10. Integrale curbilinii. Integrale Multiple.

Succinte preliminarii teoretice (+ exemple)

Există două concepte (sau tipuri) de integrale curbilinii. Ambele se definesc pe o anumită curbă (C) sau (Γ), situată în planul S_2 sau în spaţiul S_3. În general, curba este mărginită, în particular un arc de curbă

$$\widehat{AB} \subset (\Gamma) \subset S_k \ \ (k = \overline{2,3}). \tag{10.1}$$

10.1. Integrale curbilinii în raport cu elementul de arc

Din punct de vedere analitic (adică din perspectiva GEOMETRIEI ANALITICE & DIFERENŢIALE), se presupune că arcul de curbă sau curba din (10.1) admite o *reprezentare* de natură *parametrică* sau de altă natură. Mai exact, vectorul de poziţie al unui punct curent M are coordonatele, într-un reper cartesian $(O\,;x\,,y)$ sau $(O\,;x\,,y,\,z)$, funcţii de un patrametru real care parcurge un interval în general mărginit, dar posibil şi nemărginit. Formal,

$$M \in (\Gamma) \iff \overrightarrow{OM} \underset{\text{not}}{=} \mathbf{r}_M = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}\,,\ \ t \in I \subseteq \mathbb{R} \tag{10.2}$$

unde $\mathbf{i}\,,\mathbf{j}\,,\mathbf{k}$ sunt versorii reperului cartesian ortonormat ("reperul standard"). Cele trei funcţii-coordonate care intervin în (910.2) sunt presupuse a fi continuu derivabile pe intervalul respectiv, funcţia vector de poziţie $\mathbf{r}(t)$ fiind una injectivă, ceea ce implică faptul că orice punct $M \in (\Gamma)$ corespunde unei singure valori a parametrului $t \in I$.

Dacă $I = [a\,,b]$ este un interval compact iar

$$\Delta_n \in \mathrm{DIV}_I,\ \Delta_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\} \ \text{ cu } \ t_{i-1} < t_i \tag{10.3}$$

este o diviziune oarecare a intervalului I, atunci cele $n+1$ puncte ale diviziunii din (10.3) determină univoc $n+1$ puncte pe arcul de curbă din (10.1) :

$$\mathbf{r}(\Delta_n) = \{M_i : M_i = \mathbf{r}(t_i),\ i = \overline{0,n}\ \} \ \text{ cu } \ \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{M_{i-1}M_i} = \widehat{AB}\,. \tag{10.4}$$

Cu alte cuvinte, partiţia intervalului I parcurs de parametrul t determină o partiţie a arcului din (10.1) în sub-arce, a căror reuniune este întregul arc. Să mai observăm că termenul de partiţie aici folosit nu trebuie înţeles *stricto senso*, în sensul că două sub-intervale vecine determinate de diviziunea (10.3) pot avea extremităţi comune, la fel ca şi subarcele de pe curbă care sunt imagini ale subintervalelor prin funcţia $\mathbf{r}(t)$; evident, în

(10.4) am identificat punctul cu vectorul său de poziţie. Cu aceste precizări putem scrie

$$\boxed{\mathbf{r}([t_{i-1}, t_i]) = \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}\,,\ i = \overline{1,n}\,.} \tag{10.5}$$

Dacă $f(x, y, z)$ este o funcţie de trei variabile definită pe un domeniu (solid) $D \subset \mathbb{R}^3$ (sau $D \subset S_3$, în sens strict geometric) astfel încât

$$(\Gamma) \subset D, \tag{10.6}$$

atunci funcţiei f, funcţiei vectoriale (10.2) şi diviziunii (10.3) a intervalului I li se poate asocia o sumă integrală de tip Riemann şi anume

$$\boxed{\Sigma(f, \mathrm{r}, \bar{\Delta}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{M}_i)\, d_i,} \tag{10.7}$$

unde : $\tilde{M}_i \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ iar $d_i = \delta(M_{i-1}, M_i)$, $i = \overline{1,n}$. (10.8)

Cu alte cuvinte, $\tilde{M}_i$ este un punct "intermediar" situat pe subarcul de indice i al curbei, ceea ce nu înseamnă că el nu poate să coincidă cu una din cele două extremităţi ale acestui subarc, cel din (10.5) ; în (10.8) am notat cu δ distanţa în sens geometric dintre două puncte, dar şi (în sens de spaţiu) metric, deci d_i este distanţa dintre extremităţile sub-arcului din (10.5) sau – echivalent – lungimea segmentului de dreaptă determinate de aceste două puncte :

$$d_i = \delta(M_{i-1}, M_i) = \ell(\overline{M_{i-1}M_i}). \tag{10.9}$$

Distanţa (sau lungimea) din (10.9) se poate exprima natural ca o normă din spaţiul $\mathbb{R}^3$, norma fiind lungimea vectorilor de poziţie iar distanţa = lungimea diferenţei dintre aceştia:

$$d_i = \delta(M_{i-1}, M_i) = \|\mathbf{r}_{M_i} - \mathbf{r}_{M_{i-1}}\| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}\,, \tag{10.10}$$

unde indicii pe cele trei coordonate cartesiene identifică punctuele ale căror coordonate sunt. Evident, acestea corespund unor valori ale parametrului din diviziunea (10.3) :

$$x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i),\ z_i = z(t_i) \text{ pentru } i = \overline{0,n}. \tag{10.11}$$

În virtutea proprietăţilor mai sus menţionate ale funcţiei vectoriale $\mathbf{r}(t)$ din (10.2), punctul intermediar din (10.8) este imaginea prin această funcţie a unei valori intermediare a parametrului în intervalul de indice i, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$:

$$\tilde{M}_i = \mathbf{r}(\tau_i)\,,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{10.12}$$

Desigur, şi în (10,12) s-a identificat punctul cu vectorul său de poziţie. Se poate explicita egalitatea din (10.12) punând în evidenţă cele trei coordonate cartesiene ale sale :

$$\tilde{M}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i),\ i = \overline{1,n}\ \text{ cu } \begin{cases} \xi_i = x(\tau_i) \in [x_{i-1}, x_i]\,, \\ \eta_i = y(\tau_i) \in [y_{i-1}, y_i]\,, \\ \zeta_i = z(\tau_i) \in [z_{i-1}, z_i]\,. \end{cases} \tag{10.13}$$

Din aceste expresii (10.10) şi (10.13) rezultă că suma din (10.7) se poate scrie sub forma

$$\Sigma\,(f, \mathbf{r}, \bar{\Delta}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, d_i \underset{(10,10)}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i.\, \eta_i, \zeta_i)\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}\,. \tag{10.14}$$

Sub radicalul din (10.14) apar variaţiile pătratice ale celor trei funcţii-coordonate din (10.2), care erau presupuse a fi de clasă $\mathbf{C}^1_I$. În consecinţă, lor li se poate aplica *Teorema lui Lagrange* – a creşterilor finite, pe intervalul $[\,t_{i-1}, t_i\,]$. Fără a restrânge generalitatea, se poate presupune că valoarea intermediară a argumentului pentru cele trei funcţii-coordonate este aceeaşi, $\tau_i \in [\,t_{i-1}, t_i\,]$, iar această valoare a parametrului este cea din (10.13), care determină poziţia punctului intermediar pe arc. În consecinţă, variaţiile funcţiilor-coordonate devin

$$\begin{cases} x_i - x_{i-1} = \dot{x}(\tau_i)\,(t_i - t_{i-1})\,, \\ y_i - y_{i-1} = \dot{y}(\tau_i)\,(t_i - t_{i-1})\,, \\ z_i - z_{i-1} = \dot{z}(\tau_i)\,(t_i - t_{i-1})\,. \end{cases} \tag{10.15}$$

În fine, din (10.14) & (10.15) se obţine expresia sumei sub forma

$$\Sigma\,(f, \mathbf{r}, \bar{\Delta}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i.\, \eta_i, \zeta_i)\sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i) + \dot{z}^2(\tau_i)}\,(t_i - t_{i-1})\,. \tag{10.16}$$

Notă tehnică. Atât în (10.15) cât şi în (9.16), membrii secunzi, cele trei funcţii-coordonate apar derivate : (x dot, y dot, z dot) însă editorul **WP11** plasează punctele prea aproape de literele ce desemnează aceste funcţii ; aceasta este notaţia uzuală pentru derivatele în raport cu parametrul t.

Din (10.16) cu (10.13), rezulă că suma din (10.16) este o sumă Riemann pentru funcţia (compusă) de t

$$f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \tag{10.17}$$

şi pentru diviziunea Δ_n din ((10.3) a intervalului $[a, b]$..

Definiţia 10.1.1. Dacă există în $\mathbb{R}$ limita

$$\lim_{\nu(\Delta_n) \to 0} \Sigma(f, \mathrm{r}, \overline{\Delta}_n = \mathrm{r}(\Delta_n)) = L \tag{10.18}$$

atunci acest număr real L este, prin definiţie, *integrala curbilinie* pe curba (arcul de curbă) (Γ) din (10.1) a funcţiei $f(x, y, z)$ *în raport cu elementul de arc* ds.

Comentarii. Datorită condiţiilor de regularitate pentru funcţiile-coordonate (x, y, z), dacă norma diviziunii Δ_n tinde la 0 atunci şi norma diviziunii de pe (arcul de) curbă tinde la 0 în timp ce numărul punctelor de diviziune tinde la infinit. Am discutat acest aspect şi la definirea integralei definite cu ajutorul sumelor Riemann în secţiunea (sau capitolul) **9.2 Integrala definită**, implicaţia (9.344) de la pag. 273. Formal se poate scrie că

$$\nu(\Delta_n) \to 0 \;\Rightarrow\; [\nu(\overline{\Delta}_n) \to 0 \;\&\; n \to \infty]. \tag{10.19}$$

Noma diviziunii $\overline{\Delta}_n$ de pe curbă se poate defini ca lungimea celui mai mare (sau mai lung) sub-arc de curbă, sau ca distanţa cea mai mare dintre două puncte succesive de pe acest arc. Să mai observăm că reuniunea segmentelor de dreaptă din (10.9) constituie o linie poligonală care “aproximează” – în sens geometric – curba şi care tinde la aceasta în condiţiile din (10.19.

Integrala curbilinbie definită prin (10.18) se notează

$$\boxed{\int_{(\Gamma)} f(x, y, z)\, ds.} \tag{10.20}$$

Având în vedere discuţia care a condus la *Definiţia 10.1.1*, valoarea acestei integrale revine la integrala Riemann din funcţia (10.17), deci se poate scrie că

$$\boxed{\int_{(\Gamma)} f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\; dt.} \tag{10.21}$$

Formula (10.21), care este de fapt o propozi ţie, **P.10.1.1**, are şi o importanţă teoretică dar mai ales una practică întrucât oferă o modalitate de a calcula *integrale curbilinii în raport cu elementul de arc* (sau de speţa întâia) ca integrale Riemann. Să mai reamintim că elementul de arc ds a mai fost întâlnit la una din *aplicaţiile integralei definite* – calculul *lungimii curbelor* – aplicaţia **A.2 - G** (pag. 300), cu diferenţa că în formula (9.421) intervenea reprezentarea cartesiană explicită a unei curbe din spaţiul $\mathbb{R}^2$, la care ne vom referi în cele ce urmează. În aplicaţii (exerciţii) în care urmează a se aplica formula (10.21) este recomandabil ca – mai întâi – să se determine funcţia $f[x(t), y(t), z(t)]$, sub cea mai simplă formă posibilă, şi apoi elementul de arc

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\; dt. \tag{10.22}$$

Ex.10.1 - 1 Se cere calculului integralei

$$\int_{(\Gamma)} f(x, y, z)\, ds = \int_{(\Gamma)} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}\, ds \tag{10.23}$$

unde

$$(\Gamma): \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad \text{cu} \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z = b\,t \end{cases} \tag{10.24}$$

$$(10.23) \;\Rightarrow\; f[x(t), y(t), z(t)] = \frac{1}{a^2 + b^2 t^2}\;; \tag{10.25}$$

$$(10.24) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dot{x} = -a\sin t, \\ \dot{y} = a\cos t, \\ \dot{z} = b \end{cases} \;\Rightarrow\; ds = \sqrt{a^2 + b^2}\; dt\;; \tag{10.26}$$

$$(10.25\text{-}26) \;\Rightarrow\; \int_{(\Gamma)} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 + b^2 t^2} \sqrt{a^2 + b^2}\; dt =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 + b^2 t^2}\; dt = \frac{1}{a\,b} \sqrt{a^2 + b^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{b\,t}{a}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{a\,b} \sqrt{a^2 + b^2}\, \operatorname{arctg} \frac{2\,b\,\pi}{a}\,.$$

Curba din (10.23) se numeşte *elicea cilindrică*. Ea este,, de fapt, o spirală situată pe cilindrul de rotaţie având ca axă pe (Oz) iar raza $= a$; constanta b este pasul elicei. Această curbă se studiază, sub diverse aspecte, în cadrul GEOMETRIEI DIFERENŢIALE.

Este posibil ca o curbă spaţială (Γ) să fie definită ca intersecţia a două suprafeţe,

$$(\Gamma) = (S_1) \cap (S_2),$$

în care caz reprezentarea sa analitică poate fi de forma unui sistem de două ecuaţii implicite în cele trei variabile :

$$(\Gamma) : \begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{10.27}$$

Este posibil ca sistemul (10.27) să fie completat (sau însoţit de anumite condiţii pentru cele trei variabile, cum ar putea fi limitarea la un anumit domeniu spaţial :

$$M(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3.$$

Am prezentat definiţia şi formula de reducere la o integrală Riemann pentru integrale curbilinii pe o curbă (un arc de curbă) spaţială, situată în spaţiul 3D. În cazul în care (Γ) este o curbă plană, deci $(\Gamma) \subset S_2$ / $(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2$, formulele anterioare rămân valabile dacă se elimină a treia coordonată / al treilea versor al reperului canonic :

$$M \in (\Gamma) \iff \overrightarrow{OM} \underset{\text{not}}{=} \mathbf{r}_M = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j},\ \ t \in I \subseteq \mathbb{R} \tag{10.28}$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt. \tag{10.29}$$

În cazul în care curba este graficul unei funcţii reprezentate explicit, printr-o ecuaţie de forma

$$y = \varphi(x),\ \ x \in I \ \text{ cu } \ \varphi \in \mathbf{C}_I^1 \tag{10.30}$$

atunci

$$(\Gamma) = (G_\varphi)\ \ \&\ \ ds = \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\ dx. \tag{10.31}$$

În (10.29) & (10.30), rolul parametrului t din (10.28-30) este preluat de variabila independentă x. Expresia (10.31) a elementului de arc în această situaţie este – în esenţă – cea din aplicaţia **A.2 - G** (pag. 300), cu diferenţa că în formula (9.421) apărea notaţia f pentru funcţia al cărei grafic era curba (pentru care se punea problema calculului lungimii) în timp ce, în (10.30-31), am folosit pentru aceasta notaţia φ spre a evita confuzia cu funcţia-integrand f din (10.20-21) reduse la două dimensiuni şi la reprezentarea curbei din (10.30).

Se pot întâlni şi cazuri în care curba este reprezentată, fie în spaţiu fie în plan, prin ecuaţiii de formă implicită ; pentru cazul 3D am menţionat această situaţie anterior, cu reprezentarea din (10.27). În cazul plan, în locul unei reprezentări de forma (10.30) putem avea

$$(\Gamma):\ \Phi(x,y)=0. \tag{10.32}$$

În acest caz se poate încerca deducerea unei reprezentări prin ecuaţie explicită ca în (10.29) sau chiar a unei reprezentări parametrice de forma (10.28). De exemplu, dacă (Γ) este semicercul superior al cercului centrat în origine de rază $= a$ atunci el admite cele trei reprezentări analitice echivalente de mai jos :

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y\ge 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{a^2-x^2} \\ x\in[-a,a]\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbf{r}(t)=a\sin t\,\mathbf{i}+a\cos t\,\mathbf{j} \\ t\in[0,\pi].\end{cases}$$

Urmează două exemple de calcul al integralelor curbilinii pe (arce de) curbe plane.

Ex.10.1 – 2 Se cere calcului integralei

$$\int_{(\Gamma)} y\,ds,\quad \text{unde}\quad (\Gamma):\ \begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t\end{cases}\quad \text{cu}\ \ t\in[0,\pi/4]. \tag{10.33}$$

$$(10.32)\ \Rightarrow\ \begin{cases} \dot{x}=-3a\cos^2 t\sin t, \\ \dot{y}=\ \ 3a\sin^2 t\cos t\end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ ds=3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\ dt=3a\cos t\sin t\,dt. \tag{10.34}$$

$$(10.33\text{-}34)\quad \Rightarrow\quad \int_{(\Gamma)} y\,ds=3a^2\int_0^{\pi/4}\sin^4 t\cos t\,dt=\frac{3a^2}{5}\left[\sin^5 t\right]_0^{\pi/4}=\frac{3a^2}{20\sqrt{2}}.$$

Ex.10.1 – 3 $$\int_{(C)} xy\,ds,\quad (C):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\ \text{ cu }\ x\ge 0\ \&\ y\ge 0. \tag{10.35}$$

Din GEOMETRIA ANALITICĂ se ştie că această curbă este o elipsă de semiaxe a & b raportată la axele sale de simetrie (ca axe ale reperului cartesian ortonormat sau standard). Restricţia care apare asupra celor două variabile limitează arcul de elipsă la primul cadran al reperului $(O;x,y)$. Dar reprezentarea analitică implicită din enunţ poate fi înlocuită cu una parametrică, mai convenabilă din punctul de vedere al expresiei elementului de arc şi – implicit – al calculului integralei :

$$(C):\ \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \text{cu} \quad t \in [0, \pi/2]. \tag{10.36}$$

$$(10.36) \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt\,; \tag{10.37}$$

$$(10.36\text{-}37) \quad \Rightarrow \quad \int_{(C)} x\,y\,ds = a\,b\int_0^{\pi/2} \cos t\,\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= a\,b\int_0^{\pi/2} \cos t\,\sin t\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}\,dt\,. \tag{10.38}$$

În integrala din (10.38) se poate aplica substituţia

$$(a^2 - b^2)\sin^2 t = u \;\Rightarrow\; du = 2(a^2 - b^2)\cos t\,\sin t\,dt \;\Rightarrow \tag{10.39}$$

$$\Rightarrow\; \cos t\,\sin t\,dt = \frac{1}{2(a^2 - b^2)}\,du\,. \tag{10.40}$$

$$(10.39) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \;\Rightarrow\; u = 0, \\ x = \pi/2 \;\Rightarrow\; u = a^2 - b^2; \end{cases} \tag{10.41}$$

(10.38), (10.40) & (10.41) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \int_{(C)} x\,y\,ds = \frac{a\,b}{2(a^2 - b^2)}\int_0^{a^2 - b^2} \sqrt{u + b^2}\,du =$$

$$= \frac{a\,b}{3(a^2 - b^2)}\left[(u + b^2)^{3/2}\right]_0^{a^2 - b^2} = \frac{a\,b}{3(a^2 - b^2)}(a^3 - b^3) = \frac{a\,b\,(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}\,.$$

Încheiem acest set de exemple cu cel al unei integralei curbilinii pe *o curbă plană dar situată în spaţiu.* Curba este definită ca intersecţie a două suprafeţe - v. (10.27).

Ex.10.1 - 4

$$\int_{(C)} x^2 y^2 z^2 ds, \quad (C):\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y = 0. \end{cases} \tag{10.42}$$

Evident, din punct de vcedere geometric, curba (C) este un *cerc meridian* al sferei de rază 1 centrată în origine, situat în planul vertical de ecuaţie $(x + y = 0)$. Se poate căuta o reprezentare parametrică a acestei curbe, de exemplu eliminând variabila y din sistemul ce caracterizează analitic pe (C) în (10.42).

$$(C):\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y=0. \end{cases} \Rightarrow\ 2x^2+z^2=1. \tag{10.43}$$

Din punct de vedere geometric (GEOMETRIA ANALITICĂ a suprafeţelor cuadrice), ecuaţia (10.43) reprezintă un cilindru eliptic având pe (Oy) ca axă de simetrie, dar el este secţionat prin planul $(x+y=0)$. Se poate alege x ca variabilă independentă, în rolul parametrului t dintr-o ecuaţie a unei curbe spaţiale de forma (10.2) :

$$(C):\ \begin{cases} y=-x, \\ z^2=1-2x^2, \end{cases} \Rightarrow\ \begin{cases} y=-x, \\ z=\pm\sqrt{1-2x^2}. \end{cases} \tag{10.44}$$

Totuşi, această modalitate de parametrizare a cercului (C) este discutabilă întrucât este mai dificil de luat în considerare parcurgerea întregului cerc : ar trebui ca acesta să fie descompus ca reuniunea dintre semicercul superior şi cel inferior, cu cele douâ semne distincte (opuse) ale variabilei z din (10.44).

O altă parametrizare posibilă este :

$$(C):\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ z=\sin t \ \text{ cu } \ t\in[0,2\pi]\,; \tag{10.45}$$

Se poate constata că cele cele trei variabile ca funcţii de t verifică ecuaţiile (10.43).

$$(10.45)\ \Rightarrow\ ds=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=dt. \tag{10.46}$$

(10.45) & (10.46) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \int\limits_{(C)} x^2y^2z^2ds=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos^4 t\,\sin^2 t\,dt=\frac{1}{16}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{64}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t-\cos 4t-\cos 4t\cos 2t)\,dt=\frac{2\pi}{64}=\frac{\pi}{32}. \tag{10.47}$$

În dezvoltarea integralei din (10.47), în afară de primul termen care îi dă şi valoarea finală vor mai apărea şi alte patru integrale având ca primitive multipli de $\sin 4t$, $\sin 2t$ şi $\sin^3 2t$, ale căror variaţii între cele două limite de integrare sunt nule. Se recomandă cititorilor detalierea calculelor.

10.1 A Integrale curbilinii în raport cu elementul de arc - Exerciţii

10.1 A - 1 Se cere calculul integralelor ce urmează pe curbele indicate.

1A-1.1 $I_1 = \int_{(C)} y^5\, ds\,;\qquad (C):\ y = x^4/4,\ x \in [0,2].$

1A-1.2 $I_2 = \int_{(C)} y\sqrt{1-y}\, ds\,;\ (C): \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}\ t \in [0, \pi/2].$

1A-1.3 $I_3 = \int_{(C)} x^2 y^2\, ds\,;\qquad (C): \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}\ t \in [0, 2\pi].$

1A-1.4 $I_4 = \int_{(C)} z(x^2+y^2)\, ds\,;\ (C): \begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \\ z = t, \end{cases}\ t \in [0,1].$

1A-1.5 $I_5 = \int_{(C)} (x+y+z)\, ds\,;\ (C): \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases}\ t \in [0, \pi/2].$

1A-1.6 $I_6 = \int_{(C)} xy^2 z\, ds\,;\qquad (C): \begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{8t^3}/3, \\ z = t^2/2, \end{cases}\ t \in [0,1].$

Răspunsuri şi recomandări de rezolvare

1A-1.1 $ds = \sqrt{y^6+1}\, dy\,;\quad I_1 = \int_0^2 y^5\sqrt{y^6+1}\, dy = \ldots = \frac{1}{9}(65^{3/2}-1).$

A se detalia calculele.

1A-1.2 $ds = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 2\,|\sin(t/2)|\, dt\,;$

$$I_2 = \ldots = 2\int_0^{\pi/2} |\sin t|\cdot|\sin(t/2)|\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\sin^2(t/2)\cdot\cos(t/2)\,dt = \frac{4}{3\sqrt{2}}\,.$$

A se detalia calculele.

1A-1.3 Din ecuaţiile parametrice ale curbei se deduce $ds = 3a\,|\sin t\cos t|\,dt$;

$$I_3 = 3a\int_0^{2\pi} a^4\sin^6 t\cos^6 t\,|\sin t\cos t|\,dt = \frac{3a^5}{128}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|^7 dt\,. \tag{10.48}$$

Întrucât funcţia de sub integrala din (10.48) îşi schimbă expresia în punctele $\pi/2$ şi $3\pi/2$, integrala trebuie scrisă ca sumă de 3 integrale pe cele 3 intervale determinate de aceste puncte. Utilizând formula

$\sin^2 2t = 1 - \cos^2 2t$ şi substituţia $\cos 2t = u$

în fiecare din cele integrale mai sus menţionate se ajunge la integrala Riemann

$$I_3 = \frac{3a^5}{64}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^3\,du = \ldots = \frac{3a^5}{70}\,.$$

1A-1.4 $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \\ z = t \end{cases} \Rightarrow\ ds = \sqrt{2+t^2}\,dt\,;\quad I_4 = \int_0^1 t^3(2+t^2)^{1/2}\,dt\,.$

Această integrală este una iraţională binomă şi poate fi raţionalizată cu substituţia Čebyšev adequată. Se va ajunge la

$$I_4 = -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}\,.$$

Cititorii interesaţi vor putea detalia calculele.

1A-1.5 Din reprezentarea parametrică a curbei se obţine $ds = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$;

$$I_5 = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}[a(\cos t + \sin t) + b\,t]\,dt\,. \tag{10.49}$$

Intergrala din (10.49) se decompune în sumă de două (sau trei) integrale, cu primitive imediate. Se va ajunge la $I_5 = (2a + b\pi^2/8)\sqrt{a^2+b^2}$. A se detalia calculele.

1A-1.6 $\quad ds = (t+1)\,dt\,; \quad I_6 = \dfrac{4}{9}\displaystyle\int_0^1 t^6(t+1)\,dt\,.$ (10.50)

Integrala din (10.50) este una imediată şi se ajunge la valoarea $I_6 = 5/42$. A se detalia calculele.

10.2. Integrale curbilinii în raport cu coordonatele

Construcţia acestui al doilea tip de integrale curbilinii pleacă tot de la un arc de curbă netedă ca cea din (10.1). Dacă acest arc de curbă se proiectează pe trei intervale, fiecare situat pe câte una din cele trei axe de corrdonate, putem scrie

$$\begin{cases} \mathrm{Proj}_{(Ox)}(\overset{\frown}{AB}) = [\alpha_1, \beta_1]\,, \\ \mathrm{Proj}_{(Oy)}(\overset{\frown}{AB}) = [\alpha_2, \beta_2]\,, \\ \mathrm{Proj}_{(Oz)}(\overset{\frown}{AB}) = [\alpha_3, \beta_3]\,. \end{cases} \tag{10.51}$$

În ipoteza că arcul de curbă admite o reeprezentare parametrică de forma (10.2), el fiind astfel imaginea prin funcţia vector de poziţie a intervalui cumpact $I = [a, b]$, o diviziune oarecare

$$\Delta_n \in \mathrm{DIV}_I\,,\ \Delta_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\} \ \text{cu} \ \ t_{i-1} < t_i \tag{10.52}$$

va determina univoc (sau va induce) o diviziune pe arcul de curbă din (10.1),

$$\mathbf{r}(\Delta_n) = \{M_i : M_i = \mathbf{r}(t_i)\,,\ i = \overline{0, n}\,\} \ \text{cu} \ \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\frown}{M_{i-1}M_i} = \overset{\frown}{AB}\,. \tag{10.53}$$

dar şi trei alte diviziuni, câte una pe fiecare din cele trei intervale din (10.51):

$$\begin{cases} \Delta_x \in \mathrm{DIV}_{[\alpha_1,\beta_1]}\,,\ \Delta_x = \{\alpha_1 = x(a), x_1 = x(t_1), \ldots, x_n = \beta_1 = x(b)\}\,, \\ \Delta_y \in \mathrm{DIV}_{[\alpha_2,\beta_2]}\,,\ \Delta_y = \{\alpha_2 = y(a), y_1 = y(t_1), \ldots, y_n = \beta_2 = y(b)\}\,, \\ \Delta_z \in \mathrm{DIV}_{[\alpha_3,\beta_3]}\,,\ \Delta_z = \{\alpha_3 = z(a), z_1 = z(t_1), \ldots, z_n = \beta_3 = z(b)\}\,. \end{cases} \tag{10.54}$$

Fiecare din aceste trei diviziuni va avea câte o normă (lungimea celui mai mare interval), dar se poate considera şi o normă "globală" :

$$\nu(\Delta_x) = \max_i (x_i - x_{i-1}), \quad \nu(\Delta_y) = \max_i (y_i - y_{i-1}), \quad \nu(\Delta_z) = \max_i (z_i - z_{i-1}) \; ; \tag{10.55}$$

$$\nu(\Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_z) = \max_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}\,. \tag{10.56}$$

Norma din (10.56) este o “normă diagonală” care coincide cu distanţa din spaţiul metric $\mathbb{R}^3$. Proprietăţile de regularitate ale celor trei funcţii coordonate din reprezentarea parametrică (10.2) implică echivalenţa

$$\nu(\Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_z) \to 0 \iff [\nu(\Delta_x) \to 0 \;\; \& \;\; \nu(\Delta_y) \to 0 \;\; \& \;\; \nu(\Delta_x) \to 0] \iff \nu(\Delta_n) \to 0\,.$$

În acelaşi timp, aceste norme tind la $0 \iff n \to +\infty$.

Fie acum trei funcţii scalare de câte trei variabile x, y, z definite pe un acelaşi domeniu 3-dimensional $D = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times [\alpha_3, \beta_3]$ care conţine arcul de curbă din (10.1). Acestea se notează (de exemplu) prin P, Q, R şi pot fi considerate drept componentele scalare ale unei funcţii vectoriale

$$\mathbf{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + R(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}\,. \tag{10.57}$$

Fiecăreia dintre aceste trei funcţii şi diviziunii corespunzătoare componentei respective din (10.54) i se poate asocia câte o sumă integrală de tip Riemann. O scriem numai pe prima dintre ele.

$$\Sigma(P, \tilde{\mathrm{r}}, \Delta_x) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{10.58}$$

unde au semnificaţia din (10.8) - (10.9). La fel ca şi în cazul definirii (construirii) integralelor curbilinii în raport cu elementul de arc, o sumă de forma (10.58) corespunde, prin funcţia vector de poziţie $\mathbf{r}(t)$, unei diviziuni Δ_n a intervalului $[a, b]$ parcurs de parametrul t şi unei alegeri a punctelor intermediare, ca în (10.12) - (10.13). Aşadar, suma din (10.58) dar şi celelalte două (pentru componentele a 2-a şi a 3-a) se pot rescrie sub forma

$$\Sigma(P, \mathrm{r}, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\dot{x}(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\,, \tag{10.59}$$

$$\Sigma(Q, \mathrm{r}, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\dot{y}(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\,, \tag{10.60}$$

$$\Sigma(R, \mathrm{r}, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i . \eta_i, \zeta_i)\,\dot{z}(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\,. \tag{10.61}$$

Să mai observăm că, în principiu, derivatele care intervin în membrii secunzi din (10.59) - (10.61) ar trebui luate în valoare absolută dar – de obicei – se consideră că atunci când parametrul t parcurge intervalul $[a, b]$ de la stânga la dreapta, punctul curent de pe curbă o parcurge pe aceasta în sens pozitiv şi deci cele trei derivate sunt pozitive.

Sumele integrale din (10.59) - (10.61) sunt asociate celor trei termeni ai produsului scalar dintre funcţia vectorială din (10.57) şi variaţia (sau diferenţiala) funcţiei vector de poziţie $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$:

$$d\mathbf{r}(t) = dx(t)\,\mathbf{i} + dy(t)\,\mathbf{j} + dz(t)\,\mathbf{k} = [\dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j} + \dot{z}(t)\,\mathbf{k}]\,dt\,; \tag{10.62}$$

(10.57) & (10.62) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r} = [P(x, y, z)\,\dot{x}(t) + Q(x, y, z)\,\dot{y}(t) + R(x, y, z)\,\dot{z}(t)]\,dt\,. \tag{10.63}$$

Desigur, argumentele x, y, z ale celor trei funcţii din (10.63) sunt ele însele funcţii de parametrul t dar pe acesta nu l-am mai pus în evidenţă spre a nu încărca notaţia.
Se poate nota

$$\Sigma(\mathbf{V}\cdot d\mathbf{r}, \mathrm{r}, \Delta_{x,y,z} = \mathrm{r}(\Delta_n)) = \Sigma(P, \mathrm{r}, \Delta_n) + \Sigma(Q, \mathrm{r}, \Delta_n) + \Sigma(R, \mathrm{r}, \Delta_n)\,. \tag{10.64}$$

Dependenţa acestei sume şi de curba (Γ) (deci nu numai de funcţiile componente ale lui $\mathbf{V}$ şi de cele două diviziuni – cea după t a intervalului $[a, b]$ şi diviziune 3D de pe cele trei axe de coordonate) este pusă în evidenţă prin al doilea argument $\mathbf{r}$ din membrul stâng al egalităţii (10.64).

Definiţia 10.2.1. Dacă există în $\mathbb{R}$ limita

$$\lim_{\nu(\Delta_n)\to 0} \Sigma(\mathbf{V}, \mathrm{r}, \Delta_{x,y,z} = \mathrm{r}(\Delta_n)) = L \tag{10.64}$$

atunci acest număr real L este, prin definiţie, *integrala curbilinie* pe curba (arcul de curbă) (Γ) din (10.1) a funcţiei $\mathbf{V}(x, y, z)$ *în raport cu coordonatele* x, y, z.

Această integrală, definită prin limita din (10.64), se notează

$$\boxed{\int_{(\Gamma)} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(\Gamma)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz\,.} \tag{10.65}$$

P.10.2.1 *Dacă există integrala curbilinie pe curba* (*arcul de curbă*) (Γ) din (10.1) a *funcţiei* $\mathbf{V}(x, y, z)$ *în raport cu coordonatele* x, y, z *– definită pri n limita din* (10.64) *– ea poate fi calculată ca o integrală Riemann din integrandul* (10.63) :

$$\boxed{\int_{(\Gamma)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b [P(x,y,z)\,\dot{x}(t) + Q(x,y,z)\,\dot{y}(t) + R(x,y,z)\,\dot{z}(t)]\,dt.} \tag{10.66}$$

Observaţii. ***O*.10.2.1** Ca şi în cazul integralelor curbilinii în raport cu elementul de arc, aceste integrale în raport cu coordonatele au fost definite în cazul 3-dimensional. Dacă arcul de curbă pe care se consideră integrala aeste situat în planul $\mathbb{R}^2$, atunci formulele de nmai sus se adaptează uşor prin eliminarea celei de a treia variabile, respectiv a celei de a treia componente R a funcţiei vectoriale $\mathbf{V}$. Formulele (10.65) şi (10.66), reduse la 2 dimensiuni, devin

$$\boxed{\int_{(\Gamma)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(\Gamma)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,.} \tag{10.67}$$

$$\boxed{\int_{(\Gamma)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \Big[P[x(t),y(t)]\,\dot{x}(t) + Q[x(t),y(t)]\,\dot{y}(t)\Big]dt\,.} \tag{10.68}$$

În (10.68) am pus în evidenţă şi variabila t ca argument al funcţiilor coordonate.

***O*.10.2.2** În aplicaţiile practice, pentru a calcula o asemenea integrală curbilinie se derivează cele trei funcţii coordonate ale vectorului de poziţie, se determină funcţia-integrand din (10.63-64) şi se aduce la forma cea mai simplă, apoi se calculează integrala Riemann (10.66) cu metodele cunoscute (v. secţiunea / capitolul **9.2**).

10.2 E Exemple de integrale curbilinii în raport cu coordonatele

Ex.10.2 - 1

$$\int_{(C)} xy\,dx - y^2\,dy\,, \qquad (C):\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases} \text{cu } t \in [0,1]. \tag{10.69}$$

$$\int_{(C)} xy\,dx - y^2\,dy \underset{(10.68,69)}{=} \int_0^1 (t^5 2t - t^6 3t^2)\,dt = \int_0^1 (2t^6 - 3t^8)\,dt = \frac{2}{7} - \frac{3}{9} = -\frac{1}{21}\,.$$

□

Ex.10.2 - 2 $\displaystyle\int_{(C)} x\,dx + xy\,dy + xyz\,dz, \quad (C): \begin{cases} x = e^{t}, \\ y = e^{-t}, \\ z = \sqrt{2}\,t \end{cases}$ cu $t \in [0,1]$. (10.70)

$$\int_{(C)} x\,dx + xy\,dy + xyz\,dz \underset{(10.66,70)}{=} \int_0^1 [e^{2t} - e^{-t} + (\sqrt{2})^2 t]\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2t} + e^{-t} + t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + e^{-1} + 1 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}.$$

10.2 A Integrale curbilinii în raport cu coordonatele - Exerciţii

10.2 A - 1 Se cere calculul integralelor ce urmează pe curbele indicate.

2 A - 1.1 $\displaystyle J_1 = \int_{(C)} \sqrt{1-x}\,dx + x\,dy; \quad (C): x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \geq 0.$

Arcul de elipsă este parcurs în sens direct (de la $A(1,0)$ la $A'(-1,0)$).

2 A - 1.2 $\displaystyle J_2 = \int_{(C)} \frac{dx}{2a+y} - \frac{dy}{a+x}, \quad (C): x^2 + y^2 + 2ay = 0,\ x + y \geq 0,$

extremitatea finală a semicercului în punctul $A(a,-a)$.

2 A - 1.3 $\displaystyle J_3 = \int_{(\Gamma)} (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$; (Γ) este triunghiul cu vârfurile în punctele $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,2)$ parcurs în sens direct.

2 A - 1.4 $\displaystyle J_4 = \int_{(C)} (1+y)\,dx + x\,dy; \quad (C): x = (y+1)^{1/2},\ y \in [0,1].$

2 A - 1.5 $\displaystyle J_5 = \int_{(C)} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz;$

$$(C): \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

2A-1.6 $J_6 = \int_{(C)} x\,dx + y\,dy + z\,dz$; $(C): \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \\ z = c\,t, \end{cases}$ $t \in [0, \pi/2]$.

Răspunsuri şi recomandări de rezolvare

2A-1.1 Curba este o elipsă pentru care se poate folosi reprezentarea parametrică $x = \cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Se aplică formula (10.68) şi se găseşte $J_1 = \pi$.

2A-1.2 Ecuaţia cercului se poate scrie sub forma echivalentă

$$(C): x^2 + (y + a)^2 = a^2 \iff (x = a\cos t,\ y + a = a\sin t,\ t \in [0, \pi/2]).$$

În integrala care rezultă se poate aplica substituţia $\mathrm{tg}(t/2) = u$ şi se ajunge la $J_2 = 2 - \pi$.

2A-1.3 Integrala se descompune ca sumă de trei integrale, fiecare pe câte o latură a triunghiului.

Pe $\overline{OA}$, $x = y \Rightarrow dx = dy$; pe $\overline{AB}$, $y = 2 - x \Rightarrow dx = -dy$; pe $\overline{BO}$, $dx = 0$. Limitele de variaţie pentru variabila independentă aleasă (sau care rezultă ca atare în mod necesar) vor fi găsite de către cititor. Desenarea unei ficuri poate fi utilă. În final se găseşte $J_3 = -2$.

2A-1.4 Se reduce integrala la o integrală Riemann în variabila y; $J_4 = 2\sqrt{2} - 1$.

2A-1.5 Curba este prima spiră a elicei cilindrice de rază a şi pas b (întâlnită şi la integralele de prima speţă). $J_5 = -2\pi a(a + b)$.

2A-1.6 Curba este primul sfert spiră a elicei eliptice (situată pe un cilindru eliptic). Se aplică formula (10.66) şi se ajunge la $J_6 = \dfrac{1}{8}(4b^2 + \pi^2 c^2 - 4a^2)$.
