

4. Limite de functii reale

Succinte preliminarii teoretice (+ exemple)

O funcție cu valori reale, definită pe o submulțime din $\mathbb{R}$, este de forma

$$\begin{array}{c} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \cap \\ \mathbb{R} \end{array} \quad (4.1)$$

(Sub)mulțimea $D \subseteq \mathbb{R}$ ($D \neq \emptyset$) din (4.1) poate avea absolut orice natură dar – pentru a se putea defini limita – ea trebuie să aibă puncte de acumulare. De exemplu, nu are sens considerarea unei funcții definite pe o mulțime discretă precum $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Această mulțime D din (4.1) este *domeniul de definiție* al funcției. În unele cazuri el este specificat odată cu funcția, în alte cazuri el trebuie determinat. *Mulțimea valorilor* sau *codomeniul* funcției f este

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R}) y = f(x)\} \underset{\text{not}}{=} f(D). \quad (4.2)$$

Prima notație din (4.2) provine de la termenul de *image* (sinonim cu mulțimea valorilor sau codomeniu). În unele situații este oportună considerarea valorilor funcției nu pentru toate punctele din domeniul de definiție ci doar pentru o parte dintre acestea. Se ajunge astfel la ideea de restricție a unei funcții reale la un subdomeniu al ei, $D_0 \subseteq D$. Evident, în cazul egalității (la incluziunea anterioară) nu mai poate fi vorba de o restricție, cel mult de una improprie. Așadar *restricția* funcției f la subdomeniul $D_0 \subseteq D$ se definește prin

$$f|_{D_0} : (\forall x \in D_0) f|_{D_0}(x) = f(x). \quad (4.3)$$

Majoranți / minoranți, funcții mărginite, margini ale unei funcții

Funcția admite ca *minornat* / *majorant* pe $m \in \mathbb{R}$ / $M \in \mathbb{R}$ dacă

$$(\forall x \in D) m \leq f(x) \underset{\text{not}}{\iff} f(D) \geq m, \quad (4.4)$$

respectiv

$$(\forall x \in D) f(x) \leq M \underset{\text{not}}{\iff} f(D) \leq M. \quad (4.5)$$

Cele două elemente (numere reale finite) $m \in \mathbb{R}$ / $M \in \mathbb{R}$ din (4.4) și (4.5) se mai numesc bariere ale funcției. Dacă f admite atât un minorant cât și un majorant ea este o funcție *mărginită*; altfel (dacă cel una din aceste bariere nu există) funcția este *nemărginită*. Este

evident că, în cazul considerării unei restricții a funcției f la un subdomeniu $D_0 \subseteq D$ minoranții pot să fie mai mari decât pentru f pe întregul său domeniu, iar majoranții pot să fie mai mici. Dar, întrucât nici minoranții și nici majoranții nu sunt unic determinați, această observație este mai puțin relevantă.

Marginile unei funcții f pe domeniul său de definiție D sunt exact marginile $\inf$ și $\sup$ din Secțiunea 1 (**Submulțimi din $\mathbb{R}$**) ale mulțimii valorilor sale. De multe ori se indică domeniul pe care se consideră marginea respectivă sub $\inf$, respectiv $\sup$:

$$\inf_D f = \inf_{\text{def}} f(D) ; \quad \sup_D f = \sup_{\text{def}} f(D) . \quad (4.6)$$

Evident, dacă funcția admite (cel puțin câte) un minorant / majorant ca în (4.4) , (4.5), ea admite și marginile respective, așa cum rezultă din proprietatea de completă ordonare a câmpului numerelor reale ; mai mult, are loc inegalitatea mutiplă

$$m \leq \inf_D f \leq f(D) \leq \sup_D f \leq M . \quad (4.7)$$

În (4.7) am folosit inegalități între un element și o mulțime, la fel ca în (4.4) & (4.5). Dacă se consideră și restricția lui f la un subdomeniu $D_0 \subseteq D$ atunci inegalitățile din (4.7) se completează la

$$m \leq \inf_D f \leq \inf_{D_0} f \leq f(D_0) \leq \sup_{D_0} f \leq \sup_D f \leq M \quad (4.8)$$

întrucât $f(D_0) \subseteq f(D)$. În cazul (cazurile) particular(e) în care funcția admite elemente extreme acestea coincid respectiv cu marginile :

$$\begin{cases} \min_D f = \min f(D) = \inf_D f \leq f(D) , \\ \max_D f = \max f(D) = \sup_D f \geq f(D) . \end{cases} \quad (4.9)$$

Mai mult decât atât, elementele extreme ale unei funcții pe domeniul său (maxim) de definiție, respectiv pe un subdomeniu $D_0 \subseteq D$, sunt efectiv atinse : există puncte din domeniu în care funcția atinge aceste valori.

$$\begin{cases} \min_D f = m \iff (\exists x_m \in D) f(x_m) = m , \\ \max_D f = M \iff (\exists x_M \in D) f(x_M) = M . \end{cases} \quad (4.10)$$

Evident, caracterizările din (4.10) se adaptează corespunzător în cazul restricției funcției la un subdomeniu $D_0 \subseteq D$. **Exercițiu !**

E 4.1

Fie funcția

$$f(x) = \ln(-4 + 5x - x^2) + \arccos(x - 3). \quad (4.11)$$

Se cere găsirea domeniului ei maxim de definiție și marginile / elementele extreme, dacă există.

Trinomul de sub logaritm trebuie să fie strict pozitiv. Așadar,

$$-4 + 5x - x^2 > 0 \iff x^2 - 5x + 4 < 0 \iff x \in (1, 4). \quad (4.12)$$

Funcția de sub arccos trebuie să ia valori în intervalul admisibil, deci

$$-1 \leq x - 3 \leq 1 \Rightarrow x \in [2, 4]. \quad (4.13)$$

Intersectând intervalele din (4.12) & (4.13) se obține domeniul $D = [2, 4]$.

Pentru a determina marginile funcției și eventualele extreme, pentru funcția $\arccos$ trebuie selectat un sub-interval al mulțimii valorilor sale pentru care ea să fie efectiv o funcție, adică să ia o singură valoare pentru fiecare argument; de exemplu, putem alege $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. Funcția $\arccos(x - 3)$ este strict descrescătoare pe $D = [2, 4]$, de la $\arccos(-1) = \pi$ către $\arccos 1 = 0$. Funcția $\ln$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, deci ea va păstra variația funcției trinom care-i este argument. Acesta scade către 0 pentru $x \searrow 4$, deci întreaga funcție va diverge spre $-\infty$, de unde rezultă că

$$(i) \text{ nu există } \min_D f \text{ \& } \inf f = -\infty. \quad (4.14)$$

(ii) În ce privește marginea superioară (și un eventual maxim), logaritmul va transforma valoarea maximă a trinomului din 2.5 în

$$f(5/2) = \ln(9/4) + \arccos(-1/2) = \ln(9/4) + 2\pi/3 \approx 2.9054. \quad (4.15)$$

În limita din stânga a intervalului-domeniu găsim

$$f(2) = \ln 2 + \arccos(-1) = \ln 2 + \pi \approx 3.8347. \quad (4.16)$$

Comparând aceste două valori, se poate presupune că funcția scade și pe subintervalul $[2, 2.5]$ ceea ce conduce la concluzia că

$$\max_D f = f(2) = \ln 2 + \arccos(-1) \approx 3.8347. \quad (4.17)$$

O confirmare a concluziei din (4.17) se va putea obține doar printr-o analiză riguroasă a variației (monotoniei) funcției din (4.11), cu ajutorul derivatelor. $\square$

Limita unei funcții reale $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) se poate considera numai într-un *punct de acumulare* al domeniului ei. După cum s-a menționat și în prima secțiune (**Submulțimi din $\mathbb{R}$**),

$$x_0 \in \text{acc } D \iff (\forall V_{x_0})(\exists x \in D) \ x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}. \quad (4.18)$$

Desigur, elementul x din (4.18) depinde de vecinătatea V_{x_0} însă această dependență va fi mai ușor de evidențiat în “limbajul” vecinătăților fundamentale, de raze ε & δ (în cazul unui punct la distanță finită) cu α & δ pentru $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$. Un punct de acumulare poate fi caracterizat și cu ajutorul șirurilor.

Elementul $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ va fi limita funcției f în punctul $x_0 \in \text{acc } D$ dacă oricărei vecinătăți V_ℓ îi corespunde o vecinătate U_{x_0} astfel încât $x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V_\ell$. Formal, vom scrie că

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell} \iff \boxed{(\forall V_\ell)(\exists U_{x_0}) \ x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V_\ell}. \quad (4.19)$$

Și în caracterizarea din (4.19) există o dependență de la vecinătatea lui $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ la cea a lui $x_0 \in \text{acc } D$.

Pentru cazul $\ell \in \mathbb{R}$ & $x_0 \in \mathbb{R}$ (limită finită în punct de acumulare situat la distanță finită) se pot folosi vecinătăți fundamentale, iar caracterizarea din (4.19) devine

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell} \iff \boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0) \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)}. \quad (4.20)$$

În funcție de pozițiile elementelor ℓ & x_0 în $\bar{\mathbb{R}}$ există exact 9 cazuri posibile. În fiecare dintre ele se pot folosi vecinătăți fundamentale pentru caracterizarea limitei, deci se poate particulariza caracterizarea generală din (4.19). Prezentăm aceste cazuri în tabelul ce urmează, indicând și tipurile de vecinătăți utilizabile. Caracterizarea din (4.20) se referă doar la unul dintre ele, când ambele elemente (limita și punctul de acumulare) sunt finite.

Tabel 4.1 Caracterizarea limitei din (4.19) cu vecinătăți fundamentale, în toate cazurile posibile

$x_0 \setminus \ell$	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$x < \beta(\alpha) = \beta(<0) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < \alpha(<0)$	$x < \beta(\varepsilon) = \beta(<0) \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$	$x < \beta(\alpha) = \beta(<0) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) > \alpha(>0)$
$x_0 \in \mathbb{R}$	$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < \alpha(<0)$	$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$	$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) > \alpha(>0)$
$+\infty$	$x > \beta(\alpha) = \beta(>0) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < \alpha(<0)$	$x > \beta(\varepsilon) = \beta(>0) \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$	$x > \beta(\alpha) = \beta(>0) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) > \alpha(>0)$

Evident, spațiile disponibile în celulele acestui tabel n-au făcut posibilă punerea în evidență a unor dependențe (de la vecinătatea limitei la cea a punctului de acumulare). În cazul (2,2), adică $\ell \in \mathbb{R}$ & $x_0 \in \mathbb{R}$, această dependență a fost pusă în evidență în caracterizarea (4.20). În cazul $x_0 \in \mathbb{R}$ & $\ell = -\infty$ sau (2,1), raza $\delta = \delta(\alpha) > 0$ (rândul 2 din tabel). Să mai observăm că semnele care apar pe primul rând, respectiv $\beta < 0$, sau pe prima coloană $\alpha < 0$, nu sunt esențiale ; dar este vorba de vecinătăți ale elementului impropriu $x_0 = -\infty$, respectiv $\ell = -\infty$, pentru care x trebuie să fie suficient de mic, respectiv valoarea $f(x)$ să fie oricât de mică. Oferim câteva exemple pentru aplicarea unor astfel de caracterizări.

E 4.2

① Să se verifice că

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^3 = 0. \quad (4.21)$$

Este un caz ce corespunde caracterizării din (4.19). Se poate pleca de la inegalitatea

$$(\forall \varepsilon > 0) |(x - 1)^3| < \varepsilon \iff |x - 1| < \sqrt[3]{\varepsilon} \iff 1 - \sqrt[3]{\varepsilon} < x < 1 + \sqrt[3]{\varepsilon} :$$

așadar, caracterizarea de tip (4.20) se verifică pentru $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

② Să se verifice că

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty. \quad (4.22)$$

Să observăm (mai întâi) că funcția din (4.22) este definită pe

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ \& } 2 \in \text{acc } D.$$

Vom avea de verificat că

$$(\forall \alpha > 0) (\exists \delta(\alpha) = \delta > 0) |x - 2| < \delta \Rightarrow \ln \frac{1}{(x - 2)^2} > \alpha. \quad (4.23)$$

Ultima inegalitate din (4.23) se rescrie echivalent sub formele

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{(x - 2)^2} > \alpha &\iff \frac{1}{(x - 2)^2} > e^\alpha \iff (x - 2)^2 < \frac{1}{e^\alpha} \iff \\ &\iff |x - 2| < \frac{1}{e^{\alpha/2}} \iff x \in \left(2 - \frac{1}{e^{\alpha/2}}, 2 + \frac{1}{e^{\alpha/2}} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Prima echivalență din (4.24) s-a obținut aplicând exponențiala de bază e , funcție crescătoare, ambilor membri ai primei inegalități. Așadar, se verifică limita din enunț conform cazului (2,3) din Tabelul 4.1. Din (4.23) rezultă ca raza vecinătății punctului de acumulare este

$$\delta = \delta(\alpha) = 1 / e^{\alpha/2} \text{ \& } 1 / e^{\alpha/2} \rightarrow 0 \text{ pentru } \alpha \rightarrow +\infty.$$

③ Aceste caracterizări pot fi folosite și în sens negativ, adică se poate verifica faptul că limita unei funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ într-un punct dat diferă de un anumit element (din $\mathbb{R}$ sau din $\overline{\mathbb{R}}$). De exemplu, să se arate că

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x \neq 0. \quad (4.25)$$

În acest scop, trebuie să se verifice că nu este îndeplinită caracterizarea din (4.20), aplicând contrarul acesteia. Această operație implică inversarea cuantificatorilor (cel universal cu cel existențial). Așadar, trebuie să verificăm că

$$(\exists \varepsilon_0 > 0) (\forall \delta > 0) x \in (\pi - \delta, \pi + \delta) \setminus \{\pi\} \text{ însă } \cos x \notin (-\varepsilon_0, \varepsilon_0). \quad (4.26)$$

Raza $\delta > 0$ care intervine în (4.26) trebuie să fie oricât de mică. Ea se poate lua ca fiind o funcție de un $n \in \mathbb{N}$, cu condiția ca $\delta > 0$ să poată fi oricât de mic, astfel încât x să poată fi oricât de apropiat de punctul limită π . Ea poate fi luată, de exemplu, ca inversul unui natural oarecare sau ca un multiplu de acesta, de exemplu $\delta = \delta(n) = 2/n$. Evident, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2/n = 0$. Considerând acum

$$(\forall n \in \mathbb{N}) x = x_n = \pi \pm 1/n$$

vom avea

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos x_n = \cos(\pi \pm 1/n) = \\ &= \cos \pi \cos(1/n) \mp \sin \pi \sin(1/n) = \cos \pi \cos(1/n).\end{aligned}\quad (4.27)$$

Trecând la limită în ultima expresie constatăm că

$$[n \rightarrow +\infty] \Rightarrow \begin{cases} \delta = 1/n \rightarrow 0, x_n = \pi \pm 1/n \rightarrow \pi \text{ \& } \\ f(x_n) = \cos \pi \cos(1/n) \rightarrow \cos \pi \cdot 1 = -1. \end{cases} \quad (4.28)$$

Așadar, este suficient să alegem, în (4.26), $\varepsilon_0 = 1/2$ ca să constatăm că valorile funcției din (4.27) intră într-o vecinătate oricât de mică a lui -1 și deci rămân în afara vecinătății $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) = (-1/2, 1/2)$.

Metoda utilizată aici pentru a demonstra afirmația din (4.25) a implicat utilizarea unui șir. Dar se putea lucra foarte bine cu un $\delta > 0$ absolut arbitrar și cu $x = x_\delta = \delta/2$, de exemplu. Se va folosi formula pentru cosinusul sumei sau diferenței ca în (4.27) și se va **ajunge la aceeași concluzie. Verificarea rămâne pentru cei interesați.**

Continuăm cu un exemplu ce ilustrează caracterizarea limitelor cu ajutorul șirurilor, dar nu înainte de a formula această abordare.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell} \quad \Updownarrow \quad (4.29)$$

$$\boxed{\text{Pentru orice șir } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ cu } x_n \in D \setminus \{x_0\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell.}$$

Caracterizarea din (4.29) nu afirmă altceva decât că limita în $x_0 \in \text{acc } D$ este $\ell \iff$ șirul valorilor funcției pe termenii oricărui șir de elemente din domeniu care are ca limită pe x_0 tinde la (adică are ca limită pe) ℓ .

În aplicații practice, caracterizarea din (4.29) este dificil (sau imposibil) de aplicat întrucât nu se pot considera toate șirurile care converg la punctul de acumulare. În schimb, ea poate fi utilizată spre a demonstra că o anumită funcție *nu are limită* într-un punct. Pentru aceasta este suficient să se găsească două șiruri diferite care converg la (sau au ca limită pe) x_0 dar pentru care șirurile valorilor funcției pe termenii celor două șiruri *au limite diferite*. Exemplul ce urmează ilustrează un astfel de caz (de funcție fără limită într-un anumit punct).

④ Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ nu are limită în origine.

Într-adevăr, se pot considera șirurile de puncte din domeniu (cu termenii generali)

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ \& } x_m = \frac{2}{(4m+1)\pi} \quad (n, m \in \mathbb{N}). \quad (4.30)$$

Evident, (4.30)

$$x_n, x_m \in D = \mathbb{R}^* \text{ \& } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = 0.$$

Șirurile valorilor funcției f pe termenii celor două șiruri din (4.30) sunt (respectiv)

$$f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1 \text{ \& } f(x_m) = \cos(4m+1)\frac{\pi}{2} = 0. \quad (4.31)$$

Așadar, cele două șiruri de valori din (2.31) sunt constante având valori diferite, implicit limite diferite și afirmația din enunț se verifică : dacă funcția ar fi avut limită în 0, șirurile din (4.31) rebuiau să aibă aceeași limită. Aici intervine unicitatea limitei unei funcții : *dacă f admite limita ℓ în $x_0 \in \text{acc } D$ această limită este unică.*

Evident, în locul șirurilor din (4.30) s-ar fi putut alege și altele, de asemenea convergente la 0, de exemplu

$$x_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \text{ \& } x_m = \frac{2}{(4m+3)\pi} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Cei interesați sunt invitați să verifice comportarea funcției pe aceste două șiruri. De asemenea, să studieze existența limitei în origine a funcției

$$g(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

Limitele unor funcții elementare

La fel ca și în cazul șirurilor reale, nu există metode generale pentru calculul limitelor funcțiilor reale în anumite puncte de acumulare. Dar aceste se pot – în multe cazuri – determina folosind operații cu limite și compunerea funcțiilor. Există însă o serie de limite (ale unor funcții) elementare care trebuie cunoscute, tocmai spre a putea determina limitele unor funcții mai complexe. Se va putea observa, până la un punct, similitudinea cu limitele unor șiruri elementare în cazul când limita se consideră în $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$.

LFE-1. Funcția putere (pozitivă) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ($x > 0$, $\alpha > 0$): $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$;

LFE-2. Funcția putere negativă $f(x) = x^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}_-^*$ ($x > 0$, $\beta < 0$): $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\beta = 0$;

Această limită se obține din precedenta prin inversarea funcției și a limitei.

LFE-3. Funcții raționale

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ cu } P, Q \in \text{POL}_{\mathbb{R}}, \text{ grad } P = p, \text{ grad } Q = q :$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } p < q, \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{dacă } p = q, \\ \pm \infty & \text{dacă } p > q \end{cases}$$

$$\text{unde } \begin{cases} P(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_{p-1} x + a_p, \\ Q(x) = b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_{q-1} x + b_q \end{cases} \& a_0 b_0 \neq 0.$$

În al treilea caz (al limitei infinite), semnul depinde de semnul raportului a_0 / b_0 .

LFE-4. Funcții iraționale (cu radicali) :

$$(i) \quad f(x) = \sqrt[n]{x} \underset{\text{not}}{\iff} f(x) = x^{1/n} \text{ cu } x > 0 : \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{\sqrt[m]{P(x)}}{\sqrt[\ell]{Q(x)}} \text{ unde } P, Q \text{ sunt polinoame de grade } p \& q, \text{ ca în LFE-3.}$$

Limitele unor astfel de funcții depind de relația de mărime între puterile generalizate de la numărător și numitor :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } p/m < q/\ell, \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{dacă } p/m = q/\ell, \\ +\infty & \text{dacă } p/m > q/\ell. \end{cases}$$

Evident, polinoamele de sub radicali trebuie să ia valori pozitive (pentru x suficient de mare), dacă ordinele radicalilor sunt numere pare.

LFE-5. Numărul e (baza funcției *logaritm natural*, $\ln x$) ca limită de funcții :

Există modalități de a defini numărul e ca limită de funcție (funcții). Una se obține generalizând șirul lui e (cu $n \rightarrow x \rightarrow +\infty$), cealaltă este o limită în 0 :

$$(i) \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x : \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e ;$$

$$(ii) \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e .} \quad (4.32)$$

LFE-6. Funcții de tip raport care implică alte funcții elementare :

$$(i) \quad f(x) = \frac{x^\alpha}{b^x}, \alpha > 0 \text{ \& } b > 1 : \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0 ;$$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha}, \alpha > 0 : \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 ;$$

$$(iii) \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) : \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 .$$

LFE-7. Funcții exponențiale și logaritmice :

$$(i) \quad f(x) = a^x, a > 0 : \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{dacă } 0 < a < 1, \\ 1 & \text{dacă } a = 1, \\ +\infty & \text{dacă } a > 1. \end{cases}$$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{a^x - 1}{x}, a > 0 : \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a ;$$

$$(iv) \quad f(x) = x^x, x > 0 : \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty .$$

$$(v) \quad \lim_{x \searrow 0} x^{1/x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = 1 ;$$

$$(vi) \quad \lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty ; \quad (vii) \quad \lim_{x \searrow 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{pentru } a > 1, \\ +\infty & \text{pentru } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Toate aceste limite se obțin din limitele corespunzătoare de șiruri, încadrând variabila x între partea sa întreagă și aceasta majorată cu 1 : $(\forall x \in \mathbb{R}) [x] \leq x < [x] + 1, [x] = \underset{\text{not}}{n} \in \mathbb{N}$.

Alte limite importante se consideră în origine, $0 \in \text{acc } D$. sau în alte puncte de acumulare relevante (care conduc, eventual, la nedeterminări).

LFE-8. Funcții trigonometrice și funcții circulare inverse

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \quad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1 ;$$

$$(iii) \quad \lim_{x \nearrow \pi/2} \text{tg } x = +\infty , \quad \lim_{x \searrow (-\pi/2)} \text{tg } x = -\infty ;$$

$$(iv) \quad \lim_{x \searrow 0} \text{ctg } x = +\infty , \quad \lim_{x \nearrow \pi} \text{ctg } x = -\infty ;$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arctg } x = \pi/2 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arctg } x = -\pi/2 ;$$

$$(vi) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arcctg } x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arcctg } x = \pi .$$

Aplicații pentru seminar, teste semestriale și HOMEWORK

LF.1

Să se calculeze limitele următoare :

- ❶ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \quad (n, m \in \mathbb{N}) ;$
- ❷ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - n(x - 1)}{(x - 1)^2} \quad (n \in \mathbb{N}) ;$
- ❸ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1} ;$
- ❹ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^3 - 3x} + 1}{x\sqrt{x} + 2} ;$
- ❺ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[5]{x^5 + x^4 + 1} - x \right) ;$
- ❻ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} ;$
- ❼ $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos x}{1 + \cos x} ;$
- ❽ $\lim_{x \nearrow \pi/2} (\operatorname{tg} x - 1)(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}) ;$
- ❾ $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - x \right) ;$
- ❿ $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{\sin x}} .$

Sugestii pentru rezolvări, răspunsuri.

- ❶ Este o nedeterminare de forma $(0/0)$; se folosește o identitate care transformă fiecare din cele două diferențe în produs ; după simplificare, se obține imediat limita unei funcții raționale ($\ell = n/m$).
- ❷ Exercițiul este similar cu precedentul; prin rescrierea numărătorului vor fi posibile două simplificări care ridică nedeterminarea, $\ell = n(n-1)/2$.
- ❸ Se poate scrie $-2 = -1 - 1$, fiecare din aceștia se grupează cu câte unul din radicali și se obține posibilitatea a două simplificări ; atenție la diferența de cuburi / pătrate. Limita

este $\ell = 5/6$.

- ④ Numărătorul și numitorul au puteri generalizate egale. $\ell = 2$.
- ⑤ Este o nedeterminare de forma $\infty - \infty$; ea se poate ridica prin amplificarea diferenței cu o fracție având numărătorul = numitorul = o sumă care, înmulțită cu diferența din enunț, produce o diferență de puteri 5. Limita este $\ell = 1/5$.
- ⑥ Este o nedeterminare de forma $(0/0)$; se scrie tangenta cu definiția sa, se scoate în factor $\sin x$ și se ajunge la un produs de 3 limite, una din ele fiind LFE-8 (i). Se va obține $\ell = 1/2$.
- ⑦ Este o nedeterminare de același tip ca precedenta; se scrie $\cos x$ cu $\sin x/2$ (atât la numărător cât și la numitor), se ajunge la posibilitatea unei simplificări ce ridică nedeterminarea și se obține $\ell = 3/4$.
- ⑧ Primul factor se scrie în funcție de $\operatorname{tg} x/2$, se procedează la o simplificare și se obține $\ell = 1$.

⑨ Se scrie primul factor cu $\operatorname{tg} x$, se folosește valoarea tangentei la 45° și se aplică LFE-8 (ii), după factorizarea numitorului; se obține $\ell = 1/2$.

⑩ Se ridică limita la exponențiala de bază e , cu formula

$$\lim_{x \rightarrow 0} [u(x)]^{1/v(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + u(x) - 1]^{1/v(x)} = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x) - 1}{v(x)} \right] = e^k \quad (4.33)$$

unde k este limita din interiorul $[\dots]$ care intervine în (4.33). Această limită (în ansamblu) se obține ca o generalizare a limitei LFE-5 sau (4.32), trecând de la x la $u(x) - 1$ și folosind formula

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)^{g(x)}] = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}. \quad (4.34)$$

Se va obține $\ell = e^2$.

Cei interesați sunt invitați să detalieze calculele la toate cele 10 limite de mai sus și în special la ultima.

Verificarea unor limite prin caracterizări cu vecinătăți

Să se verifice următoarele limite, folosind vecinătăți fundamentale:

- ① $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 3) = 1$;
- ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} = 1$;

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0 ;$$

Limitele unor restricții (complementare), limite laterale.

Dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $D_0 \subseteq D$ iar $x_0 \in \text{acc } D_0 \subseteq \text{acc } D$, atunci se poate considera limita restricției funcției – v. (4.3) – la acest subdomeniu, definită prin :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_0}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_0}} f(x). \quad (4.35)$$

Evident, limita din (4.35) poate să existe sau nu. Dacă limita funcției (nu a restricției) sale există și este $= \ell$ atunci limita oricărei restricții la D_0 cu $x_0 \in \text{acc } D_0$ există și concide cu ℓ .

Un caz particular este acela al unor restricții *complementare*, adică restricții la două subdomenii disjuncte a căror reuniune acoperă întreg domeniul :

$$D_1, D_2 \subseteq D, D_1 \cap D_2 = \emptyset \ \& \ D_1 \cup D_2 = D. \quad (4.36)$$

Dacă $x_0 \in \text{acc } D_1 \cap \text{acc } D_2$ atunci se poate considera limita în acest punct pentru fiecare din cele două restricții. Din nou, dacă limita funcției în acest punct există și este $= \ell$ atunci limita celor două restricții la D_1, D_2 există și concid cu ℓ . Un caz particular de restricții este acela care conduce la limitele laterale. Putem presupune că întreg domeniul este un interval, $D = I$ & $x_0 \in \text{int } I$. Fie

$$I_{\text{st}} = \{x \in I : x < x_0\} \ \& \ I_{\text{dr}} = \{x \in I : x > x_0\}. \quad (4.37)$$

Evident, reuniunea celor două subintervale laterale din (4.37) poate să nu acopere întreg intervalul I dar acest aspect este nesemnificativ : s-a văzut în definiția limitei din (4.19) că punctele din vecinătatea lui $x_0 \in \text{acc } D$ nu pot atinge acest punct. Limitele restricțiilor funcției f la subintervalele din (4.37) se numesc limite laterale : limita la stânga, respectiv limita la dreapta în punctul $x_0 \in \text{acc } D$. Ținând seama de (4.35), aceste limite sunt :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{I_{\text{st}}}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I_{\text{st}}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\text{not } x \nearrow x_0} f(x); \quad (4.38)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{I_{\text{dr}}}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I_{\text{dr}}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\text{not } x \searrow x_0} f(x). \quad (4.39)$$

E 4.3

Cel mai simplu exemplu de funcție cu limite laterale diferite (în origine) este

$$f(x) = \frac{1}{x} : \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty, \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Folosind definiția sau caracterizări, să se arate că limitele următoare nu există

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} ;$

⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \cos x) e^x ;$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x}{x-1}} ;$

⑦ $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\cos x} ;$

⑧ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) : f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{pentru } x < 1, \\ 2-x^3 & \text{pentru } x \geq 1 \end{cases}$

Sugestii pentru rezolvări, răspunsuri.

- ④ Se pot folosi două șiruri convergente la 0, pentru care șirurile valorilor funcției au limite diferite : se poate proceda în aceeași manieră ca în **E 4.3**, ④ . De exemplu, cu șirurile

$$x_n = \frac{2}{(4n-1)\pi} \text{ \& } x_m = \frac{2}{(4m+1)\pi} \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

se va constata că $f(x_n) \rightarrow -\infty$ în timp ce $f(x_m) \rightarrow +\infty$. A se verifica această afirmație.

- ⑤ Trecând la limită, exponențiala crește la $+\infty$ în timp ce $(1 - \cos x)$ oscilează în intervalul $[0, 2]$. Pentru a demonstra riguros inexistența limitei, se pot folosi de asemenea două șiruri : unul pentru care $1 - \cos x = 0$ sau 1 iar celălalt pentru care $1 - \cos x = 2$.

- ⑥ Pentru această limită se pot determina limitele laterale :

$$\lim_{x \nearrow 1} e^{\frac{x}{x-1}} = \dots = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0 ;$$

$$\lim_{x \searrow 1} e^{\frac{x}{x-1}} = \dots = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty .$$

- ⑦ Și pentru această limită trebuie determinate limitele laterale. Cu o notație convențională, se vor găsi $f(\pi/2 - 0) = -\infty$ & $f(\pi/2 + 0) = +\infty$.

- ⑧ Această funcție are o expresie analitică multiplă sau multiformă. Evident, cele două limite laterale din funcții polinomiale se obțin imediat :

$$f(1 - 0) = 0 \text{ \& } f(1 + 0) = 1.$$

Cei interesați sunt invitați să încerce trasarea graficului acestei funcții.

Aplicații pentru seminar, teste semestriale și HOMEWORK (continuare)

LF.2

Să se calculeze limitele următoare :

- ① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x} ;$
- ② $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} ;$
- ③ $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x}, n \in \mathbb{N} ;$
- ④ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}, a > 0 ;$

Pentru funcțiile de mai jos se vor determina limitele laterale în punctul indicat.

- ⑤ $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}, x_0 = 0 ;$
- ⑥ $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}, x_0 = 0 ;$
- ⑦ $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \frac{1}{x-1} & \text{pentru } x < 1, \\ e^{x-1} & \text{pentru } x \geq 1, \end{cases} x_0 = 1 ;$
- ⑧ $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1 - \sin 2x}} ; x_0 = \frac{\pi}{4} .$

Sugestii pentru rezolvări, răspunsuri.

❶ Prin factorizarea numărătorului se obține o limită cunoscută pentru una din funcțiile factor, iar ceilalți factori cu funcții trigonometrice se rescriu trecând în argumentul $x/2$; se va folosi limita (i) din LEF.8. Mai este necesar un mic artificiu pentru a obține $(x/2)^2$ la numitor. Prima factorizare conduce la

$$\frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x} = \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x).$$

Al doilea factor are o limită imediată. Se ajunge la $\ell = 3/2$. A se detalia calculele.

❷ Limita este o nedeterminare de forma $1^{+\infty}$ care, în multe cazuri, conduce la o putere a numărului e . Se poate proceda similar cu modul în care s-a obținut limita din LF.1 - ⑩. Funcția din paranteză se scrie sub forma $1 + u(x)$ cu $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$. $\ell = e^{3/2}$; a se detalia calculele.

❸ Acesta este un caz tipic în care este oportună folosirea “proprietății clește” pentru limite de funcții. Al doilea factor din funcție nu are limită dar el oscilează finit între -1 & 1 . Înmulțind inegalitatea respectivă cu funcția putere se obține

$$-x^n \leq f(x) \leq x^n \text{ de unde - trecând la limită - avem } \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Observație. La înmulțirea cu x^n a inegalității cu sinusul între -1 & 1 ar trebui avut în vedere semnul acestei puteri, care poate fi negativ pentru $x < 0$; dar aceasta este o falsă problemă întrucât se poate lucra cu $|f(x)| \leq |x|^n < \varepsilon \iff \dots$.

❹ Limita se va obține scriind funcția (mai exact numărătorul) ca o sumă de două funcții diferență, care conduc la limite mai abordabile, dar tot nedeterminări de forma $0/0$:

$$f(x) = \frac{x^x - a^a}{x - a} = \frac{x^x - x^a}{x - a} + \frac{x^a - a^a}{x - a}; \quad (4.40)$$

expresia din (4.40) se mai rescrie sub forma

$$f(x) = \frac{x^a(x^{x-a} - 1)}{x - a} + \frac{x^a - a^a}{x - a}; \quad (4.41)$$

Trecând la limită în (4.41) se obține

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a(x^{x-a} - 1)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} = \ell_1 + \ell_2; \quad (4.42)$$

prima limită din (4.42) conține factorul $\lim_{x \rightarrow a} x^a = a^a$. Așadar limita devine, cu substituția

$$y = x - a,$$

$$\ell_1 = a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y + a)^y - 1}{y} = a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y \left(1 + \frac{y}{a}\right)^y - 1}{y} = \quad (4.43)$$

$$= a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a^y - 1) \left(1 + \frac{y}{a}\right)^y + \left(1 + \frac{y}{a}\right)^y - 1}{y} \underset{\text{not}}{=} \ell_{11} + \ell_{12} ; \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \ell_{12} &= a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{y}{a}\right)^y - 1}{y} = a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y \ln(1 + y/a)} - 1}{y} = \\ &= a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y \ln(1 + y/a)} - 1}{y \ln(1 + y/a)} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln(1 + y/a)}{y} = \ln e \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

cu substituția $u = y \ln(1 + y/a)$ & $\lim_{y \rightarrow 0} u(y) = 0$ plus limita din **LFE.7** - (ii).

Rămâne de evaluat prima limită din (4.44) și ℓ_2 .

$$\ell_{11} = a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a^y - 1) \left(1 + \frac{y}{a}\right)^y}{y} = a^a (\ln a) \cdot 1^0 = a^a \ln a. \quad (4.45)$$

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} = a^{a-1} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^a - 1}{y - 1} = a^{a-1} a = a^a. \quad (4.46)$$

În fine,

$$(4.45) \text{ \& } (4.46) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^a (\ln a + 1).}$$

A doua limită din (4.46) se va obține cu o substituție adecvată.

⑤ Aici este implicată limita din **LFE-8** - (i) însă limitele laterale vor fi diferite : $\ell_s = -1$, $\ell_d = 1$. A se verifica.

⑥ Și pentru această funcție limitele laterale în 0 sunt diferite :

$$\ell_s = \frac{1}{1 + e^{1/0^-}} = 1 ; \quad \ell_d = \frac{1}{1 + e^{1/0^+}} = 0.$$

Cei interesați sunt invitați să detalieze calculele și să reprezinte grafic funcția. Vor fi necesare și limitele spre $-\infty$ & $+\infty$.

- ⑦ Se va arăta că limita la stânga nu există în timp ce $\ell_d = 1$.
- ⑧ Se vor găsi limite laterale diferite, $\ell_s = 0$, $\ell_d = 1$. Se va scrie $\tan x = 1 + \tan x - 1$ și se vor obține limite care implică numărul e . A se vedea limita LFE.5 - (ii), (4.32) și modul în care a fost determinată limita din LF.1 - ⑩
-

Comentariu

Limitele unei funcții în anumite puncte din domeniul de definiție sau în anumite puncte de acumulare ale acestuia oferă informații esențiale asupra comportării funcției. Noțiunea de limită este esențial implicată și în definirea continuității punctuale, care va face obiectul secțiunii următoare. Un studiu complet al variației unei funcții pe domeniul său de definiție necesită – în general – și utilizarea derivatei sau derivatelor sale, care urmează într-un alt capitol. În multe cazuri, această variație poate fi mai explicit descrisă prin trasarea graficului funcției. Studenții interesați pot încerca trasarea graficelor unor funcții care au intervenit în aplicațiile cu limite din această secțiune.
