) = 1 - \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) \tag{8.132}$$

admit originea ca punct de minim, respectiv de maxim local dar şi global. Într-adevăr,

$$(8.132\text{-}1) \Rightarrow f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0) \Rightarrow \text{P-MIN}_g(f) = \{O(0,0)\}. \tag{8.133}$$

Concluzia din (8.133) se poate obţine şi punând în evidenţă imaginea sau codomeniul funcţiei :

$$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^2) = [0, +\infty) \Rightarrow f(0,0) = 0 = \min \operatorname{Im} f.$$

Pentru a doua funcţie putem scrie

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \Rightarrow \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x,y,z) = 1 - \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) \le 1 = g(0,0,0). \tag{8.134}$$

Din valorile intermediare care intervin inegalităţile din (8.134) rezultă că $O(0,0,0)$ este punct de maxim global. Imaginea acestei funcţii este $(-\infty, 1]$. Pentru ambele funcţii, originea ca punct de minim, respectiv de maxim (local şi global).este unică.

□

Ex. 8.16 Funcţiile

$$\varphi(x,y) = |2x - 3y - 6| \quad \& \quad \psi(x,y,z) = \sin(x+y+z) \tag{8.135}$$

admit, fiecare, mai multe puncte de extrem local şi global. Într-adevăr,

$$(8.135\text{-}1) \Rightarrow \varphi(x,y) \ge 0 \quad \& \quad \varphi(M) = 0 \quad \text{pentru}$$

$$M(x,y) \in (d) : 2x - 3y - 6 = 0, \tag{8.136}$$

Aşadar, toate punctele dreptei (d) din (8.135) sunt puncte de minim global pentru funcţia $\varphi(x,y)$, deci şi puncte de minim local, în mod banal. Imaginea funcţiei este tot intervalul $[0,+\infty)$ sau în interpretare geometrică, semiaxa $(z \ge 0)$ a reperului cartesian $(O; x,y,z)$ din spaţiiul 3D.

Funcţia $\psi(x,y,z)$ din (8.135-2) este un sinus având ca argument o funcţie liniară în x,y,z, care poate lua orice valuare reală. Deci putem scrie că $\psi(\mathbb{R}^3) = [-1,1]$. Ce două valori extreme de vor atinge $\Leftrightarrow$ argumentul sinusului este egal cu un multiplu din clasa de resturi $\widehat{3}\ (\mathrm{mod}\ 4)$ de $\pi/2$ pentru minim, respectiv din clasa $\widehat{1}(\mathrm{mod}\,4)$ al aceluiaşi unghi pentru maxim. Aceste minime şi maxime sunt globale (implicit şi locale). Prin urmare putem scrie

$$\text{P-MIN}_g(\psi) = \left\{ M(x,y,z) : x+y+z = (4k+3)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{8.137}$$

$$\text{P-MAX}_g(\psi) = \left\{ Q(x,y,z) : x+y+z = (4\ell+1)\tfrac{\pi}{2},\ \ell \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{8.138}$$

Din punct de vedere geometric, punctele de minim din (8.137), dar şi cele de maxim din (8.138), sunt situate în plane paralele, toate având aceeaşi normală $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Se poate rezuma formal această discuţie sub forma

$$-1 = \min \psi(\mathbb{R}^3) \le \psi(\mathbb{R}^3) \le \max \psi(\mathbb{R}^3) = 1\,.$$

□

Puncte staţionare. $M_0 \in acc\,D \cap D$ este un *punct staţionar* al funcţiei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă toate derivatele parţiale de primul ordin al funcţiei se anulează în acest punct :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0\,. \tag{8.139}$$

Rezultă că cele n coordonate ale unui punct staţionar trebuie să verifice sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X) & = & 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(X) & = & 0, \\ \quad\vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X) & = & 0. \end{cases} \tag{8.140}$$

Ca detaliu mai curând tehnic, să observăm că în (8.139) apar egalităţile pe care trebuie să le verifice punctul staţionar M_0 în timp ce – în (8.140) – $X \in \mathbb{R}^n$ reprezintă *coordonatele* unui punct curent M care trebuie să verifice acest sistem de ecuaţii pentru ca $M(X)$ să fie un punct staţionar. Să notăm cu $S(f)$ sau doar *S mulţimea punctelor staţionare ale funcţiei.* Conform definiţiei (8.128-129) a punctelor de extrem local, rezultă că şi orice restricţie a funcţiei care-l admite pe M_0 ca punct de acumulare al subdomeniului respectiv îl va avea pe acesta drept *punct de extrem local* : de minim, respectiv de maxim. *Funcţiile parţiale* asociate unei funcţii de mai multe variabile într-un punct M_0 sunt,
aşa cum am observat anterior, restricţii ale funcţiei la drepte (sau hiperdrepte, în cazul n-dimensional cu $n > 3$). În consecinţă, funcţiile parţiale – care sunt funcţii de o singură variabilă liberă – vor avea în coordonata respectivă a punctului M_0 un *punct de extrem* (local) de aceeaşi natură, adică de minim sau de maxim. Conform **Teoremei lui Fermat** şi a definiţiei derivatelor parţiale de primul ordin, funcţia parţială corespunzătoare acelei coordonate *va avea derivata nulă în acest punct.* Dar această derivată este tocmai derivata parţială în M_0. Vom descrie formal comportarea ∂erivatelor (de primul ordin) într-un punct de extrem local pentru o funcţie de trei variabile ($n = 3$) deşi nu ar fi o problemă formularea teoremei respective în cazul general.

Teoremă. *Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct de extrem local al funcţiei $f(x,y,z)$ iar ∂erivatele (de primul ordin ale) funcţiei există în acest punct atunci ele se anulează în M_0.*

Demonstraţie. Oferim demonstraţia pentru un punct de minim, trecerea la cazul simetric fiind facilă. Întrucât

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \text{P-MIN}(f) \Rightarrow (\exists\, U_{M_0})\ f(U_{M_0} \cap D) \geq f(x_0, y_0, z_0)\,; \tag{8.141}$$

Funcţiile parţiale în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sunt

$$\varphi(x) = f(x, y_0, z_0)\,, \quad \psi(y) = f(x_0, y, z_0)\,, \quad \rho(z) = f(x_0, y_0, z)\,, \tag{8.142}$$

$$(8.141)\ \&\ (8.142) \Rightarrow \begin{cases} \varphi(U_{x_0} \cap D) \geq \varphi(x_0)\,, \\ \psi(U_{y_0} \cap D) \geq \psi(y_0)\,, \\ \rho(U_{z_0} \cap D) \geq \rho(z_0)\,. \end{cases} \tag{8.143}$$

Vecinătăţile punctelor x_0, y_0, z_0 care intervin în membrii stângi ai inegalităţilor din (8.143) sunt vecinătăţi unidimensionale, proiecţii ale vecinătăţii U_{M_0} pe cele trei axe de coordonate ; ele sunt de forma $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, $(z_0 - \theta, z_0 - \theta)$. Derivatele parţiale ale funcţiei f în punctul M_0 se obţin conform definiţiei, trecând la limită în rapoartele incrementare (pentru funcţiile) parţiale :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}\,. \tag{8.144}$$

Conform cu inegalitatea (8.143-1), numărătorii rapoartelor din (8.144) sunt pozitivi.

Aşadar, pentru această derivată parţială trebuie determinate limitele la stânga şi la dreapta, adică derivatele laterale :

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'_s(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \le 0 \\ \varphi'_d(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi'_s(x_0) = \varphi'_d(x_0) = 0 \Rightarrow \tag{8.145}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0. \tag{8.146}$$

Penultima egalitate din (8.145) rezultă din ipoteza că funcţia admite derivată parţială în punctul M_0 , derivată care se anulează conform cu implicaţia care conduce la (8.145). Analog se arată că si celelalte două derivate parţiale se anulează în M_0 care este, prin urmare, un punct staţionar.

■

Corolar. *Punctele de extrem local din domeniul de derivabilitate parţială al unei funcţii se găsesc printre punctele staţionare ale acesteia.*

Evident, acest Corolar are o importanţă practică întrucât restrânge căutarea punctelor de extrem local la mulţimea S a punctelor staţionare. Pot însă exista puncte staţionare care să nu fie puncte de extrem local. Exemplul care urmează ilustrează această situaţie.

Ex. 8.17 Fie funcţia $f(x,y) = e^{\sin^2(x+y)}$. Se cere determinarea punctelor sale staţionare din pătratul $[-\pi,\pi]^2$ şi eventualele puncte de extrem local din acelaşi subdomeniu.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin(x+y)\cos(x+y)e^{\sin^2(x+y)} = \sin 2(x+y)e^{\sin^2(x+y)} = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{8.147}$$

Cele două derivate parţiale coincide întrucât funcţia este simetrică în x, y iar ∂erivata după x este şi ea simetrică. Întrucât exponenţiala este strict pozitivă pentru orice argument, rezultă că sistemul de forma (8.140) care va furniza coordonatele punctelor staţiaonare se reduce la o sigură ecuaţie,

$$\sin 2(x+y) = 0 \Rightarrow 2(x+y) = k\pi \Rightarrow x+y = k\pi/2 \Leftrightarrow y = k\pi/2 - x. \tag{8.148}$$

Ecuaţia din (8.147) reprezintă o familie de drepte paralele cu bisectoarea a doua. Segmentele de pe aceste drepte care sunt situate în patratul $[-\pi,\pi]^2$ vor fi formate din puncte staţionare ale funcţiei. Această afirmaţie se exprimă prin

$$(\forall\ k \in \mathbb{Z})\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, k\pi/2 - x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, k\pi/2 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(x, k\pi/2 - x) : k \in \mathbb{Z}, x \in [-\pi,\pi]\}. \tag{8.149}$$

Din punct de vedere geometric, dreptele din familia (caracterizată prin ecuaţiile) (8.148), numai câteva au puncte în interiorul pătratului ; acestea corespund valorilor parametrului întreg $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Pentru $k = 2$ şi $k = -2$ dreptele respective ating pătratul în două colţuri opuse ale sale şi anume $A(\pi,\pi)$ & $A'(-\pi,-\pi)$, respectiv. Să observăm că valorile funcţiei din enunţ în toate punctele staţionare sunt

$$f(x, k\pi/2 - x) = e^{\sin^2(k\pi/2)} = \begin{cases} e^1 = e & \text{pentru} \quad k = 2\ell - 1, \\ e^0 = 1 & \text{pentru} \quad k = 2\ell. \end{cases} \tag{8.150}$$

Întrucât $0 \le \sin^2(x+y) \le 1$ rezultă căvalorile din (8.150) sunt efectiv extremele funcţiei pe domeniul închis $[-\pi,\pi]^2$.

O funcţie mai interesantă se obţine din funcţia din enunţ dacă exponentul $\sin^2(x+y)$ se înlocuieşte cu $\sin^3(x+y)$. Se obţine astfel funcţia

$$g(x,y) = e^{\sin^3(x+y)}. \tag{8.151}$$

$$(8.151) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 3\sin^2(x+y)\cos(x+y)e^{\sin(x+y)} = \frac{\partial g}{\partial y}. \tag{8.152}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \underset{(8.152)}{\Rightarrow} \sin^2(x+y)\cos(x+y) = 0 \Rightarrow x+y = m\frac{\pi}{2},\ \ \ell \in \mathbb{Z}. \tag{8.153}$$

$$(8.153) \Rightarrow S = \left\{\left(x, m\frac{\pi}{2} - x\right) : m \in \mathbb{Z}, x \in [-\pi,\pi]\right\}. \tag{8.154}$$

În punctele staţionare, valorile funcţiei g sunt

$$g\left(x, m\frac{\pi}{2} - x\right) = e^{\sin m\pi/2} = \begin{cases} e^1 = e & \text{pentru } m = 4\ell+1, \\ e^0 = 1 & \text{pentru } m = 2\ell, \\ e^{-1} = 1/e & \text{pentru } m = 4\ell+3. \end{cases} \tag{8.155}$$

Ca şi în cazul funcţiei *f*,

$$-1 \le \sin^3(x+y) \le 1 \Rightarrow e^{-1} \le g(x,y) \le e \tag{8.156}$$

iar membrii extremi ai dublei inegalităţi (8.156) sunt efectiv valori extreme ale funcţiei g. Aşadar,

$$\text{P-MIN}_G(g) = \left\{\left(x, (4\ell+3)\frac{\pi}{2} - x\right) : m \in \mathbb{Z}, x \in [-\pi,\pi]\right\}., \tag{8.157}$$

$$\text{P-MAX}_G(g) = \left\{\left(x, (4\ell+1)\frac{\pi}{2} - x\right) : m \in \mathbb{Z}, x \in [-\pi,\pi]\right\}.. \tag{8.158}$$

În ce priveşte punctele din (8.155-2), este uşor de constatat că acestea *nu sunt puncte de extrem local*. Să le notăm cu Q_ℓ şi să reamintim că

$$g(Q_\ell) = e^{\sin \ell\pi} = e^0 = 1, \tag{8.159}$$

Atunci când suma argumentelor $(x+y)$ "traversează" valoarea $\ell\pi$ exponentul $\sin^3(x+y)$ trece de la valori pozitive la valori negative sau invers. Prin urmare, în orice vecinătate (suficient de mică) a unui punct Q_ℓ de pe o dreaptă $(x+y = \ell\pi)$ funcţia

$$g(x,y) = e^{\sin^3(x+y)} \begin{cases} < (>) e^0 = 1 & \text{pentru } x+y < \ell\pi, \\ > (<) e^0 = 1 & \text{pentru } x+y > \ell\pi. \end{cases}$$

de unde reultă că punctele de forma Q_ℓ nu sunt puncte de extrem local ci doar puncte staţionare.

□

Identificarea punctelor de extrem local cu ajutorul diferenţialei a doua.

Comportarea unei funcţii de mai multe variabile în vecinătatea unui punct $M_0 \in \mathbb{R}^n$ se poate studia cu ajutorului diferenţialei a doua în acest punct. Scriind formula lui Taylor pentru funcţia $f(M)$ în *punctul staţionar* M_0, grupul termenilor liniari (de orinul întâi) *coincid cu diferenţiala întâia* care se anulează în M_0 conform cu (8.140). Mai exact, formula lui Taylor de ordinul II se poate scrie sub forma

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!} df(M_0, dX) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0, dX) + R_2. \tag{8.160}$$

Conform observaţiei anterioare, în punctul staţionar M_0 avem $d(M_0, dX) \equiv 0$ iar restul R_2 (cer se exprimă cu diferenţiala a III-a într-un punct apropiat de M_0) va deveni oricât de mic (ăn valoare absolută) într-o vecinătate suficient de mică a sa. Aşadar, variaţia funcţiei va putea fi aproximată oricât de bine de $d^2 f(M_0, dX)/2$:

$$\boxed{\triangle f(M_0, dX) = f(M) - f(M_0) \approx \frac{1}{2!} d^2 f(M_0, dX)} \tag{8.161}$$

Prin urmare, semnul variaţiei funcţiei va fi dat de semnul diferenţialei a doua, iar aceasta este o formă patratică în componentele vectorului-variaţie a argumentului dX. Având în vedere definiţiile (8.128-129) ale punctelor de minim / maxim local, rezultă că

$$M_0 \in \text{P-MIN}(f) \Leftrightarrow f(M) - f(M_0) \geq 0 \text{ în } U_{M_0} \cap D; \tag{8.162}$$

$$M_0 \in \text{P-MAX}(f) \Leftrightarrow f(M) - f(M_0) \leq 0 \text{ în } U_{M_0} \cap D \tag{8.163}$$

Inegalităţile din (8.162-163) sunt stricte pentru punctele M din vecinătatea punctată, dacă M_0 este un punct de extrem strict. Conform cu aproximarea variaţiei din (8.161), putem trage concluzia că

$$M_0 \in S \;\; \& \;\; \begin{cases} d^2 f(M_0, dX) \geq 0 \;\Rightarrow\; M_0 \in \text{P-MIN}(f), \\ d^2 f(M_0, dX) \leq 0 \;\Rightarrow\; M_0 \in \text{P-MAX}(f) \end{cases} \tag{8.164}$$

Diferenţiala a doua fiind o formă pătratică în variaţiile pe componente $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ va rezulta din (8.164) că M_0 este punct de minim local dacă $d^2 f$ este pozitiv definită, respectiv punct de maxim local dacă $d^2 f$ este negativ definită. În cazul în care aceasta formă pătratică este nedefinită, M_0 nu este un punct de extrem local ; el se numeşte punct şa. Studiul semnului unei forme pătratice se presupune a fi cunoscut de la disciplina de Algebră liniară.

Pentru funcţiile de două (şi trei) variabile, stabilirea semnului lui $d^2 f$ este relativ simplă. Se scrie matricea jacobiană de ordin II sau ***matricea hessiană***

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \tag{8.165}$$

În condiţiile teoremei lui Schwarz (derivatele mixte continue) elementele de NE & SW coincid.

Se înlocuiesc coordonatele punctului M_0 în ∂erivatele de ordinul II din (8.165) şi se obţine o matrice cu elemente numerice, care se notează (în multe cursuri / culegeri de probleme) ca mai jos :

$$H(M_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}. \tag{8.166}$$

Cu aceste notaţii, diferenţiala a doua în M_0 se scrie

$$d^2 f(M_0; dx, dy) \underset{(8.121)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 =$$

$$= A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2. \tag{8.167}$$

Conform **teoremei lui Jacobi** de la forme pătratice, avem trei cazuri posibile :

$$\begin{cases} A > 0 \ \& \ AC - B^2 > 0 \Rightarrow d^2 f > 0 \Rightarrow M_0 \in \text{P-MIN}(f), \\ A < 0 \ \& \ AC - B^2 > 0 \Rightarrow d^2 f < 0 \Rightarrow M_0 \in \text{P-MAX}(f), \\ \qquad AC - B^2 < 0 \Rightarrow d^2 f \text{ nedef.} \Rightarrow M_0 \text{ este punct şa.} \end{cases} \tag{8.168}$$

Observaţii. 1¤ Dacă toate derivatele parţiale de ordinul II se anulează în M_0 atunci diferenţiala a doua este identic nulă, deci nu mai este relevantă şi se poate recurge la formula lui Taylor şi la diferenţiale de ordin superior. 2¤ În cazul când $AC - B^2 = 0$ diferenţiala a doua ca formă pătratică este *degenerată* ; ea se poate aduce la o expresie canonică ce constă dintr-un singur termen iar semnul coeficientului lui $d\tilde{x}^2$ sau $d\tilde{y}^2$ va decide natura punctului M_0.

Ex. 8.18 Să se determine punctele staţionare şi eventualele extreme locale pentru funcţiile

$$(i) \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \ \& \tag{8.169}$$

$$(ii) \quad g(x, y) = \frac{1 + x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}. \tag{8.170}$$

Soluţii. (*i*) $$(8.169) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 3(x^2 + y^2 - 5), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 6(xy - 2). \end{cases} \tag{8.171}$$

Punctele staţionare se obţin rezolvând sistemul algebric ce rezultă din

$$(8.172) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4/x^2 - 5 = 0, \\ y = 2/x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \text{ sau} \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \text{ sau} \\ x = \pm 2. \end{cases} \tag{8.172}$$

Deci mulţimea punctelor staţionare este

$$S : M_1(1,2),\ M_2(-1,-2),\ M_3(2,1),\ M_4(-2,-1). \tag{8.173}$$

Din ∂erivatele de primul ordin din (8.172) se obţin ∂erivatele secunde :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x. \tag{8.174}$$

Valorile acestor ∂erivate din (8.175) calculate în fiecare din cele 4 puncte staţionare vor conduce la coeficienţii formelor pătratice care sunt elementele matricei jacobiene din (8.166) ; vom indexa matricele astfel obţinute conform indicilor punctelor respective :

$$H_1 = H(M_1) = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, \quad H_2 = H(M_2) = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}, \tag{8.175}$$

$$H_3 = H(M_3) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad H_4 = H(M_4) = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}. \tag{8.176}$$

Conform cu criteriile din (8.168) găsim că

(8.175-1) $\Rightarrow A_1C_1 - B_1^2 = A_2C_2 - B_2^2 = -108 < 0 \Rightarrow M_1$ & M_2 sunt puncte şa.

(8.176-1) $\Rightarrow M_3 \in$ P-MIN(f), (8.176-2) $\Rightarrow M_4 \in$ P-MAX(f), (8.177)

În cele două puncte de extrem local din (8.177) se pot determina (aşa cum se obişnuieşte) valorile funcţiei :

$$f(M_3) = f(2, 1) = -28, \qquad f(M_4) = f(-2,-1) = 28.$$

$$\textbf{(ii)} \quad (8.170) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{1 + y^2 - x - xy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}, \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{1 + x^2 - y - xy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{cases} \tag{8.178}$$

Sistemul care va furniza punctele staţionare este, conform cu derivatele din (8.178),

$$\begin{cases} 1 + y^2 - x - xy = 0, \\ 1 + x^2 - y - xy = 0. \end{cases} \Rightarrow (y - x)(x + y + 1) = 0. \tag{8.179}$$

Dacă $x = y$, cu oricare din ecuaţile sistemului se ajunge la ecuaţia $(x-1)^2 = 1 \Rightarrow x = y = 1$ Dacă $x + y + 1 = 0$ se ajunge la ecuaţia $2(x^2 + x + 1) = 0$ care nu are nicio rădăcină reală ; în variabila y .se va obţine ecuaţia $2(y^2 + y + 1) = 0$. Aşadar, singurul punct staţionar este $M_1(1,1)$.

$$(8.178\text{-}1) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{-(1 + y)(1 + x^2 + y^2)^{3/2} - 3x(1 + y^2 - x - xy)(1 + x^2 + y^2)^{1/2}}{(1 + x^2 + y^2)^3} =.$$

$$= \frac{(1 + x^2 + y^2)^{1/2}}{(1 + x^2 + y^2)^3}(-1 - x^2 - y^2 - y - x^2y - y^3 - 3x - 3xy^2 + 3x^2 + 3x^2y) =$$

$$= \frac{-y^3 - y^2 - y - 1 + 2x^2y + 2x^2 - 3xy^2 - 3x}{(1 + x^2 + y^2)^{5/2}} ; \tag{8.180}$$

$$(8.178\text{-}1) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{(2y - x)(1 + x^2 + y^2)^{3/2} - 3y(1 + y^2 - x - xy)(1 + x^2 + y^2)^{1/2}}{(1 + x^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{(1+x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^3}(2x^2y+2y^3+2y-x^3-xy^2-x-3y^3+3xy+3xy^2-3y) =$$

$$= \frac{-y^3-y+2x^2y+2xy^2+3xy-x^3-x}{(1+x^2+y^2)^{5/2}} \ ; \qquad (8.181)$$

$$(8.178\text{-}2) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{(2x-y)(1+x^2+y^2)^{3/2}-3x(1+y^2-x-xy)(1+x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{(1+x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^3}(-x^3+2xy^2+2x-x^2y-y^3-y+3xy^2+3xy-3x) =$$

$$= \frac{-y^3-y-x^3-x+2xy^2+2xy^2+3xy}{(1+x^2+y^2)^{5/2}} \ ; \qquad (8.182)$$

$$(8.178\text{-}2) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{-(x+1)(1+x^2+y^2)^{3/2}-3y(1+y^2-x-xy)(1+x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{(1+x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^3}(-x^3-xy^2-x-x^2-y^2-1+3xy(y-x)+2y^2-3y-1) =$$

$$= \frac{-x^3-x^2-x-1+2xy^2+2y^2-3x^2y-3y}{(1+x^2+y^2)^{5/2}} \ . \qquad (8.183)$$

Se constată, din (8.181) & (8.182),că.cele două derivate mixte coincid ceea ce este firesc având în vedere continuitatea acestora pe $\mathbb{R}^n$ şi teorema lui Schwarz.

Pentru a stabili natura punctului staţionar găsit, cele trei derivate de ordinul II trebuie calculate în acest punct :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = \frac{-y^3-y^2-y-1+2x^2y+2x^2-3xy^2-3x}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}(1,1) =$$

$$= \frac{-4+4-6}{3^{5/2}} = \frac{-2}{3^{3/2}} = A \ ; \qquad (8.184)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = \frac{-x^3-x^2-x-1+2xy^2+2y^2-3x^2y-3y}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}(1,1) =$$

$$= \frac{-4+4-6}{3^{5/2}} = \frac{-2}{3^{3/2}} = C \ ; \qquad (8.185)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{-y^3-y+2x^2y+2xy^2+3xy-x^3-x}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}(1,1) =$$

$$= \frac{-2+7-2}{3^{5/2}} = \frac{1}{3^{3/2}} = B \ . \qquad (8.186)$$

În fine, din (8.184-186) obţinem, cu criteriul (8.168),

$$A < 0 \ \ \& \ \ AC - B^2 = \frac{4}{3^3} - \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^2} > 0 \Rightarrow M_1(1,1) \in \text{P-MAX}(g) \qquad (8.187)$$

Valoarea funcţiei în acest punct este

$$g(1,1) = \frac{1+x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(1,1) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \ .$$

$\square$

Aplicaţii cu puncte staţionare şi puncte de extrem.

$\boxed{8.7 - A}$ Se cere determinarea punctelor staţionare şi a eventualelor puncte de extrem pentru funcţiile de mai jos.

1° $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; **2°** $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$;

3° $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$; **4°** $f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$

5° $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$; **6°** $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$;

7° $f(x,y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$ cu $x \geq 0,\ y \geq 0$;

8° $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

9° $f(x,y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)}$;

10° $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;.

11° $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

12° $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$, $x, y \in [0, \pi/2]$.

Răspunsuri - recomandări pentru rezolvare.

1° Se găseşte un singur punct staţionar, $M_0(0,3)$. Matricea hessiană este constantă (nu depinde de punct) şi conduce la concluzia că $d^2 f > 0$ (întrucât $A = 2$ & $AC - B = 3$). Deci M_0 este punct de minim local şi $f(M_0) = -9$.

2° Sistemul care furnizează coordonatele punctelor staţionare conduce la $S : M_1(0,0)$ & $M_2(-1,-1)$. Matricea hessiană (cu ∂erivatele de ordinul al II-lea) este

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{bmatrix} \Rightarrow J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \ \& \ J_2 = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Urmează că $M_1 \equiv O$ (originea) este un punct şa în timp ce M_2 este un punct de maxim local, cu $f(M_2) = 1$.

3° Întrucât funcţia este – practic – o sumă de pătrate ea este nenegativă. Punctul ale cărui coordonate anulează ambii termeni va fi un *punct de minim global.* Cititorul urmează a regăsi acest punct utilizând ∂erivatele de primul şi al II-lea ordin (implicit matricea hessiană) şi a constata că nu mai există şi alte puncte staţionare / de extrem local sau global. Codomeniul sau imaginea funcţiei este intervalul nemărginit $[0, +\infty)$.

4° Expresia analitică a funcţiei este similară cu precedentă, dar semnul – din faţa celui de al doilea termen îi schimbă complet comportarea. Singurul punct staţionar este acelaşi $M_1(1,0)$ dar el nu mai este un punct de extrem ci un punct şa. A se justifica această afirmaţie pe baza criterioului (8.168). Din punct de vedere geometric, suprafaţa caracterizată analitic de ecuaţia $z = (x-1)^2 - 2y^2$ este o *suprafaţă cuadrică* şi anume un *paraboloid hiperbolic* ; este exact suprafaţa ce ilustrează perfect noţiunea de punct şa. Studiul suprafeţelor în general şi – în particular – al celor cuadrice face parte din obiectul Geometriei analitice.

5° Funcţia admite un singur punct staţionar care (întâmplător) coincide cu cel al funcţiei precedente. Acesta este un punct de minim local, cu $f(M_1) = -1$.

6° Determinarea ∂erivatelor (adică a derivatelor parţiale ale) acestei funcţii, în special a celor de ordinul II, este ceva mai laborioasă. Pe de altă parte, valorile lor în origine se pot găsi doar apelând la definiţie, deci ca derivate ale funcţiilor parţiale. Oricum, se va constata că originea este punct staţionar, de altfel şi unicul. Natura sa ca punct de extrem locxal este mai greu de stabilit cu ajutorul diferenţialelor ; de exemplu, diferenţiala a II-a este nulă în origine. Dar originea ca punt de maxim, nu numai local ci şi global, rezultă imediat din inegalităţile şi implicaţiile

$$x^2+y^2 \underset{\mathbb{R}^2}{\geq} 0 \Rightarrow (x^2+y^2)^{2/3} \underset{\mathbb{R}^2}{\geq} 0 \Rightarrow -(x^2+y^2)^{2/3} \underset{\mathbb{R}^2}{\leq} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-(x^2+y^2)^{2/3} \underset{\mathbb{R}^2}{\leq} 1 \Rightarrow f(\mathbb{R}^2) \leq 1.$$

Mai mult decât atât, întrucât $f(0,0) = 1$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(\pm\infty,\pm\infty)} f(x,y) = -\infty$ rezultă că

$$f(\mathbb{R}^2) = (-\infty, 1] \Rightarrow \max f(\mathbb{R}^2) = 1.$$

7° În enunţul acestui exerciţiu din volumul [Gh. Procopiuc 2001, p.361], regiunea în care urmează a se găsi şi studia punctele staţionare este restrânsă prin inegalităţile $x > 0$, $y > 0$. Dar toate cele 5 puncte staconare ale funcţiei sunt situate exact pe frontiera primului cadran al reperului $(O; xv, y)$ adică pe semiaxele pozitive (Ox) & (Oy). Din acest motiv am relaxat inegalităţile la $x \geq 0$, $y \geq 0$. Aşadar, vom căuta şi studia punctele staţionare din primul cadran "închis", adică din domeniul nemărginit $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.. Sistemul algebric pentru coordonatele punctelor staţionare este

$$\begin{cases} x^2y^2(18-4x-3y) = 0, \\ x^3y(12-2x-3y) = 0. \end{cases} \qquad (8.188)$$

Cele 5 puncte staţionare ale funcţiei sunt $M_1(0,0)$, $M_2(0,4)$, $M_3(6,0)$, $M_4(0,6)$, $M_5(9/2,0)$. Primul punct este chiar originea. În primele patru puncte, toate elementele matricei hessiene se anulează întrucât îl conţin pe x drept factor, deci $d^2f \equiv 0$. şi nu poate contribui la stabilirea naturii acestor puncte. Având în vedere expresia analitică $f(x,y) = x^3y^2(6-x-y)$ şi limitarea domeniului la primul cadran (inclusiv semiaxele), se constată că punctele M_i $(i = \overline{1,2})$ sunt puncte de minim local cu $f(M_i) = 0$. Dar şi $M_5(9/2,0)$ este un punct de minim local întrucât $f(M_5) = 0$ şi există o vecinătate U_{M_5} suficient de mică în care $f(U_{M_5} \setminus \{M_5\}) > 0$, pentru $y > 0$. Faptul că M_5 este punct de minim local se poate constata şi cu criteriul (8.168) întrucât

$$A_5 = B_5 = 0 \text{ dar } C_5 = 3^7/8 > 0 \Rightarrow d^2f = \frac{3^7}{8}dy^2 > 0$$

Să încheiem discuţia acestei funcţii (mai interesantă decât altele) cu observaţia că funcţia se anulează în punctele dreptei $(6-x-y=0)$, situate în primul cadran, dar numai extremităţile segmentului respectiv sunt puncte staţionare : $M_3(6,0)$, $M_4(0,6)$; ele sunt *puncte şa* întrucât $f(M_3) = f(M_4) = 0$ dar funcţia îşi schimbă semnul când punctul curent $M(x,y)$ se află într-o vecinătate semidisc a lui M_3, respectiv M_4 şi traversează dreapta $(6-x-y=0)$.

8° Sistemul pentru punctele staţionare este

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}. \tag{8.189}$$

Prin scăderea celor două ecuţii (membru cu membru) se poate ajunge la sistemul

$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 2) = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}. \tag{8.190}$$

Varianta $x = y$ conduce la originea $O(0,0)$ ca punct staţionar, cu $f(0,0) = 0$. Celălalt sistem posibil (cu substituţia $x = y - y^3$) conduce la o ecuaţie de gradul 6 în y sau la una de ordinul 3 în y^2, cu singurele rădăcini reale $y = \pm\sqrt{2}$ Se obţin alte două puncte staţionare de coordonate $\left(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right)$. Pe baza coeficienţilor formei pătratice d^2f (elementele matricelor hessiene de ordinul 2) se va constata că aceste două puncte sunt puncte de *minim local*, cu $f\left(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right) = -8$. În origine, d^2f este o formă pătratică degenerată dar negativ semidefinită, deci acest prim punct staţionar este unul de maxim local.

9° Prin determinarea ∂erivatelor de primul ordin, se va ajunge la sistemul algebric

$$\begin{cases} x(1 - x^2 - y^2) = 0, \\ y(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases}. \tag{8.191}$$

care furnizează nu mai puţin de 5 puncte staţionare : originea O sau $M_0(0,0)$, $M_1(0,-1)$, $M_2(0,1)$, $M_3(-1,0)$, $M_4(1,0)$. Dar se constată cu uşurinţă că nu numai aceste patru puncte ci <u>toate</u> punctele de pe conturul cercului de rază 1 centrat în origine verifică sistemul (8.191) întrucât ecuaţia acestuia este exact $x^2 + y^2 = 1$. Originea va fi găsită ca un punct de minim global. M_1 & M_2 vor furniza diferenţiale secunde degenerate dar negativ semidefinite, deci sunt puncte de maxim local, la fel ca si celelalte două. Dar şi în orice punct de pe cercul $\mathcal{C}(O,1)$ se va găsi (de exemplu folosind substituţia $y^2 = 1 - x^2$) o matrice hessiană care conduce la o diferenţială secundă degenerată dar negativ semidefinită :

$$J(x) = \frac{2}{e}\begin{bmatrix} -2x^2 & \mp 2x\sqrt{1-x^2} \\ \mp 2x\sqrt{1-x^2} & 2x^2 - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - B^2 = 4x^2(1 - x^2 + x^2 - 1) = 0.$$

Notă. Natura punctelor staţionare se poate deduce şi din expresia analitică a funcţiei. O este un *punct de minim global* cu $f(0,0) = 0$ în timp ce toate punctele de pe cercul unitar sunt *puncte de maxim global* cu valoarea acestui maxim $= 1/e$.

10° Funcţia este un polinom de gradul II în x, y, z care se poate rescrie imediat ca sumă de pătrate perfecte minus o constantă. Se va găsi ca *unic punct de minim global* $M_1(-1,-2,3)$ cu $f(M_1) = -14$. Cititorul interesat va putea regasi acest punct drept punct staţionar şi va putea verifica şi calitatea sa de punct de minim cu criteriul (8.168), după determinarea ∂erivatelor până la ordinul al doilea.

11° Expresiile ∂erivatelor de primul ordin conduc la sistemul algebric

$$2 \quad \begin{cases} 3x^2 + 12y &= 0, \\ 12x + 2y &= 0, \\ 2z &= -2 \end{cases} \Rightarrow S : \begin{cases} M_1(0,0,-1), \\ M_2(24,-144,-1), \end{cases} \tag{8.192}$$

Verificarea celor două puncte staţionare cu criteriul (8.168) necesită matricea hessiană (într-un punct curent)

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{8.193}$$

Pe baza coeficienţilor din matricea (8.193) se obţin diferenţialele secunde

$$\begin{cases} d^2f\,(M_1\,; dx,dy,dz) = 24\,dx\,dy + 2\,dy^2 + 2\,dz^2 \\ d^2f\,(M_2; dx,dy,dz) = 144\,dx^2 + 24\,dx\,dy + 2\,dy^2 + 2\,dz^2\,. \end{cases} \tag{8.194}$$

Prima diferenţială din (8.194-1) este nedefinită întrucât ea se poate rescrie sub forma

$$d^2f\,(M_1\,; dx,dy,dz) = 2\,[(dy^2 + 12\,dx\,dy) + dz^2] =$$

$$= 2\,[(dy + 6\,dx)^2 - 36\,dx^2 + dz^2] \tag{8.195}$$

iar forma pătratică din (8.195) poate lua atât valori pozitive cât şi negative. A doua formă pătratică, cea din (8.194-2), este pozitiv definită, deci M_2 este un punct de minim local, cu $f(M_2) = 17855.$.Această afirmaţie se poate verifica scriindu-i matricea $J(24,-144,-1) = J_2$ şi apoi diagonalizând-o sau doar aplicând teorema lui Jacobi.

12° Se vor căuta punctele staţionare şi eventualele puncte de extrem local doar în pătratul închis $[0\,, \pi/2]^2 = [0\,, \pi/2] \times [0\,, \pi/2]$. Această limitare este justificată (şi) prin faptul că expresia funcţiei.conţine funcţii trigonometrice care sunt periodice. ∂erivatele de primul ordin sunt

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \cos x - \sin\,(x + y) &= \sin\,(\pi/2 - x) - \sin\,(x + y), \\ f'_y(x, y) = \cos y - \sin\,(x + y) &= \sin\,(\pi/2 - y) - \sin\,(x + y). \end{cases} \tag{8.196}$$

Diferenţele din ultimele expresii ale ∂erivatelor se pot transforma în produse şi se ajunge la sistemul de ecuaţii trigonometrice

$$\begin{cases} \sin\,(\pi/2 - x) - \sin\,(x + y) = 0, \\ \sin\,(\pi/2 - y) - \sin\,(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,\sin\,(\pi/4 - x - y/2)\,\cos\,(\pi/4 + y/2) = 0, \\ 2\,\sin\,(\pi/4 - x/2 - y)\,\cos\,(\pi/4 + x/2) = 0. \end{cases} \tag{8.197}$$

Sistemul (8.197), sub ultima sa formă, este echivalent cu exact 4 sisteme mai simple întrucât fiecare din membrii stângi este un produs de două funcţii.

$$\begin{cases} \sin\,(\pi/4 - x - y/2) = 0, \\ \sin\,(\pi/4 - x/2 - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi/4 - x - y/2 = k\pi\,, \\ \pi/4 - x/2 - y = \ell\pi\,; \end{cases} \tag{8.197-1}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi/4 - x - y/2) = 0, \\ \cos(\pi/4 + x/2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi/4 - x - y/2 = k\pi, \\ \pi/4 + x/2 = (2m+1)\pi/2; \end{cases} \quad (8.197\text{-}2)$$

$$\begin{cases} \cos(\pi/4 + y/2) = 0, \\ \sin(\pi/4 - x/2 - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi/4 + y/2 = (2n+1)\pi/2, \\ \pi/4 - x/2 - y = \ell\pi; \end{cases} \quad (8.197\text{-}3)$$

$$\begin{cases} \cos(\pi/4 + y/2) = 0, \\ \cos(\pi/4 + x/2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi/4 + y/2 = (2n+1)\pi/2 \\ \pi/4 + x/2 = (2m+1)\pi/2. \end{cases} \quad (8.197\text{-}4)$$

Pentru fiecare dintre aceste 4 sisteme se vor căuta soluţiile din pătratul $[0, \pi/2]^2$. Desigur, toţi coeficienţii k, ℓ, m, n sunt numere întregi, dar vom accepta numai valori care vor conduce la (perechi de) coordonate din pătratul menţionat, adică valori din $\{-1, 0, 1\}$..

$$(8.197\text{-}1) \Rightarrow x = y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow M_1\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \in S\ ;$$

$$(8.197\text{-}2) \Rightarrow x = y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow M_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \in S;$$

$$(8.197\text{-}3) \Rightarrow x = y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow M_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \in S;$$

$$(8.197\text{-}4) \Rightarrow x = y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow M_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \in S.$$

Aşadar, în subdomeniul impus se găsesc numai două puncte staţionare distincte, $M_1\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ & $M_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$..Derivatele parţiale secunde sunt elementele matricei hessiene

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \underset{(8.196)}{=}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\sin y - \cos(x+y) \end{bmatrix}. \quad (8.198)$$

$$(8.198) \Rightarrow H(M_1) = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 C_1 - B_1^2 = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow M_1 \text{ punct de}$$

maxim ;

$$(8.198) \Rightarrow H(M_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 C_2 - B_2^2 = -1 < 0 \Rightarrow M_2 \text{ punct şa.}$$

Valoarea funcţiei în punctul de maxim local este $f(M_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Notă. *Toate afirmaţiile, expresiile analitice şi valorile numerice din răspunsurile şi recomandările de rezolvare la aceste 12 aplicaţii urmează a fi verificate şi completate de către studenţii care urmează seminarul de* Analiză matematică.

8.6 Dependenţa funcţională

Există mai multe accepţiuni ale noţiunii de dependenţă funcţională. Înainte de a prezenta definiţii formale, să anticipăm cu două cazuri : dependenţa unei funcţii de alte funcţii date, respectiv dependenţa în cadrul unui sistem de funcţii.

Fie funcţia de n variabile $u = \boldsymbol{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, unde $\boldsymbol{f}$ este o funcţie vectorială cu m componente iar $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ este de asemenea o funcţie vectorială cu m componente. Fiecare funcţie componentă f_k a funcţiei vectoriale $\mathbf{f}$ este definită pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^n$, domeniu care este – în general – o mulţime deschisă, care este formată numai din puncte interioare. Formal,

$$f_k : D \to \mathbb{R},\ (\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D)\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_k \in \mathbb{R}. \tag{8.199}$$

Definiţia 6.1. Funcţia $u_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *depinde* (*funcţional*) de celelalte $m-1$ funcţii componente ale funcţiei $\boldsymbol{f}$ pe domeniul D dacă există o funcţie Φ de $m-1$ variabile astfel încât

$$(\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D)\ f_k(X) = \Phi[f_1(X), \dots, f_{k-1}(X), f_{k+1}(X), \dots, f_m(X)]. \tag{8.200}$$

Folosind notaţiile din $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, relaţia de dependenţă funcţională se poate scrie

$$u_k = \Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m). \tag{8.201}$$

Dacă nu există nicio astfel de funcţie Φ pentru nici una dintre funcţiile componente $u_1, u_2, \dots, u_m$ atunci ele sunt *funcţional independente.*

Ex. 8.19 Funcţiile

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ u_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \end{cases} \tag{8.202}$$

sunt funcţional dependente întrucât

$$(8.202) \Rightarrow u_2^2 = u_1 + 2u_3. \tag{8.203}$$

Pentru relaţia de dependenţă din (8.203), funcţia Φ care intervine în definiţia generală (8.201) poate fi

$$u_1 = \Phi(u_2, u_3) \text{ cu } \Phi(u_2, u_3) = u_2^2 - 2u_3. \tag{8.204}$$

□

Desigur, relaţia de dependenţă funcţională exprimată prin (8.203) & (8.204) nu este unica posibilă (sau existentă) între funcţiile din (8.202). De exemplu, cu funcţia de două variabile $\Psi(u, v) = \pm\sqrt{u + 2v}$, relaţia de dependenţă din (8.203) poate fi scrisă şi sub forma $u_2 = \Psi(u_1, u_3)$. Am admis aparenta ambiguitate cu semnele $\pm$ la funcţia Ψ întrucât semnul (valoriei) funcţiei $u_2 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ poate fi şi negativ.

Relaţii de dependenţă funcţională pot fi considerate şi între funcţii reale de o singură variabilă reală. De exemplu, între funcţiile trigonometrice fundamentale există cunoscuta relaţie $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Această relaţie poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$\Theta(u_1, u_2) = 1 \quad \text{unde} \quad \Theta(u, v) = u^2 + v^2., \;\; u_1 = \sin x, u_2 = \cos x.$$

Dependenţa funcţională între mai multe funcţii date (prin expresiile lor analitice) poate fi caracterizată cu ajutorul derivatelor parţiale, mai exact al determinanţilor funcţionali. O astfel de caracterizare face obiectul teoremei ce urmează.

Teorema 6.1. *Fie* m *funcţii de* n *variabile reale cu* $n \geq m$, $\varphi_i : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1,m}$

$$\begin{cases} u_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, u_k, u_{m+1}, \ldots, u_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, u_k, u_{m+1}, \ldots, u_n), \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, \ldots, u_k, u_{m+1}, \ldots, u_n). \end{cases}, \tag{8.205}$$

toate fiind definite & diferenţiabile într-o vecinătate a punctului $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. *Dacă determinantul funcţional (jacobian)*

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}(M_0) \neq 0 \tag{8.206}$$

atunci funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ *sunt independente într-o vecinătate a punctului* M_0.

Comentarii. Nu oferim o demonstraţie a acestei teoreme. Ea poate fi gasită în orice manual universitar de Analiză matematică. Precizăm că determinantul funcţional (jacobian) din (8.206) este determinantul format cu primele m coloane ale matricei derivatelor parţiale de primul ordin,

$$J = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right]_{m \times n}. \tag{8.207}$$

Să mai observăm că alegerea primelor m variabile în raport cu care se consideră ∂erivatele din (8.206) este o chestiune de convenţie sau de comoditate. În principiu, ∂erivatele pot fi considerate în raport cu oricare m dintre cele n variabile (sau argumente) ale funcţiilor φ_i, $i = \overline{1,m}$, de indici $j_1, j_2, \ldots, j_m$ cu $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n$. Dacă inegalitatea din (8.206) este verificată în toate punctele unui subdomeniu al lui D, atunci cele m funcţii sunt independente în acest subdomeniu. În esenţă, condiţia din (8.206), dar şi cea mai generală în care variabilele ce intervin în ∂erivatele din determinantul jacobian nu sunt neapărat grupate (de exemplu primele r), este echivalentă cu afirmaţia că *rangul matricei jacobiene din* (8.207) *este egal cu numărul* m *de linii*, deci cu numărul de funcţii φ_i.

Corolar. Dacă toţi minorii de ordinul m ai matricei jacobiene J din (8.207) se anulează într-un subdomeniu $D_0 \subseteq D$ atunci cele m funcţii sunt în dependenţă funcţională.

Un caz mai general decât acesta constă în existenţa unui minor de ordinul r $(r \leq m, n)$ nenul în timp ce toţi minorii de ordinul $r + 1$, sau numai cei obţinuţi prin metoda bordării, se anulează (într-o vecinătate a punctului M_0. În această situaţie, cele r funcţii ale căror linii din matricea jacobiană intersectează minorul nenul sunt funcţional independente, în timp ce toate cele m funcţii sunt în ansamblu dependente. În principiu, $m - r$ funcţii se vor putea exprima în funcţie de cele r care sunt independente. Dacă indicii de linii (adică funcţii) şi de variabile care intervin în minorul nenul de ordinul r al matricei jacobiene J sunt $i_1, i_2, \ldots, i_r$ şi (respectiv) $j_1, j_2, \ldots, j_r$ atunci condiţia din (8.206) devine

$$\frac{D(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_r})}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r})}(M_0) \neq 0\,. \tag{8.208}$$

Ex. 8.20 Să se arate că funcţiile de mai jos sunt funcţional dependente şi să se găsească o relaţie între ele.

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x+y+z, \\ g(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+6xyz, \\ h(x,y,z) = xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x). \end{cases} \tag{8.209}$$

Matricea funcţională (sau jacobiană) asociată celor trei funcţii din (8.209) este

$$J(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3x^2+6yz & 3y^2+6xz & 3z^2+6xy \\ y^2+z^2+2x(y+z) & z^2+x^2+2y(z+x) & x^2+y^2+2z(x+y) \end{bmatrix}. \tag{8.210}$$

(8.210) $\Rightarrow$ $\det J(x,y,z) =$

$$= 3\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2+2yz & y^2-x^2+2z(x-y) & z^2-y^2+2x(y-z) \\ y^2+z^2+2x(y+z) & x^2-y^2+2z(y-x) & y^2-z^2+2x(z-y) \end{bmatrix} =$$

$$= 3\det\begin{bmatrix} y^2-x^2+2z(x-y) & z^2-y^2+2x(y-z) \\ x^2-y^2+2z(y-x) & y^2-z^2+2x(z-y) \end{bmatrix} = 0. \tag{8.211}$$

Anularea determinantului din (8.211) rezultă din faptul că liniile sale sunt opuse una alteia (ca semn). Relaţia de dependenţă între cele trei funcţii este $f^3 = g + 3h$.

□

Aplicaţii cu dependenţă /.independenţă funcţională

8.8 - A Să se studieze dependenţa / independenţa funcţională pentru sistemele de funcţii de mai jos.

(*i*) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $g(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + z\right)$.

$$(ii)\quad \begin{cases} f(x,y,z) = xy - z, \\ g(x,y,z) = xz + y, \\ h(x,y,z) = (x^2+1)(y^2+z^2) - (x^2-1)yz - x(y^2-z^2); \end{cases}$$

$$(iii)\quad \begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_2 - x_3, \\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - x_4^2; \end{cases}$$

$$(iv) \quad \begin{cases} u(x,y,z) &= x+y+z, \\ v(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx, \\ w(x,y,z) &= x^3+y^3+z^3-3xyz; \end{cases}$$

$$(v) \quad \begin{cases} u(x,y,z) &= xy+yz+zx,, \\ v(x,y,z) &= xyz(x+y+z), \\ w(x,y,z) &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2; \end{cases}$$

$$(vi) \quad \begin{cases} f(x,y,z) &= x+y+z, \\ g(x,y,z) &= x-y+z, \\ h(x,y,z) &= 4(xy+yz). \end{cases}$$

Răspunsuri - recomandări pentru rezolvare.

(i) Matricea jacobiană este

$$J(x,y,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+z\right)^2} & \dfrac{-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+z\right)^2} & \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+z\right)^2} \end{bmatrix}$$

După eliminarea numitorilor de pe cele două linii (aceştia fiind > 0 pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{O(0,0)\}$), se va constata că matricea rămasă are rangul 2, deci cele două funcţii sunt independente.

(ii) Se va scrie matricea jacobiană şi se va constata că rangul ei este mai mic decât 3, deci funcţiile sunt dependente ; o relaţie de dependenţă este $h = f^2 - fg + g^2$. A se verifica aceste afirmaţii.

(iii) Situaţia este similară cu cea de la aplicaţia precedentă.

$$\text{rang}\left[\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x_1,x_2,x_3,x_4)}\right] < 3 \Rightarrow \text{ dependenţa.}$$

O relaţie de dependenţă este $f_2 + f_3 = f_1^2$.

$$(iv) \quad \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x-y & 2y-z & 2z-x \\ 3x^2-3yz & 3y^2-3xz & 3z^2-3xy \end{vmatrix}.$$

Pentru calculul acestui jacobian se poate proceda în maniera de la **Ex**. **8.20** ; se va găsi jacobianul ca fiind nul şi se va putea găsi / verifica relaţia de dependenţă $= uv$.

(v) După determinarea celor 9 derivate de primul ordin şi scrierea jacobianului, acesta poate fi dezvoltat după efectuarea transformărilor $C_3 - C_2$, $C_2 - C_1$ *şi* încă o dată $C_3 - C_2$ ($C_j =$ coloana j). Se va putea scoate din determinant un factror comun (produs de 4 factori) şi se va ajunge la un determinant $= 0$. Relaţia de dependenţă este $u^2 = 2v + w$. Se recomandă şi verificarea acestei relaţii.

(*vi*) $$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ y & x+z & y \end{vmatrix} = 0 \text{ (întrucât } C_1 = C_3\text{)}.$$

Se va găsi relaţia de dependenţă $h = f^2 - g^2$.
