11. Câmpuri scalare şi vectoriale. Formula lui Green.

11.1 Elemente de teoria câmpurilor.

Atât câmpurile scalare cât şi cele vectoriale au numeroase aplicaţii în domenii ca Fizica, Mecanica teoretică (statică, dinamică, mecanica fluidelor) dar şi în ştiinţele inginereşti. Până prin anul univ. 2005-2006, Teoria câmpurilor se studia în cadrul disciplinei de Matematici speciale predată studenţilor de la toate facultăţile de profil tehnic, după care aceasta **a fost eliminată – în mod abuziv şi nejustificat** – din planurile de învăţământ ale facultăţilor de inginerie. Este deci necesar ca unele noţiuni minimale (teoretice dar şi cu exemple) despre câmpuri să fie prezentate în cadrul cursului de Analiză matematică. Acestea implică şi noţiuni dinn unele capitole de Geometrie analitică şi diferenţială.

11.1.1 Câmpuri scalare.

Un *câmp scalar* este o funcţie de 2 sau trei variabile, definită pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$, respectiv $D \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{11.1}$$

În cele mai multe cazuri, funcţia φ din (11.1) este presupusă a fi continuă şi derivabilă parţial pe domeniul D, cel puţin o dată. Cu notaţia consacrată, $\varphi \in \mathbb{C}_D^p,\ p \geq 1.$ Punând în evidenţă coordonatele unui punct $M(x,y,z) \in D$ sau $M(x,y) \in D$, un câmp scalar într-un astfel de punct curent va avea valoarea

$$\varphi(x,y,z) \in \mathbb{R} \quad \text{sau} \quad \varphi(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{11.2}$$

Întrucât cele mai multe definiţii şi proprietăţi ale câmpurilor scalare sunt practic aceleaşi pentru două sau trei variabile, le vom prezenta în al doilea caz, adică pentru câmpuri definite pe domenii $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ..

Gradient şi suprafeţe / curbe de nivel.

Definiţia 11.1.1. Dat fiind un câmp scalar de forma (11.2), $\varphi \in \mathbb{C}_D^k$, *gradientul* său într-un punct curent $M(x,y,z) \in D$ se defineşte prin

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}.} \tag{11.3}$$

Aşadar, gradientul este un vector exprimat în baza ortonormată standard $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ale cărui coordonate sunt derivatele sale parţiale în punctul curent M. Evident. ele depind de coordonatele acestuia aşa încât gradientul însuşi va varia odată cu punctul. În expresia (11.3) nu am pus în evidenţă aceste coordonate. Într-un punct fixat $M_0(x_0,y_0,z_0)$ gradientul va fi un vector constant

$$\operatorname{grad}\varphi(M_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,\mathbf{k}., \tag{11.4}$$

Expresia (11.3) a gradientului se poate scrie şi cu ajutorului operatorului "nabla" :

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \underset{(11.3)}{\Rightarrow} \operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi.} \tag{11.4'}$$

Definiţia 11.1.2. Dat fiind un câmp scalar de forma (11.2), $\varphi \in C_D^p$, *suprafaţa de nivel* ℓ_0 este definită prin

$$(S_{\ell_0}) = \{M(x,y,z) \in D : \varphi(x,y,z) = \ell_0\}, \quad \ell_0 \in \varphi(D). \tag{11.5}$$

Prin urmare, suprafaţa de nivel ℓ_0 este locul geometric al punctelor din domeniul D în care câmpul scalar ia această valoare ℓ_0. În definiţia din (11.5) am pus în evidenţa condiţia naturală ca numărul real ℓ_0 (adică nivelul care defineşte suprafaţa) să facă parte din mulţimea valorilor câmpului ; în caz contrar suprafaţa ar fi mulţimea vidă !

În cazul în care se ia drept nivel ℓ_0 valoarea funcţiei într-un punct particular $M_0(x_0,y_0,z_0) \in D$ definiţia (11.5) a suprafeţei de nivel devine

$$(S_{M_0}) = \{M(x,y,z) \in D : \varphi(x,y,z) = \varphi(x_0,y_0,z_0)\}. \tag{11.6}$$

Suprafaţa de nivel definită prin (11.6) este suprafaţa care trece prin punctul M_0. Datorită proprietăţilor de regularitate presupuse pentru câmp, prin fiecare punct al domeniului de definţie D *trece o suprafaţă de nivel şi numai una.*

Să mai observăm că în cazul 2-dimensional ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) vectorul din (11.3) are numai două componente, iar suprafeţele de nivel devin *curbe de nivel.* Un exemplu relevant este cel al *curbelor isoterme* sau *isobare* de pe hărţile meteorologice. Pe hărţile topografice, curbele punctelor de aceeaşi altitudine faţă de nivelul mării sunt efectiv curbe de nivel şi chiar aşa se şi numesc.

Exemple.

Ex. 11.1.1 Pentru câmpul scalar şi punctul

$$\varphi(x,y,z) = x^3 + x^2y - xyz, \quad M_0(1,-3,2) \tag{11.7}$$

se cer : (i) scrierea gradientului într-un punct curent, (ii) determinarea gradientului în punctul M_0 precum şi (iii) ecuaţia suprafeţei de câmp care trece prin acest punct.

$$(11.7) \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2 + 2xy - yz, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 - xz, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -xy. \tag{11.8}$$

$$(11.8) \Rightarrow \operatorname{grad}\varphi = (3x^2 + 2xy - yz)\,\mathbf{i} + (x^2 - xz)\,\mathbf{j} - (xy)\,\mathbf{k}.$$

$$\operatorname{grad}\varphi(M_0) = 3\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}\ldots$$

$$\varphi(M_0) = \varphi(1,-3,2) = 1 - 3 + 6 = 4 \Rightarrow (S_{M_0}) :. x^3 + x^2y + xyz = 4$$

Deci suprafaţa de nivel cerută este o suprafaţă algebrică de ordinul 3.

Ex. 11.1.2 Se cere rezolvarea aceloraşi trei probleme (i), (ii), (iii) pentru câmpul scalar şi punctul

$$\varphi(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - y) - \arccos\frac{x}{z}\ , \quad M_0(1,0,-2). \tag{11.9}$$

(i) Derivatele parţiale rezultă din expresia analitică (11.9) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} &= \dfrac{2x}{x^2+y^2-y} + \dfrac{|z|}{z\sqrt{z^2-x^2}}\ , \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} &= \dfrac{2y-1}{x^2+y^2-y}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} &= \dfrac{-x\,|z|}{z^2\sqrt{z^2-x^2}}\ ; \end{cases} \tag{11.10}$$

(11.10) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{2x}{x^2+y^2-y} + \frac{|z|x}{z\sqrt{z^2-x^2}}\right)\mathbf{i} + \frac{2y-1}{x^2+y^2-y}\,\mathbf{j} - \frac{x\,|z|}{z^2\sqrt{z^2-x^2}}\,\mathbf{k}. \tag{11.11}$$

(ii) (11.10) $\Rightarrow$ $\operatorname{grad}\varphi(M_0) = \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathbf{i} - \mathbf{j} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathbf{k} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(4\sqrt{3} - 2\right)\mathbf{i} - \mathbf{2\sqrt{3}}\,\mathbf{j} - \mathbf{k}\right] \tag{11.12}$$

(iii) $\varphi(M_0) = \varphi(1,0,-2) = \ln 1 - \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (S_{M_0}) :.\ln(x^2 + y^2 - y) - \arccos\frac{x}{z} = -\frac{2\pi}{3}\ . \tag{11.13}$$

Observaţii. 1° În expresiile (11.10) ale derivatelor parţiale intervin (la prima şi a treia) $|z|$ & z , la numărător şi numitor ; acestea se vor putea simplifica doar în cazul $z > 0$. De altfel, pentru acest câmp scalar ar fi interesantă şi *determinarea domeniului* D pe care este el definit, chestiune pe care o abordăm mai jos.

2° În culegerea Probleme de Matematici speciale [I. Nistor & C. Lovinescu, 1998] de unde a fost preluat acest exerciţiu se cere şi determinarea versorului gradientului din (11.12). Acest vector, respectiv orice dintre cei doi versori asociaţi lui, ar putea avea interpretarea geometrică de vector / versor normal la o suprafaţă. Dar, în cazul câmpului scalar de forma celui din (11.9), o ecuaţie de forma $u = \varphi(x,y,z)$ nu reprezintă o suprafaţă.ci o hipersuprafaţă în spaţiul 4-dimensional. Totuşi, conform noţiunilor de plan tangent şi de normală la o suprafaţă din cadrul GEOMETRIEI DIFERENTIALE,.vectorul gradient din (11.12) va fi *vector normal* la suprafaţa de nivel din (11.13). Pentru determinarea versorului este necesară lungimea gradientului din (11.12) :

$$|\operatorname{grad}\varphi(M_0)| = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\|\left(4\sqrt{3} - 2\right)\mathbf{i} - 2\sqrt{3}\,\mathbf{j} - \mathbf{k}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{48 - 16\sqrt{3} + 4 + 12 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{65 - 16\sqrt{3}} \tag{11.14}$$

(11.12) & (11.14) $\Rightarrow$

$$\mathbf{n}^{\mathrm{o}} = \pm(\operatorname{grad}\varphi(M_0))^{\mathrm{o}} = \pm\frac{1}{\sqrt{65-16\sqrt{3}}}\Big[\Big(4\sqrt{3}-2\Big)\mathbf{i}-2\sqrt{3}\,\mathbf{j}-\mathbf{k}\Big].$$

3° Domeniul maxim de definiţie al câmpului din (11.9) rezultă din condiţiile

$$\begin{cases} x^2+y^2-y>0, \\ -1 \le \dfrac{x}{z} \le 1, \\ z \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(y-1/2)^2 > 1/4 \text{ şi} \\ \big[x+z \ge 0 \ \&\ z>0\big] \wedge \big[x-z \le 0 \ \&\ z>0\big] \\ \text{sau} \\ \big[x+z \le 0 \ \&\ z<0\big] \wedge \big[x-z \ge 0 \ \&\ z<0\big]. \end{cases} .(11.15)$$

Prima inegalitate din (10.15) reprezintă exteriorul cilindrului închis generat de cercul $C((0,1/2);1/2))$ din planul (xOy) având generatoarele verticale, deci paralele cu axa (Oz). A doua (dublă) inegalitate $-z \le x \le z$ cu $z>0$ reprezintă interiorul din semispaţiul superior al unghiului diedru mărginit de semiplanele $(x=-z)$ şi ,$(x=z)$, iar a treia (dublă) inegalitate din (10.15) reprezintă interiorul din semispaţiul inferior al unghiului diedru mărginit de aceleaşi semiplanele $(x=z)$ şi ,$(x=-z)$. Aşadar, se poate scrie

$$D = D_1 \cap (D_2 \cup D_3) \text{ unde } \begin{cases} D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+(y-1/2)^2 > 1/4,\ z \in \mathbb{R}^*\}, \\ D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -z \le x \le z, \quad z>0\}, \\ D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \le x \le -z, \quad z<0\}. \end{cases}$$

Derivate după direcţii date ale câmpurilor scalare.

Definiţia 11.1.3. Dat fiind un câmp scalar de forma (11.2), $\varphi \in \mathcal{C}^p_D$, $p \ge 1$ şi un vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$, *derivata* câmpului φ *după direcţia* vectorului $\mathbf{v}$ se defineşte ca o limită a unui raport incrementar şi anume

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{\ell(\overset{\frown}{M_0M})} \underset{\text{not}}{=} \frac{d\varphi}{ds}(M_0). \qquad (11.16)$$

Limita din (11.16) comportă o construcţie geometrică în ale cărei detalii nu intrăm. La numitorul raportului din (11.16) – membrul stâng – am încercat să marcăm un arc de curbă care trece prin M_0 şi care admite, în acest punct, o tangentă de direcţie $\mathbf{v}$, La limită, lungimea acestui arc de la M_0 la M devine elementul de arc ds pe care l-am întâlnit în Secţiunea 10.1 - Integrale curbilinii în raport cu lungimea de arc. Pentru un arc suficient de mic (sau pentru punctele M_0, M suficient de apropiate), lungimea de arc din (11.16) poate fi aproximată cu lungimea segmentului de dreaptă care le uneşte, deci cu distanţa dintre ele. Pe baza acestui argument se ajunge la definiţia echivalentă

$$\lim_{M\to M_0\parallel \mathbf{v}}\frac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{d(M_0,M)} \underset{\text{not}}{=} \frac{d\varphi}{ds}(M_0). \qquad (11.16')$$

O justificare riguroasă a acestei definiţii şi a echivalenţei sale cu definiţia (sau formula) uzuală care apare mai jos poate fi găsită în tratatul clasic de MATEMATICI SPECIALE al Profesorului *Ion Gheorghe Şabac* de la *Politehnica din Bucureşti*, [I.Gh. Şabac, 1965, 1981].

Precizări. 1° În membrul drept al egalităţii (11.16), litera s de la "numitor" reprezintă un *versor* asociat vectorului $\mathbf{v}$; aşadar se poate scrie $\vec{s} = \mathbf{v}^{o}$, dar în notaţia uzuală pentru derivata după direcţia $\vec{s}$ se renunţă (de obicei) la săgeată.

2° Sub simbolul lim din membrul stâng al egalităţii (11.16) am folosit notaţia $M \to M_0 \parallel \mathbf{v}$ care sugerează că punctul M tinde la punctul M_0 pe dreapta $(M_0 M) \parallel \mathbf{v}$.

3° Versorul $\vec{s}$ are, ca orice versor, drept coordonate în baza ortonormată standard $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *cosinii directori* ai direcţiei respective. În unele susre (cursuri sau colegeri de probleme) aceştia sunt notaţia $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ dar putem prefera notaţia $\alpha = \cos\varphi_1$, $\beta = \cos\varphi_2$, $\gamma = \cos\varphi_3$ de unde rezultă

$$\vec{s} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} \quad \text{cu} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{11.17}$$

4° Dacă se cere derivata unui câmp φ după direcţia vectorului $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ este necesară determinarea versorului acestuia,

$$\vec{s} = \mathbf{v}^{o} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}). \tag{11.18}$$

Cu aceste precizări şi aplicând *Teorema lui Lagrange* (a creşterilor finite) funcţiilor care intervin în (11.16′) se ajunge la o expresie echivalentă a derivatei după direcţia $\vec{s}$ din (11.16) şi anume

$$\frac{d\varphi}{ds}(M_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0)\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0)\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0)\gamma. \tag{11.19}$$

Într-un punct curent $M(x,y,z) \in D$ oarecare, expresia derivatei după direcţia $\vec{s}$ se obţine imediat din (11.19) renunţându-se la indicele 0 şi chiar la argumentul-punct M_0 :

$$\boxed{\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\gamma}. \tag{11.20}$$

Formula (11.20) are o interpretare vectorială evidentă precum şi una mai curând geometrică (sau vectorial-geometrică) : derivata după direcţia $\vec{s}$ a câmpului scalar φ este *produsul scalar dintre gradientul lui φ şi versorul direcţiei* după care se face derivarea. Având în vedere tocmai faptul că acesta este un *versor* (deci un vector unitar), rezultă că aceeaşi derivată este *proiecţia* (scalară a) *gradientului lui φ pe direcţia $\vec{s}$*, adică pe versorul acesteia. Se poate deci scrie

$$\boxed{\frac{d\varphi}{ds} = (\operatorname{grad}\varphi)\cdot\vec{s}} \iff \boxed{\frac{d\varphi}{ds} = pr_{\vec{s}}(\operatorname{grad}\varphi)}, \tag{11.21}$$

Exemple.

Ex. 11.1.3 Pentru câmpul scalar şi punctul

$$\varphi(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2, \quad M_0(1, \sqrt{3}, -2) \tag{11.22}$$

se cere valoarea derivatei după direcţia normală la suprafaţa de nivel care trece prin M_0 în acest punct.

Conform discuţiei la rezolvarea exemplului anterior (Observaţia 2°), direcţia normalei din enunţ va fi exact direcţia gradientului în punctul M_0.

$$\operatorname{grad}\varphi(M_0) = [6x]_{(1,\sqrt{3},-2)}\,\mathbf{i} + [4y]_{(1,\sqrt{3},-2)}\,\mathbf{j} + [2z]_{(1,\sqrt{3},-2)}\,\mathbf{k} = 6\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\,\mathbf{j} - 4\mathbf{k}. \quad (11.23)$$

Având în vedere prima formulă din (10.21), rezultă că derivata câmpului după direcţia normală la suprafaţa de nivel prin M_0 va fi

$$\frac{d\varphi}{dn} = \left(\operatorname{grad}\varphi\right)\cdot\vec{n} = \frac{1}{|\operatorname{grad}\varphi|}\left[\left(\operatorname{grad}\varphi\right)\cdot\left(\operatorname{grad}\varphi\right)\right] = |\operatorname{grad}\varphi| \underset{(11.23)}{=} \quad (11.24)$$

$$= \sqrt{36+48+16} = 10.$$

Discuţie. Exemplu este rezolvat, dar ar fi interesant să calculăm derivata acestui câmp şi după o altă direcţie spre a ilustra o proprietate generală : *Valoarea absolută a derivattei după o direcţie normală este mai mare decât cea a derivatei după orice altă direcţie.*

Fie vectorul $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \Rightarrow \vec{s} = \mathbf{v}^{\circ} = \frac{1}{3}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}).$ (11.25)

Cu gradientul din (11.23) şi versorul din (11.25) găsim

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{3}\left(6\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\,\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\right)\cdot(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{1}{3}(-6+8+8) = \frac{10}{3}.$$

Încheiem exemplul scriind versorul normal de mai sus.

$$\mathbf{n} = \left(\operatorname{grad}\varphi\right)^{\circ} = \frac{1}{10}\left(6\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\,\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\right) = \frac{1}{5}\left(3\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\,\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\right).$$

11.1-A Aplicaţii (exerciţii) cu câmpuri scalare

CS-A.1 Pentru câmpul scalar şi punctul

$$\varphi(x,y,z) = e^{x^2-z^2} + \operatorname{arcctg}\frac{z}{y} \qquad M_0(1,-\sqrt{3},1) \quad (11.26)$$

se cer : (*i*) scrierea gradientului într-un punct curent, (*ii*) determinarea gradientului în punctul M_0 + versorul normal precum şi (*iii*) ecuaţia suprafeţei de nivel care trece prin acest punct ; (*iv*). derivata câmpului după direcţia normală la suprafaţa de la punctul precedent precum şi după direcţia $\vec{s} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})^{\circ}$.

CS-A.2 Să se rezolve aceleaşi probleme (*i*) , (*ii*) şi (*iii*) pentru câmpul scalar şi punctul

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z, \qquad M_0(1,1,1). \quad (11.27)$$

CS-A.3 Pentru câmpul scalar

$$\varphi(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \arcsin\frac{z}{y} \quad (11.28)$$

să se determine (*i*) domeniul maxim de definiţie, (*ii*) $\operatorname{grad}\varphi$ într-un punct curent şi în punctul $Q(2,-2,\sqrt{3})$, (*iii*) ecuaţia suprafeţei de nivel care trece prin acest punct Q , (*iv*).

derivata câmpului după direcţia $\overrightarrow{s} \parallel \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, în punctul Q.

CS-A.4 Pentru câmpul scalar

$$\varphi(x, y, z) = x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3xz^2y - 12xz - 6y^2 \,. \tag{11.29}$$

să se determine gradientul într-un punct curent şi apoi punctele în care acest gradient verifică fiecare din condiţiile :

$$\begin{cases} 1^{\circ} \quad \operatorname{grad}\varphi \perp (Ox) \;;, \\ 2^{\circ} \quad \operatorname{grad}\varphi \parallel (Oy) \;;, \\ 3^{\circ} \quad \operatorname{grad}\varphi = \overrightarrow{0} \;. \end{cases}$$

Răspunsuri şi indicaţii / recomandări pentru rezolvare.

CS-A.1 (i) $\operatorname{grad}\varphi = (2xe^{x^2-z^2})\mathbf{i} - \dfrac{z}{y^2+z^2}\mathbf{j} - \left(2ze^{x^2-z^2} - \dfrac{y}{y^2+z^2}\right)\mathbf{k}.$

(ii) $\operatorname{grad}\varphi(M_0) = 2\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j} - \left(2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathbf{k}. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbf{n} = \pm\frac{1}{2\sqrt{34+4\sqrt{3}}}\left(8\mathbf{i} - \mathbf{j} - (8+\sqrt{3})\mathbf{k}\right).$$

(iii) $(11.26) \Rightarrow \varphi(M_0) = 1 - \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow (S_{M_0}) : e^{x^2-z^2} + \operatorname{arcctg}\dfrac{z}{y} = 1 - \dfrac{\pi}{6}\,.$

(iv) Cu formula din (11.24) şi gradientul de mai sus se găseşte $\dfrac{d\varphi}{dn} = \dfrac{1}{2}\sqrt{34+4\sqrt{3}}\,.$

Pentru derivata după direcţia $\overrightarrow{s} \parallel \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ se va determina versorul şi se va aplica formula (11.19). Valoarea acestei derivate este

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{14} + 3\sqrt{3/14}\right).$$ *A se detalia calculele.*

□

CS-A.2 (i) $\operatorname{grad}\varphi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k}) \underset{(11.27)}{\Rightarrow}$
$\operatorname{grad}\varphi(M_0) = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}).$: (ii)
Se vor determina cei doi versori normali.

(iii) $(S_{M_0}) : x^2 + y^2 - 2z = 0\,.$.

□

CS-A.3 (i) Domeniul de definiţie se va determina din condiţia asupra argumentului lui arcsin (z/y). O problemă similară a apărut la Ex. 11.1.2 cu câmpul din (11.9).:

$$-1 \le \tfrac{z}{y} \le 1 \Rightarrow \begin{cases} \big[z+y \ge 0 \ \& \ y>0\big] \wedge \big[z-y \le 0 \ \& \ y>0\big] \\ \text{sau} \\ \big[z-y \ge 0 \ \& \ y<0\big] \wedge \big[z+y \le 0 \ \& \ y<0\big]. \end{cases} \qquad (11.30)$$

$$(11.30) \Rightarrow D = D_1 \cup D_2 \ \text{ unde } \begin{cases} D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -y \le z \le y \ \ \& \ \ y>0\}, \\ D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \le z \le -y \ \ \& \ \ y<0\}. \end{cases}$$

Ca şi în exemplul menţionat, aceste două domenii reprezintă reuniunea a două zone din spaţiul $\mathbb{R}^3$, fiecare mărginită de semiplanele oblice care formează câte un *unghi diedru*, având ca axă comună pe (Ox) : D_1 este situat în semispaţiul $(y>0)$ iar D_2 este situat în semispaţiul $(y<0)$.

(*ii*) (11.28) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{z\,|y|}{y^2\sqrt{y^2-z^2}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{-|y|}{y\sqrt{y^2-z^2}} \ ; \qquad (11.31)$$

(11.31) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ \text{grad}\,\varphi = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{z\,|y|}{y^2\sqrt{y^2-z^2}}\right)\mathbf{j} - \frac{|y|}{y\sqrt{y^2-z^2}}\,\mathbf{k}.$$

Din această expresie rezultă

$$\text{grad}\,\varphi(Q) = \ \dots \ = \tfrac{1}{4}\Big[\mathbf{i} + \big(1-2\sqrt{3}\big)\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\Big]. \ \ \textit{A se detalia calculele.}$$

(*iii*) $\varphi(Q) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow (S_Q)$: $\text{arctg}\frac{y}{x} - \arcsin\frac{z}{y} = \frac{\pi}{12}$.

(*iv*). Cu gradientul $\text{grad}\,\varphi(Q)$ de la punctul (*ii*) şi cu versorul $\overrightarrow{s} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$ se va ajunge la

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\Big[\mathbf{i} + \big(1-2\sqrt{3}\big)\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\Big]\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\big(4+2\sqrt{3}\big) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\,.$$

□

CS-A.4 (11.29) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ \text{grad}\,\varphi = (3x^2+3y^2+3z^2-12z)\mathbf{i} + (3y^2+6xy-12y)\mathbf{j} + (6xz-2x)\mathbf{k} =$$

$$= 3\,[(x^2+y^2+z^2-4z)\mathbf{i} + (y^2+2xy-4y)\mathbf{j} + 2x(z-2)\mathbf{k}]. \qquad (11.32)$$

Cele trei mulţimi de puncte din enunţ se pot nota M_i , $i \in \{1,2,3\}$.

$\boxed{1^o}$ $\text{grad}\,\varphi \perp (Ox) \Rightarrow M_1 = \{(x,y,z) : \ \text{grad}\,\varphi = b\mathbf{j} + c\mathbf{k}\} \underset{(11.32)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-4z = 0 \Rightarrow M_i = S((0,0,2);2).$$

$\boxed{2^o}$ $\text{grad}\,\varphi \parallel (Oy) \Rightarrow M_2 = \{(x,y,z) : \ \text{grad}\,\varphi = b\mathbf{j}\} \underset{(11.32)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4z=0 \wedge x=0, \\ x(z-2)=0 \wedge z=2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2+(z-2)^2=4 \wedge x=0, \\ x^2+y^2=4 \wedge z=2. \end{cases} \tag{11.33}$$

Mulţimea soluţiilor sistemului algebric (11.33) este deci recuniunea punctelor de pe două cercuri de rază $=2$:

$$M_2=(C_1)\cup(C_2), \quad \begin{cases} (C_1)=\{(0,y,z) : y^2+(z-2)^2=4\}, \\ (C_2)=\{(x,y,2) : x^2+y^2=4\}. \end{cases} \tag{11.34}$$

Primul cerc este situat în planul de coordonate (yOz) şi are centrul în $K_1(0,0,2)$ iar al doilea se află în planul orizontal (yOz) şi are centrul în origine.

$$\boxed{3^\circ} \quad \text{grad}\,\varphi=\vec{0} \underset{(11.32)}{\Rightarrow} \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4z=0, \\ y^2+2xy-4y=0, \\ x(z-2)=0. \end{cases} \tag{11.35}$$

Acest sistem algebric de ordinul II va admite soluţii cu $x=0 \vee z=2$. Pentru $x=0$ se obţine din (11.35) sistemul

$$\begin{cases} y^2+z^2-4z=0, \\ y^2-4y=0, \\ z\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow (y=0 \vee y=4) \Rightarrow O(0,0,0),\ P_1(0,0,4).$$

Pentru $y=4$ ecuaţia $z^2-4z+16=0$ nu admite soluţii reale.

Pentru $y=0$ & $z=2$ sistemul (11.35) devine

$$\begin{cases} x^2+y^2-4=0, \\ y^2+2xy-4y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \text{ sau} \\ y^2+2xy-4y=0, \end{cases} \Rightarrow \tag{11.36}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \quad \text{sau} \\ y^2+2xy-4y=0, \end{cases} \Rightarrow P_2(2,0,2) \ \& \ P_3(-2,0,2)\in M_3.$$

Scăzând cele două ecuaţii din (11.36) se ajunge la ecuaţia în x

$$x^2-2xy+4y-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=y\pm\sqrt{y^2-4y+4}=y\pm(y-2) \Rightarrow \begin{cases} x_1=2, \\ x_2=2(y-1). \end{cases} \tag{11.37}$$

Pentru prima valoare a lui x din (11.37) se regăseşte punctul $P_2(2,0,2)$. Cea de a doua rădăcină din (11.37), înlocuită în prima ecuaţie din (11.36) conduce la

$$4(y-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow \ \ldots \ \Rightarrow 5y^2 - 8y = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ sau} \\ y = 8/5. \end{cases} \qquad (11.38)$$

Prima rădăcină din (11.38) conduce la punctul $P_2(2, 0, 2)$ găsit anterior, în timp ca a doua rădăcină conduce la un nou punct, $P_3(6/5, 8/5, 2)$.

În concluzie, mulţimea punctelor în care gradientul câmpului din enunţ se anulează (este $= \overrightarrow{0}$) este

$$M_3 = \{O(0,0,0), P_1(0, 0, 4), P_2(2, 0, 2), P_3(-2, 0, 2), P_4(6/5, 8/5, 2)\}. \quad (11.39)$$

Cititorii interesaţi sunt invitaţi să detalieze calculele care au condus la (11.35-37) *şi la acest punct* P_4.

Notă. Am prezentat, cu mai multe detalii, rezolvarea acestui exemplu având în vedere că s-au obţinut mai multe sisteme algebrice alternative, de ordinul II. Cititorii vor putea face verificările sugerate. Problema a fost preluată din culegerea PROBLEME DE MATEMATICI SPECIALE [V. Rudner & C. Niculescu, 1982] . În acest volum (la pag. 5) se dau răspunsurile dar fără detalii de rezolvare. Pentru punctul 3^o , cele 5 puncte găsite – în care se anulează gradientul – sunt puncte critice sau puncte singulare.

□

11.1.2 Câmpuri vectoriale.

Un *câmp vectorial* este o funcţie vectorială de două sau trei variabile, definită pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$, respectiv $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{V} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2. \quad \text{sau} \quad \overrightarrow{V} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{11.40}$$

Considerăm cazul unui câmp vectorial cu trei componente, deci care ia valori în spaţiul $\mathbb{R}^3$. În reperul ortonormat standard al acestui spaţiu $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ câmpul vectorial din (11.40) se va scrie

$$\overrightarrow{V} = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}. \tag{11.41}$$

Fiecare dintre cele trei componente ale câmpului din (11.41) sunt funcţii scalare de câte 3 variabile (sau de numai două, în cazul $D \subseteq \mathbb{R}^2$) şi sunt deci câmpuri scalare. Asupra lor se fac presupuneri de regularitate, ca în secţiune precedentă. Putem scrie

$$V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{C}^p_\Omega, \ p \geq 1 \tag{11.42}$$

Divegenţă, rotor, câmpuri irotaţionale / potenţiale.

Unui câmp vectorial dat, de forma (11.41), i se pot asocia câteva caracteristici scalare, respectiv vectoriale, dar şi anumite obiecte geometrice (curbe /suprafeţe).

Definiţia 11.2.1. Fiind dat un câmp vectorial de forma (11.40-41) cu condiţia (11.42), *divergenţa* câmpului este definită prin

$$\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{V} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\,.} \tag{11.43}$$

Divergenţa este – evident – o funcţie scalară. În cazul în care ea se anulează pe întreg domeniul Ω sau pe un subdomeniu $\Omega_0 \subseteq \Omega$ al acestuia, se spune că este un câmp vectorial *solenoidal* pe (sub)domeniul respectiv.

Un vector (de fapt, chiar un câmp vectorial) este sociat unui câmp vectorial $\overrightarrow{V}$ prin definiţia ce urmează.

Definiţia 11.2.2. Fie dat un câmp vectorial de forma (11.40-41) cu condiţia (11.42) şi un punct fixat $M_0 \in \Omega$. Fie $\mathbf{s}$ o direcţie fixată iar (π) un plan care trece prin M_0, ortogonal pe $\mathbf{s}$: $(\pi) \perp \mathbf{s}$. Se consideră o curbă închisă netedă $(\gamma) \subset (\pi)$ cu $M_0 \in \operatorname{int}(\gamma)$. Notâm cu G domeniul plan închis de (γ), deci $(\gamma) = \partial G$; în fine. fie Aria $(G) = \sigma_{\overline{G}}$. *Rotorul* câmpului $\overrightarrow{V}$ este un vector definit prin ecuaţia de mai jos, cu condiţia ca limita din membrul drept să existe :

$$pr_{\mathbf{s}} \operatorname{rot} \overrightarrow{V}(M_0) = \lim_{(\gamma)\to M_0} \frac{1}{\sigma_{\overline{G}}} \int_{(\gamma)} \overrightarrow{V} \cdot d\mathbf{r}. \tag{11.44}$$

Dacă cele trei componente ale câmpului $V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{C}^p_\Omega$, $p \geq 2$ atunci se poate demonstra că expresia analitică a lui $\operatorname{rot} \overrightarrow{V}$ într-un punct curent M este, în reperul ortonormat standard, dată de

$$\boxed{\operatorname{rot}\overrightarrow{V}(M)=\left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.} \qquad (11.45)$$

Evident, expresia analitică din (11.45) se poate scrie sub forma echivalentă (care este şi mai uşor de reţinut)

$$\boxed{\operatorname{rot}\overrightarrow{V}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}.} \qquad (11.46)$$

Utilizând operatorul cu derivate parţiale ∇ din (11.4'), pe care-l reamintim,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\,,$$

rotorul din (11.45-46) se poate scrie formal sub forma

$$\boxed{\operatorname{rot}\overrightarrow{V}(M) = \nabla \times \overrightarrow{V}.} \qquad (11.47)$$

Desigur, expresia (11.46) a rotorului scris ca un determinant simbolic ce *este dezvoltat după prima linie*, implică "produse" de forma

$$\frac{\partial}{\partial y}\,V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial y}\,,\ \text{etc.}$$

Definiţia 11.2.3. Câmpul vectorial $\overrightarrow{V}$ (pe care-l mai putem nota şi $\mathbf{V}$) se spune că este *irotaţional* pe Ω dacă $\operatorname{rot}\mathbf{V} = \mathbf{0}$ pe Ω. $\mathbf{V}$ se numeşte *câmp potenţial* dacă există un câmp scalar $f(M)$ astfel încât $\mathbf{V} = \operatorname{grad} f(M)$. f este numită *funcţia de forţă* (a câmpului vectorial $\mathbf{V}$).

P.11.2.1. *Un câmp vectorial admite un potenţial* (adică o *funcţie potenţial*) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$ *, adică dacă si numai dacă acest câmp este irotaţional. Dat fiind un câmp vectorial (irotaţional)* $\mathbf{V}$*, funcţiia sa de forţă într-un punct curent* M *poate fi determinată cu ajutorul integrale curbilinii*

$$f(M) = \int_{\overset{\frown}{AM}} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r} \qquad (11.48)$$

unde A *este un punct fixat oarecare iar* M *este punctul curent* ; $\overset{\frown}{AM}$ *desemnează un arc de curbă care le uneşte, eventual chiar segmentul de dreaptă* $\overline{AM}$.

Exemple.

Ex. 11.2.1 Pentru câmpul vectorial

$$\mathbf{V} = (xy - 2z^2)\,\mathbf{i} + (4xz - y^2)\,\mathbf{j} + (yz - 2x^2)\,\mathbf{k}, \qquad (11.49)$$

să se determine div $\mathbf{V}$, rot $\mathbf{V}$ într-un punct curent precum şi în $M_0(1,2,-1)$.

$$(11.49) \underset{(11.43)}{\Rightarrow} \text{div}\,\mathbf{V} = y - 2y + y = 0 \Rightarrow \mathbf{V} \textit{ este solenoidal.}$$

$$(11.49) \underset{(11.46)}{\Rightarrow} \text{rot}\,\overrightarrow{V}(M) \underset{\text{not}}{=} \text{rot}\,\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy - 2z^2 & 4xz - y^2 & yz - 2x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (z - 4x)\mathbf{i} + (-4z + 4x)\mathbf{j} + (4z - x)\mathbf{k}. \quad (11.50)$$

În punctul dat $M_0(1,2,-1)$, divergenţa este evident nulă iar rotorul din (11.50) devine

$$\text{rot}\,\mathbf{V}(M_0) = -5\,\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

Ex. 11.2.2 Se cer div $\mathbf{V}$, rot $\mathbf{V}$ într-un punct curent precum şi în $M_0(2,0,-2)$ pentru câmpul

$$\mathbf{V} = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}, \quad (11.51)$$

Să se determine şi o funcţie de forţă, dacă $\mathbf{V}$ este un câmp irotaţional, plecând din punctul $A(1,0,0)$.

$$\text{div}\,\mathbf{V} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)\ ; \ \text{div}\,\mathbf{V}(M_0) = 8.$$

$$\text{rot}\,\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \end{vmatrix} = (-x + x)\mathbf{i} + (-y + y)\mathbf{j} + (-z + z)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Deci câmpul este irotaţional şi – conform cu **P.11.2.1.** – el este un câmp potenţional. O funcţie de forţă se poate găsi calculând integrala

$$f(M) = \int_{\overset{\frown}{AM}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \underset{(11.51)}{=} \int_{\overset{\frown}{AM}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz. \quad (11.52)$$

Drumul $\Gamma = \overset{\frown}{AM}$ pe care se va calcula integrala din (11.52) poate fi o linie poligonală formată din 3 segmente de dreaptă, fiecare paaralel cu (sau chiar situat pe) o axă de coordonate :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \text{ unde } \begin{cases} \Gamma_1 = \overline{AM_1} \text{ cu } A(1,0,0)\ \&\ M_1(x,0,0), \\ \Gamma_2 = \overline{M_1 M_2} \text{ cu } M_1(x,0,0)\ \&\ M_2(x,y,0), \\ \Gamma_2 = \overline{M_1 M} \text{ cu } M_2(x,y,0)\ \&\ M(x,y,z). \end{cases} \quad (11.53)$$

Pe fiecare dintre cele trei segmente o singură variabilă variază, deci celelalte două variaţii sunt nule, iar segmentul respectiv se poate descrie analitic utilizând un parametru t:

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \overline{AM_1} \ : \quad dy = dz = 0, \quad x = t \in [1, x], \ y = z = 0; \\ \Gamma_2 = \overline{\overline{M_1 M_2}} : \quad dx = dz = 0, \quad y = t \in [0, y], z = 0; \\ \Gamma_2 = \overline{M_1 M} \ : \quad dx = dy = 0, \quad z = t \in [0, z]. \end{cases} \tag{11.54}$$

Cu (11.52-54) avem

$$f(M) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{dr} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} =$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^x t^2 dt + \int_0^y t^2 dt + \int_0^y (t^2 - xy) dt = \\ &= \frac{1}{3}[t^3]_1^x + \frac{1}{3}[t^3]_0^y + \left[\frac{1}{3} t^3 - xyt\right]_{t=0}^{t=z} = \\ &= \frac{1}{3}(x^3 - 1 + y^3 + z^3) - xyz. \end{aligned} \tag{11.55}$$

Se poate constata cu uşurinţă că funcţia (sau câmpul scalar) din (11.55) verifică egalitatea de definiţie $\mathbf{V}(M) = \operatorname{grad} f(M)$ din **Definiţia 11.2.3**.

Linii de câmp şi suprafeţe de câmp ale unui câmp vectorial.

Definiţii riguroase ale câmpurilor scalare şi ale celor vectoriale, cu noţiunile aferente de gradient, divergenţă, rotor, ar fi necesitat o introducere prealabilă privind aşa-numitele *coordonate generalizate – coordonate curbilinii ortogonale*. Dar spaţiul disponibil în cadrul cursului - seminarului de Analiza matematică ar face dificilă includerea unei astfel de introduceri. Să menţionăm că şi divergenţa se poate introduce printr-o construcţie geometrică şi o trecere la limită, oarecum analoagă cu cea pentru rotor (**Def**, **11.2.2** – egalitatea (11.44)), iar din expresia sa în coordonatele curbilinii se ajunge la expresia uzuaală în coordonate cartesiene (11.43).

Pentru cei eventual ineresaţi de această fundamentare teoretică a unor noţiuni din Teoria câmpurilor se poate consulta (opţional, desigur) fragmentul de mai jos din cursul de MATEMATICI SPECIALE predat de A.C. studentilor din anul II al secţiei cu predare în l. engleză, în anii universitari 2000-2006. Numerotăm ecuaţiile din acest fraagment cu (A.1) , ..., (A.16) , cu A de la Appendix.

Appendix 11.1

Several notions on (space) curves and surfaces should be recalled, although they were studied in the 1st year course of ANALYTIC AND DIFFERENTIAL GEOMETRY.

The position vector of a point M, with respect to a standard system of coordinates $(O\,;\ \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ is

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}_M = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + y\mathbf{k}. \tag{A.1}$$

If the coordinates (x,y,z) of the point M are continuous functions of t, $t \in [a,b]$ then the point M describes a space curve (C) or (Γ). Hence, we may write the vector equation of a curve as

$$(\Gamma) : \mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k},\ t \in I \subseteq \mathbf{R} \tag{A.2}$$

where $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M$. If the functions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ have continuous derivatives of the first ored over I then it is said that the curve (or *parametrized path*) of Eq. (A.2) is *continuosly differentiable*. The derivative of the vector function $\mathbf{r}(t)$ is

$$\dot{\mathbf{r}}\,(t) = \dot{x}\,(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}\,(t)\,\mathbf{j} + \dot{z}\,(t)\,\mathbf{k},\ t \in I \subseteq \mathbf{R} \tag{A.3}$$

and it is known (from DIFFERENTIAL GEOMETRY) that it gives the direction of the tangent to (Γ) at the current point M corresponding to the current value $t \in I$. If $\dot{\mathbf{r}}\,(t) \neq \mathbf{0}$ for any t then the curve is said to be *smooth*. The unit vector of the tangent is

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{r}}\,(t)\|}\,\dot{\mathbf{r}}\,(t). \tag{A.4}$$

The tangent vector is also collinear with the differential of $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{t}_M \parallel d\mathbf{r}(t) = dx(t)\,\mathbf{i} + dy(t)\,\mathbf{j} + dz(t)\,\mathbf{k}. \tag{A.5}$$

The length (or norm) of the differential vector in Eq. (A.5) is called the *arc element* (or *elementary arc length*) for (Γ):

$$\begin{aligned} ds &= \|d\mathbf{r}(t)\| = \|dx(t)\,\mathbf{i} + dy(t)\,\mathbf{j} + dz(t)\,\mathbf{k}\| = \\ &= \|\dot{\mathbf{r}}\,(t)\|\,dt = \sqrt{\dot{x}^2\,(t) + \dot{y}^2\,(t) + \dot{z}^2\,(t)}\ dt. \end{aligned} \tag{A.6}$$

A space curve can be also represented in other types of coordinates than the standard Cartesian coordinates that occur in Eq. (A.2). Let us consider a domain $\Delta \subseteq \mathbf{R}^3$ and three functions

$$\begin{cases} x = x(q^1,q^2,q^3), \\ y = y(q^1,q^2,q^3), \quad \text{for any } (q^1,q^2,q^3) \in \Delta. \\ z = z(q^1,q^2,q^3), \end{cases} \tag{A.7}$$

It is assumed that the functions x,y,z that occur in (A.7) have continuous partial derivatives on Δ and they satisfy the condition

$$\left| \frac{D(x,y,z)}{D(q^1,q^2,q^3)} \right| \neq 0 \ \text{ for any } (q^1,q^2,q^3) \in \Delta. \tag{A.8}$$

Under these conditions, the functions in (A.7) provide a one-to-one correspondence between the points in Δ and (a subset of) $\mathbf{R}^3$. These "numbers" q^1,q^2,q^3 are called *curvilinear coordinates* of a current point M in the 3D space. Thus, the position vector of a current point M will be

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_M = x(q^1,q^2,q^3)\,\mathbf{i} + y(q^1,q^2,q^3)\,\mathbf{j} + z(q^1,q^2,q^3)\,\mathbf{k}. \tag{A.9}$$

Condition (1.8) makes possible to solve equations (A.7) in terms of q^1,q^2,q^3 :

$$q^i = q^i(x,y,z),\ \ i = \overline{1,3}. \tag{A.10}$$

The set of points $M(q^1,q^2,q^3)$ in space having one fixed coordinate represents a *surface* *of coordinates*. Its equation follows from (1.10) :

$$q^i(x,y,z) = q^i_0. \tag{A.11}$$

If two coordinates are fixed this yields a *curve of coordinates* or a *line of coordinates*. For instance, if q^2 & q^3 are fixed, it is obtained the curve of coordinate q^1. In general, the current point on a curve of coordinate α $(1 \le \alpha \le 3)$, denoted (Γ_α), will be of the form $M(q^\alpha)$. A line of coordinates has a tangent at each of its points. The tangent vector to the curve (Γ_α) is

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial x}{\partial q^\alpha}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q^\alpha}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q^\alpha}\,\mathbf{k}. \tag{A.12}$$

Let us remark that the subscript α on $\mathbf{r}$ in the l.h.s of (1.12) identifies the free curvilinear coordinate but it also denotes the partial derivative with respect to q^α. We recall that the same (notational) convention is used – in the differential geometry of surfaces – for the partial derivatives / tangent vectors $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ to the coordinate lines $(\Gamma_u), (\Gamma_v)$ on a surface $(S) : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$. The three tangent vectors $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ form a basis of coordinates called the *local basis*. It depends on the current point, that is it changes as the point moves (both as regards the directions of the vectors and their length). The system of coordinates $(M; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ is said to be *orthogonal* if the three coordinate lines are orthogonal at each point in the space, what means that the basis $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ is orthogonal: $\alpha \ne \beta \Rightarrow \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = 0$. Only orthogonal systems of coordinates will be considered in what follows.

The length (or norm) of the vector $\mathbf{r}_\alpha$ is called *Lamé's coefficient* and it is denoted and expressed by

$$H_\alpha = \|\mathbf{r}_\alpha\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^\alpha}\right)^2}\,, \quad \alpha = \overline{1,3}. \tag{A.13}$$

At any point it is considered the orthonormal basis

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{r}^\circ_\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{r}_\alpha\|}\,\mathbf{r}_\alpha = \frac{1}{H_\alpha}\,\mathbf{r}_\alpha \underset{(A.13)}{=}$$

$$= \frac{1}{H_\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial q^\alpha}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q^\alpha}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q^\alpha}\,\mathbf{k}\right), \quad \alpha = \overline{1,3}. \tag{A.14}$$

Any vector $\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(q^1, q^2, q^3)$ is represented, in the orthonormal basis of (A.14), by

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3 \quad \text{where} \quad v^\alpha = \mathrm{pr}_{\mathbf{r}_\alpha}\mathbf{v}. \tag{A.15}$$

In the system of coordinates (q^1, q^2, q^3) the following equation holds :

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}\,dq^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}\,dq^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}\,dq^3 \underset{(1.14)}{=}$$

$$= H_1\,dq^1\mathbf{e}_1 + H_2\,dq^2\mathbf{e}_2 + H_3\,dq^3\mathbf{e}_3. \tag{A.16}$$

Definiţia 11.2.3. O *linie de câmp* a câmpului vectorial $\overrightarrow{V}$ se defineşte ca fiind o curbă care este tangentă vectorului $\overrightarrow{V}(M)$ în fiecare punct $M \in \Omega$. Prin urmare, sistemul de ecuaţii diferenţiale ce caracterizează liniile de câmp

$$\frac{dx}{V_1(x,y,z)} = \frac{dy}{V_2(x,y,z)} = \frac{dz}{V_3(x,y,z)}\,. \tag{11.56}$$

Varianta în coordonate curbilinii a acestui sistem de ecuaţii este

$$\frac{H_1\, dq^1}{V^1} = \frac{H_2\, dq^2}{V^2} = \frac{H_3\, dq^3}{V^3}\ , \tag{11.57}$$

care decurge din (11.56) şi (A.16), unde V^1, V^2, V^3 sunt coordonatele respective ale câmpului vectorial în direcţiile axelor de coordonate ale bazei locale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Definiţia 11.2.4. O suprafaţă generată de liniile de câmp se numeşte o *suprafaţă de câmp.* Evident, ea depinde în mod esenţial de câmpul prin componentele acestuia care apar la numitorii din (11.56).

Un sistem diferenţial de forma (11.56) se mai numeşte *sistem simetric.* Astfel de sisteme intervin (sau se folosec) în rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale de primul orin (PDE). Egalând două dintre cele trei rapoarte se obţine câte o soluţie care se numeşte o *integrală primă*, Fiecare din ele depinde de câte o constantă arbitrară, deci intervin două constante c_1, c_2. Practic, fiecare ecuaţie este de forma

$$\Phi_1(x, y, z) = c_1 \quad \& \quad \Phi_2(x, y, z) = c_2\ . \tag{11.58}$$

Cele două ecuaţii din (11.58) reprezintă două suprafeţe a căror intersecţie este tocmai o *linie de câmp* − cea din **Definiţia 11.2.3**. Când cele două constante variază, linia de câmd generează suprafaţa de câmp. O suprafaţă generată de liniile de câmp verifică ecuaţia cu derivate parţiale de primul orin (PDE)

$$V_1 \frac{\partial F}{\partial x} + V_2 \frac{\partial F}{\partial y} + V_3 \frac{\partial F}{\partial z} = 0\ . \tag{11.59}$$

În unele aplicaţii ce implică astfel de câmpuri vectoriale se cere găsirea unei suprafeţe de câmp particulare, *care trece printr-o curbă dată*. Ilustrăm acest gen de probleme cu exemplul ce urmează, preluat tot din cursul de Special Mathematics anterior menţionat. Acesta are a rezolvare mai laborioasă, dar vom continua şi cu exemple mai simple.

Appendix 11.2

Example A.11.2-1. Let us consider the vector field

$$\overrightarrow{V}(x, y, z) = \sin^2 x\,\mathbf{i} + \tan z\,\mathbf{j} + \cos^2 z\,\mathbf{k}. \tag{A.17}$$

Given the point $M_0(\pi/3, -1, \pi/4)$, the equations of the field lines passing through it are required, and also the field surface passing through the curve

$$(\Gamma) : \begin{cases} 3\cot x - \tan z = 1, \\ y + \sin 2x = 3. \end{cases} \tag{A.18}$$

The differential system of the field lines are

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{\tan z} = \frac{dz}{\cos^2 z}\ . \tag{A.19}$$

Two prime integrals of this symmetric system can be easily obtained :

$$\cot x + \tan z = c_1,\ \frac{1}{2\cos^2 z} - y = c_2\ . \tag{A.20}$$

Indeed, the first prime in (A.20) integral follows from

$$R_1 = R_3 \Rightarrow d\cot x + d\tan z = 0\,;$$

the second prime integral is obtained from

$$R_2 = R_3 \Rightarrow \frac{\tan z\, dz}{\cos^2 z} - dy = 0 \Rightarrow \frac{\sin z\, dz}{\cos^3 z} - dy = 0.$$

In each prime integral of (A.20) we introduce the coordinates of M_0 and we get

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,,\ \ c_2 = 2. \tag{A.21}$$

Hence the field lines are represented by the system

$$\begin{cases} \cot x + \tan z & = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,, \\ \dfrac{1}{2\cos^2 z} - y & = 2\,. \end{cases}$$

In order to find the particular field surface passing through (Γ) of Eqs. (3.6) we must eliminate x, y, z from the system

$$\begin{cases} \cot x + \tan z & = c_1, \\ \dfrac{1}{2\cos^2 z} - y & = c_2, \\ 3\cot x - \tan z & = 1, \\ y + \sin 2x & = 3. \end{cases} \tag{A.22}$$

Eq. (A.22-3) -3 (A.22-1) gives

$$-4\tan z = 1 - 3c_1 \Rightarrow \tan z = (3c_1 - 1)/4. \tag{A.23}$$

Eq. (A.22-3) + (A.22-1) gives

$$4\cot x = c_1 + 1 \Rightarrow \cot x = (c_1 + 1)/4. \tag{A.24}$$

Eq. (A.22-2) + (A.22-4) gives

$$\frac{1}{2\cos^2 z} + \sin 2x = c_2 + 3. \tag{A.25}$$

Now $1/(2\cos^2 z)$ and $\sin 2x$ that occur in (A.25) can be expressed in terms of $\tan z$ and (respectively) $\cot x$ of (A.23) & (A.24).

$$\frac{1}{2\cos^2 z} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 z) \underset{(3.11)}{\Rightarrow} \frac{1}{2\cos^2 z} = \frac{9c_1^2 - 6c_1 + 17}{32}\,. \tag{A.26}$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} \underset{(A.23)}{\Rightarrow} \sin 2x = \frac{8/(c_1+1)}{1 + [4/(c_1+1)]^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{8(c_1+1)}{c_1^2 + 2c_1 + 17}\,. \tag{A.27}$$

(A.24), (A.25) & (A.26) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{9c_1^2 - 6c_1 + 17}{32} + \frac{8(c_1+1)}{c_1^2 + 2c_1 + 17} = c_2 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9c_1^4 + 12c_1^3 + 158c_1^2 + 188c_1 + 321}{32(c_1^2 + 2c_1 + 17)} = c_2 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9c_1^4 + 12c_1^3 + 62c_1^2 - 4c_1 - 1311 = 32c_2(c_1^2 + 2c_1 + 17). \qquad \text{(A.28)}$$

The equation of the required surface is obtained by replacing, in Eq. (A.28), the expressions of c_1 & c_2 of (A.20).

□

$\boxed{\text{Ex. 11.2.3}}$ Se cer liniile de câmp pentru câmpul vectorial din $\boxed{\text{Ex. 11.2.2}}$. Reamintim expresia sa :

$$\mathbf{V} = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}, \qquad (11.51)$$

Sistemul simetric de forma (11.56) este

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}. \qquad (11.56)$$

Scăzând numărătorii între ei numitorii şi asemenea numitorii, între două rapoarte, egale se obţin ceea ce s-ar putea numi proprorţii derivate, din care rezultă ecuaţii diferenţiale simple :

$$R_1 - R_2 = R_2 - R_3 \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x^2 - y^2 + z(x-y)} = \frac{d(y-z)}{y^2 - z^2 + x(y-z)} \Rightarrow \qquad (11.57)$$

$$\Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{d(y-z)}{y-z}. \qquad (11.58)$$

Trecerea de la (11.57) la (11.58) s-a realizat amplificând egalitatea cu factorul comun al celor doi numitori, $(x+y+z)$.

$$(11.58) \Rightarrow \ln(x-y) - \ln(x-y) = \ln c_1 \Rightarrow \frac{x-y}{y-z} = c_1. \qquad (11.59)$$

Analog se obţine ce de a doua integrală primă,

$$\frac{y-z}{z-x} = c_2. \qquad (11.60)$$

$$(11.59)\ \&\ (11{,}60) \Rightarrow \begin{cases} x - (c_1+1)y + c_1 z = 0, \\ c_2 x + y - (c_2+1)z = 0. \end{cases} \qquad (11.61)$$

Sistemul de ecuţii (11.61) caracterizează o *dreaptă în spaţiu*, dar nu una singură ci o întreagă familie de drepte, care variază o dată cu constantele c_1 & c_2. Direcţia acestei / acestor drepte (d) se obţine ca în Geometria analitică (a dreptei în spaţiu), ca produsul vectorial al planelor din (11.61) :

$$(d) \parallel \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -(c_1+1) & c_1 \\ c_2 & 1 & -(c_2+1) \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = (c_1 c_2 + c_2 + 1)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}). \qquad (11.62)$$

Rezultă din (11.62) că toate liniile de câmp ale câmpului vectoria din 911.51) sunt drepte având aceeşi direcţie, cea a vectorului egal înclinat faţă de axele reperului cartesia standard, $\mathbf{i} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. O linie de câmp, aadică o dreaaptă particulară se obţine impunând condiţia ca ea să treacă printr-un punct dat. De exemplu, dacă se cere ca aceasta să treacă prin $Q(3,-2,4)$, linia de câmp respectivă va avea ecuaţiile

$$(d)\ :\ x-3 = y+2 = z-4.$$
