3. Serii de numere reale

Succinte preliminarii teoretice + exemple.

O *serie de numere reale* constă dintr-un şir real şi dintr-un alt şir asociat acestuia, cel al *sumelor parţiale* ale seriei. Formal, cele două şiruri sunt

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ cu } S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k. \end{cases} \tag{3.1}$$

Se foloseşte notaţia

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{3.2}$$

spre a desemna seria definită prin perechea de şiruri din (3.1). Vom vedea că aceeaşi notaţie din (3.2) poate avea şi o altă semnificaţie, aceea de sumă a seriei.

Termenul general al seriei este u_n; seriile reale se clasifică după diverse criterii, primul fiind cel al semnului termenului general. Seria (3.1) poate fi

$$\begin{cases} \textbf{\textit{cu termeni pozitivi}} \text{ dacă } u_n > 0 \,/\, u_n \ge 0, \\ \textbf{\textit{cu termeni oarecare}} \text{ dacă } u_n \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.3}$$

La prima alternativă din (3.3) termenii pot fi strict pozitivi, respectiv nenegativi. La a doua alternativă, termenii pot lua orice semn. Un caz particular al acestei alternative secunde este cel al seriilor *alternante*, în care semnul termenului general alternează între $+$ şi $-$. Aşadar, termenul general al unei asemenea serii se poate scrie sub forma $u_n = (-1)^n a_n$ sau $u_n = (-1)^{n-1} a_n$ cu $a_n > 0$.

Comportarea unei serii de numere reale depinde de comportarea şirului sumelor sale parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (3.1). De obicei, prin natura unei serii se înţelege convergenţa / divergenţa. Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită, spunem că *seria are sumă* iar această sumă S este chiar limita şirului sumelor parţiale :

$$\lim_{\infty} S_n = S = \text{suma seriei.} \tag{3.4}$$

Aşa cum sugeram mai sus, suma seriei poate fi notată chiar cu simbolul din (3.2), având în vedere definiţia din (3.4). Aşadar,

$$\boxed{S = \lim_{\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.} \tag{3.5}$$

Desigur, suma unei serii poate să existe sau nu, iar dacă există ea poate fi mărginită (adică finită - element din $\mathbb{R}$), respectiv nemărginită. În funcţie de aceste cazuri seria se clasifică precum urmează. Seria

$$\langle (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

nu are sumă dacă limita din (3.5) nu există. Altfel, seria *are suma* $S \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ este } \begin{cases} \textit{convergentă} \text{ dacă } & S \in \mathbb{R} : \text{CONV} \\ \textit{divergentă} \text{ dacă } & S \in \{-\infty, +\infty\} : \text{DIV} \end{cases} \tag{3.6}$$

Având în vedere definiţia din (3.5) şi clasificarea din (3.6), este evident că natura unei serii va putea fi determinată, chiar şi fără a-i găsi suma, utilizând criterii de convergenţă pentru şirurile reale ; a se vedea paragraful anterior.

Exemple. Oferim câteva exemple simple de natură să ilustreze noţiunile prezentate până acum.

E 3.1 Seria cu termenul general constant, $u_n = a \in \mathbb{R}^*$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a = \lim_{n \to \infty} (na) = (+\infty) \operatorname{sgn} a. \tag{3.7}$$

Acesta este un caz absolut banal dar oferă un prim exemplu de serie divergentă. În suma din (3.7) intervine funcţia signum ce caracterizează semnul constantei respective :

$\operatorname{sgn} a = +1$ pentru $a > 0$, $\operatorname{sgn} a = -1$ pentru $a < 0$.

E 3.2 Serie alternantă fără sumă, cu termenul general $u_n = (-1)^{n-1}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } n \text{ impar}, \\ 0 \text{ pentru } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow S \in \{0, 1\}. \tag{3.8}$$

Rezultă din (3.8) că această serie nu are sumă ; având în vedere că şirul sumelor parţiale este unul osciilant, putem spune că este un exemplu de serie oscilantă. Se poate obţine o uşoară generalizare dacă se consideră termenul general $u_n = (-a)^{n-1}$, $a > 0$.

E 3.3 **Seria geometrică** (de raţie $q \neq 0$). Este vorba de o serie a cărei sumă parţială de rang n a fost întâlnită în matematica de liceu, sub denumirea de *sumă a progresiei geometrice*. Termenul său general este

$$u_n = q^{n-1} \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{3.10}$$

Este evident că nu putem considera cazul particular ① $q = 1$ în ultima expresie a sumei parţiale din (3.10) ; dar acesta este un caz banal (sau trivial) care se încadrează la primul exemplu de mai sus, al seriei cu termenul general constant $= 1$, având suma $+\infty$; deci este un caz de divergenţă. Analog, cazul ② $q = -1$ conduce la seria alternantă fără sumă din (3.8). Rămân celelalte cazuri, care sunt mai interesante.

③ $q < -1 \Rightarrow \lim\limits_{\infty} S_n$ nu există întrucât

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1 - q^{2k}}{1 - q} = -\infty, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{1 - q^{2k-1}}{1 - q} = +\infty.$$

④ $-1 < q < 0$ sau $0 < q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{\infty} S_n = \lim\limits_{\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$ (3.11)

întrucât a doua limită din (3.11) implică (la numărător) limita şirului geometric de raţie subunitară, în valoare absolută, care converge la 0 ; acest şir a fost prezentat în secţiunea precedentă.

⑤ $q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{\infty} S_n = \lim\limits_{\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim\limits_{\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{+\infty}{q - 1} = +\infty.$

Deci seria geometrică DIVerge în acest al 5-lea caz.

E 3.4 O serie cu termenul general raţional este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Termenul general se mai poate scrie

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow S = 1.$$

Criteriul general de convergenţă. Conform cu (3.5) şi (3.6), convergenţa seriei (3.1) / (3.2) este echivalentă cu convergenţă şirului sumelor sale parţiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, iar convergenţa acestuia poate fi caracterizată cu criteriul general de convergenţă al lui Cauchy pentru şiruri:

$$\boxed{(S_n) \text{ CONV} \iff [(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})\, n > n_\varepsilon \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon].} \quad (3.12)$$

Cu expresia din (3.1) a sumei parţiale de rang n,

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}; \quad (3.13)$$

ultimul membru din (3.13) se numeşte porţiunea (sau "bucata") seriei dintre rangurile $n+1$ & $n+p$. Caracterizarea (3.12) a convergenţei seriei devine, folosind (3.13),

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ CONV} \tag{3.14}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall\, p \in \mathbb{N})\ n > n_\varepsilon \Rightarrow \left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon\,.}$$

Corolar (Condiţia necesară de convergenţă). Particularizând numărul natural p din caracterizarea (3.14) la $p = 1$ rezultă condiţia necesară de convergenţă a unei serii :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ CONV} \Rightarrow \lim_{\infty} u_{n+1} = \lim_{\infty} u_n = 0\,.} \tag{3.15}$$

Implicaţia din (3.15) se citeşte astfel: *Seria converge numai dacă termenul său general converge la* 0. Oferim un exemplu şi un contraexemplu la această condiţie din (3.15).

E 3.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$

este o serie non-convergentă deoarece termenul ei general nu converge la 0 ci la $2/3$. Vom vedea, după prezentarea câtorva proprietăţi ale seriilor cu termeni pozitivi, ca această serie este chiar divergentă la $S = +\infty$.

E 3.6 Condiţia din (3.15) este numai una necesară.

Un contraexemplu va arăta ca si o serie cu termenul general convergent la 0 poate fi divergentă, întrucât condiţia din (3.15) este *numai necesar*ă, nu şi suficientă. *Seria armonică simplă* este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{3.16}$$

iar suma sa parţială este

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}. \tag{3.17}$$

Vom demonstra divergenţa seriei prin divergenţa şirului (3.17) al sumelor sale parţiale, luând în caracterizarea din (3.14) un ε_0 şi un p particular, lăsând pe $n \in \mathbb{N}$ arbitrar:

$$(\exists\, \varepsilon_0 > 0)\ \varepsilon_0 = \frac{1}{3}, (\forall\, n \in \mathbb{N})\,(\exists\, p_n \in \mathbb{N})\ p_n = n\,\mathbf{:} \tag{3.18}$$

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}. \tag{3.19}$$

În (3.18) citim : ca "*astfel încât*", iar minorarea din (3.19) s-a obţinut prin majorarea primilor $n-1$ numitori la $2n$.

Aplicaţii la serii cu termeni oarecare

STO – A. 1 Să se studieze convergenţa seriilor :

(*i*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n a}{n^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$

(*ii*) $\displaystyle\frac{1}{5} + \frac{1}{45} + \ldots + \frac{1}{16n^2 - 8n - 3} + \ldots$

(*iii*) $\displaystyle\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots$

(*iv*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+a+1} - 2\sqrt{n+a} + \sqrt{n+a-1}\right), \quad a > 0.$

Răspunsuri - sugestii de rezolvare.

(*i*) Termenul general, în valoare absolută, se majorează cu $\sum_1^{\infty}(1/n^2)$, care converge conform criteriului general al lui Cauchy : a se verifica de către cititori.

(*ii*) Numitorul termenului general se poate factoriza, iar acesta se descompune în diferenţă de fracţii simple, după care se determină suma parţială de rang n : se va obţine achiar suma seriei, $S = 1/4$.

(*iii*) Suma parţială a seriei se poate rescrie sub forma

$$S_n = \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2\cdot 2}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \left(\frac{2\cdot n}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2\cdot k}{2^k} - \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cdot k}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = U_n - V_n. \tag{3.20}$$

V_n este suma unei serii geometrice convergente. A se verifica $\lim\limits_{n \to \infty} V_n = V = 1$. Prima sumă parţială este

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cdot k}{2^k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \Rightarrow U = \lim_{\infty} U_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}. \tag{3.20}$$

Se poate considera seria auxiliară, cu suma parţială

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{k} \underset{\text{not}}{=} g(x,n) = \frac{x}{2}\cdot\frac{1-(x/2)^{n}}{1-(x/2)} = \frac{1}{2^{n}}\cdot\frac{x^{n+1}-2^{n}x}{x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x,n) = \frac{1}{2^{n}}\left(\frac{x^{n+1}-2^{n}x}{x-2}\right)' = \frac{1}{2^{n}}\cdot\frac{nx^{n+1}-(n+1)2x^{n}+2^{n+1}}{(x-2)^{2}}. \qquad (3.21)$$

Valoarea derivatei din (3.21) în punctul $x = 1$ este

$$g'(1,n) = \frac{n-(n+1)2+2^{n+1}}{2^{n}} = 2 - \frac{2+n}{2^{n}} = U_{n}. \qquad (3.22)$$

Trecând la limită în (3.22) şi cu (3.20) se va găsi

$$\lim_{n\to\infty} g'(1,n) = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2+n}{2^{n}}\right) = 2 = U. \qquad (3.23)$$

Aşadar suma seriei este $U + V = 3$. □

(*iv*) Se va verifica că suma parţială este

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+a+1} - 2\sqrt{k+a} + \sqrt{k+a-1}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \sqrt{a} - \sqrt{a+1} + \frac{1}{\sqrt{a+n+1}+\sqrt{a+n}},$$

de unde vor rezulta atât suma seriei cât şi convergenţa.

Momentan întrerupem aici prezentarea unor proprietăţi (şi exemple) ale seriilor reale generale (cu termeni oarecare). Seriile cu termeni pozitivi au multe proprietăţi suplimentare faţă de cele generale, inclusiv criterii specifice de convergenţă. Oferim în contiunuare o trecere în revistă a principalelor proprietăţii şi criterii de convergenţă, fără a intra în detalii de demonstraţie (care pot rămâne ca exerciţii pentru seminar sau pentru **HOMEWORK**).

Serii cu termeni pozitivi (STP).

Definiţia acestor serii a fost dată în (3.3). O serie de proprietăţi ale STP sunt imediate.

STP.1 *Şirul sumelor parţiale ale unei STP este* (*strict*) *crescător.*

Proprietatea rezultă imediat din $S_{n+1} - S_{n} = u_{n+1} \geq 0$; această inegalitate este în general strictă, chiar dacă unii termeni ai seriei pot fi nuli. Evident, acest şir este strict crescător în prima alternativă din (3.3) - TP.

Având în vedere proprietăţile şirurilor monotone, în particular crescătoare, de numere reale (pozitive) rezultă

STP.2 *Orice STP este fie convergentă* (*la o sumă* $S > 0$), *fie nemărginită - divergentă la* $S = +\infty$.

STP.3 *O STP este convergentă* $\Longleftrightarrow$ *este mărginită* :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{CONV} \iff (\exists\, M > 0)(\forall\, n \in \mathbb{N})\ S_n < M. \tag{3.24}$$

În (3.24) intervine bariera superioară M. Inegalitatea este strictă întrucât un majorant nu poate fi atins de un şir crescător de sume parţiale decât decă, de la un rang încolo, toţi termenii serii sunt = 0 (ceea ce reprezintă un caz banal, irelevant).

Convergenţa STP-urilor se poate stabili cu o serie de criterii specifice, care urmează.

Criterii de convergenţă pentru STP

K_{TP}.1 (Criteriul comparaţiei prin inegalităţi) *Dacă*

$$(i)\quad u_n \le v_n\ \&\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n\ \text{CONV}\ \textit{atunci}\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ \text{CONV};$$

$$(ii)\quad u_n \le v_n\ \&\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ \text{DIV}\quad \textit{atunci}\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ \text{DIV}.$$

Se mai poate observa că, notând cu U şi V sumele celor două serii atunci $U \le V$. Inegalitatea are loc şi în cazul cînd una sau ambele sume este (sunt) infinite.

Criteriul comparaţiei prin inegalităţi se poate reformula printr-o uşoară generalizare, înlocuind inegalitatea $u_n \le v_n$ care intervine ca ipoteză atât în (i) cât şi în (ii) cu

$$u_n \le M v_n,\ \ M \in \mathbb{R}\ \ \&\ \ M > 0. \tag{3.25}$$

În monografia [Gh. Sireţchi, 1985], în cazul când se verifică inegalitatea din (3.25) se consideră că cele două serii se află într-o relaţie (similară cu o relaţie) de ordine şi se foloseşte o notaţie specifică : dacă există constanta reală M ca în (3.25) astfel încât, cel puţin de la un rang n_0, este verificată inegalitatea din (3.25) se spune că seria $\sum u_n$ *este majorată* de seria $\sum v_n$ şi se notează

$$\boxed{\sum_1^{\infty} u_n \ll \sum_1^{\infty} v_n.} \tag{3.26}$$

Cu această notaţie, primul criteriu de comparaţie se poate reformula sub forma uşor generalizată

K_{TP}.2 *Dacă*

$$\sum_{1}^{\infty} u_n \ll \sum_{1}^{\infty} v_n \ \textit{atunci} \ \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ \text{CONV} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{CONV}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{DIV} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ \text{DIV}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Una din formele mai des utilizate ale criteriilor de comparaţie se obţine prin trecerea la limită în raportul dintre doi termeni de acelaşi rang ai celor două serii.

K_{TP}.3 (Criteriul comparaţiei la limită)

Considerând două STP cu termenii generali respectivi u_n & v_n $(v_n > 0)$, *dacă există*

$$\lim_{\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+, \textit{atunci} \begin{cases} \ell \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty) \ \& \ \sum_{1}^{\infty} v_{\infty} \ \text{CONV} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} u_n \ \text{CONV}; \\ \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+^* = (0, +\infty] \ \& \ \sum_{1}^{\infty} u_n \ \text{DIV} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} v_n \ \text{DIV}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Acest criteriu rezultă din precedentul, dacă pentru limita ℓ se aplică, în fiecare dintre cazuri, o caracterizare cu vecinătăţi fundamentale de forma

$$n > n_{\varepsilon} \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon), \ \text{respectiv} \tag{3.29}$$

$$n > n_{\alpha} \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} > \alpha \ \text{dacă} \ \ell = +\infty; \tag{3.30}$$

evident, în cazul $\ell = 0$ din (3.28), în caracterizarea din (3.29) se va opera cu o vecinătate la dreapta a lui 0 : se va scrie că

$$n > n_{\varepsilon} \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \in (0, \varepsilon) \iff \frac{u_n}{v_n} < \varepsilon.$$

Cei interesaţi sunt invitaţi să verifice această implicaţie, adică posibilitatea de a deduce natura unei serii din natura celeilalte, în condiţiile din (3.26) care vor conduce la (3.23), respectiv (3.24). Evident, se va putea alege un $\varepsilon_0 > 0$ particular, respectiv un $\alpha_0 > 0$, fiecăruia corespunzându-i un rang (suficient de mare) de la care este verificată inegalitate din primul criteriu.

K_{TP}.4 (Criteriul comparaţiei prin rapoarte de termeni succesivi) *Dacă*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad atunci \quad \begin{cases} \sum_1^n v_n \text{ CONV} \Rightarrow \sum_1^n u_n \text{ CONV} ; \\ \sum_1^n u_n \text{ DIV} \Rightarrow \sum_1^n v_n \text{ DIV} . \end{cases} \tag{3.31}$$

Inegalitatea din (3.31) este echivalentă cu

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \underset{\text{not}}{=} q_n \tag{3.32}$$

de unde rezultă că şirul rapoartelor dintre termenii de acelaşi rang ai seriei $\sum_1^\infty u_n$ şi ai seriei $\sum_1^\infty v_n$ este un şir descrescător, fiind şi minorat de 0. Este deci un şir convergent. Inegalitatea din (3.32) se poate prelungi spre stânga până la rangul $n+p$:

$$\frac{u_{n+p}}{v_{n+p}} \leq \ldots \leq \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} . \tag{3.33}$$

Scriind ca membru extrem drept raportul cu rangul minim de la care se verifică (3.33) avem

$$\frac{u_{n+p}}{v_{n+p}} \leq \ldots \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \underset{\text{not}}{=} M > 0 . \tag{3.34}$$

Dacă luăm, în inegalitatea (3.34), $p = 1$ rezultă câ între termenii celor două serii se verifică inegalitatea $u_m \leq M v_m$ pentru $m \geq n_0 + 1$. Întrucât comportarea unei serii – în cazul nostru $\sum_1^\infty v_n$ – nu este influenţată de un număr finit de termeni iniţiali şi nici dacă seria, adică termenul ei general este multiplicat cu o constantă pozitivă M, urmează că celor două serii li se poate aplica primul criteriu de comparaţie prin inegalităţi **K_{TP}.1** şi astfel rezultă implicaţiile din (3.31) sau chiar **K_{TP}.2** .

K_{TP}.5 (Criteriul de condensare al lui Cauchy)

Fie $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir monoton descrescător de numere reale pozitive. Atunci seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\&\; \sum_{m=0}^{\infty} u_{2^m} \tag{3.35}$$

au aceeaşi natură.

Nu oferim demonstraţia pentru acest criteriu. El se bazează pe o propoziţie ("proprietatea de asociativitate"), P. 3.1.10 care poate fi găsită în manualul [Gh. Sireţchi, 1985 - Vol.1] . Se observă că a doua serie din (3.35) este formată doar din termenii seriei iniţiale de ranguri egale cu puterile succesive ale lui 2 ; aşadar, s-ar putea afirma că ea conţine un număr "mai mic" de termenii decât seria dată. În anumite situaţii, este convenabilă aplicarea acestui criteriu.

Exemple

E 3.7 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ este DIVergentă întrucât

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} \ \& \ \lim_{\infty} \frac{u_n}{1/n} = 1 \ \Rightarrow \sum_1^{\infty} u_n \ \text{DIV} \ ;$$

conform cu **K_{TP}.3** seria cu care se face comparaţia fiind seria armonică simplă care diverge. A se vedea exemplul **E 3.6** .

E 3.8 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

DIVerge întrucât $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n} = v_n$ şi se aplică **K_{TP}.1** cu aceeaşi serie armonică simplă.

E 3.9 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$ este CONV

întrucât se poate compara (fie la limită, fie prin inegalitate ca în **K_{TP}.1**) cu seria armonică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \ : \ \text{CONV}.$$

Seriile armonice (generalizate) formează o familie şi sunt de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ : \ \begin{cases} \text{CONV} & \text{pentru } \alpha > 1\,, \\ \text{DIV} & \text{pentru } \alpha \leq 1\,. \end{cases}$$

Pentru calculul sumelor unor serii (inclusiv STP) nu există metode general valabile. În fiecare caz se va încerca determinara unei expresii cât mai simple a sumei parţiale de rang n, eventual printr-o rescriere convenabilă a termenului general. În exemplele ce urmează se calculează câteva sume de serii.

E 3.10 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\,.$$

Termenul general se poate rescrie (prin amplificarea fracţiei cu conjugata diferenţei de la numitor) sub forma

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow S = 1.$$

$K_{TP}.6$ (Criteriul rădăcinii, al lui Cauchy)

Fie $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *un şir de numere reale pozitive. Dacă există un rang* $n_0 \in \mathbb{N}$ *şi un umăr real* $q > 0$ *astfel încât*

$$n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{u_n} \le q < 1 \;\; \textit{atunci} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \text{CONVerge} \;; \\ \sqrt[n]{u_n} \ge q > 1 \;\; \textit{atunci} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \text{DIVerge} \,. \end{cases} \tag{3.36}$$

Criteriul din (3.36) este *criteriul rădăcinii sub formă de inegalităţi*. El rezultă din **$K_{TP}.1$** prin comparaţie cu seria geometrică (3.10), în cazul raţiei $q > 0$. Există şi o formă la limită a acestui criteriu :

$K_{TP}.6'$ *Dacă există*

$$\lim_{\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \;\; \textit{atunci} \;\; \begin{cases} \ell < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \text{CONVerge} \;; \\ \ell > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \text{DIVerge} \,. \end{cases} \tag{3.37}$$

Criteriul din (3.37) se demonstrează pe baza celui din (3.36) trecând la caracterizarea limitei în limbaj $\varepsilon \rightarrowtail n_\varepsilon$: se va alege un ε_0 suficient de mic astfel încât

$$n(\varepsilon_0) = n_0 \;\&\; \ell + \varepsilon_0 = q < 1 \;:\; n > n_0 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{u_n} < q \;\Rightarrow\; \text{CONV}.$$

Cititorul interesat va descrie formal cazul de divergenţă.

Un criteriu oarecum înrudit cu **$K_{TP}.6$ - $K_{TP}.6'$** este

$K_{TP}.7$ (Criteriul raportului sau al lui d'Alembert) *Fie* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *un şir de numere reale pozitive. Dacă există un rang* $n_0 \in \mathbb{N}$ *şi un umăr real* $q > 0$ *astfel încât*

$$n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1 \;\; \textit{atunci} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \text{CONVerge} \;; \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge q > 1 \;\; \textit{atunci} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \text{DIVerge} \,. \end{cases} \tag{3.38}$$

Ca şi în cazul criteriului rădăcinii, şi acesta admite o formă limită.

$\boxed{\mathbf{K_{TP}.7'}}$ *Dacă există*

$$\lim_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \quad atunci \quad \begin{cases} \ell < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ CONVerge };\\ \ell > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ DIVerge }. \end{cases} \tag{3.39}$$

Formele limită ale acestor două criterii **$K_{TP}.6$** & **$K_{TP}.7$** admit, fiecare dintre ele, câte un caz de dubiu, acela în care limita respectivă este unitară : $\ell = 1$. După cum se va vedea, aceste cazuri de dubiu se pot uneori rezolva cu ajutorul altor criterii, mai puternice (sau mai fine). Să mai obervăm că *cele două criterii (al rădăcinii şi al raportului) au aceaşi putere, în sensul că natura unei serii stabilită cu unul din ele va fi aceeaşi şi conform celuilalt* (dacă ambele sunt aplicabile).

Exemple

E 3.11 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$ are aceeaşi comportare (sau natură) cu seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3n + 5} \tag{3.40}$$

întrucât o constantă pozitivă care multiplică termenul general nu afectează natura seriei. Seria dată, $\sum_1^{\infty} u_n$, se poate compara cu seria din (3.40) fie printr-o inegalitate, fie prin trecere la limită :

$$u_n = \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5} < \sqrt{7}\,\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sqrt{7}\,\frac{1}{n^{3/2}} ;$$

aşadar, $\sum_1^{\infty} u_n \ll \sum_1^{\infty} v_n$ = seria armonică de parametru $\alpha = 3/2$, CONV conform cu **$K_{TP}.2$** . Se ajunge la aceeaşi concluzie cu **$K_{TP}.3$** şi $\ell = \sqrt{7}$.

E 3.12 $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a\,\frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right)^n, \; a > 0 . \tag{3.41}$$

Expresia termenului general sugerează, în mod firesc, aplicarea criteriului Cauchy al rădăcinii, **$K_{TP}.6$**

$$\lim_{\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{\infty} a\,\frac{n^2 + n + 1}{n^2} = a \;\Rightarrow\; \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ CONVerge pentru } a < 1,\\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ DIVerge pentru } a > 1. \end{cases}$$

Pentru $a = 1$ termenul general devine

$$u_n = \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right)^n \Rightarrow \lim_{\infty} \sqrt[n]{u_n} = e \neq 0. \tag{3.42}$$

Conform *condiţiei necesare de convergenţă* (3.15), seria diverge în acest caz. Cititorul este invitat să verifice limita din (3.42).

E 3.13 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}, \; a > 0 \;\&\; p \in \mathbb{R}. \tag{3.43}$$

Pentru această serie se poate încerca aplicarea criteriului raportului - d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^p} \frac{n^p}{a^n} = a \frac{n^p}{(n+1)^p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \lim_{\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = a. \tag{3.44}$$

Rezultă din (3.44) că seria din (3.43) este CONV pentru $a < 1$, respectiv DIV pentru $a > 1$. Dacă $a = 1$, seria din (3.43) devine seria armonică generalizată de parametru $\alpha = p$: a se vedea menţionarea acestei familii de serii după **E 3.9** la pag. 33. Notând termenul general din (3.43) cu $u_n(a, p)$, rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{CONVerge pentru } p > 1, \\ \text{DIVerge pentru } p \leq 1. \end{cases}$$

Aplicaţii la serii cu termeni pozitivi

STP - A.2 S-au mai prezentat exemple de aplicare a crieriilor de comparaţie, Urmează alte câteva. Seriile se indică prin termenul general.

1° $u_n = \dfrac{1}{n^2 + a^2}, \; a \in \mathbb{R}$;

2° $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4 + 1}}$;

3° $u_n = \dfrac{n}{5 + n \cdot 2^n}$;

4° $u_n = \dfrac{n^p}{a + n \cdot 3^n}, \; a > 0$;

5° $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$;

6° $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;

7° $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$: se poate aplica o comparaţie la limită, cu $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = 1$.

8° $u_n = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{\pi}{n}$: se poate compara cu o serie armonică generalizată.

Să se verifice convergenţa / divergenţa cu criteriile $\boxed{K_{TP}.6}$ – $\boxed{K_{TP}.7'}$:

9° $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$; **10°** $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$;

11° $u_n = \dfrac{2^n - 1}{n^p}$; **12°** $u_n = \left(a \cdot \dfrac{n^2 + n + 1}{n^2}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}_+$.

Răspunsuri - sugestii de rezolvare.

În unele din răspunsuri folosim notaţia $\sum_1^\infty u_n \sim \sum_1^\infty v_n$ cu semnificaţia că cele două serii au aceeaşi natură : CONV / DIV . De asemenea, relaţia de majorare $\sum_1^\infty u_n \ll \sum_1^\infty v_n$ din (3.26) - pag. 31.

1° $\sum_1^\infty u_n \ll \sum_1^\infty (1/n^2)$ CONV ; **2°** $\sum_1^\infty u_n \sim \sum_1^\infty (1/n^{4/3})$ CONV ;

3° $\sum_1^\infty u_n \sim \sum_1^\infty (1/n)$ DIV ;

4° $\sum_1^\infty u_n \ll \sum_1^\infty (n^{p-1}/3^n)$ CONV , cu $\boxed{K_{TP}.7'}$;

5° $\sum_1^\infty u_n \gg \sum_1^\infty (1/n)$ DIV ; **6°** $\sum_1^\infty u_n \sim \sum_1^\infty (1/n)$ DIV cu $\boxed{K_{TP}.7'}$;

7° $\sum_1^\infty u_n \sim \sum_1^\infty (2/n(n+3)$ CONV ;

8° $\sum_1^\infty u_n \sim \sum_1^\infty (1/n^2)$ CONV cu $\boxed{K_{TP}.7'}$;

9° $\sum_1^\infty u_n$ CONV cu $\boxed{K_{TP}.7'}$; **10°** $\sum_1^\infty u_n$ DIV cu $\boxed{K_{TP}.7'}$;

11° $\sum_1^\infty u_n$ DIV cu $\boxed{K_{TP}.7'}$;

12° $\sum_1^\infty u_n$ CONV pentru $a < 1/e$, $\sum_1^\infty u_n$ DIV pentru $a > 1/e$, cu $\boxed{K_{TP}.6'}$;

cazul de dubiu pentru $a = 1/e$ se rezolvă prin înlocuirea lui a în termenul general din enunţ şi compararea şirului astfel obţinut, a cărui limită este $\geq 1/e \Rightarrow$ DIV cu condiţia necesară de divergenţă, (3.15).

Alte criterii de covergenţă / divergenţă pentru STP

Alegerea unui anumit criteriu pentru stabilirea naturii unei serii cu termeni pozitivi (STP) nu urmează anumite prescripţii sau reţete : unele dintre criteriile prezentate până acum pot fi mai eficiente / mai uşor de aplicat, altele necesită calcule mai laborioase. Alegerea criteriului potrivit depinde în mare masură de expresia termenului general. În alte cazuri (mai ales atunci când termenul general depinde şi de un parametru) se poate ajunge la cazuri de dubiu, aşa cum s-a menţionat în $\mathbf{K}_{TP}.6'$ şi $\mathbf{K}_{TP}.7'$. În unele asemenea cazuri se pot aplica unele criterii mai fine – sau mai puternice – aşa cum sunt *criteriul lui Raabe* (sau Raabe-Duhamel), *criteriul lui Abel*, respectiv *criteriul lui Kummer*.

$\mathbf{K}_{TP}.8$ Criteriul lui Raabe. *Dacă există limita*

$$\lim_{\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = R \ \textit{atunci} \ \begin{cases} R > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{CONVerge}\ ; \\ R < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{DIVerge}\ . \end{cases} \tag{3.45}$$

Cazul $R = 1$ este un caz de dubiu.

E 3.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)}\,, \ \lambda > 0\,.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda+n+1}{\lambda+n} \longrightarrow 1 \ \text{pentru} \ n \longrightarrow \infty\,. \tag{3.46}$$

Deci criteriul raportului sub forma limita $\mathbf{K}_{TP}.7'$ ar conduce la un caz de dubiu. Cu raportul din (3.46) inversat găsim limita

$$R = \lim_{\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{\infty} n\left(\frac{\lambda+n+1}{\lambda+n} - 1\right) = \lim_{\infty} \frac{\lambda n}{\lambda+n} = \lambda\,. \tag{3.47}$$

$$(3.47) \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{CONV}\,, \\ \lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{DIV}\,. \end{cases}$$

În cazul de dubiu, $\lambda = 1 \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow$ DIV. □

Serii alternante. O serie alternantă are termenul general de forma $u_n = (-1)^n a_n$ sau $u_n = (-1)^{n-1} a_n$ cu $a_n > 0$. Pentru aceste serii există un criteriu simplu de convergenţă.

$\mathbf{K}_{SA-L}.9$ Criteriul lui Leibniz. *Dacă şirul numeric* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *descreşte la* 0 *atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \ \text{CONV}\,.$$

E 3.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}\,.$ Monotonia se poate stabili cu raportul

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+3}} \cdot \frac{n^{n+2}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n^2+2n)^{n+2}}{(n^2+2n+1)^{n+2}} < 1 .$$

Deci şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton descrescător. Limita sa este

$$\lim_{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}} = \lim_{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot e_n'\right) = 0 \cdot e = 0 . \qquad (3.48)$$

În (3.48) a intervenit şirul descrescător al numărului e (a se vedea **§ 2 - ŞIRURI**). □

Aplicaţii la $\boxed{\mathbf{K}_{TP}.\mathbf{8}}$ & $\boxed{\mathbf{K}_{SA-L}.\mathbf{9}}$: Se cere natura seriilor cu termenul general dat.

13° $u_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^a , \; a \in \mathbb{R}$;

14° $u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$;

15° $u_n = a^{\ln n} , \; a > 0$;

16° $u_n = \frac{(an)^n}{n!} , \; a \geq 0$;

17° $u_n = (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1} , \; x \in \mathbb{R}$;

18° $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

19° $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}} , \; a \in \mathbb{R}$;

20° $u_n = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{7}}$.

Răspunsuri - sugestii de rezolvare.

13° $a < 1/e \Rightarrow$ DIV , $a > 1/e \Rightarrow$ CONV , $a = 1/e \Rightarrow R_n = n(e^{1/n} - 1) < 1 \Rightarrow$ DIV .

14° $R_n = (1 + 1/n)^{-n} \frac{(e - e_n)}{1/n} \rightarrow R = \frac{1}{2} \Rightarrow$ DIV cu $\mathbf{K}_{TP}.\mathbf{8}$; limita se calculează cu ajutorul funcţiei $f(x) = [e - (1+x)^{1/x}]/x$ cu $\lim_{x \to 0} f(x) = e/2$, notând $x = 1/n$.

15° $R_n = \frac{a\,\mathrm{EXP}\,[-\ln(1 + 1/n)]}{(1/n)} \rightarrow -\ln a$; urmează discuţia după a.

16° $a < e \Rightarrow$ CONV , $a \geq e \Rightarrow$ DIV cu $\mathbf{K}_{TP}.\mathbf{8}$.

17° $k\pi - \pi/4 < x < k\pi + \pi/4 \Rightarrow$ abs. CONV , $k\pi + \pi/4 < x < k\pi + (3\pi)/4 \Rightarrow$ DIV ;

18° Simplu CONV : $a_n \searrow 0$; însă $\sum_1^\infty a_n$ DIV .

19° $a_n = 1/(n^a \cdot \sqrt[n]{n})$. Se compară la limită seria $\sum_1^\infty a_n$ cu $\sum_1^\infty 1/n^a$ şi se discută după parametrul seriei armonice.

20° Aceaşi răspuns ca la **18°** . La toate aplicaţiile să se detalieze calculele.