8. Functii reale de mai multe variabile

Succinte preliminarii teoretice (+ exemple)

O funcţie cu valori reale, definită pe o submulţime din $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{l} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad\ \cap| \\ \quad\ \mathbb{R}^n \end{array} \tag{8.1}$$

este o funcţie reală de n variabile reale. Argumentul funcţiei este un vector X din spaţiul $\mathbb{R}^n$, deci este de forma $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dacă notăm cu y valoarea funcţiei într-un astfel de argument (sau punct), vom putea scrie

$$y = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,. \tag{8.2}$$

Domeniul de definiţie D care intervine în (8.1) este – în general – un domeniu spaţial : de exemplu, poate fi o (hiper)sferă, o (hiper)prismă sau un domeniu nemărginit, de exemplu un hipercon precum cel al argumentelor cu toate componentele pozitive :

$$D = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : (\forall\ i \in \overline{1,n})\ x_i \geq 0\}\,. \tag{8.3}$$

Cele mai multe aplicaţii care implică funcţii de mai multe variabile se consideră pentru 2 sau 3 variabile, adică pentru funcţii definite în spaţiul real 2D $\mathbb{R}^2$, respectiv în spaţiul 3D $\mathbb{R}^3$. Pentru astfel de funcţii se renunţă de multe ori la indexarea componentelor vectorului-argument şi se folosesc variabilele $x\,, y$ sau $x\,, y\,, z$. Valoarea unei astfel de funcţii se va putea nota – de exemplu – $u = f(x, y)$, respectiv $v = f(x, y, z)$.

În cazul acestor spaţii de dimensiuni mici, un domeniu inclus în $\mathbb{R}^2$ va putea fi interpretat geometric drept un domeniu (din) plan ; de exemplu un disc (deschis sau închis), un dreptunghi (de asemenea cu sau fără frontieră), un triunghi sau un domeniu nemărginit cum ar fi primul cadran al reperului $(O\,;\,x\,,\,y) : (x \geq 0) \times (y \geq 0)$. Un domeniu inclus în $\mathbb{R}^3$ va putea fi şi el interpretat geometric drept un domeniu (din) spaţiul 3-dimensional sau un solid, mărginit sau nu ; de exemplu o sferă (deschisă sau închisă), o prismă(de asemenea cu sau fără frontieră), un tetraedru sau un domeniu nemărginit cum ar fi primul octant al reperului $(O\,;\,x\,,\,y,\,z) : (x \geq 0) \times (y \geq 0) \times (z \geq 0)$. Acest din urmă domeniu este un con nemărginit, având drept feţe cele trei cadrane pozitive ale planelor de coordonate $(x\,O\,y)$, $(y\,O\,z)$, $(x\,O\,z)$.

Pentru punctele din spaţiul multidimensional se pot considera *vecinătăţi*. Fără a intra în detalii de TOPOLOGIE, o vecinătate a unui punct $M_0 \in \mathbb{R}^n$ este orice mulţime din spaţiul respectiv care conţine o *sferă deschisă* centrată în acest punct. O astfel de sferă se defineşte analitic cu ajutorul noţiunii de *normă*, cunoscută din ALGEBRA LINIARĂ. Cel mai frecvent se foloseşte *norma euclidiană uzuală* sau *norma sferică* :

$$(\forall\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)\ \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ . \tag{8.4}$$

Norma permite definirea noţiunii de *distanţă* între doi vectori sau între două puncte :

$$(\forall\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n) \tag{8.5}$$

$$d(X, Y) \underset{\text{def}}{=} \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ . \tag{8.6}$$

Argumentele unei funcţii de 2 sau 3 variabile se mai pot nota drept puncte de forma M sau P, având în vedere isomorfismul dintre spaţiul $\mathbb{R}^2$ şi plan, respectiv dintre spaţiul $\mathbb{R}^3$ şi spaţiul 3D, ambele raportate la câte un sistem cartesian de coordonate (ortonormate).

O *sferă deschisă, centrată în punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, se va nota şi defini prin

$$S(M_0, r) = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d(M_0, M) < r\}\ . \tag{8.7}$$

Conform cu definiţia distanţei euclidiene din (8.6), adaptată la cazul 3-dimensional, coordonatele punctelor dintr-o asemenea sferă vor verifica inegalitatea

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2. \tag{8.8}$$

Renunţând la a treia coordonată z, respectiv z_0, în (8.8) se va obţine caracterizarea analitică a unui *disc deschis, centrat în punctul* $M_0(x_0, y_0)$ din plan.

Vecinătăţi ale punctelor din $\mathbb{R}^n$**.** O vecinătate a punctului $M_0 \in \mathbb{R}^n$ este (aşa cum s-a menţionat mai sus) orice mulţime care conţine o sferă deschisă, centrată în acest punct. Vom nota şi vom defini, aşadar, o vecinătate precum urmează :

$$U_{M_0} \underset{\text{def}}{=} V \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ (\exists\ r > 0)\ S(M_0, r) \subseteq V. \tag{8.9}$$

Vom putea nota cu $\mathcal{V}(M_0)$ mulţimea vecinătăţilor punctului respectiv. Ca şi în cazul funcţiilor reale de o singură variabilă reală, în toate definiţiile, rezultatele (propoziţii, teoreme etc.) şi aplicaţiile în care intervine noţiunea de vecinătate se vor putea utiliza – fără a restrânge generalitatea – vecinătăţi fundamentale, deci sfere (sau discuri) deschise. Pentru puncte în care urmează a se defini noţiunea de limită vom considera vecinătăţi (fundamentale) de rază δ ; în cazurile $n = 3 \mid n = 2$, acestea vor fi caracterizate analitic prin

$$U_{M_0} = S(M_0, \delta) = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d(M_0, M) < \delta\} ; \tag{8.10}$$

$$U_{M_0} = D(M_0, \delta) = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(M_0, M) < \delta\} . \tag{8.11}$$

În (8.11), $D(M_0, \delta)$ notează discul deschis de rază δ, centrat în $M_0 \in \mathbb{R}^2$.

O vecinătate punctată a punctului $M_0 \in \mathbb{R}^n$ este o vecinătate oarecare a acestui punct din care se elimină însuşi punctul :

$$\dot{U}_{M_0} \underset{\text{def}}{=} U_{M_0} \setminus \{M_0\} . \tag{8.12}$$

Considerând vecinătăţi fundamentale, deci sfere deschise din spaţiul $\mathbb{R}^3$ şi ţinând seama de caracterizarea analitică (8.8) a sferelor deschise, deducem că o astfel de vecinătate (sferă deschisă şi punctată) va fi caracterizată prin

$$\begin{aligned} \dot{U}_{M_0} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2\} . \end{aligned} \tag{8.13}$$

Caracterizarea pentru cazul spaţiului $\mathbb{R}^2$ este similară şi se obţine din (8.13) eliminând a treia coordonată.

Puncte de acumulare, puncte aderente, puncte izolate, puncte interioare. Şi aceste tipuri de puncte au fost întâlnite în (Şiruri reale) şi (Limite de funcţii).

Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime de puncte, punctul $M \in \mathbb{R}^n$ este un *punct de acumulare* pentru această mulţime A dacă orice vecinătate punctată a lui $M \in \mathbb{R}^n$ are cel puţin un punct comun cu mulţimea A. Caracterizarea formală este :

$$M \in \operatorname{acc} A \iff (\forall\ \dot{U}_M)\ \dot{U}_M \cap A \neq \varnothing . \tag{8.14}$$

Punctul $M \in \mathbb{R}^n$ este un *punct aderent* pentru această mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă orice vecinătate a lui M are cel puţin un punct comun cu mulţimea A. Caracterizarea formală este :

$$M \in \operatorname{adh} A \iff (\forall\ U_M)\ U_M \cap A \neq \varnothing . \tag{8.15}$$

Rezultă imediat, din aceste două definiţii şi caracterizări, că orice punct de acumulare este şi punct aderent dar nu şi invers. Relaţia între cele două mulţimi este deci

$$\boxed{\operatorname{acc} A \subseteq \operatorname{adh} A .} \tag{8.16}$$

Un punct $P \in A$ este un *punct interior* al acestei mulţimi dacă el îi aparţine împreună cu o întreagă vecinătate (suficient de mică). Formal,

$$P \in \operatorname{int} A \iff (\exists\ U_P)\ U_P \subseteq A . \tag{8.17}$$

Punctul $M \in \mathbb{R}^n$ este un *punct exterior* pentru o mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă el este punct interior pentru complementara ei în raport cu întreg spaţiul :

$$M \in \operatorname{ext} A \iff M \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A). \tag{8.18}$$

O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ poate avea şi *puncte izolate*, definite prin

$$Q \in \operatorname{isol} A \iff Q \in (A \setminus \operatorname{int} A). \tag{8.19}$$

În fine, *punctele frontieră* ale unei mulţimi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se definesc drept punctele din $\mathbb{R}^n$ care nu aparţin nici interiorului şi nici exteriorului mulţimii ; mulţimea punctelor frontieră se notează şi se defineşte prin

$$N \in \partial A \iff N \in \mathbb{R}^n \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A). \tag{8.20}$$

Desigur, există şi alte definiţii echivalente ale diverselor tipuri definite prin (8.14-20). De exemplu, un punct izolat al unei mulţimi este un punct al acesteia care admite o vecinătate suficient de mică care nu mai are nici un alt punct comun cu mulţimea :

$$Q \in \operatorname{isol} A \iff (\exists\ U_Q)\ U_Q \cap A = \{Q\}.$$

Limite şi continuitate punctuală. Limita unei funcţii de mai multe variabile poate fi considerată *numai într-un punct de acumulare al domeniului său de definiţie*, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Limita se defineşte cu ajutorul vecinătăţilor : la nivel descriptiv, limita funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$ în punctul $M_0 \in \operatorname{acc} D$ este ℓ dacă şi numai dacă oricărei vecinătăţi a lui ℓ îi corespunde o vecinătate suficient de mică a lui M_0 astfel încât toate valorile funcţiei în puncte din vecinătatea lui M_0 punctată cad în vecinătatea arbitrară a lui ℓ. Definiţia formală, împreună cu notaţia specifică, sunt :

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = \ell \iff [(\forall\ V_\ell)(\exists\ \dot{U}_{M_0})\ M \in \dot{U}_{M_0} \cap D \Rightarrow f(M) \in V_\ell].} \tag{8.21}$$

Ca şi în cazul funcţiilor reale de o variabilă reală, în definiţia din (8.21) vecinătatea punctului de acumulare depinde de vecinătatea arbitrară a limitei. Această dependenţ ă este mai greu de evidenţiat formal dacă se operează cu vecinătăţi arbitrare, dar ea se poate consemna imediat ce se trece de la astfel de vecinătăţi generale la vecinătăţi fundamentale: (hiper)sfere deschise pentru punctul de acumulare, respectiv intervale simetrice centrate în ℓ pentru limită :

$$(8.21) \iff \boxed{(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon)(\forall\ M \in D)\ 0 < d(M_0, M) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(M) - \ell| < \varepsilon.} \tag{8.22}$$

Caracterizarea cu vecinătăţi fundamentale din (8.22) este doar o generalizare a caracterizării respective de la funcţiile de o variabilă reală, (Limite de funcţii). Diferenţa intervine la scrierea apartenenţei punctului M la vecinătatea punctată a punctului de acumulare, pentru care am folosit noţiunea de distanţă cu notaţia specifică întrucât norma sferică este specifică, mai curând, pentru vectorii din $\mathbb{R}^n$. Cunoscută fiind corespondenţa biunivocă între punctele M din din spaţiul 3D şi vectorii coordonatelor acestora, $M(X) \leftrightarrow X \in \mathbb{R}^n$, echivalenţa din (8.22) se mai poate scrie sub forma

$$(8.21) \iff \boxed{(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon)(\forall\ X \in D)\ 0 < \|X - X_0\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - \ell| < \varepsilon.} \tag{8.23}$$

Pentru limita unei funcţii definite pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{R}^2$, caracterizările de mai sus se vor adapta conform cu notaţiile din (8.10-11) şi (8.13). Astfel, pentru $D \subseteq \mathbb{R}^3$ & $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{acc} D$,

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \ell \iff (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon)(\forall\ M(x,y,z) \in D)$$

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y,z) - \ell| < \varepsilon. \tag{8.24}$$

Evident, acestă caracterizare din (8.24) se va adapta, în cazul bidimensional, prin renunţarea la cea de a treia coordonată.

Exemple - Aplicaţii. Aplicaţiile cu funcţii de mai multe variabile pot fi de mai multe tipuri. Cele mai simple pleacă de la expresia analitică a unei funcţii, pentru care se cere determinarea domeniului maxim de definiţie.

Domenii de definiţie.

Ex. 8.1 $\quad f(x,y,z) = \ln(x + y + z - 1).$ (8.25)

Este evident că funcţia din (8.25) va avea domeniul impus de condiţia ca argumentul logaritmului să fie strict pozitiv :

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z - 1 > 0\}. \tag{8.26}$$

Se poate afirma că, din punct de vedere geometric, domeniul din (8.26) reprezintă un semispaţiu şi anume cel opus originii, în raport cu planul care taie pe cele trei axe de coordonate segmente de lungime $= 1$, în sensul pozitiv al semiaxelor respective. Mai exact, acest plan trece prin punctele $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ şi are ecuaţia

$$(ABC) : x + y + z - 1 = 0. \qquad \square$$

Ex. 8.2 $\quad f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}.$ (8.27)

Funcţia din (8.25) va avea domeniul impus de condiţia ca funcţiile pătratice de sub cei doi radicali să ia valori nenegative :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4 \ge 0\ \&\ 4 - y^2 \ge 0\}. \tag{8.28}$$

Din punct de vedere geometric, domeniul din (8.28) reprezintă două benzi semiinfinite orizontale, determinate (pe verticală) de $-2 \le y \le 2$ iar pe orizontală de prima inegalitate din (8.28) care este echivalentă cu $x \le -2 \vee x \ge 2$. Domeniul de definitie al acestei funcţii poate fi scris ca un produs cartesian de intervale :

$$D = [(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)] \times [-2, 2]. \qquad \square$$

Ex. 8.3 $$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}. \tag{8.29}$$

Domeniul maxim de definiţie al acestei funcţii rezultă din inegalitatea

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 \ge 0 \Rightarrow D = \overline{S}(O, 1),$$

adică domeniul este sfera (sau bila) închisă de rază $= 1$, centrată în origine. Pentru această funcţie se poate găsi uşor şi codomeniul sau mulţimea valorilor observând că, pentru orice valori ale celor trei variabile, $x^2 + y^2 + z^2 \ge 0$. Aşadar,

$$f(D) \underset{\text{not}}{=} \operatorname{Im} f = [0, 1]. \qquad \square$$

Limite de funcţii definite în $\mathbb{R}^n$.

Ex. 8.4 Să se verifice, pe baza definiţiei / caracterizării (8.21-24), limitele ce urmează.

(i) $$\lim_{(x,y) \to (2,3)} (xy + 2) = 8\,; \tag{8.30}$$

(ii) $$\lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}. \tag{8.31}$$

(iii) $$\lim_{(x,y) \to (1,+\infty)} \frac{2 - x}{y} = 0.$$

(i) Se impune condiţia ca distanţa dintre valoarea curentă a funcţiei şi $\ell = 8$ să fie mai mică decât un $\varepsilon > 0$, arbitrar (oricât de mic).

$$|xy + 2 - 8| = |xy - 6| = |xy - 2y + 2y - 6| \le$$
$$\le |xy - 2y| + |2y - 6| = |y| \cdot |x - 2| + 2|y - 3|. \tag{8.32}$$

Având în vedere ultimul membru al relaţiilor (8.32), se va putea alege un $\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon$ convenabil, care să asigure verificarea inegalităţii echivalente cu limita din (8.30). Întrucât a doua variabilă $y \to 3$, vom impune ca raza $\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon$ a vecinătăţii punctului $(2, 3)$ să fie (de exemplu) cel mult egală cu 1, deci $\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon \le 1$. Aceasta va implica

$$|y - 3| \le \|(x, y) - (2, 3)\| < \delta_\varepsilon \le 1 \Rightarrow 2 < y < 4 \Rightarrow |y| < 4. \tag{8.33}$$

Să observăm că prima inegalitate din (8.33) rezultă din dubla inegalitate a normei circulare,

$$|u|,|v| \le \|(u,v)\| \le |u| + |v| . \tag{8.34}$$

Din (8,32) & (8.33) avem

$$|xy + 2 - 8| \le |y|\cdot|x-2| + 2|y-3| < 4|x-2| + 2|y-3| . \tag{8.35}$$

Având iar şi în vedere inegalitatea normei (8.34), vom putea alege – de exemplu – raza

$$\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon \le \frac{\varepsilon}{12} . \tag{8.36}$$

Din (8.35) & (8.36) va rezulta

$$|xy + 2 - 8| < 4\frac{\varepsilon}{12} + 2\frac{\varepsilon}{12} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{8.37}$$

dacă

$$\|(x,y) - (2,3)\| < \frac{\varepsilon}{12} \ \& \ \|(x,y) - (2,3)\| < 1 . \tag{8.38}$$

În fine, din (8.37) & (8.38) rezultă că

$$0 < \|(x,y) - (2,3)\| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{12}, 1\right\} = \delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - 8| = |xy - 6| < \varepsilon , \tag{8.39}$$

ceea ce verifică limita din enunţ.

Să încheiem acest exemplu cu două

Observaţii. 1) Alegerea majorantului din (8.36) pentru $\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon$ nu era unica posibilă ; existau o infinitate de alte alegeri la fel de acceptabile, dar am luat această fracţie cu numitorul 12 spre a se produce unele simplificări, având în vedere coeficienţii din ultimul membru al inegalităţii (8.35). O alegere la fel de acceptabilă ar fi fost

$$\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon \le \frac{\varepsilon}{8} \Rightarrow \dots \Rightarrow |f(x,y) - 8| = |xy - 6| < \tfrac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon .$$

2) În obţinerea inegalităţilor (8.35) & (8.37) a intervenit inegalitatea (8.33), a cărei deducere a implicat şi valoarea 3 din $(x,y) \to (2,3) \Rightarrow y \to 3$. Aşadar, este perfect corect (şi chiar necesar) să constatăm că raza $\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon$ din (8.39) nu depinde numai de ε ci şi de punctul $M_0(2,3)$. Deci, în astfel de cazuri ar trebui să notăm $\delta(\varepsilon, M_0) = \delta_\varepsilon$. □

(ii) Vom proceda similar pentru funcţia din (8.31), ca să verificăm că $\ell = 1/2$.

$$|f(x,y) - \ell| = \left|\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|2x - y|}{2|y|} = \frac{|2x - 2 + 2 - y|}{2|y|} \le$$

$$\leq \frac{2\,|x-1| + |2-y|}{2\,|y|}\,. \tag{8.40}$$

Alegând, la fel ca în cazul funcţiei precedente, o barieră pentru $\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon$, de exemplu aceeaşi valoare 1, deducem (similar cu inegalităţile (8.35)) că

$$|2-y| \leq \|(x,y)-(1,2)\| < \delta_\varepsilon \leq 1 \;\Rightarrow\; 1 < y < 3 \;\Rightarrow\; |y| > 1\,. \tag{8.41}$$

La numărător, variaţia absolută a fiecărei variabile se va majora cu câte un $\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon$, aplicând din nou inegalitatea din stânga pentru normă, adică (8.34) ; astfel obţinem, pentru fracţia din (8.40) şi minorând numitorul conform cu (8.41), majorarea

$$\frac{2\,|x-1| + |2-y|}{2\,|y|} < \frac{3\delta_\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \text{ pentru } \delta_\varepsilon \leq \tfrac{2}{3}\,\varepsilon. \tag{8.42}$$

Având în vedere şi bariera 1 impusă pentru $\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon$, obţinem caracterizarea limitei din enunţ :

$$0 < \|(x,y)-(1,2)\| < \min\left\{\frac{2}{3}\,\varepsilon\,,1\right\} = \delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x,y) - \ell| = \left|\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon. \tag{8.43}$$

Şi în cazul acestei limite sunt valabile observaţiile de la sfârşitul exemplului precedent, deci raza vecitătăţii punctului de acumulare ar trebui scrisă $\delta(\varepsilon, M_0) = \delta_\varepsilon$ cu $M_0(1\,,2)$.

Să mai observăm că – în cazul *acestei* limite, alegerea barierei pentru $\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon$ nu este chiar arbitrară : lăsând raza vecitătăţii punctului de acumulare să atingă valoarea 1 sau chiar una mai mare, punctele din vecinătatea disc deschis centrat în $M_0(1\,,2)$ ar putea ajunge în vecinătatea axei (Ox) pe care funcţia din (8.31) nu este definită, zonă în care funcţia poate lua valori oricât de mari.

(*iii*) Această limită diferă de precedentele două prin faptul că punctul de acumulare se află *la distanţă infinită*. În consecinţă, pentru acest punct se va căuta o vecinătate de o formă specifică, de exemplu $(1-\delta\,, 1+\delta) \times (\alpha\,, +\infty)$. Va trebui deci să verificăm că

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon)(\exists\ \alpha(\varepsilon) = \alpha_\varepsilon)\,|x-1| < \delta_\varepsilon \ \&\ y > \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; \left|\frac{2-x}{y}\right| < \varepsilon\,. \tag{8.44}$$

Vom putea alege, de exemplu,

$$\delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon \leq 1 \;\Rightarrow\; |x-1| < 1 \;\Rightarrow\; 0 < x < 2 \;\Rightarrow\; |2-x| < 2\,; \tag{8.45}$$

lăsând variabila y să ia valori suficient de mari vom avea $y > \alpha$ cu $\alpha > 0$, această ultimă inegalitate neconstituind o restrângere a generalităţii. Din (8.45) şi inegalitatea pentru y urmează că

$$|x-1| < \delta_\varepsilon \le 1 \ \& \ y > \alpha > 0 \Rightarrow \left|\frac{2-x}{y}\right| = \frac{|2-x|}{y} < \frac{2}{\alpha} < \varepsilon \ \text{ pentru } \ \alpha > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Deci caracterizarea din (8.44) este verificată pentru orice $\delta_\varepsilon \le 1 \ \& \ \alpha(\varepsilon) = \alpha_\varepsilon = 2/\varepsilon.$

□

Cazuri de inexistenţă a limitei.

Pentru funcţiile de mai multe variabile, inexistenţa limitei într-un punct $M_0 \in \operatorname{acc} D$ se poate demonstra în mai multe moduri. Cea mai generală modalitate constă în găsirea a (cel puţin) două restricţii ale funcţiei – eventual complementare – care să-l admită pe M_0 drept punct de acumulare comun, astfel încât limita funcţiei pe una dintre restricţii să fie diferită de limita pe cealaltă restricţie. Formal, se pot căuta două subdomenii,

$$D_1, D_2 \subset D, \ D_1 \cap D_2 = \varnothing, \ M_0 \in (\operatorname{acc} D_1 \cap \operatorname{acc} D_2) \tag{8.46}$$

astfel încât

$$\lim_{M \to M_0} f\Big|_{D_1}(M) = \ell_1, \ \lim_{M \to M_0} f\Big|_{D_2}(M) = \ell_2 \ \text{ dar } \ \ell_1 \ne \ell_2. \tag{8.47}$$

În cazul în care funcţia este definită pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{R}^2$, se poate folosi şi *metoda direcţiilor variabile*. Practic, această metodă este tot una bazată pe conceptul de restricţie, dar subdomeniul pe care se consideră restricţia este o *dreaptă variabilă* care trece prin M_0 şi care depinde de un parametru exemplu panta sa m în plan, respectiv de 3 sau 2 parametri în spaţiu. Dacă valoarea (sau expresia) funcţiei în punctele de pe dreapta respectivă depinde de valorile acestui parametru (acestor parametri), rezultă că funcţia nu are limită în punctul considerat. Exemplele ce urmează ilustrează această metodă.

De asemenea, se pot utiliza *limitele parţiale* ale unei funcţii într-un punct din domeniul de definiţie sau într-un punct de acumulare al lui D.

Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^2 \ \& \ M_0(x_0, y_0) \in \operatorname{acc} D$, se pot considera funcţiile de câte o singură variabilă

$$\varphi(x) = f(x, y_0) \ \& \ \psi(y) = f(x_0, y). \tag{8.48}$$

Aceste *funcţii parţiale* sunt asociate funcţiei f într-un anumit punct M_0. Imediat ce se schimbă punctul se vor schimba şi funcţiile parţiale. Se poate constata cu uşurinţă că aceste două funcţii parţiale sunt restricţiile funcţiei f la două drepte paralele cu axele de cordonate, de ecuaţii $y = y_0 \ \& \ x = x_0$, respectiv. Pentru funcţiile de trei variabile şi un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{acc} D$ se vor putea obţine, în principiu, trei funcţii parţiale fixând două coordonatele ale punctului curent M la coordonatele respective ale punctului M_0, a treia coordonată rămânând liberă. De exemplu, prima funcţie parţială ar putea fi

$$\varphi(x) = f(x, y_0, z_0)$$

şi similar pentru celelalte două. Dacă pentru cel puţin două funcţii parţiale limitele parţiale în punctul M_0 diferă, atunci funcţia considerată nu are limită în punctul respectiv.

În fine, pentru a demonstra inexistenţa limitei într-un anumit punct M_0 se poate folosi şi metoda şirurilor, întâlnită la funcţiile de o variabilă care nu aveau limită într-un punct sau la cele neuniform continue. Mai exact, se pot considera două şiruri de punte din domeniul de definiţie,

$$M_n,\, M_p \in D \text{ cu } \lim_{n \to \infty} M_n = \lim_{p \to \infty} M_p = M_0 \tag{8.49}$$

dar pentru care

$$\lim_{n \to \infty} f(M_n) \neq \lim_{p \to \infty} f(M_p)\,. \tag{8.50}$$

Conform caracterizării limitelor de funcţii cu ajutorul şirurilor, care este valabilă şi pentru funcţii de mai multe variabile, inegalitatea din (8.50) în condiţiile convergenţelor din (8.49) demonstrează că limita funcţiei în punctul M_0 nu există. Un exemplu care urmează va ilustra această metodă.

Ex. 8.5 Să se arate că limitele de mai jos nu există.

$$(i) \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x+y}{x-y},\; x - y \neq 0\,; \tag{8.51}$$

$$(ii) \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,. \tag{8.52}$$

$$(iii) \qquad \lim_{(x,y) \to (2,1)} \frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2}\,. \tag{8.53}$$

(i) Inexistenţa acestei limite rezultă imediat dacă se consideră cele două funcţii parţiale în origine, care sunt ambele constante dar cu valori diferite :

$$\varphi(x) = f(x\,,0) = \frac{x}{x} = 1 \;\;\&\;\; \psi(y) = f(0\,,y) = \frac{y}{-y} = -1\,.$$

La acelaşi rezultat se ajunge şi cu metode direcţiilor variabile (sau dreptei variable). O dreapta variabilă care trece prin origine are ecuaţia $(d_m): y = mx$. Înlocuind această ordonată în expresia funcţiei din (8.51) găsim

$$f\Big|_{(d_m)}(x) = f(x\,,mx) = \frac{(1+m)x}{(1-m)x} = \frac{1+m}{1-m}\,. \tag{8.54}$$

Aşadar, valoarea restricţiei funcţiei la dreapta variabilă prin origine depinde de panta acesteia dar nu şi de variabila x, şi regăsim astfel concluzia că funcţia nu are limită în origine.

(ii) Funcţiile parţiale asociate acestei funcţii în origine coincid cu cele ale funcţiei precedente, deci limita sa în origine nu există. Şi metoda direcţiilor variabile conduce la aceeaşi concluzie. Restricţia funcţiei la dreapta varabilă $(d_m): y = mx$ este

$$f\Big|_{(d_m)}(x) = f(x, mx) = \frac{(1 - m^2)x^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2},$$

deci similară cu cea din (8.54), în sensul dependenţei de pantă.

(iii) Funcţiile parţiale asociate acestei funcţii în punctul $M_0(2, 1)$ sunt

$$\varphi(x) = f(x, 1) = 0 \ \ \& \ \ \psi(y) = f(2, y) = 0.$$

Din aceste valori egale s-ar putea presupune că funcţia din (8.53) admite limită în origine care – evident – ar fi $= 0$. Dar putem considera o dreaptă varabilă care trece prin punctul M_0, de ecuaţie

$$(d_m): y - 1 = m(x - 2). \tag{8.55}$$

Din (8.53) cu (8.54) se obţine

$$f\big(x, m(x-2)+1\big) = \frac{m(x-2)^2}{(x-2)^2 + m^2(x-2)^2} = \frac{m}{1 + m^2};$$

deci restricţia funcţiei la dreapta variabilă din (8.55) nu depinde de cele două variabile (şi nici măcar de x) dar depinde de parametrul m, ceea ce demonstrează că funcţia din (8.49) nu are limită în punctul $M_0(2, 1)$. □

Pentru funcţia de la punctul (ii) sau (8.52) se poate folosi şi metoda şirurilor, mai sus prezentată. De exemplu, putem alege şirurile de puncte

$$M_n(1/n, 0) \,\&\, M_p(0, 1/p) \text{ cu } \lim_{n \to \infty} M_n = \lim_{p \to \infty} M_p = O(0, 0),$$

pentru care avem valorile funcţiei

$$f(M_n) = \frac{1/n^2}{1/n^2} = 1 \ \ \& \ \ f(M_p) = \frac{1/p^2}{-1/p^2} = -1.$$

Deci s-a dedus şi pe această cale că funcţia din (8.52) nu admite limită în origine.

□

Aplicaţii - Exerciţii cu domenii de definiţie & limite

8.1 - A Să se determine domeniile de definiţie ale funcţiilor de mai jos.

$(i)\ f(x,y) = \sqrt{y \sin x}\ ;$ $(ii)\ f(x,y) = \sqrt{y \sin x}\ ;$

$(iii)\ f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}\ ;$ $(iv)\ f(x,y) = \ln(x^2 + y)\ ;$

$(v)\ f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}\ ;$ $(vi)\ f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}\ .$

Să se reprezinte grafic aceste domenii, în planul raportat la reperul cartesian $(O\,;\,x\,,\,y)$.

Să se determine domeniile de definiţie ale funcţiilor de mai jos.

$(vii)\ f(x,y,z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}\ ;$ $(viii)\ f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\ ;$

$(ix)\ f(x,y) = \ln(xyz)\ ;$ $(x)\ f(x,y) = \ln(-x^2 - y^2 + z^2 - 1)\ .$

8.2 - A Să se verifice limitele de mai jos, folosind definiţia - caracterizarea "$\varepsilon \to \delta_\varepsilon$".

1^0 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} (2x + 3y) = 16\ ;$ **2^0** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,+\infty)} \frac{xy}{y+1} = 5\ ;$

3^0 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(-1,2,0)} (2x + 3y - 2z) = 4\ ;$ **4^0** $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(\pi/2,1,1)} \sin(xyz) = 1\ ;$

5^0 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x}{y-1} = 1\ ;$ **6^0** $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,+\infty,2)} \frac{1}{xyz} = 0\ .$

Sugestii. În cazul limitelor **2^0** & **6^0**, pentru punctul de acumulare situat la distanţă infinită se vor căuta vecinătăţi adecvate : $(5 - \delta\,,5 + \delta) \times (\alpha\,,+\infty)$, respectiv

$(1 - \delta\,,1 + \delta) \times (\alpha\,,+\infty) \times (2 - \delta\,,2 + \delta),$

similar cu modul în care s-a procedat la **Ex. 8.4**, (iii).

În unele din aplicaţiile care urmează se cere şi determinarea *limitelor iterate* ale unor funcţii, de cele mai multe ori în origine. Pentru o funcţie de două variabile $f(x,y)$ definită pe $D \subseteq \mathbb{R}^2$ şi un punct de acumulare $M_0(x_0, y_0) \in \operatorname{acc} D$, se pot considera două limite iterate anume :

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]. \tag{8.56}$$

Dacă limita din interiorul parantezei pătrate, pentru $x \to x_0$, există ea va depinde firesc de cealaltă variabilă, deci va fi o funcţie de y, similară cu funcţia parţială $\psi(y) = f(x_0, y)$ din (8.48). Aşadar are sens şi trecerea la limită pentru $y \to y_0$. Aceste consideraţii sunt evident valabile şi pentru a doua limită iterată din (8.56), dar ordinea trecerii la limită este inversată.

Ex. 8.6 Pentru funcţia

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}, \tag{8.57}$$

limitele iterate în origine sunt

$$\lim_{y \to 0}\left[\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}\right] = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + 1} - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2(\sqrt{y^2 + 1} + 1)}{y^2} =$$

$$= \lim_{y \to 0}(\sqrt{y^2 + 1} + 1) = 2\,; \tag{8.58}$$

$$\lim_{x \to 0}\left[\lim_{y \to 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0}(\sqrt{x^2 + 1} + 1) = 2\,. \tag{8.59}$$

Întrucât limitele din (8.58) & (8.59) coincid, este posibil ca limita în origine a funcţiei să existe şi ea să fie $= 2$. c Cititorul este invitat să verifice această ipoteză utilizând vecinătăţi fundamentale, ca în **Ex. 8.4**. □

Ex. 8.7 Funcţia $f(x, y) = \dfrac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ nu admite limită în origine.

Se poate constata cu uşurinţă că

$$\lim_{y \to 0}\left[\lim_{x \to 0} f(x, y)\right] = 1 \ \text{ iar } \ \lim_{x \to 0}\left[\lim_{y \to 0} f(x, y)\right] = -1, \tag{8.60}$$

deci afirmaţia se susţine. Cele două limite din (8.60) coincid şi cu limitele parţiale în origine. Se mai poate deduce inexistenţa acestei limite şi folosind două şiruri de puncte alese în mod adequat. De exemplu,

$$M_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(M_n) = f(M_n) = -3 \ \& $$
$$Q_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(Q_n) = f(Q_n) = 3 . \tag{8.61}$$

Cititorul va putea verifica faptul că cele două şiruri de puncte din (8.61) converg ambele la origine, folosind vecinătăţi ce implică norma euclidiană uzuală în plan, adică norma circulară. Se mai poate observa că punctele din aceste două şiruri sunt situate pe două parabole care trec prin origine, anume

$$M_n \in (P) : y^2 = x \ \& \ Q_n \in (P') : y^2 = 4x .$$

În funcţie de expresia analitică a lui $f(x, y)$, se pot uneori alege două drumuri curbilinii, nu neapărat drepte (adică rectilinii) (Γ_1) & (Γ_2) care trec prin punctul M_0 astfel încât restricţiile funcţiei la cele drumuri să aibă limite diferite în M_0. Alternativ, se poate găsi o familie de curbe care trec prin M_0 care să depindă de un parametru,

$$(\Gamma_m) : M_0 \in (\Gamma_m) \ \& \ f(\Gamma_m) = G\big(x(m), (y(m)\big). \tag{8.62}$$

Funcţia $f(\Gamma_m) = G\big(x(m), (y(m)\big)$ poate să depindă sau să nu depindă efectiv de parametrul m, dar importantă este limita sa pentru $P_m(x(m), y(m)) \to M_0(x_0 . y_0)$. Dacă aceasta depinde efectiv de parametrul m se va trage concluzia că limita în M_0 nu există ; dacă limita este ℓ, independentă de parametru, atunci limita funcţiei în M_0 *ar putea* să existe şi să fie egală cu ℓ. Oricare din metodele prezentate mai sus pentru a stabili inexistenţa unei limite (sau posibila sa existenţă) se poate eventual - aplica la exerciţiile ce urmază.

8.3 - A Să se studieze existenţa limitelor în origine de mai jos.

1⁰ $f(x,y) = x \sin\frac{1}{y} + y \cos\frac{1}{x}, \ xy \neq 0$;

2⁰ $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2 + 2x - 3y}{x + y}, \ x + y \neq 0$;

3⁰ $f(x,y) = (x + y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}, \ xy \neq 0$;

4⁰ $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, \ (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;

5^0 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$: să se verifice această limită (folosind o majorare) .

6^0 Să se verifice că funcţia

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

are limite parţiale nule în origine, dar limita în origine nu există.

Răspunsuri - sugestii de rezolvare.

1^0 Limitele iterate nu există întrucât $\sin(1/x)$ & $\sin(1/y)$ nu au limite în 0 ; totuşi, limita în $O(0,0)$ există şi este $\ell = 0$, ceea ce se poate verifica printr-o majorare a lui $|f(x,y)|$ pe baza inegalităţii triunghiulare etc. Limitele parţiale nu se pot considera.

2^0 Limitele parţiale sunt 2 & -3, deci limita în origine nu există.

3^0 Este o aplicaţie similară cu prima din acest set ; se arată la fel că $\ell = 0$, dar nici această funcţie nu admite funcţii / limite parţiale şi nici limite iterate.

4^0 Limitele parţiale ca şi cele iterate sunt nule ; ele coincid cu limita funcţiei, ceea ce se poate verifica printr-o majorare a lui $|f(x,y,z)|$ sau prin trecerea în coordonate sferice

$$f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta) = g(\rho,\theta,\varphi) \quad \text{cu} \quad \lim_{\rho\to 0} g(\rho,\theta,\varphi) = 0.$$

5^0 Modalitatea de verificare este sugerată chiar în enunţ : se poate majora numărătorul (deci şi funcţia) prin $+2|x|\cdot|y|$.

6^0 Cititorul va verifica egalitatea

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = 0 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right].$$

Inexistenţa limitei în origine se poate demonstra considerând restricţia funcţiei la familia de drumuri parabolice $(\Gamma_m) : x^2 = my$.

Continuitatea punctuală a funcţiilor de mai multe variabile

Continuitatea unei funcţii $f : D \to \mathbb{R}$ în punctul $X_0 \in \operatorname{acc} D \cap D$ se defineşte ca şi la funcţiile de o singură variabilă reală : $y = f(X)$ este continuă în $M_0 \in \operatorname{acc} D \cap D$ dacă ea admite limită în acest punct iar limita coincide cu valoarea funcţiei :

$$\boxed{\exists \lim_{M \to M_0} f(M) = \ell \ \& \ \ell = f(M_0).} \tag{8.63}$$

Desigur, în locul notaţiei uzuale pentru puncte (inclusiv din spaţiile sau $\mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{R}^2$) care intervine în (6.63), se poate folosi notaţia specifică pentru vectorii din $\mathbb{R}^n$, adică X & X_0. Având în vedere ca noţiunea de limită este esenţială în definirea continuităţii punctuale, definiţiia din (8.63) va putea fi caracterizată în limbajul vecinătăţilor, în particular cu vewcinătăţi fundamentale de raze $\varepsilon \to \delta_\varepsilon$. Ţinând seama de caracterizările (8.22) - (8.23) ale limitei cu astfel de vecinătăţi vom putea scrie că

$$M_0 \in D_{\text{cont}}(f)$$
$$\Updownarrow \tag{8.64}$$
$$\boxed{(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon) = \delta_\varepsilon)(\forall\ M \in D)\ d(M_0, M) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.}$$

Să observăm că, spre deosebire de caracterizarea (8.22) a limitei în punctul M_0, în această caracterizare (8.64) a continuităţii în punctul respectiv nu se mai lucrează cu vecinătăţi punctate, adică nu mai intervine şi inegalitatea $0 < d(M_0, M)$ întrucât

$$d(M_0, M) = 0 \Rightarrow M \equiv M_0 \Rightarrow f(M) - f(M_0) = 0 < \varepsilon. \tag{8.65}$$

Dacă s-ar elimina punctul M_0 din vecinătatea sa de rază δ, deci dacă s-ar menţine inegalitatea $0 < d(M_0, M)$ în caracterizarea (8.64), s-ar putea trage concluzia că o anumită funcţie ar fi continuă în punctul M_0 chiar şi în cazul în care

$$\lim_{M \to M_0} f(M) \neq f(M_0) \Rightarrow M_0 \notin D_{\text{cont}}(f).$$

Dacă se folosesc notaţiile X & X_0 pentru argumentul curent al funcţiei şi pentru punctul în care se consideră continuitatea, se vor înlocui M & M_0 cu X & X_0 în (8.64), respectiv; cu alte cuvinte, se va adapta caracterizarea (8.23) a limitei la caracterizarea continuităţii. În cele mai multe aplicaţii (exerciţii) se lucrează cu argumente de forma $M_0(x_0, y_0)$ & $M(x, y)$ dacă funcţia este definită pe $D \subseteq \mathbb{R}^2$ şi analog pentru $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ca şi în cazul funcţiilor reale de o variabilă reală, continuitatea punctuală se poate extinde la un întreg domeniu – subdomeniu al domeniului de definiţie. În multe cazuri, continuitatea rezultă imediat din expresia analitică a funcţiei ; de exemplu, dacă $f(x, y, z)$ este o funcţie polinomială în cele trei argumente atunci ea va fi continuă pe întreg spaţiul $\mathbb{R}^3$. Aceea şi concluzie va fi valabilă pentru funcţii precum $g(x, y, z) = \sin p(x, y, z)$ unde p este un polinom, sau $h(x, y) = \ln p(x, y)$, $\varphi(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ etc. Aplicaţiile interesante sunt acelea în care se pune problema existenţei limitei şi determinarea acesteia. De exemplu, pentru funcţiile **1⁰** , **2⁰** , **3⁰** , **6⁰** din exerciţiul $\boxed{\textbf{8.3 - A}}$ de mai sus, toate 4 funcţiile vor rămâner *discontinue* în origine indiferent ce valoare li s-ar atribui în acest punct. □

Ex. 8.8 Funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă în origine deoarece

$$(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow |f(x,y)| = \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{(|x|+|y|)(x^2-|x|\cdot|y|+y^2)}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{(|x|+|y|)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x|+|y| < \varepsilon \text{ pentru } \|(x,y)\| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow O \in D_{\text{cont}}(f).$$

□

Pentru unele funcţii, puncte ca originea sau alte puncte M_0 pot fi puncte în care funcţia nu este continuă dar poate fi continuă parţial, în raport cu una sau mai multe dintre coordonatele punctului (sau componentele vectorului) argument.

Ex. 8.9 Cunoscutele funcţii

$$(i) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \& \tag{8.65}$$

$$(ii) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3} & \text{pentru } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{pentru } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \tag{8.66}$$

nu sunt continue în originile celor două spaţii întrucât limitele celor două funcţii în origini nu există. Pentru a verifica această afirmaţie se pot utiliza metode prezentate anterior. De exemplu, pentru funcţia din (i) şi puncte diferite de origine dar situate pe o dreaptă de pantă variabilă care trece prin O, $(d_m): y = mx$, avem

$$f\Big|_{(d_m)}(x) = f(x, mx) = \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}\ ; \tag{8.67}$$

Pentru funcţia din (ii) se poate considera o dreaptă variabilă care trece prin origine de forma interseţiei a două plane şi anume

$$(d_{p,q}): y = px \ \ \& \ \ z = qx,$$

$$f\Big|_{(d_{p,q})}(x) = f(x, px, qx) = \frac{pqx^3}{(1+p^3+q^3)x^3} = \frac{pq}{1+p^3+q^3}. \tag{8.68}$$

Aceste valori ale restricţiilor din (8.67) & (8.68) sunt dependente de direcţia dreptei respective demonstrează inexistenţa limitelor în origine pentru funcţiile din (8.65-66). Însă cele funcţii sunt continue parţial întrucât funcţiile parţiale respective sunt :

$$(i)\quad \varphi(x) = f(x,0) = \frac{x\cdot 0}{x^2} = 0, \qquad \psi(y) = f(0,y) = \frac{0\cdot y}{y^2} = 0\ ;$$

$$(ii)\quad \varphi(x) = f(x,0,0) = \frac{x\cdot 0\cdot 0}{x^2} = 0, \quad \psi(y) = f(0,y,0) = \frac{0\cdot y\cdot 0}{y^2} = 0\ ;$$

$$\eta(z) = f(0,0,z) = \frac{0\cdot 0\cdot z}{z^2} = 0.$$

□

8.4 - A Să se stdieze continuitatea în origine pentru funcţiile de mai jos.

1^0 $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+3y^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0) \end{cases};$$

2^0 $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy} & \text{pentru } xy \neq 0, \\ 0 & \text{pentru } xy = 0\ ; \end{cases}$$

3^0 $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se verifice continuitatea pe spaţiul $\mathbb{R}^2$ a funcţiilor

$$4^0 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{pentru } x^2 + y^2 \le 1\,, \\ 0 & \text{pentru } x^2 + y^2 > 1\,; \end{cases}$$

$$5^0 \qquad f(x,y) = \begin{cases} (1 + xy)^{\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}} & \text{pentru } x > 0 \ \& \ y > 0\,, \\ 1 & \text{pentru } x \le 0 \text{ sau } y \le 0\,; \end{cases}$$

$$6^0 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{pentru } (x,y) \ne (0,0)\,, \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Răspunsuri - sugestii de rezolvare.

1^0 Limita în origine nu există întrucât

$$f\Big|_{(d_m)}(x) = f(x, mx) = \frac{2mx^2}{(1 + 3m^2)x^2} = \frac{2m}{1 + 3m^2}\,.$$

Limitele parţiale există şi sunt ambele nule, deci funcţia este continuă parţial în origine.

2^0 Funcţia admite majorarea absolută

$$|f(x,y)| \le x^2 + y^2 \Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow O \in D_{\text{cont}}(f).$$

3^0 Numărătorul funcţiei se poate rescrie folosind formula $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ de unde

$$(x,y) \ne (0,0) \Rightarrow f(x,y) = \frac{2\sin^2[(x^2 + y^2)/2]}{x^2 + y^2} \le \frac{2\,\dfrac{(x^2 + y^2)^2}{4}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{2}\,,$$

de unde rezultă continuitatea în origine.

4^0 Cele două subdomenii pe care funcţii are expresii analitice diferite (sau specifice) sunt discul închis de rază 1 centrat în origine $\overline{D}(O,1)$, respectiv exteriorul acestuia. Problema continuităţii se pune în punctele de pe frontiera care le separă, deci de pe cercul $C(O,1)$. Se poate nota

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ cu } (x,y) \to (0,0) \iff r \to 0. \tag{8.69}$$

Cu această notaţie,

$$(x,y) \ne (0,0) \Rightarrow f(x,y) = g(r) = \begin{cases} \sqrt{1 - r^2} & \text{pentru } r \le 1\,, \\ 0 & \text{pentru } r > 1\,. \end{cases} \tag{8.70}$$

$$(8.70) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{r \nearrow 1} f(r) = \lim\limits_{r \nearrow 1} \sqrt{1 - r^2} = 0, \\ \lim\limits_{r \searrow 1} f(r) = \lim\limits_{r \searrow 1} 0 = 0 \end{cases}. \tag{8.71}$$

Rezultă din (8.71) că funcţia este continuă şi pe cercul $C(O, 1)$, deci pe întreg planul.

5⁰ Funcţia este evident continuă în primul cadran al planului (xOy). (fără cele două semiaxe) fiind o compunere de funcţii elementare. La fel şi pe celelalte trei cadrane pe care este constantă. Ca şi la funcţia precedentă, problema continuităţii se pune în punctele frontieră de forma $P(x, 0) \in (O, x^+)$, respectiv $Q(0, y) \in (O, y^+)$. Pentru un punct de pe semiaxa absciselor pozitive putem considera abscisa sa (temporar) fixată, deci va trebui să evaluăm limita într-un punct de forma $P(\alpha, 0) = P_\alpha$ cu $\alpha > 0$. Putem nota

$$\lim_{M \to P_\alpha} f(M) \underset{\text{not}}{=} \ell_\alpha = \lim_{(x,y) \to (\alpha, 0)} f(x, y). \tag{8.72}$$

Înlocuind expresia funcţiei, pentru puncte din primul cadran, în (8.72) avem de calculat

$$\lim_{(x,y) \to (\alpha, 0)} (1 + xy)^{\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}} = 1^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = 1 = f((Ox)).$$

Deci limita din (8.72) nici nu depinde efectiv de α şi este egală cu valoarea funcţiei pe frontiera pe care i se schimbă expresia analitică, şi chiar pe întregul domeniu plan complementar primului cadran. Având în vedere simetria funcţiei în cele două variabile, va rezulta şi continuitatea ei în punctele semiaxei ordonatelor pozitive, deci în punctele de forma $Q(0, \beta) \in (O, y^+)$; verificarea acestei afirmaţii rămâne ca exerciţiu pentru cititor.

Să menţionăm că în manualul [Gh. Procopiuc, 2001 - pag. 312], de unde a fost preluată aceasta aplicaţie, funcţia nu este definită pe tot planul (xOy) ci doar pe primul cadran inclusiv cele două semiaxe pozitive, pe care ia valoarea 1. Iar pentru a demonstra continuitatea pe acestaă frontieră se foloseşte o rescriere a funcţiei şi o majorare :

$$x > 0 \ \& \ y > 0 \Rightarrow f(x, y) = (1 + xy)^{\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}} = \left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}. \tag{8.73}$$

Întrucât $[x \to 0 \vee y \to 0] \Rightarrow (1 + xy)^{\frac{1}{xy}} \to e$ iar $\dfrac{xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le \sqrt{xy}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, (8.74)

rezultă că $[x \to 0 \vee y \to 0] \Rightarrow f(x, y) \to e^0 = 1$, ceea ce demonstrează continuitatea funcţiei pe frontiera primului cadran şi deci pe întreg planul. Cititorul este invitat să verifice inegalitatea (8.74).

6⁰ Se va arăta că limita în origine este $= 0$, de unde va rezulta continuitatea pe tot planul (xOy). □

Funcţii de mai multe variabile continue pe domenii, uniforma continuitate,

funcţii lipschitziene.

Ca şi în cazul funcţiilor reale de o variabilă reală, funcţiile de mai multe variabile care sunt continue în fiecare punct $M \in A \subseteq D$ sunt global continue pe mulţimea A.

Şi uniforma continuitate a unei funcţii $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ pe $A \subseteq D$ se defineşte similar cu u-continuitatea pe intervale reale.

Funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ este *uniform continuă pe mulţimea* $A \subseteq D \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\boxed{(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon, A) = \delta_\varepsilon)(\forall\ M', M'' \in A)\ d(M', M'') < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(M') - f(M'')| < \varepsilon.} \tag{8.75}$$

Urmează câteva exemple.

Ex. 8.9 Funcţia

$$f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}, \tag{8.76}$$

(care intervine şi în primul set de exerciţii din această secţiune) este uniform continuă pe orice mulţime $A \subseteq (0, +\infty)^3$ cu excepţia punctelor din vecinătatea originii, deci pe

$$A = (0, +\infty)^3 \setminus S(O, a),\ a > 0. \tag{8.77}$$

Conform cu definiţia (8.75) şi scriind $M'(x', y', z')$ & $M''(x'', y'', z'')$, vom avea

$$|f(M') - f(M'')| = |f(x', y', z') - f(x'', y'', z'')| \underset{(8.76)}{=}$$

$$= |\sqrt{x'} + \sqrt{y'} + \sqrt{z'} - (\sqrt{x''} + \sqrt{y''} + \sqrt{z''})| =$$

$$= |(\sqrt{x'} - \sqrt{x''}) + (\sqrt{y'} - \sqrt{y''}) + (\sqrt{z'} - \sqrt{z''})| \le$$

$$\le |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| + |\sqrt{y'} - \sqrt{y''}| + |\sqrt{z'} - \sqrt{z''})|. \tag{8.78}$$

Condiţia excluderii unei vecinătăţi a originii din (8.77) implică inegalităţile

$$\|(x', y', z')\| \ge a\ \&\ \|(x'', y'', z'')\| \ge a, \tag{8.79}$$

iar

$$(8.79) \Rightarrow\ |x'|, |x''|, |y'|, |y''|, |z'|, |z''| \ge \frac{a}{2} \Rightarrow \tag{8.80}$$

$$|\sqrt{x'}|, |\sqrt{x''}|, |\sqrt{y'}|, |\sqrt{y''}|, |\sqrt{z'}|, |\sqrt{z''}| \ge \sqrt{\frac{a}{2}}. \tag{8.81}$$

Minorare din (8.80) rezultă din faptul că punctele din afara sferei de rază a sunt şi în afara cubului de diametru (diagonala mare) $2\,a$, în particular a cubului mic din primul octant având latura $a/2$.

Suma din penultimul membru al inegalităţii (8.78) se poate majora, ţinând seama şi de (8.81), prin

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| + |\sqrt{y'} - \sqrt{y''}| + |\sqrt{z'} - \sqrt{z''})| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} + \frac{|y' - y''|}{\sqrt{y'} + \sqrt{y''}} + \frac{|z' - z''|}{\sqrt{z'} + \sqrt{z''}} <$$

$$< 3\,\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{2a}}, \tag{8.82}$$

dacă $d(M', M'') = \|(x', y', z') - (x'', y'', z'')\| < \delta_\varepsilon$. (8.83)

Această din urmă implicaţie rezultă din inegalitatea din stânga a normei sferice,

$$|x|,\ |y|,\ |z| \le \|(x, y, z)\|.$$

În fine, din (8.78) & (8.82) – membrii extremi, rezultă implicaţia

$$d(M', M'') = \|(x', y', z') - (x'', y'', z'')\| < \delta_\varepsilon = \frac{\sqrt{2a}}{3}\,\varepsilon \Rightarrow |f(M') - f(M'')| < \varepsilon, \tag{8.84}$$

ceea ce demonstrează uniforma continuitate a funcţiei din enunţ pe domeniul precizat în (8.77). Să mai observăm că majorantul distanţei dintre cele două puncte $M', M'' \in A$ adică δ_ε din (8.84) a fost obţinut ţinând efectiv cont de mulţimea A şi chiar expresia sa reflectă această dependenţă. □

Ex. 8.10 Funcţia $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ este uniform continuă pe domeniul plan $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 2\}. \tag{8.85}$$

Evaluăm diferenţa

$$|f(M') - f(M'')| = |f(x', y') - f(x'', y'')| = |\sin(x'^2 + y'^2) - \sin(x''^2 + y''^2)| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{x'^2 + y'^2 - (x''^2 + y''^2)}{2}\cos\frac{x'^2 + y'^2 + (x''^2 + y''^2)}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{x'^2 + y'^2 - (x''^2 + y''^2)}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x'^2 + y'^2 + (x''^2 + y''^2)}{2}\right| \le$$

$$= 2\left|\sin\frac{x'^2 + y'^2 - (x''^2 + y''^2)}{2}\right| \le 2\,\frac{|x'^2 + y'^2 - (x''^2 + y''^2)|}{2} =$$

$$= \ |x'^2 - x''^2 + y'^2 - y''^2| \le |x'^2 - x''^2| + |y'^2 - y''^2| =$$

$$= |(x' - x'')(x' + x'') + (y' - y'')(y' + y'')| \le$$

$$\le |x' - x''|\cdot|x' + x''| + |y' - y''|\cdot|y' + y''| \le$$

$$\le |x' - x''|\cdot(|x'| + |x''|) + |y' - y''|\cdot(|y'| + |y''|) \le$$

$$\le 4|x' - x''| + 4|y' - y''|. \tag{8.86}$$

În obţinerea majorării (sau majorantei) din (8.86) a intervenit în mod esenţial limitarea la domeniul din (8.85). Având în vedere inegalitatea dreaptă pentru norma circulară din $\mathbb{R}^2$, rezultă din majorarea (8.86) a variaţiei absolute a funcţiei că putem alege

$$\delta(\varepsilon,D) = \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{8} : d(M',M'') < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(M') - f(M'')| < \varepsilon,$$

de unde rezultă uniforma convergenţă a funcţiei din enunţ pe D. □

Observaţii. 1) Dacă, în aceste ultime două exemple, nu am fi limitat doemniul pe care se cerceta uniforma continuitate la cele două domenii indicate, nu s-ar mai fi putut verifica această proprietate pe întreg spaţiu $\mathbb{R}^3$, respectiv pe întreg planul $\mathbb{R}^2$. 2) Domeniul D din (8.84) este un domeniu pătrat de latură $= 2\sqrt{2}$, cele patru laturi fiind câte două paralele cu bisectoarea I-a, respectiv cu bisectoarea a II-a. Ecuaţiile dreptelor suport ale celor 4 laturi sunt

$(AB) : x + y = 2, \quad (BA') : -x + y = 2,$
$(A'B') : x + y = -2, \ (B'A) : x - y = 2.$

Vârfurile acestui domeniu pătratic sunt

$A(2,0), \ A'(-2,0),$
$B(0,2), \ B'(0,-2).$

Domeniul este reprezentat grafic în Fig. 8.1, la dreapta.

□

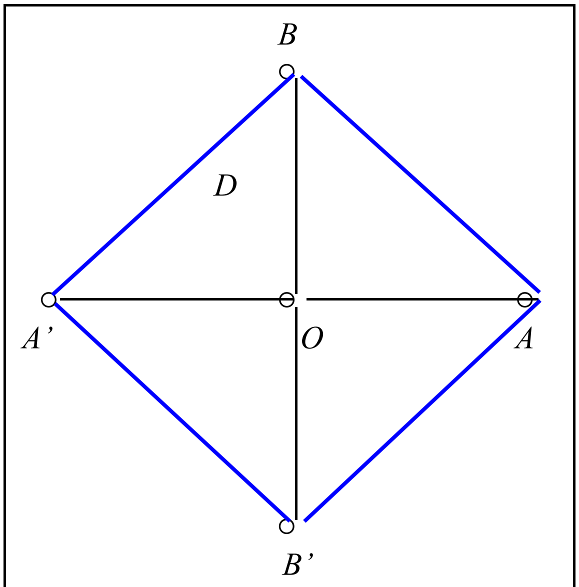

Fig. 8.1 **Domeniul din (8.85)**

Proprietatea lui Lipschitz.

Ca şi în cazul funcţiilor de o variabilă reală, continuitatea uniformă este legată de *Proprietatea lui* ***Lipschitz***. Dacă o funcţie este uniform continuă, nu este necesar ca ea să verifice această proprietate, dar dacă o funcţie este lipschitziană pe o mulţime A atunci ea este şi uniform continuă pe acea mulţime. Pentru o funcţie f definită pe un domeniu din spaţiul real n-dimensional şi cu valori reale, proprietatea lui Lipschitz pe o mulţime A se exprimă formal prin

$$\boxed{(\exists\, L \in \mathbb{R})\ L > 0 : (\forall\ M', M'' \in A)\ \left| f(M') - f(M'') \right| \le L\, d(M', M'').} \qquad (8.87)$$

Constanta L care intervine în relaţia de definiţie (8.87) este *constanta lui Lipschitz*.

În cazul funcţiilor definite pe spaţiile $\mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{R}^2$, distanţa dintre punctele din A se exprimă prin distanţa specifică spaţiilor euclidiene, adică norma diferenţei vectorilor coordonatelor celor două puncte, $M'(x', y', z')$ & $M''(x'', y'', z'')$ şi similar în cazul 2-dimensional (când se renunţă la a treia coordonată). În cazul spaţiului $\mathbb{R}^3$, proprietatea lui Lipschitz din (8.87) devine

$$\boxed{\begin{array}{l}(\exists\, L \in \mathbb{R})\ L > 0 : (\forall\ (x', y', z')\ \&\ (x'', y'', z'') \in A) \\ \quad \left| f(x', y', z') - f(x'', y'', z'') \right| \le L \left\| (x', y', z') - (x'', y'', z'') \right\|.\end{array}} \qquad (8.88)$$

Exemple de funcţii lipschitziene sunt oferite chiar de funcţiile din ultimele două exemple, pentru care se verifica uniforma continuitate. Astfel, pentru funcţia din **Ex. 8.9** proprietatea lui Lipschitz şi însăşi constanta L rezultă din

$$(8.78) \ldots (8.82) \ \Rightarrow\ L = \frac{3}{\sqrt{2a}}.$$

Pentru funcţia din **Ex. 8.10**, proprietatea lui Lipschitz şi constanta L rezultă din

$$(8.86) \quad \Rightarrow\ L = 8.$$

8.5 - A Să se studieze uniforma continuitate pentru funcţiile de mai jos, pe mulţimea A.

1^0 $\quad f(x,y) = \sin(2x + 3y)$ pe $A = \mathbb{R}^2$;

2^0 $\quad f(x,y) = \ln(xy)$, $A = (0,1) \times (0,1)$;

3^0 $\quad f(x,y) = \ln(xy)$, $A = [a,e] \times [a,e]$ cu $1 \le a < e$;

Să se verifice continuitatea uniformă şi să se determine constanta L pentru funcţiile :

4^0 $\quad f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ pe $A = (1,2) \times (1,2)$;

5^0 $\quad f(x,y,z) = x^2 + e^y + y \sin z$ pe $A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$;

6^0 $\quad f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ pe $A = (1,2) \times (1,2)$.

Răspunsuri - sugestii de rezolvare.

1^0 Funcţia este uniform continuă. Se transformă diferenţa de sinusuri în produs.

2^0 Funcţia nu este uniform continuă (din cauza comportării logaritmului în vecinătatea originii. Se pot folosi două şiruri convergente către origine şi oricât de apropiate, de exemplu

$$M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \ \& \ Q_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

3^0 Aceeaşi funcţie devine uniform continuă pe domeniul compact (pătratic) considerat. Se va aplica definiţia (8.88) adaptată la 2 dimensiuni şi la datele din enunţ.

4^0 Se rescrie echivalent diferenţa $|f(x', y') - f(x'', y'')|$ (prin aducere la acela şi numitor) şi se obţin majorări pe baza apartenenţei argumentelor la mulţimea A ; se găseşte $L = 4$.

5^0 Se aplică inegalitatea triunghiulară (cu trei termeni) pentru variaţia absolută a funcţiei obţinându-se o majorare a acesteia cu variaţiile absolute ale celor trei funcţii elementare din expresia sa analitică ; se ţine seama de apartenenţa variabilelor la cubul A. Se găseşte $L = 7$, având în vedere şi valoarea (aproximativă a) numărului e.

6^0 Funcţia este uniform continuă pe pătratul deschis din enunţ ; se procedează în aceeaşi manieră ca la funcţia de la **4^0**.

Derivate parţiale şi diferenţiale pentru funcţii de mai multe variabile

O funcţie cu valori reale, definită pe o submulţime din $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{l} f: D \longrightarrow \mathbb{R}, \ y = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \quad \ \cap| \\ \quad \ \mathbb{R}^n \end{array} \tag{8.89}$$

este *derivabilă parţial în punctul* $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$ *în raport cu variabila* x_i dacă funcţia parţială corespunzătoare acestei variabile şi punctului considerat, adică

$$\varphi_i(x_i) = f(x_1^0, \dots x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0), \tag{8.90}$$

este derivabilă în punctul x_i^0. Aşadar, există în $\mathbb{R}$ limita raportului incrementar corespunzător acestei funcţii şi punctului X_0, limită care este *derivata parţială* a funcţiei în X_0 după variabila x_i şi care se notează ca mai jos :

$$\lim_{x_i \to x_i^0} \frac{\varphi_i(x_i) - \varphi_i(x_i^0)}{x_i - x_i^0} = \varphi_i'(x_i^0) \underset{\text{not}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0). \tag{8.91}$$

Pentru funcţiile de 2 sau 3 variabile definiţia celor două sau trei derivate parţiale este în principiu aceeaşi, dar nu se mai folosesc indici pentru variabile.

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ este punctul în care se consideră derivatele parţiale ale funcţiei $f(x, y, z)$ atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0} ; \tag{8.92}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0} ; \tag{8.93}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0} . \tag{8.94}$$

Definiţiile (8.92 - 94) ale celor trei derivate parţiale (de ordinul întâi) sunt valabile pentru un punct fixat (sau dat) $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Dar derivatele parţiale se pot defini şi determina – de asemenea – într-un punct curent $M(x, y, z)$. Pentru aceasta, variaţiile celor trei argumente se pot nota, respectiv,

$$dx,\ dy,\ dz \quad \text{sau} \quad h,\ k,\ \ell. \tag{8.95}$$

Cu notaţiile din (8.95), definiţiile celor trei derivate parţiale din (8.92 - 94) devin :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h} ; \tag{8.96}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + k, z) - f(x, y, z)}{k} ; \tag{8.97}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{\ell \to 0} \frac{f(x, y, z + \ell) - f(x, y, z)}{\ell} . \tag{8.98}$$

Formulele (8.96 - 98) au nu numai o semnificaţie teoretică ci şi una practică, pentru modul în care se pot determina derivatele parţiale . Considerând variabila în raport cu care se face derivarea ca fiind liberă pe când celelalte variabile se consideră ca fiind ”fixate” (sau constante), se obţine o funcţie care depinde numai de acea variabilă liberă, iar derivata funcţiei se obţine cu regulile de derivare de la funcţiile de o variabilă : v. Secţiunea 6.

Ca un detaliu tehnic (sau notaţional), în unele manuale sau culegeri de probleme se foloseşte o notaţie oarecum mai simplă şi anume :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \underset{\text{not}}{=} f'_x , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \underset{\text{not}}{=} f'_y , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \underset{\text{not}}{=} f'_z . \tag{8.99}$$

Notă. Pentru termenul **derivate parţiale** vom mai folosi şi scrierea convenţională (şi mai simplă) ca ∂**erivate**.

Ex. 8.11 Se cere calculul derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor de mai jos.

(i) $\quad f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(\pi/4, 0),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\pi/4, \pi/4)\ ;$

(ii) $\quad f(x,y) = e^{\sin xy},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, \pi/2),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0)\ ;$

(iii) $\quad f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2\sqrt{2})\ ;$

(iv) $\quad f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2).$

Soluţii - modele de rezolvare.

În toate cazuri se pot aplica formulele (8.92 - 93) reduse la variabilele x & y, deci renunţându-se la a treia variabilă z. Alternativ, se pot calcula derivatele parţiale într-un punct curent după care se înlocuiesc în expresiile respective coordonatele punctelor date; aceasta nodalitate este corectă doar dacă derivatele respective sunt continue în acele puncte.

$$(i)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}}. \tag{8.100}$$

Având în vedere simetria funcţiei în cele două variabile, rezultă a doua derivată parţială

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}}. \tag{8.101}$$

$$(8.100) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\pi/4, 0) = \frac{\sin \pi/2}{2\sqrt{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ (8.101) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\pi/4, \pi/4) = \frac{\sin \pi/2}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

$$(ii)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} e^{\sin xy} = y(\cos xy)\, e^{\sin xy}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(\cos xy)\, e^{\sin xy}\ ; \tag{8.102}$$

$$(8.102) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi/2) = \cos \pi/2 = 0\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = (\cos 0)\, e^{0} = 1.$$

$$(iii)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{8.103}$$

$$(8.103) \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2\sqrt{2}) = \frac{1}{3}.$$

$$(iv) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x-y}{x+y} = \frac{2y}{(x+y)^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{-2}{9}.$$

Cititorii interesaţi sunt invitaţi se regăsească valorile acestor derivate parţiale în puntele date folosind definiţia, deci cu rapoartele incrementare parţiale. □

Ex. 8.12 Se cere scrierea ∂erivatelor de primul ordin pentru funcţia de 3 variabile

$$f(x,y,z) = e^{xyz}\cos\frac{y}{xz}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xyz}\cos\frac{y}{xz}\right) = yz\,e^{xyz}\cos\frac{y}{xz} + e^{xyz}\frac{yz}{x^2z^2}\sin\frac{y}{xz} =$$

$$= y\,e^{xyz}\left(z\cos\frac{y}{xz} + \frac{1}{x^2z}\sin\frac{y}{xz}\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xyz}\cos\frac{y}{xz}\right) = xz\,e^{xyz}\cos\frac{y}{xz} - e^{xyz}\frac{1}{xz}\sin\frac{y}{xz} =$$

$$= e^{xyz}\left(xz\cos\frac{y}{xz} - \frac{1}{xz}\sin\frac{y}{xz}\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{xyz}\cos\frac{y}{xz}\right) = xy\,e^{xyz}\cos\frac{y}{xz} + e^{xyz}\frac{xy}{x^2z^2}\sin\frac{y}{xz} =$$

$$= y\,e^{xyz}\left(x\cos\frac{y}{xz} + \frac{1}{xz^2}\sin\frac{y}{xz}\right).$$

□

Diferenţiala de ordinul întâi a unei funcţii de mai multe variabile.

Noţiunea de diferenţială pentru funcţiile de mai multe variabile o generalizează pa aceea de la funcţiile de o variabilă - v. Secţiunea 6. Pentru variaţii mici ale argumentelor, diferenţiala aproximează *variaţia funcţiei*. Formal, variaţia funcţiei f într-un punct $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$ pentru variaţia $dX = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ a argumentului este

$$\Delta f(X_0, dX) = f(X_0 + dX) - f(X_0) =$$
$$= f(x_1^0 + dx_1, x_2^0 + dx_2, \dots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0). \tag{8.104}$$

Funcţia f este diferenţiabilă în punctul X_0 dacă există o funcţie (sau formă) liniară în componentele variaţiei $dX = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ care aproximează oricât de bine variaţia din (8.104) a funcţiei. Această funcţie liniară este exact *diferenţiala funcţiei în punctul* X_0 iar dacă funcţia admite derivate parţiale continue în punctul X_0 atunci expresia diferenţialei este

$$df(X_0, dX) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\, dx_i. \tag{8.105}$$

Expresia (8.105) a diferenţialei într-un punct fixat X_0 se poate rescrie pentru un punct curent înlocuind X_0 cu X. Pentru cazurile spaţiilor de dimensiuni mici (cele mai frecvent întâlnite în aplicaţii), adică $\mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{R}^2$, expresiile diferenţialei devine

$$df(x_0, y_0, z_0; dx, dy, dz) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\, dz. \tag{8.106}$$

Pentru spaţiul $\mathbb{R}^2$ se va înlătura a treia viariabilă şi variaţia respectivă. Diferenţiala într-un punct curent $M(x, y, z)$ şi cu variaţiile scrise ca în (8.95) este

$$df(x, y, z; h, k, \ell) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\, k + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\, \ell. \tag{8.107}$$

Urmează câteva exemple de diferenţiale în puncte date sau/şi în puncte curente.

Ex. 8.13 Pentru cele 4 funcţii din exemplul anterior au fost determinate derivatele parţiale de primul ordin într-un punct curent dar şi în puncte date. Este deci uşor să scriem diferenţialele lor de primul ordin.

(i) Având ∂erivatele într-un punct curent din (8.100) & (8.101) putem scrie

$$df(x, y; dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy = \tag{8.108}$$

$$= \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}}\, dx + \frac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}}\, dy. \tag{8.109}$$

Dacă particularizăm punctul la $M_0(\pi/4, \pi/4)$ obţinem, din (8.109),

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/4, \pi/4) = \frac{\partial f}{\partial y}(\pi/4, \pi/4) = \frac{1}{2} \Rightarrow df(\pi/4, \pi/4; dx, dy) = \frac{1}{2}(dx + dy).$$

(ii) Pentru funcţia $f(x, y) = e^{\sin xy}$ din (8.102) avem, cu formula din (8.108),

$$df(x,y\,;dx,dy) = y\,(\cos x\,y)\,e^{\sin x\,y}\,dx + x\,(\cos x\,y)\,e^{\sin x\,y}\,dy =$$
$$= (\cos x\,y)\,e^{\sin x\,y}\,(y\,dx + x\,dy)\,. \tag{8.110}$$

(8.110) $\Rightarrow$ $df(1,\pi\,;dx,dy) = -(\pi\,dx + dy)\,.$

(iii) (8.103) & (8.108) $\Rightarrow$ $df(x,y\,;dx,dy) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(x\,dx + y\,dy)\,.$ (8.111)

(8.111) $\Rightarrow$ $df(1,1\,;dx,dy) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(dx + dy)\,.$

(iv) $df(x,y\,;dx,dy) = \dfrac{2}{(x+y)^2}\,(y\,dx - x\,dy)\,;\quad df(1,1\,;dx,dy) = \dfrac{1}{2}\,(dx - dy)\,.$

Derivate parţiale şi diferenţiale de ordin superior.

Ca şi la funcţiile de o variabilă reală, ∂erivatele de ordin superior se definesc prin ∂erivare succesivă (sau repetată). Astfel, pentru o funcţie de două variabile $f(x\,,y)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\;;\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\;; \tag{8.112}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\;;\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,. \tag{8.113}$$

Desigur, este posibil ca nu toate cele 4 derivate parţiale de ordinul II din (8.112) & (8.113) să existe. Existenţa unei anumite derivate parţiale de ordin superior într-un punct fixat $M_0(x_0\,,y_0)$ depinde de existenţa limitei raportului incrementar pentru derivata parţială de ordin cu o unitate mai mic în acest punct.

Derivatele parţiale de ordinul II din (8.113) se numesc ∂*erivate mixte*. Ele pot să coincidă sau nu. **Teorema lui Schwarz** afirmă că

Dacă ∂erivatele mixte de ordinul al doilea sunt continue atunci ele coincid :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,. \tag{8.114}$$

Aşadar, dacă o funcţie $f(x\,,y)$ are ∂erivate continue până la ordinul al II-lea atunci ea admite numai 3 derivate de ordiniul II distincte (într-un punct dat sau într-un punct curent).

Pentru o funcţie de trei variabile $f(x\,,y\,,z)$ se pot considera 9 ∂erivate de ordinul al II-lea, dar în condiţiile Teoremei lui Schwarz numai 6 dintre ele vor fi distincte :