9. Integrale din functii definite în $\mathbb{R}$

9.2. Integrale definite (Integrala Riemann)

Succinte preliminarii teoretice (+ exemple)

Diviziuni ale intervalelor mărginite din $\mathbb{R}$.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ un interval mărginit din mulţimea numerelor reale. Prin *diviziune* a intervalului I se înţelege o mulţime (în general finită) de puncte situate în acest interval. Dacă includem în diviziune şi extremităţile intervalului, o asemenea diviziune de $n + 1$ puncte va determina, pe intervalul I, n subintervale :

$$\Delta_n = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \subset I \subset \mathbb{R}, \tag{9.328}$$

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n . \tag{9.329}$$

Punctele din (9.228-229) determină cele n subintervale anterior menţionate :

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \ k = \overline{1, n} \ \ \& \ \bigcup_{k=1}^{n} I_k = I = [a, b]. \tag{9.330}$$

Subintervalele din (9.230) ale diviziunii sunt “aproape disjuncte”, în sensul că două intervale vecine nu au în comun decât un punct : $I_k \cap I_{k+1} = \{x_k\}$. *Lungimea* unui interval $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ este

$$\ell(I_k) = x_k - x_{k-1}, \ k = \overline{1, n}. \tag{9.331}$$

Putem nota cu DIV_I mulţimea tuturor diviziunilor intervalului.

O diviziune Δ_n poate fi arbitrară în sensul că nu se impune nici o condiţie asupra punctelor sau subintervalelor sale, sau poate fi una particulară. De exemplu, diviziunea echidistantă a intervalului $I = [a, b]$ are punctele situate la distanţe egale unele de altele; distanţa dintre două puncte succesive ale unei astfel de diviziuni este exact a n-a parte din lungima intervalului, adică

$$(\forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}) \ \ \ell(I_k) = \frac{b - a}{n} . \tag{9.332}$$

Prin norma unei diviziuni de forma (9.228-229) se înţelege lungimea celui mai mare interval ; notaţia specifică şi definiţia formală sunt

$$\nu(\Delta_n) = \max_{k=1}^{n} \ell(I_k) = \max\{\ell(I_1), \ell(I_2), \dots, \ell(I_n)\}. \tag{9.333}$$

Pentru cazul particular al divizziunii echidistante din (9.342), norma acesteia coincide cu lungimea comună a tuturor intervalelor. Să mai observăm c ă, tot pentru această diviziune particulară, poate fi precizată expresia unui punct curent al diviziunii :

$$\Delta_n^{\mathrm{eq}} : (\forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\})\ \ x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}\,. \tag{9.334}$$

Funcţii integrabile în sens Riemann

Definiţia 9.2.1. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie reală <u>mărginită</u> pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ şi Δ_n o diviziune arbitrară a intervalului, cu intervalele din (9.340). Dacă se notează

$$(\forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\})\ \ m_k = \inf_{I_k} f \ \ \&\ \ M_k = \sup_{I_k} f \tag{9.335}$$

atunci *sumele Darboux*, *inferioară* respectiv *superioară*, asociate funcţiei f şi diviziunii Δ_n sunt

$$\boxed{\underline{S}(f, \Delta_n) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} m_k\,\ell(I_k)\,,\ \ \overline{S}(f, \Delta_n) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} M_k\,\ell(I_k)\,.} \tag{9.336}$$

Comentarii. Este evident că aceste două sume Darboux există pentru orice funcţie mărginită pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ şi pentru orice diviziune Δ_n a intervalului întrucât marginile funcţiei există şi sunt finite pe orice subinterval I_k precum cele din (9.340). Mai mult decât atât, dacă marginile globale (pe întregul interval) ale funcţiei sunt

$$m = \inf_{I} f \ \ \&\ \ M = \sup_{I} f \tag{9.337}$$

atunci, pentru orice diviziune Δ_n,

$$\boxed{m(b-a) \le \underline{S}(f, \Delta_n) \le \overline{S}(f, \Delta_n) \le M(b-a)\,.} \tag{9.338}$$

Această dublă (sau triplă) inegalitate a sumelor Darboux este o consecinţă imediată a definiţiei celor două margini ale unei mulţimi de numere reale, aplicată la valorile funcţiei pe întreg intervalul I, respectiv pe oricare subinterval I_k.

$$(9.337) \ \Rightarrow\ \ m = \inf f(I) \ \&\ M = \sup f(I);$$

$$I_k \subseteq I \ \Rightarrow\ f(I_k) \subseteq f(I) \ \Rightarrow\ \begin{cases} m \le m_k\,, \\ M \ge M_k. \end{cases} \tag{9.339}$$

Inegalităţile din (9.339) se pot scrie împreună, inluzând şi mulţimea valorilor funcţiei pe subintervalul de rang k :

$$m \le m_k \le f(I_k) \le M_k \le M. \tag{9.340}$$

Inegalităţile (9,340) – fără $f(I_k)$, – pot fi înmulţite cu lungimea intervalului I_k şi apoi însumate pe $\overline{1,k}$:

$$(9.340) \Rightarrow m \le m_k \le M_k \le M \Rightarrow m\,\ell(I_k) \le m_k\,\ell(I_k) \le M_k\,\ell(I_k) \le M\,\ell(I_k) \underset{(9.331)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow m(x_k - x_{k-1}) \le m_k(x_k - x_{k-1}) \le M_k(x_k - x_{k-1}) \le M(x_k - x_{k-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \le M\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \underset{(9.336)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{m(b-a) \le \underline{S}(f,\Delta_n) \le \overline{S}(f,\Delta_n) \le M(b-a).} \tag{9.341}$$

Inegalitatea (9.341) este una importantă întrucât ea exprimă nu numai o relaţie de ordine între cele două sume Darboux ci şi două bariere – inferioară şi superioară – pentru acestea. Se va vedea mai jos, după definirea noţiunii de integrală, că acestea sunt şi bariere pentru valoarea integralei din f pe intervalul $I = [a, b]$.

Definiţia 9.2.2. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie reală mărginită pe un interval $I = [a, b]$. Funcţia f este *integrabilă în sens Riemann-Darboux* pe acst interval dacă

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon) = \delta > 0)(\forall\ \Delta_n \in \mathrm{DIV}_I)\ \ \nu(\Delta_n) < \delta \Rightarrow \tag{9.342}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{S}(f,\Delta_n) - \underline{S}(f,\Delta_n) < \varepsilon.} \tag{9.343}$$

Comentarii. Această definiţie mai este cunoscută şi drept *criteriul de integrabilitate al lui Darboux*. Se va vedea că aceste condiţii (9.342) - (9.343) sunt echivalente cu definiţia integrabilităţii în sens Riemann propriu-zis, în care însă intervine şi un număr real care este chiar valoarea integralei.

Se mai poate constata că cele două sume Darboux din (9.336) pot fi considerate drept termenii a două şiruri reale. Pe de altă parte, implicaţia din această definiţie sugerează noţiunea de limită de la şiruri reale. Inegalitatea (9.343) afirmă, în fapt, că cele două şiruri ale sumelor Darboux au o limită comună, atunci când norma diviziunii tinde la zero. Dar să mai observăm că

$$[\nu(\Delta_n) \to 0] \Rightarrow (n \to +\infty). \tag{9.344}$$

Într-adevăr, dacă diviziunea ar păstra un număr finit de puncte, respectiv de subintervale, norma sa n-ar putea tinde la zero fiind egală cu lungimea celui mai mare interval. Implicaţia inversă celei din (9.344) nu este în general valabilă : ar fi (teoretic) posibil ca numărul punctelor unei diviziuni să crească la infinit dar ea să păastreze un număr de intervale de o lungime care să nu tindă la zero. Pe baza implic aţiei din (9.344) şi a comentariilor ce au precedat-o, putem interpreta definiţia (9.342) - (9.343) sub forma

$$\lim_{\nu(\Delta_n) \to 0 \;\&\; n \to +\infty} \left[\overline{S}(f, \Delta_n) - \underline{S}(f, \Delta_n) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\nu(\Delta_n) \to 0 \;\&\; n \to +\infty} \underline{S}(f, \Delta_n) = \lim_{\nu(\Delta_n) \to 0 \;\&\; n \to +\infty} \overline{S}(f, \Delta_n).} \tag{9.345}$$

Valoarea comună a celor două limite din (9.345) este însăşi valoarea integralei din f pe intervalul $I = [a, b]$, care se notează

$$\boxed{\int_a^b f \text{ sau } \int_a^b f(x)\,dx.} \tag{9.346}$$

Exemplul 9.2.1. Fie funcţia de gradul II $f(x) = x^2$ şi intervalul $I = [0, 2]$. O diviziune oarecare Δ_n a intervalului va fi de forma $\Delta_n = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = 2\} \subset [0, 2]$. Având în vedere monotonia crescătoare a funcţiei pe întregul interval, implicit pe subintervale (sau pe intervalele parţiale, cum sunt ele numite în [Gh. Sireţchi 1985, vol. 1, pp. 308-309]), marginile funcţiei pe fiecare subinterval $I = [0, 2]$.

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \; k = \overline{1, n}$$

vor coincide cu valorile lui f în extremităţile acestuia :

$$m_k = f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2, \; M_k = f(x_k) = x_k^2, \; k = \overline{1, n}. \tag{9.347}$$

Cu marginile parţiale (care sunt, de fapt, extreme locale) din (9.347), cele două sume Darboux pentru funcţia şi intervalul considerat sunt

$$\underline{S}(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 (x_k - x_{k-1}), \; \overline{S}(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 (x_k - x_{k-1}). \tag{9.348}$$

Diferenţa (în valoare) absolută a sumelor din (9.348) este

$$\left| \overline{S}(f, \Delta_n) - \underline{S}(f, \Delta_n) \right| = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k-1}^2)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^2 (x_k + x_{k-1}).$$

Conform cu definiţia (9.333) a normei diviziunii, lungimea fiecărui interval va fi majorată de această normă $\nu(\Delta_n)$ şi vom putea scrie că

$$\left|\overline{S}(f,\Delta_n) - \underline{S}(f,\Delta_n)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta_n)^2 (x_k + x_{k-1}). \tag{9.349}$$

Suma care apare ca factor la fiecare termen din (9.349) poate fi şi ea majorată cu 4 având în vedere intervalul în care sunt situate punctele. Aşadar,

$$(9.349) \Rightarrow \left|\overline{S}(f,\Delta_n) - \underline{S}(f,\Delta_n)\right| \leq \nu(\Delta_n)^2 \sum_{k=1}^{n} (x_k + x_{k-1}) < 4n\,\nu(\Delta_n)^2. \tag{9.350}$$

Se poate presupune că

$$\lim_{n \to \infty} 4n\,\nu^2(\Delta_n) = 0. \tag{9.351}$$

Dacă această ipoteză (9.351) n-ar fi verificată ar exista un $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ 4n\,\nu^2(\Delta_n) \geq \varepsilon_0 \Rightarrow n \leq \frac{4\,\nu^2(\Delta_n)}{\varepsilon_0},$$

inegalitate imposibilă pentru orice număr natural, cu atât mai mult cu cât se presupune că norma diviziunii poate fi oricât de mică. Aşadar limita din (9.351) se verifică şi – ţinând cont de inegalitatea (9.350) – rezultă că diferenţa dintre sumele Darboux tinde la zero, deci funcţia considerată este integrabilă (în sens Riemann-Darboux).

Pee baza acestei concluzii, orice sumă Darboux va avea ca limită (în sensul limitelor din (9.345)) valoarea integralei. Putem deci alege (abia acum) o diviziune particulară, cea mai comodă fiind *cea echidistantă*, iar limita oricăreia dintre cele două sume Darboux pentru această diviziune va fi egală cu valoarea integralei.

$$(9.352)\ \&\ \Delta_n^{\mathrm{eq}} = \left\{\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, \frac{2n}{n} = 2\right\} \Rightarrow \tag{9.352}$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,\Delta_n^{\mathrm{eq}}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{n}k\right)^2 \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{8}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{9.353}$$

(9.353) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \overline{S}(f,\Delta_n^{\mathrm{eq}}) = 4\lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{8}{3} = \int_0^2 x^2\,dx. \tag{9.354}$$

Valoarea din (9.354) va aputea fi regăsită pe baza *formulei lui Newton-Leibniz* (care implică primitiva), după ce aceasta va fi prezentată. Să mai observăm că în limitele din

(9.354) nu s-a mai precizat că şi norma diviziunii echidistante tinde la 0 pentru $n \to \infty$, aceasta fiind o proprietate evidentă pentru orice diviziune echidistantă.

□

Sume Riemann şi definiţia Riemann pentru integrala definită

Pentru o funcţie f mărginită pe un interval $[a,b]$ şi pentru o diviziune arbitrară Δ_n a intervalului se poate considera un vector de *puncte intermediare*, câte un punct în fiecare subinterval al diviziunii :

$$\Xi_{\Delta_n} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \text{ cu } (\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\})\ \xi_k \in J_k = [x_{k-1}, x_k]. \tag{9.355}$$

Definiţia 9.2.3. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie reală mărginită pe un interval $J \subseteq \mathbb{R}$ şi Δ_n o diviziune arbitrară a intervalului, cu intervalele din (9.355). Pentru orice alegere a punctelor intermediare Ξ_{Δ_n} de forma (9.355). *Suma Riemann* corespunzătoare este

$$\boxed{S(f;\Delta_n,\Xi_{\Delta_n}) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\ell(J_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}).} \tag{9.356}$$

Comentarii. Atât sumele Darboux din (9.336) cât şi sumele Riemann de forma (9.356) se numesc *sume integrale*. Ele sunt asociate unei funcţii mărginite pe un interval, unei divizziuni Δ_n acestui interval şi – în cazul unei sume Riemann – unei alegeri Ξ_{Δ_n} a punctelor intermediare. În unele manuale / tratate de Analiză matematică, sumele Riemann se mai notează şi

$$\sigma_{\Delta_n}(f),$$

dar în notaţia din (9.356) este pus în evidenţă şi vectorul punctelor interemediare.

Pentru sumele Darboux am formulat şi am justificat tripla inegalitate (9.338). Aceasta poate fi extinsă prin introducerea unei sume Riemann care, din punctul de vedere al ordinii pe $\mathbb{R}$, se situează între cele două sume Darboux. Din inegalitatea (9.340) rezultă că

$$(\forall\, \Delta_n \in \mathrm{DIV}_I)\,(\forall\, \Xi_{\Delta_n})\ \ m \le m_k \le f(\xi_k) \le M_k \le M. \tag{9.357}$$

Prrocedând ca la stabilirea inegalităţilor (9.338), adică înmulţind cei 5 membri ai inegalităţii quadruple din (9.357) cu lungimea intervalului şi sumând după k se ajunge la

$$\boxed{m(b-a) \le \underline{S}(f,\Delta_n) \le S(f;\Delta_n,\Xi_{\Delta_n}) \le \overline{S}(f,\Delta_n) \le M(b-a).} \tag{9.358}$$

Inegalitatea multiplă (9.358) are o interpretare geometrică interesantă (şi importantă).

Membrii extremi, stâng şi respectiv drept, reprezintă ariile a două dreptunghiuri având ca bază segmentul $[a, b]$ de pe axa (Ox) iar ca înălţimi marginile inferioară şi superioară ale funcţiei pe acest interval. Graficul funcţiei, pe care-l putem nota G_f, este situat în drept-unghiul $[a, b] \times [m, M]$. Sumele Darboux inferioară / superioară reprezintă sumele ariilor dreptunghiurilor situate pe subintervalele diviziunii,

$$J_k \times [0, m_k] = [x_{k-1}, x_k] \times [0, m_k] \ / \ J_k \times [0, M_k] = [x_{k-1}, x_k] \times [0, M_k]. \qquad (9.359)$$

Evident, extremităţile intervalelor de pe (Oy) vor trebui inversate în cazul marginilor respective, dar ariile respective vor intra cu semnul minus în suma Darboux respectivă. Suma Riemann este şi ea o sumă de arii ale unor dreptunghiuri elementare cu aceeaşi bază dar cu înălţimea dată de valoarea funcţiei în punctul intermediar $\xi_k \in J_k$.

Preoblema semnului cu care contribuie un unumit subinterval la suma integrală respectivă va putea fi clarificată mai riguros după ce se va formula proprietatea integralei definite de aditivitate în rapport cu intervalul, împreună cu descompunere funcţiei în partea sa pozitivă minus partea sa negativă.

□

Definiţia 9.2.4 (Integrabilitatea în sens Riemann). Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie reală mărginită pe un interval $J \subseteq \mathbb{R}$. Funcţia este integrabilă în sens Riemann pe acest interval dacă există un număr real I astfel încât

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon) = \delta > 0)(\forall\ \Delta_n \in \mathrm{DIV}_I)(\forall\ \Xi_{\Delta_n})\, \nu(\Delta_n) < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|S(f; \Delta_n, \Xi_{\Delta_n}) - I| < \varepsilon.} \qquad (9.360)$$

În condiţiile implicaţiei (9.360), numărul real I este chiar valoarea integralei pe intervalul $[a, b]$ şi se scrie

$$\boxed{I = \int_a^b f \ \text{ sau } \ I = \int_a^b f(x)\, dx.} \qquad (9.361)$$

Observaţii. **1°** Spre deosebire de integrabilitatea definită cu ajutorul sumelor integrale Darboux, definiţia integrabilităţii în sens Riemann implică numărul real I care este chiar valoarea integralei. Aşadar, aplicarea *Definiţiei 9.2.4*, respectiv a implicaţiei (9.360) ar5 face necesară cunoaşterea prealabilă (sau *a priori*) a valorii integralei, sau măcar ipoteza că valoarea integralei este acest număr I. Prin urmare, aplicarea practică a definiţiei lui Riemann este posibilă mai curând pentru calculul valorii unei integrale decât pentru stabiliraea integrabilităţii unei funcţii. Integrabilitatea poate să rezulte din alte proprietăţi, de exemplu cele care se referă la clase de funcţii integrabile (cumm sunt funcţiile continue, de exemplu), iar valoarea efectivă a integralei se poate deduce sub forma unei limite similare cu cea din (9.345). De altfel, egalitatea (9.361) se poate scrie, având în vedere implicaţia (9.360), sub forma

$$\boxed{\lim_{\nu(\Delta_n) \to 0\ \&\ n \to +\infty} S(f; \Delta_n, \Xi_{\Delta_n}) = \int_a^b f = I.} \tag{9.362}$$

2° Să mai observăm că, în (9.362), alegerea punctelor intermediare Ξ_{Δ_n} dar chiar şi a diviziunii Δ_n trebuie să rămână arbitrară, în sensul că acestea sunt oarecare. Dar în practică nu pot fi considerate toate diviziunile posibile, cu atât mai puţin toţi vectorii de puncte intermediare. Formula (9.362) poate fi folosită fie spre a calcula valoarea unei anumite integrale evitând în mod deliberat celebra formulă a lui Newton-Leibniz, fie în cazul când primitiva funcţiei este (foarte) greu de obţinut sau nici nu este exprimabilă prin func ţi elementare ; acesta este cazul, de exemplu, pentru funcţii de genului lui e^{x^2}. Dar dacă se ştie că funcţiei este integrabilă, valoarea integralei poate fi determinată ca o limită de forma (9.362) chiar utilizând o diviziune particulară, de exemplu diviziunea echidistantă care este şi cea mai comodă. În această manieră am procedat în exemplul Exemplul 9.2.1 cu funcţia $f(x) = x^2$, valoarea integralei pe intervalul $[0, 2]$ fiind determinată ca limita sumei Darboux superioare pentru diviziunea echidistantă.

3° Ca probleme de notaţii, care sunt însă minore, în (9.259) şi în *Definiţia 9.2.4* am schimbat notaţia pentru interval (şi subintervalele diviziunii) de la I & I_k la J & J_k spre a evita o posibilă confuzie cu notaţia oarecum consacrată I pentru valoarea integralei. De altfel, Prof. Gh. Sireţchi foloseşte (în tratatul citat, din 1985) notaţia A pentru această valoare, probabil tocmai spre a evita o asemenea confuzie dar şi cu referire la interpretarea geometrică a integralei definite care este, efectiv, *o arie* : aria regiunii plane delimitate de axa (Ox), de graficul funcţiei G_f şi de cele două drepte verticale $(x = a)$ & $(x = b)$.

Exemplul 9.2.2. Fie funcţia $f(x) = \sin x$ şi intervalul $J = [0, \pi/2]$. Funcţia este crescătoare pe intervalul J. Sumele Darboux, pentru o diviziune oarecare Δ_n, sunt

$$\underline{S}(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} \sin x_{k-1}(x_k - x_{k-1}),\ \overline{S}(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} \sin x_k (x_k - x_{k-1}). \tag{9.363}$$

$$(9.363) \Rightarrow \overline{S}(f, \Delta_n) - \underline{S}(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} (\sin x_k - \sin x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \cos \frac{x_k + x_{k-1}}{2} (x_k - x_{k-1}). \tag{9.364}$$

În suma din (9.364) toţi factorii fiecărui termen sunt pozitivi, având în vedere şi apartenenţa punctelor de diviziune la intervalul $J = [0, \pi/2]$. Putem deci considera că diferenţa dintre cele două sume Darboux este una absolută şi putem aplica inegalitatea tringhiulară generalizată pentru valoarea absolută :

$$\overline{S}(f, \Delta_n) - \underline{S}(f, \Delta_n) \underset{(9.338)}{=} \left| \overline{S}(f, \Delta_n) - \underline{S}(f, \Delta_n) \right| \underset{(9.364)}{=}$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \cdot \cos \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) \right| \le$$

$$\le 2 \sum_{k=1}^{n} \left| \sin \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \right| \cdot |x_k - x_{k-1}| \le \tag{9.365}$$

$$\le 2 \sum_{k=1}^{n} \left| \sin \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right| \cdot |x_k - x_{k-1}| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}|^2 . \tag{9.366}$$

n (9.366) modulul cosinusului a fost majorat prin 1 iar în (9.367) s-a aplicat o cunoscută inegalitate : $(\forall\ \alpha \in \mathbb{R})\ |\sin \alpha| \le |\alpha|$. Lungimile la pătrat ale intervalelor din ultimul membru al lui (9.366) se majorează cu pătratul normei diviziunii, exact ca în (9.350) :

$$(9.366) \Rightarrow \overline{S}(f, \Delta_n) - \underline{S}(f, \Delta_n) \le \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}|^2 \le \sum_{k=1}^{n} \nu^2(\Delta_n) \le n \nu^2(\Delta_n).$$

Cu aceeaşi argumentaţie ca pentru limita din (9.351), şi ultimul membru de mai sus, adică majorantul diferenţei dintre sumele Darboux, tinde la zero şi deci $f(x) = \sin x$ este integrabilă pe intervalul $J = [0, \pi/2]$. Valoarea integralei se poate calcula ca fiind limita uneia din cele două sume integrale Darboux sau a unei sume Riemann, pentru orice diviziune particulară (şi orice alegere, de asemenea particulară, a punctelor intermediare). Putem opta pentru diviziunea echidistantă a lui

$$J = [0, \pi/2] : \Delta_n^{\mathrm{eq}} = \left\{ \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots, \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{9.367}$$

$$(9.367) \Rightarrow \overline{S}(f, \Delta_n^{\mathrm{eq}}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{k\pi}{2n} \right) \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n} . \tag{9.368}$$

Petru suma din (9.368) se poate folosi o identitate trigonometrică, anume

$$\sin x + \sin(x+h) + \ldots + \sin(x+nh) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)\cdot\sin\left(x+\frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}. \qquad (9.369)$$

Luând $x = 0, h = \pi/2n$ în (9.369) se ajunge la expresia pentru suma din (9.368), sumă pe care o vom nota mai simplu σ_n,

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2n}\,\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}}. \qquad (9.370)$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$, în expresia (9.370), se găseşte

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\,\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

valoare care se va regăsi şi cu *Formula Newton-Leibniz* (care urmează) :

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = -[\cos x]\Big|_0^{\pi/2} = [\cos x]\Big|_{\pi/2}^{0} = 1.$$

□

Proprietăţi ale funcţiilor integrabile

O serie de proprietăţi ale funcţiilor integrabile în sens Riemann se pot demonstra pe baza definiţiilor anterior prezentate, mai ales folosindu-se sumele Riemann. Un exemplu din cele mai simple este

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f \quad \text{sau} \quad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Dar acelea şi proprietăţi rezultă şi din proprietăţi ale integralei nedefinite (sau ale primitivelor), pe baza Teoremei Newton-Leibniz, care urmează. Demonstrarea lor cu ajutorul sumelor integrale poate constitui un exerciţiu interesant, relevant pentru aceste sume dar şi consumator de timp.

Teorema 9.2.1 (Teorema Newton-Leibniz). *Dacă funcţia f admite primitive pe intervalul $[a, b]$ iar F este una dintre aceste primitive atunci*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F(x)]\Big|_a^b . \tag{9.371}$$

Există variante uşor diferite ale enunţului acestei *Teoreme fundamentale a calculului integral*, în ce priveşte ipoteza. În cele mai multe tratate se presupune că funcţia f este continuă. Se va vedea că funcţiile R-integrabile constituie o clasă mai largă decât cea a funcţiilor continue. De exemplu, funcţiile monotone sunt Riemann-integrabile fără a fi neapărat continue. Dar în asemenea cazuri este posibil ca variaţia primitivei din (9.371) să nu mai fie corectă (ca oferind valoarea integralei), valorile primitivei în cele două extremităţi ale intervalului fiind înlocuite de limitele laterale ale acesteia, spre interior.

O serie de proprietăţi ale integralei definite decurg din proprietăţi similare ale integralei nedefinite, nefiind deci specifice. Altele sunt specifice integralei definite, precum cele relative la descompunerea integralei după intervalul de integrare (descompus ca reuniune de subintervale) sau cele de minorare / majorare a integralei, ca în (9.358). De asemenea, proprietăţi de medie sunt specifice integralei definite. Le prezentăm în cadrul celor două propoziţii care urmează, grupate în această manieră. În toate proprietăţile care urmează, funcţiile ce apar sub operatorul integral sunt presupuse a fi integrabile, evident.

P. 9.2.1 **Proprietăţi ale integralei definite (Riemann) - I**

(*i*) $\displaystyle\int_a^b (cf) = c\int_a^b f$;

(*ii*) $\displaystyle\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$;

(*iii*) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$: proprietatea de *liniaritate.*

(*iv*) $\displaystyle\int_a^b (f g') = [f g]_a^b - \int_a^b f' g$: formula *integrării prin părţi.*

P. 9.2.2 Proprietăţi ale integralei definite (Riemann) - II

(v) $\int_a^b c = c(b-a)$, $c = \text{const.}$

(vi) $f \underset{[a,b]}{\le} g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$;

(vii) $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$;

(viii) $\int_a^b |f+g| \le \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$;

(ix) $\int_a^b f = -\int_b^a f$, prin convenţie.

(x) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$: descompunerea integralei în raport cu intervalul.

Proprietăţi de medie şi de simetrie

(xi) Dacă $m \le f([a,b]) \le M \iff (\forall\, x \in [a,b])\ m \le f(x) \le M$ gşi f este integrabilă atunci

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)\,.}$$

(xii) În condiţiile proprietăţii **(xi)** există $\mu \in [m, M]$ astfel încât

$\int_a^b f = \mu\,(b-a)$: *Prima formulă (proprietate) de medie.*

(xiii) Dacă f este continuă pe $[a,b]$ atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât

$\int_a^b f = (b-a)\,f(c)$: *A doua formulă (proprietate) de medie.*

Proprietăţile de simetrie sau de paritate / imparitate pot fi prezentate într-o variantă particulară (cea consacrată) dar şi în una mai generală.

(xiv) Dacă funcţia f este *pară*, adică $f(-x) = f(x)$, atunci $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$;

(*xv*) Dacă funcţia f este *impară*, adică $f(-x) = -f(x)$, atunci $\int_{-a}^{a} f = 0$;

(*xiv'*) Dacă funcţia f are graficul simetric faţă de $(x = x_0)$, adică $f(x_0 - a) = f(x_0 + a)$, atunci

$$\int_{x_0 - a}^{x_0 + a} f = 2 \int_{x_0}^{x_0 + a} f ;$$

(*xv'*) Dacă funcţia f are graficul simetric faţă de punctul $M_0(x_0, 0)$, adică $f(x_0 - a) = -f(x_0 + a)$, atunci

$$\int_{x_0 - a}^{x_0 + a} f = 0 .$$

Integrarea prin schimbare de variabilă

(*xvi*) *Prima formulă de schimbare de variabilă* :

Dacă 1) funcţia $u(x)$ are derivată continuă pe intervalul $[a, b]$ iar $J = u([a, b])$ şi 2) f este continuă pe intervalul J atunci

$$\boxed{\int_a^b f[u(x)]\, u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du .} \tag{9.372}$$

(*xvii*) *A doua formulă de schimbare de variabilă* :

Fie funcţiile $u : [a, b] \longrightarrow J$ şi $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dacă 1) funcţia u este strict monotonă pe intervalul $[a, b]$, 2) funcţia inversă $v = u^{-1}$ are derivată continuă pe J, iar 3) f este continuă pe intervalul J atunci

$$\boxed{\int_a^b f[u(x)]\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, v'(t)\, dt .} \tag{9.373}$$

(*xviii*) Încheiem lista acestor proprietăţi cu una foarte importantă pe care se bazează demonstraţia *Teoremei Newton-Leibniz* – formula (9.371) – primitivele ca funcţii de limita superioară a unei integrale definite : pentru orice a real şi orice funcţie integrabilă f,

$$\boxed{\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x)} \tag{9.374}$$

este o primitivă a funcţiei f *.*

Comentarii. Nu oferim demonstraţii la aceste proprietăţi dar majoritatea sunt cunoscute din ANALIZA MATEMATICĂ studiată în liceu, altele sunt evidente sau este clar cum se obţin din proprietăţi anterioare. De exemplu, (vi) & (vii) $\Rightarrow$ $(viii)$. La proprietăţile (xi) & (xii), numerele reale m & M pot fi (eventual) marginile funcţiei dar pot fi şi două bariere (inferioară & superioară) pentru valorile funcţiei. La formula (9.372) se ajunge]nlocuind efectiv funcţia $u(x)$ cu variabila u care se comportă ca variabilă independentă în integrala din membrul drept, în care variaţia du provine din diferenţiala funcţiei $u(x)$. La formula (9.373) se înlocuieşte efectiv variabila de integrare x cu $v(t) = u^{-1}(t)$ şi dx cu $v'(t)\,dt$.

Exemplele care urmează vor ilustra câteva din proprietăţile şi metodele de integrare prezentate.

Exemple 9.2.3.

1° Să se calculeze limita

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \right).$$

Suma de sub limită este similară cu suma parţială a unei serii, seria armonică simplă care este divergentă. Dar – de fapt – este o porţiune a acestei serii (care se poate nota S_n) şi se va vedea că ea converge. Se poate scoate în factor forţat n de la numitorul fiecărei fracţii şi se obţine

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \ldots + \frac{1}{1+n/n} \right). \tag{9.375}$$

Sub forma (9.375), suma se dovedeşte a fi a sumă integrală (Darboux sau Riemann) pentru funcţia $f(x) = 1/(1+x)$, intervalul $[0,1]$ şi diviziunea echidistantă a acestuia. Funcţia este evident integrabilă fiind continuă pe intervalul $[0,1]$; aşadar, limita din enunţ este limita unei sume integrale şi va fi egală cu integrala definită

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]\Big|_0^1 = \ln 2.$$

2° Să se calculeze, cu ajutorul unei sume integrale,

$$\int_0^{10} 2^x\,dx\,. \tag{9.376}$$

Se poate considera diviziunea

$$\Delta_n:\ x_i = i\,h,\ h = \frac{10}{n}\ \ \&\ \ \xi_i = x_i. \tag{9.377}$$

Suma Riemann corespunzătoare funcţiei din (9.376) cu diviziunea şi punctele din (9.377) este

$$S(f,\Delta_n^{\text{eq}},\Xi_{\Delta_n}) = \sum_{k=1}^{n} 2^{10k/n}\,\frac{10}{n} = \frac{10}{n}\sum_{k=1}^{n}(2^{10/n})^k =$$

$$= \frac{10}{n}\,(2^{10/n})\,\frac{2^{10}-1}{2^{10/n}-1} = (2^{10}-1)\,\frac{10}{n}\,\frac{2^{10/n}}{2^{10/n}-1} =$$

$$= (2^{10}-1)\,2^{10/n}\,\frac{10/n}{2^{10/n}-1}\,. \tag{9.378}$$

Trecând la limită în (9.378) şi ţinând seama de limite unor şiruri cunoscute se ajunge la

$$\lim_{n\to\infty} S(2^x,\Delta_n^{\text{eq}},\Xi_{\Delta_n}) = (2^{10}-1)\lim_{n\to\infty} 2^{10/n}\,\frac{10/n}{2^{10/n}-1} = \frac{2^{10}-1}{\ln 2} = \int_0^{10} 2^x\,dx\,. \tag{9.377}$$

Cititorii interesaţi vor putea verifica valoarea din (9.377) cu formula Newton-Leibniz.

3° Să se evalueze (prin bariere) integralele

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}\,;$ b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$

a) Întrucât $f'(1/2) = 0,\ f(1/2) = 2/3 = m = \min\limits_{[0,1]} f\,;\ \ f(0) = 1/\sqrt{2} = M = \max\limits_{[0,1]} f.$

Rezultă, cu inegalitatea din proprietatea **(*xi*)** , că

$$\frac{2}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Funcţia-integrand este descrescătoare pe intervalul de integrare, având derivată negativă ; a se verifica de către cititor. Rezultă că

$$m = f(\pi/2) = \frac{2}{\pi},\ M = f(\pi/4) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4° a) Să se arate, prin schimbarea de variabilă $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, că

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt. \tag{9.378}$$

b) Să se calculeze, prin schimbare de variabilă, integrala $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

a) Cu substituţia recomandată avem

$$x = \operatorname{tg}\frac{t}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(t/2)}\,dt; \tag{9.379}$$

$$(9.379) \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{t}{2} \ \& \ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 1 \Rightarrow t = \pi/2; \end{cases} \tag{9.380}$$

$$(9.379)\ \&\ (9.380) \Rightarrow \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\operatorname{tg}(t/2)}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{2\sin(t/2)\cos(t/2)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt : \ (9.378)$$

Să mai observăm că nici una dintre integralele din cei doi membri ai egalității (9.378) nu se poate calccula direct cu formula Newton-Leibniz întrucât primitivele respective nnu sunt exprimabile prin funcţii elementare.

b) Integrala este *de tip Euler*. Se poate utiliza substituţia (din cazul **3°** sau (9.156), p.239)

$$\sqrt{x^2-1} = t(x-1) \;\Rightarrow\; t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=2 \;\Rightarrow\; t=\sqrt{3}, \\ x=3 \;\Rightarrow\; t=\sqrt{2}, ; \end{cases} \tag{9.381}$$

(9.381) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-1)(x+1) = t^2(x-1)^2 \;\Rightarrow\; x+1 = t^2(x-1) \;\Rightarrow\; x(t^2-1) = t^2+1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \;\Rightarrow\; dx = \frac{2t(t^2-1-t^2-1)}{(t^2-1)^2}\,dt = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt\,; \tag{9.382}$$

(9.381) & (9.382) $\Rightarrow$ $$\sqrt{x^2-1} = t\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}-1\right) = \frac{2t}{t^2-1}\,; \tag{9.383}$$

(9.382) $$\Rightarrow\; x+1 = \frac{t^2+1}{t^2-1}+1 = \frac{2t^2}{t^2-1}\,; \tag{9.384}$$

(9.381), (9.383), (9.384) & (9.382) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{2t^2}\,\frac{t^2-1}{2t}\,\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt = -\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,. \tag{9.385}$$

Comentarii. Substituţia din enunţul exerciţiului a) era una de tipul (9.373) din proprietatea ***(xvii)***. Cea din cazul b) este una mixtă (conform cu (9.381)) şi nu este importantă încadrarea ei într-un anumit tip.

5° Să se calculeze integrala $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1+\sin t}}\,. \tag{9.386}$$

Se poate încerca o substituţie care să elimine imediat radicalul :

$$\sqrt{1+\sin t} = x \;\Rightarrow\; \sin t = x^2-1 \;\Rightarrow\; \cos t\,dt = 2x\,dx\,; \tag{9.387}$$

$$(9.387) \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \\ t = \pi/2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{2}\ ; \end{cases} \tag{9.388}$$

$$(9.387)\ \&\ (9.388) \;\Rightarrow\; \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\, d t}{\sqrt{1 + \sin t}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\, x\, d x}{x} = \left[2\, x\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\,(\sqrt{2} - 1)\,.$$

6° **Integrarea prin părţi.** Să se calculeze, cu metoda IPP, integralele

$$\text{a)}\quad I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\, d x\ ; \quad \text{b)}\quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, d x\,. \tag{9.389}$$

a) Vom determina mai întâi primitiva funcţiei-integrand întrucât este necesară stabilirea prealabilă a unei relaţii de recurenţă. Se poate nota

$$\begin{cases} u = \sin^{m-1} x\,, \\ dv = \sin x\, dx \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} d u = (m - 1)\, \sin^{m-2} x\, \cos x\, d x\,, \\ v = -\cos x\ ; \end{cases} \tag{9.390}$$

$$(9.390) \;\Rightarrow\; I_m(x) = \int \sin^m x\, d x = -\sin^{m-1} x \cos x + (m - 1) \int \sin^{m-2} x\, \cos^2 x\, d x =$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + (m - 1) \int \sin^{m-2} x\, (1 - \sin^2 x)\, d x =$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + (m - 1)\, I_{m-2}(x) - (m - 1)\, I_m(x) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; I_m(x) = \frac{1}{m}\left[-\sin^{m-1} x \cos x + (m - 1)\, I_{m-2}(x)\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \boxed{I_m(x) = \frac{1}{m}\,(-\sin^{m-1} x \cos x) + \frac{m - 1}{m}\, I_{m-2}(x)\,.} \tag{9.391}$$

Această relaţie poate fi folosită pentru $m \geq 1$.

Pentru prima integrală din enunţ, adică (9.389) - a), valoarea $m = 0$ a rangului nu ar fi relevantă pentru că funcţia-integrand este constanta 1 şi nu o putere a funcţiei sinus, dar ea trebuie totuşi luată în considerare întrucât va oferi primul factor pentru relaţia de recurenţă între integralele definite (care urmează) şi deci primul factor pentru valorile integralelor *de rang par* :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{9.392}$$

Se pot calcula direct (adică fără a folosi relaţia de recurenţă (9.391)) valorile integralelor pentru valori mici ale rangurilor, $m = 1$ & $m = 2$.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [\cos x]_{\pi/2}^{0} = 1 \; ; \tag{9.393}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) \, dx = \ldots = \frac{\pi}{4}. \tag{9.393}$$

$$(9.391) \;\Rightarrow\; \boxed{I_m = \frac{1}{m}\left[-\sin^{m-1} x \cdot \cos x\right]_0^{\pi/2} + \frac{m-1}{m} I_{m-2}.} \tag{9.394}$$

Se constată cu uşurinţă că variaţia primului termen din (9.394) este $= 0$ pentru $m \geq 2$ în timp ce

$$m = 1 \;\Rightarrow\; I_1 = [\cos x]_{\pi/2}^{0} = 1,$$

regăsindu-se astfel valoarea din (9.392). Valoarea integralelor de rang par, respectiv impar, se determină din relaţia de recurenţă (9.394) şi din valorile integralelor I_0 & I_1. Pentru rangurile pare,

$$I_4 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{\pi}{2}, \ldots$$

$$\ldots, I_{2k} = \frac{5}{6} I_{2k-2} = \ldots = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)(2k-1)}{2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k-2)\,2k}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}. \tag{9.395}$$

Pentru rangurile impare,

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}, \ldots$$

$$\ldots, I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \ldots = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots (2k-2)\,2k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2k-1)(2k+1)} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}. \tag{9.396}$$

Cititorul este invitat să calculeze, procedând analog, integralele J_n din (9.389).

Proprietăţi de medie şi de simetrie, descompunerea integralelor după intervale.

6° Să se verifice inegalităţile de mai jos şi să se scrie valorile medii ale funcţiilor-integrand $(f\ \&\ g,$ respectiv) pe intervalele de integrare.

a) $\dfrac{16}{3} \le \displaystyle\int_4^6 \frac{x^2}{x+2}\,dx \le 9\,;$ b) $1 \le \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx \le e\,.$

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \min\limits_{[4,6]} f = \dfrac{8}{3},\ \max\limits_{[4,6]} f = \dfrac{9}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{16}{3} \le \int_4^6 \frac{x^2}{x+2}\,dx \le 9\,. \tag{9.397}$$

Dubla inegalitate din (9.397) s-a obţinut din cele două margini care sunt, de fapt, extremele funcţiei pe intervalul de integrare compact, înmulţite cu lungimea intervalului $= 2.$

Valoarea medie a unei funcţii care este mărginită şi integrabilă pe un interval $[a, b]$ se defineşte ca valoarea integralei împărţită prin lungimea intervalului de integrare : ea este tocmai numărul real μ din *Prima formulă de medie*, proprietatea **(*xii*)** , pag.282 :

$$(\exists\ \mu \in [m, M]) : \int_a^b f = \mu\,(b-a) \Rightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f. \tag{9.398}$$

Integrala din enunţ, dintr-o funcţie raţională simplă, se poate calcula foarte uşor :

$$\int_4^6 \frac{x^2}{x+2}\,dx = \int_4^6 \left(x - 2 + \frac{4}{x+2}\right) dx = \ldots = 6 - 4\ln(4/3) \approx 6 - 0.287682 = 5.712318\,.$$

b) Funcţia $g(x) = e^{x^2}$ este evident crescătoare pe semiaxa reală pozitivă iar membrii edxtremi ai dublei inegalităţi din enunţ sunt tocmai valorile funcţiei în capetele intervalului de integrare. Întrucât lungimea acestuia este $= 1,$ deci inegalitatea se verifică conform cu prroprietatea **(*xi*)** , pag. 282. Dar, spre deosebire de integrala precedentă, aceasta nu se poate calcula cu formula Newton-Leibniz întrucât funcţia exponenţială de x^2 nu admite primitive exprimabile prin funcţii elementare. Valoarea integralei *se poate aproxima cu metode numerice* specifice.

$\boxed{\mathbf{7°}}$ Să se calculeze integralele

$$\textbf{(i)}\quad I = \int_0^2 \max(1, x^2)\,dx. \qquad\qquad \textbf{(ii)}\quad J = \int_0^4 |x^2 - 3x + 2|\,dx.$$

Pentru calculul ambelor integrale este necesară explicitarea funcţiilor-integrand funcţiilor-integrand (f & g, respectiv) pe subintervale.

$$\textbf{(i)}\quad f(x) = \max_{[1,2]}(1, x^2) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in [0,1), \\ x^2 & \text{pentru } x \in [1,2]; \end{cases} \tag{9.399}$$

$$(9.399) \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x + C & \text{pentru } x \in [0,1), \\ x^3/3 & \text{pentru } x \in [1,2]. \end{cases} \tag{9.400}$$

Pentru ca primitiva din (3.400) să fie continuă, constanta poate lua valoarea $C = -2/3$.

Întrucât funcţia f şi la fel primitiva sa F au expresii diferite pe cele două subintervale, formula Newton-Leibniz se va aplica separat pentru fiecare primitivă iar integrala pe întregul interval va fi suma celor două :

$$\int_0^2 \max(1, x^2)\,dx = [x + C]_0^1 + [x^3/3]_1^2 = 1 + C - C + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{10}{3}. \tag{9.401}$$

Să observăm ca la prima primitivă din (3.400) am adăugat o constantă de integrare, deşi aceasta nu era necesară : constantele de integrare nu sunt relevante când se calculează o integrală definită cu formula Newton-Leibniz întrucât fiecare astfel de constantă se anulează când se calculează variaţia, precum în (9.401). Teoretic, ar fi trebuit adăugată o constantă de integrare şi la a doua expresie din (9.400), dar am adăugat această constantă doar spre a pune în evidenţă o primitivă continuă, care se obţine pentru $C = -2/3$.

(ii) Funcţia de sub integrală trebuie explicitată întrucât trinomul de gradul II îşi schimbă semnul în interiorul intervalului de integrare :

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{pentru } x \in [0,1] \cup [2,4], \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{pentru } x \in (1,2). \end{cases} \tag{9.402}$$

Înainte de a continua, se poate scrie primitiva trinomului :

$$\int (x^2 - 3x + 2)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x; \tag{9.403}$$

$$\overset{(9.402)}{\Rightarrow} \quad J = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\,dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx + \int_2^4 (x^2 - 3x + 2)\,dx \underset{(9.403)}{=}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^4 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 + \frac{64}{3} - 24 + 8 - \frac{8}{3} + 6 - 4 = \frac{50}{3} - 14.$$

8° Să se calculeze integralele

$$(\boldsymbol{i}) \quad I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx\,; \qquad\qquad (\boldsymbol{ii}) \quad J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin^3 x|\,dx\,.$$

(*i*) Aceasta este o integrală *pe interval simetric* (faţă de origine) dintr-o *funcţie impară*, deci $I = 0$ conform cu proprietatea **(*xv*)** de la pag.283.

(*ii*) Funcţia de sub integrală este, de această dată, una *pară* pe acelaşi interval simetric. Conform cu proprietatea **(*xiv*)** de la pag.282, valorea integralei este de două ori valoarea integralei pe unul din cele două subintervale simetrice. De exemplu,

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin^3 x|\,dx = 2\int_0^{\pi/2} |\sin^3 x|\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} (\cos^2 x - 1)\,d\cos x = 2\left[\frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

9.2 - A.1 Aplicaţii-exerciţii la calculul integralelor definite

(*i*) Să se calculeze $I = \int_0^{10} (1 + x)\,dx\,,\ J = \int_4^{16} \sqrt{x}\,dx$ cu ajutorul unei sume integrale.

(ii) Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ de mai jos, scriind termenul general ca o sumă integrală corespunzătoate unei integrale definite :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \ + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}.$$

(iii) Să se calculeze (prin schimbare de variabilă) integralele

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x + \cos^3 x}\ ; \qquad J = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x\,(1+\sqrt{\ln x}\,)^3}\,dx.$$

(iv) Fără a calcula integralele, să se verifice inegalităţile

a) $\sqrt{10} \leq \int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2+1}\,dx \leq \sqrt{17}$; b) $0 \leq \int_{-1/2}^{0} x\ln(1-x^2)\,dx \leq \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$.

(v) Să se calculeze integralele de mai jos (explicitând funcţiile pe subintervale) :

a) $I = \int_0^2 e^x f(x)\,dx$ unde $f(x) = \max_{\mathbb{R}}\{1, x^2\}$;

b) $J = \int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x|\,dx$; c) $K = \int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx$;

d) $K = \int_{-2}^{2} \min[\,|x-1|\,,\,|x+1|\,]\,dx$.

(vi) Să se calculeze (cu metoda IPP) integralele

a) $I = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$; b) $J = \int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$;

c) $K = \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$; d) $L = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Răspunsuri şi recomandări de rezolvare

(i) Funcţia de sub integrală este continuă pe intervalul de integrare (de fapt, chiar pe toata axa $\mathbb{R}$), deci se poate considera orice diviziune a intervalului şi orice alegere a punctelor intermediare (dacă se optează pentru o sumă Riemann). Cu diviziunea echidistantă şi cu suma superioară Darboux ca sumă Riemann se obţine

$$\overline{S}(1 + x, \Delta_n^{\text{eq}}) = \frac{10}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{10k}{n}\right) = 10 + 50\frac{n+1}{n} \Rightarrow I = 60. \tag{9.404}$$

Cititorii interesaţi vor putea detalia calculele şi vor putea verifica valoarea din (9.404) cu formula Newton-Leibniz.

Pentru cea de a doua integrală, existenţa acesteia este de asemenea evidentă având în faptul că funcţia-integrand este continuă pe toata axa $\mathbb{R}$ (deci şi pe intervalul de integrare). Având în vedere expresia analitică a funcţiei, diviziunea echidistantă nu va mai fi aplicabilă dar se poate încerca o *diviziune geometrică* având termenii iniţial şi final 4 & 12 (respectiv) iar punctele intermediare de forma

$$x_k = 4q^{2k} \text{ cu } q = 2^{1/n} \Rightarrow x_k = 4 \cdot 2^{2k/n},\ k = \overline{0, n}. \tag{9.405}$$

Se poate utiliza suma superioara Darboux corespunzătoare punctelor din (9.405), dar este în prealabil necesar calculul lungimii intervalului dintre două puncte consecutive, aceasta nemaifiind independentă de indicele de sumare k :

$$x_k - x_{k-1} \underset{(9.405)}{=} 4\left(2^{2k/n} - 2^{2(k-1)/n}\right) = \ldots = 4\frac{2^{2/n} - 1}{2^{2/n}} 2^{2k/n}; \tag{9.406}$$

(9.405) & (9.406) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{S}(1 + x, \Delta_n^{\text{eq}}) = 4\frac{2^{2/n} - 1}{2^{2/n}} \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 2^{k/n} = 8\frac{2^{2/n} - 1}{2^{2/n}} \sum_{k=1}^{n} 2^{k/n}. \tag{9.407}$$

Cititorii interesaţi vor putea detalia calculele şi vor putea verifica lungimea intervalului din (9.406), apoi vor utiliza expresia sumei termenilor unei progresii geometrice spre a calcula ultima sumă din (9.407) şi vor trece la limită pentru $n \longrightarrow \infty$ găsind limita (şi deci valoarea integralei) $J = 112/3$; Apoi vor verifica această valoare cu formula Newton-Leibniz. Se recomandă si regăsirea extremităţilor intervalului de integrare pentru indicii minim şi maxim din (9.405). □

(ii) Termenul general al şirului din enunţ se poate interpreta ca valorea medie a unei funcţii dacă se scoate ca factor forţat în faţa sumei fracţia $1/n$:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} + \frac{1}{\sqrt{1+2/n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+n/n}}\right). \tag{9.408}$$

$$(9.408) \quad \Rightarrow \quad a_n = S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}}, \tag{9.409}$$

această sumă fiind *valoarea medie* a funcţiei $f(x) = 1/\sqrt{1+x}$ în punctele diviziunii echidistante a intervalului $[0,1]$; aceasta este interpretarea care se poate găsi în culegerea [D. Flondor & N. Donciu, 1979, Vol. II, pag. 201]. De fapt, suma din (9.409) este chiar o sumă Riemann sau Darboux superioară pentru diviziunea menţionată a intervalului $[0,1]$ şi punctele extremităţi din dreapta ale subintervalelor lui $\Delta_n^{\mathrm{eq}} \in \mathrm{DIV}_{[0,1]}$. Aşadar,

$$\lim_{\infty} a_n = \lim_{\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx.$$

Valoarea acestei integrale urmează a fi gasită de cititorii interesaţi.

(*iii*) Pentru prima din cele două integrale se poate folosi substituţia $\sin x = t$, întrucât funcţia de sub integrală este impară în $\cos x$.

$$I = \int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x + \cos^3 x} = \ldots = \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{dt}{(1-t^2)(2-t^2)} = \ldots = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 3\right).$$

Cititorii interesaţi vor detalia calculele care conduc la integrala în *t,* respectiv la valoarea finală de mai sus.

Pentru a doua integrală, este firească substituţia

$$\sqrt{\ln x} = t \;\Rightarrow\; \ln x = t^2 \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = 2t\,dt; \tag{9.410}$$

$$(9.410) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \;\Rightarrow\; t = 0, \\ x = e \;\Rightarrow\; t = 1; \end{cases} \tag{9.411}$$

$$(9.410)\ \&\ (9.411) \;\Rightarrow\; J = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1+\sqrt{\ln x})^3}\,dx = \int_0^1 \frac{2t^2\,dt}{(1+t)^3}. \tag{9.412}$$

Integrala (9.412) este una raţională şi se determină după descompunerea funcţiei-integrand în fracţii simple. Se va ajunge la valoarea integralei

$$J = 2\ln 2 - \frac{5}{4}. \tag{9.413}$$

Cititorii urmează se detaliize calculele.

(iv) Se vor determina marginile sau extremele funcţiilor de sub integrale pe intervalele de integrare. Procedura este cea din exemplul $\boxed{\mathbf{6°}}$, pag. 289-290. Variaţia funcţiei de la a) se deduce imediat (din semnul derivatei întâia), în timp ce prima derivată a funcţiei g de la b) este

$$g'(x) = \frac{(1 - x^2)\ln(1 - x^2) - 2x^2}{1 - x^2}. \tag{9.414}$$

Rădăcinile numărătorului derivate din (9.414) ar fi mai greu de găsit dar semnului întregii derivate, pe intervalul $[-1/2, 0]$ este uşor de stabilit : numitorul este strict pozitiv, primul termen al numărătorului este negativ din cauza logaritmului, iar din acesta se scaade un termen pozitiv $2x^2$; deci derivata este negativă pe intervalul menţionat, iar extremele funcţiei se ating în capetele acestui interval : $m = g(0) = 0$ iar valoarea în extremitatea stângă urmează a fi găsită de cititor. Aceste valori extreme se înmulţesc cu lungimeas intervaslului de integrare, conform cu formula din proprietatea ***(xi)*** , pag. 282.

(v) a) Funcţia $f(x)$ care intervine ca factor sub integrală a mai fost întâlnită în Exemplul $\boxed{\mathbf{7°}}$ ***(i)***, cu expresia din (9.399) la pag, 291. Se va explicita întreaga funcţie-integrand şi se va descompune integrala ca sumă de două integrale pe cele două subintervale de lungime 1 ; se va găsi $I = 2e^2 - 1$.

b) Funcţia de sub valoarea absolută schimbă semnul în centru intervalului, $\pi/4$; în mod necesar, integrala se va descompune după cele două jumătăţi de interval. Primitivele sunt imediate şi se ajunge la valoarea $J = 2(\sqrt{2} - 1)$. A se detalia calculele.

c) Integrala se descompune în sumă de trei integrale, pe cele trei subintervale ce vor interveni în explicitarea valorii absolute. Se ajunge la valoarea $K = 4$. A se detalia calculele. Se poate aplica şi proprietatea ***(xiv)*** de la pag. 282, pentru funcţiile pare integrate pe interval simetric, în care caz integrala pe unul din cele două subintervale se descomupne ca suma de doar două integrale.

d) Integrala este similară cu precedenta, punctele interioare în care cele două valori absolute îşi schimbă expresia fiind tot -1 & 1. Poate fi utilă reprezentarea grafică a celor două funcţii de sub operatorul min în scopul explicitării mai rapide (sau mai sigure) a funcţiei de integrat. Integrala se descompune ca sumă de 4 integrale pe subintervale de lungime 1 iar valoarea ei este $L = 2$. Se vor detalia calculele.

Sugestie. Dacă se reprezintă grafic cele două funcţii în valoare absolută şi apoi funcţia de integrat, se poate găsi o interpretare geometrică interesantă a acestei integrale şi a valorii sale (ca suma ariilor a patru triunghiuri).

(*vi*) Să se calculeze (cu metoda IPP) integralele

a) Se aplică metoda IPP de două ori, începând cu $u = x^2$ & $dv = e^x dx$; integrala a mai fost întâlnită la setul de exerciţii **(*v*)** dar pe un alt interval de integrare. Valoarea ei este $e - 2$. A se detalia calculele.

b) Se aplică – şi pentru această integrală – metoda IPP de două ori, începând cu $u = x^2$ & $dv = \cos x\, dx$; se va găsi valoarea $J = -2\pi$. A se detalia calculele.

c) Se poate nota $u = \operatorname{arctg} x$ & $dv = x^2 dx$; se va găsi valoarea

$$K = (\pi/3) - (1 - \ln 2)/6.$$

A se detalia calculele.

d) Se poate nota $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ & $dv = dx$. Se va găsi primitiva

$$L(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx. \tag{9.415}$$

A doua integrală din (9.415) se poate rescrie sub forma

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -L(x) + a^2 \arcsin \frac{x}{a}. \tag{9.416}$$

Din (9.415) & (9.416) se obţine o ecuaţie în $L(x)$ care conduce imediat la expresia analitică a primitivei, iar cu formula Newton-Leibniz se va ajunge la valoarea

$$L = a^2 \frac{\pi}{4}.$$

Cititorului îi rămâne să detalieze calculele şi – eventual – să rezolve acest exerciţiu cu altă metodă, de exemplu folosind substituţia $x = a \sin t$ sau $x = a \cos t$.

Aplicaţii ale integralei definite în GEOMETRIE si MECANICĂ

Integrala definită are numeroase aplicaţii în alte domenii ale matematicii (decât ANALIZA MATEMATICĂ), cel mai important fiind **GEOMETRIA**. Însăşi definiţia integralei Riemann, ca limită a unei sume integrale, defineşte valoarea integralei pe intervalul $[a, b]$ din funcţia integrabilă f drept *aria regiunii plane* delimitate de trapezul curbiliniu închis de axa (Ox), de dreptele verticale $(x = a)$ & $(x = b)$ şi de graficul funcţiei G_f. Dar există şi cazuri mai puţin imediate în care integrala Riemann permite calculul ariilor unor regiuni din plan.

A.1 – G Calculul ariilor unor regiuni mărginite din planul (xOy).

Am menţionat mai sus definiţia (valorii) integralei Riemann pe intervalul $[a, b]$ din funcţia integrabilă f care are ca semnificaţie geometrică *aria regiunii plane* delimitate de trapezul curbiliniu de graficul funcţiei şi cele trei segmente de dreaptă precizate. Dar chiar şi această interpretare este valabilă într-un caz particular, acela în care graficul G_f este situat fie în semiplanul $(y \geq 0)$, fie în $(y \leq 0)$. Deci aceaastă interpretare este valabilă numai dacă funcţia păstrează semn constant pe intervalul $[a, b]$.

Un caz mai general este acela în care frontiera regiunii plane este formată din mai multe segmente de dreaptă sau arce de curbă. În mod specific, ariile unor asemenea domenii se vor calcula cu ajutorul noţiunii de **INTEGRALĂ DUBLĂ**, care urmează a fi prezentată într-n alt capitol. Totuşi, în destul de multe situaţii este posibil calculul ariei căutate folosind doar ***Integrale Riemann*** şi operaţii cu astfel de integrale, după cum se va vedea şi în exemplele ce urmează.

Dacă $\mathcal{D}$ este un domeniu plan mărginit, inclus în banda verticală $[a, b] \times \mathbb{R}$ şi delimitat inferior de o curbă sau dintr-un lanţ de curbe (Γ_1) şi delimitat superior de o altă curbă sau lanţ de curbe (Γ_2), atunci aria domeniului $\mathcal{D}$ va putea fi calculată drept *diferenţa dintre aria regiunii având ca frontieră superioară pe* (Γ_2) *şi aria celei delimitate superior de* (Γ_1). Evident, această procedură va fi posibilă doar dacă cele două curbe sau lanţuri de curbe sunt constituite din graficele unor funcţii integrabile, în particular continue. Pentru o descriere ceva mai exactă (sau formalizată) a acestei probleme să notăm aria domeniului $\mathcal{D}$ cu $\sigma_{\mathcal{D}}$.

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \int_a^b \varphi_2(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1(x)\,dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx\,. \tag{9.417}$$

Cele două funcţii $\varphi_1(x)$ & $\varphi_2(x)$ pot să fie funcţii “multiforme”, în sensul că pot avea avea expresii analitice diverse pe diverse subintervale ale lui $[a, b]$; în acest caz integrala din (9.417) se va descompune ca sumă de tot atâtea integrale câte subintervale determină punctele în care cel puţin una din cele două funcţii îşi schimbă expresia analitică. Să mai precizăm că intervalul de integrare este exact $[a, b]$ dacă şi numai dacă frontiera domeniului $\mathcal{D}$ atinge dreptele verticale $(x = a)$ & $(x = b)$ în cel puţin câte un punct. În unele cazuri, cele două abscise trebuie determinate prin intersectarea graficelor funcţiilor $\varphi_1(x)$ & $\varphi_2(x)$.

Această descriere care poate să pară oarecum vagă sau confuză va fi ilustrată prin exemplele de mai jos.

9° Să se determine aria domeniului plan delimitat de graficele funcţiilor

$$\varphi_1(x) = |x| \ \& \ \varphi_2(x) = \sqrt{2 - x^2}. \tag{9.418}$$

Pentru a intersecta graficele celor două funcţii scriem

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \ \Rightarrow \ |x| = \sqrt{2 - x^2} \ \Rightarrow \ x^2 = 2 - x^2 \ \Rightarrow \ x = \pm\sqrt{2}. \tag{9.419}$$

Din (9.419) rezultă că $a = -\sqrt{2}$ & $b = \sqrt{2}$. Din punct de vedere geometric, domeniul $\mathcal{D}$ mărginit de graficele ceelor două funcţii din (9.418) este un *sector de cerc*, mai exact un sfert din discul centrat în origine şi de rază $R = \sqrt{2}$, delimitat de razele situate pe prima şi a doua bisectoare (respectiv). Cititorul este invitat să deseneze domeniul.

Conform formulei din (9.417) şi ţinând seama de faptul că funcţia

$$\varphi_1(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{pentru } x < 0, \\ x & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases}$$

îşi schimbă expresie în origine, aria lui se va obţine ca sumă a două integrale. Dar, întrucât ambele funcţii din (9.418) sunt pare, la fel şi diferenţa lor, se poate calcula aria cerută drept dublul ariei jumătăţii de ddomeniu inclus în primul cadra al reperului cartesian $(O; x, y)$:

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 - x^2} - |x|\right) dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 - x^2} - x\right) dx. \tag{9.420}$$

Evident, ultima aintegrală din (9.420) se descompune ca diferenţa $2(I_1 - I_2)$. În I_1 se poate aplica substituţia

$$x = \sqrt{2}\sin t \;\Rightarrow\; dx = \sqrt{2}\cos t\,dt \;\Rightarrow\; I_1 = \sqrt{2}\int_0^1 \cos^2 t\,dt = \ldots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,;$$

I_2 este o integrală imediată, cu valoarea $I_2 = 1$. Aşadar, aria căutată este

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2.$$

10° Aria limitată de sinusoidă şi cosinusoidă pe intervalul $[0, 2\pi]$.

Rolul celor două se schimbă în punctele $\pi/4$ & $5\pi/4$.

$$\varphi_1(x) = \sin x,\;\; \varphi_2(x) = \cos x \;\text{ pentru }\; x \in [0, \pi/4],$$

$$\varphi_1(x) = \cos x,\;\; \varphi_2(x) = \sin x \;\text{ pentru }\; x \in [\pi/4, 5\pi/4],$$

$$\varphi_1(x) = \sin x,\;\; \varphi_2(x) = \cos x \;\text{ pentru }\; x \in [5\pi/4, 2\pi].$$

În consecinţă, aria căutată va fi

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\,dx =$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} - [\cos x + \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} + [\sin x + \cos x]_{5\pi/4}^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

A.2 – G Calculul unor lungimi de curbe

Dacă o curbă plană (Γ) este reprezentabilă analitic printr-o ecuaţie de forma

$$y = f(x),\;\; x \in [a, b] \tag{9.419}$$

unde f este o funcţie derivabilă pe acest interval, atunci lungimea arcului de curbă

$$\overset{\frown}{AB} : y = f(x),\;\; x \in [a, b] \tag{9.420}$$

este dată de integrala

$$\boxed{\ell\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx\, .} \tag{9.421}$$

În secţiunea dedicată integralelor curbilinii, formula (9.421) se va obţine drept un caz particular al unei formule mai generale (pentru lungimea arcelor de curbe parametrizate) care se aplică şi la curbe spaţiale (din spaţiul 3D - tridimensional). Formula (9.421) rezultă prin trecerea la limită într-o sumă de tip Riemann, care măsoară lungimea unei linii poligonale ce aproximează arcul de curbă. Urmează un exemplu de aplicare a formulei (9.421).

11° Lungimea arcului de curbă $\overset{\frown}{AB}\ :\ y = 2\ln x\, ,\ x \in [2\, ,\, 2\sqrt{3}\,]\, .$ (9.422)

$$(9.422) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow 1 + f'^2(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow \ell\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + 4}\, dx\, . \tag{9.423}$$

Integrala din (9.423) se poate calcula cu ajutorul substituţiei

$$x = 2\,\mathrm{tg}\, t \Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}\, ,\ \sqrt{x^2 + 4} = \dfrac{2}{\cos t}\, , \\ t\,(2) = \mathrm{arctg}\, 1 = \pi/4\, ,\ t\,(2\sqrt{3}\,) = \pi/3 \end{cases} \Rightarrow \tag{9.424}$$

$$\Rightarrow \ell\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos t}{2\sin t}\, \frac{2}{\cos t}\, \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin t \cos^2 t}\, dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \left[2\ln \mathrm{tg}(t/2)\right]_{\pi/4}^{\pi/3} + 2\left[1/\cos t\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 2\left[\ln(1/\sqrt{3}\,) - \ln(\mathrm{tg}\,\pi/8) + 2 - \sqrt{2}\,\right].$$

Valoarea găsită mai sus s-ar mai putea puţin dezvolta (sau detalia) prin evaluarea celor doi logaritmi :

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}. \tag{9.425}$$

Cu această valoare din (9.425), valoarea de mai sus a lungimii arcului de curbă se poate rescrie

$$\ell\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 2\left[\ln(\sqrt{2} + 1) - (\ln 3)/2 + 2 - \sqrt{2}\right] = \ln\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + 4 - 2\sqrt{2}.$$

A.3 - G Calculul ariilor şi volumelor unor corpuri de rotaţie

Integrala definită permite calcularea volumelor unor corpuri de rotaţie, precum şi a ariei unor suprafeţe obţinute prin rotaţia unei curbe în jurul unei drepte, mai exact în jurul unei axe de coordonate.

Dacă un arc de curbă este reprezentat analitic prin ecuaţia (9.420), pe care o reluăm,

$$\overset{\frown}{AB} : y = f(x),\ x \in [a, b] \tag{9.420}$$

atunci **volumul corpului** $\boldsymbol{K}$ generat prin rotaţia curbei în jurul axei (Ox) este dat de

$$\boxed{\operatorname{vol}(K) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.} \tag{9.426}$$

Observaţii. **O.1** Prin rotaţia arcului de curbă din (9.420) în jurul axei (Ox) nu se obţine efectiv un corp ci doar o *suprafaţă de rotaţie*, care constituie frontiera corpului de rotaţie, împreună cu cele două discuri, de centru $A(a, 0)$ şi rază $f(a)$, respectiv de centru $B(b, 0)$ şi rază $f(b)$. Se poate înţelege şi intuitiv că acest corp de rotaţie este efectiv generat de *trapezul curbiliniu* a cărui arie este exact integrala definită din funcţia f pe intervalul $[a, b]$.

O.2 Dintr-un alt punct de vedere, corpul de rotaţie K poate fi considerat ca fiind generat de discurile având centrele pe intervalul $[a, b] \subset (Ox)$, cu cercurile de contur sprijinindu-se pe arcul de curbă şi deplasându-se odată cu centrul, de la $a \rightarrow b$. Plecându-se de la această interpretare se obţine formula (9.426), volumul corpului fiind limita unei sume (de tip Riemann / Darboux) a volumelor unor cilindri elementari având ca înălţimi sub-intervalele unei diviziuni a intervalului $[a, b]$.

O.3 Formula (9.426) poate fi uşor adaptată şi la cazul în care rotaţia curbei se face în jurul axei (Oy), în care caz ecuaţia curbei va fi de forma $x = g(y),\ y \in [c, d]$. În formula (9.426) se vor face modificările necesare.

Suprafaţa de rotaţie (Σ) este generată de arcul din (9.420), iar aria sa va fi dată de integrala

$$\boxed{\text{aria}(\Sigma) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx .} \tag{9.427}$$

Şi această formulă (9.427) se obţine printr-un proces de trecere la limită într-o sumă integrală de tip Riemann / Darboux. Aria suprafeţei de rotaţie este aproximată de suma ariilor cilindrilor elementari menţionaţi anterior la **O.2** .

În exemplele ce urmează prezentăm corpuri şi suprafeţe de rotaţie pentru care se calculează atât volumul cât şi aria.

12° Să se calculeze volumul şi aria corpurilor de rotaţie generate de curbele

(*i*) $(\Gamma): \ y = \cos x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$; **(*ii*)** $(E): \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

(*i*) Formula (9.426) aplicată cosinusoidei conduce la

$$\text{vol}(K_1) = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx =$$

$$= \pi \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x \right]_0^{\pi/2} = \pi\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}. \tag{9.428}$$

$$\text{aria}(\Sigma_1) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx = 4\pi \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2 x)^{1/2}\, d\sin x = \tag{9.429}$$

$$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du = 4\pi \left[\frac{u}{2}\sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2}\ln\left| u + \sqrt{1 + u^2}\right| \right]_0^1 =$$

$$= 2\pi\,[1 + \ln(1 + \sqrt{2}\,)]\,. \tag{9.430}$$

Corpul de rotaţie K_1 este unul cu aspect fusiform. La prima rescriere a integralei care a condus la valoarea din (9.428) am aplicat proprietatea $(\boldsymbol{xiv})$ de la pag. 282, pentru integrale pe interval simetric din funcţii pare ; a urmat o integrală trigonometrică simplă. În trecerea de la (9.429) la (9.430) am aplicat substituţia $\sin x = u$ şi o primitvă care se poate găsi uşor integrând prin părţi.

$(\boldsymbol{ii})$ Curba generatoare este *elipsa* de semiaxe a & b, raportată la axele de simetrie. Prin urmare, corpul sau suprafaţa de rotaţie rezultată este *elipsoidul de rotaţie*. Ecuaţia de tip implicit a elipsei trebuie explicitată în raport cu y :

$$(E):\ y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \iff y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,. \tag{9.431}$$

Atât prima cât şi a doua ecuaţie din (9.431) reprezintă doar arcul sau semielipsa superioară, altfel $y = f(x)$ nu ar mai fi o funcţie întrucât ar putea lua două valori opuse, $y = \pm\sqrt{\ldots}$; de altfel, pentru generarea corpului şi a suprafeţei este suficientă rotaţia cu 360° sau 2π rad doar a semidiscului eliptic superior, respectiv a semielipsei superioare, conţinute în semiplanul $(y \geq 0)$.

(9.426) & (9.431) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \mathrm{vol}(K_E) = \pi\,\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx = 2\pi\,\frac{b^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi\,a\,b^2. \tag{9.432}$$

Derivata necesară pentru aplicarea formulei (9.427) este

$$\frac{d}{dx}\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{b\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ ;\ \sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{a}\,\frac{\sqrt{a^4 + x^2(b^2 - a^2)}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,. \tag{9,433}$$

(9.427) & (9.433) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \mathrm{aria}(\Sigma_E) = 2\pi\,\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{1}{a}\,\frac{\sqrt{a^4 + x^2(b^2 - a^2)}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi \frac{b}{a^2} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^4 + x^2(b^2 - a^2)}\, dx = 4\pi \frac{b}{a^2} \int_{0}^{a} \sqrt{a^4 + x^2(b^2 - a^2)}\, dx\,.$$

$$= 4\pi b \int_0^a \sqrt{1 - x^2 \frac{a^2 - b^2}{a^4}}\, dx\,. \tag{9.434}$$

În această integrală (9.434) se poate aplica substituţia

$$x \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} = t \;\Rightarrow\; dx = \frac{a^2 dt}{\sqrt{b^2 - a^2}} \quad \& \quad \begin{cases} x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \\ x = a \;\Rightarrow\; t = \sqrt{b^2 - a^2}\,/\,a\,. \end{cases} \tag{9.435}$$

Dacă, în (9.434) & (9.435), se foloseşte cunoscuta notaţie

$$a^2 - b^2 = c^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{a^2 - b^2} = c\,, \tag{9.436}$$

atunci expresia (9,434) a ariei căutate devine

$$\text{aria}(\Sigma_E) = 4\pi \frac{a^2 b}{c} \int_0^{c/a} \sqrt{1 - t^2}\, dt = 2\pi \frac{a^2 b}{c} \left[t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t \right]_0^{c/a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{aria}(\Sigma_E) = 2\pi \frac{a^2 b}{c} \left(\frac{c}{a}\, \frac{b}{a} + \arcsin \frac{c}{a} \right) = 2\pi b^2 \left(1 + \frac{a^2}{bc} \arcsin \frac{c}{a} \right).} \tag{9.437}$$

Comentarii. Am oferit rezolvarea în detaliu a calculului ariei acestei suprafeţe de rotaţie întrucât ea comporta unele mici dificultăţi. Problema a fost abordată şi în tratatul de **ANALIZĂ MATEMATICĂ** [Gh. Sireţchi, 1985, Vol. 1, pag. 377-378], dar am ajuns la rezultatul din (9.437) independent, utilizând şi o altă substituţie – în (9.435) – decât cea folosită în volumul citat şi aplicând, pe de altă parte, proprietatea de integrare a unei funcţii pare pe un interval simetric. Rezultatul din (9.437) este valabil în cazul în care $a \ge b$, deci când a este semiaxa mare a elipsei. Profesorul Sireţchi abordează şi cazul complementar.

Determinarea unor momente şi centre de greutate

Integrala definită permite şi rezolvarea unor probleme de **MECANICĂ** (statică) cum sunt determinarea momentelor statice şi a centrului de greutate al unui arc de curbă materială, respectiv a centrului de greutate al unei plăci, acestea având masa repartizată uniform.

A.4 – M Determinarea momentelor şi centrului de greutate al unei curbe plane

Fie $(\Gamma) = (AB)$ o curbă materială plană oarecare. Curba este presupusă a fi *omogenă*, cu densitatea liniară ρ constantă, eventual $\rho = 1$. Un element de arc ds are această lungime elementară care coincide cu masa lui. Pentru un punct material situat la distanta y de axa (Ox), momentul său static în raport cu axa (Ox) este dat de

$$M_x = \int_0^S y\,ds, \text{ iar } M_y = \int_0^S x\,ds, \tag{9.438}$$

esteb momentul în raport cu axa (Oy); S este lungimea curbei, care coincide şi cu întreaga masă a arcului de curbă conform ipotezei anterioare privind densitatea. Poziţia centrului de greutate $G(\xi,\eta)$ se determină cu ajutorul celor două momente statice din (9.438). Din ecuaţiile

$$S\xi = M_y = \int_0^S x\,ds \quad \& \quad S\eta = M_x = 2\pi \int_0^S y\,ds. \tag{9.439}$$

rezultă

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds, \qquad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds. \tag{9.440}$$

Dacă a doua ecuaţie din (9.439) se înmulţeşte cu 2π se obţine egalitatea

$$2\pi S\eta = M_x = 2\pi \int_0^S y\,ds, \tag{9.441}$$

în care membrul drept se interpretează drept aria P a suprafeţei generate prin rotirea curbei $(\Gamma) = (AB)$ în jurul axei (Ox) în timp ce, în membrul stâng, $2\pi\,\eta$ este lungimea cercului desrcis de centrul de greutate prin această rotaţie. De aici rezultă

Teorema lui Guldin. *Aria suprafeţei generate prin rotirea unei curbe în jurul unei axe pe care nu o intersectează este egală cu lungimea arcului acelei curbe înmulţită cu lungimea cercului descris prin rotaţia centrului de greutate G în jurul axei respective* :

$$\boxed{P = S \cdot 2\pi\eta\,.} \tag{9.442}$$

Formula (9.442) permite determinarea ordonatei lui G dacă se cunoaşte aria P a suprafeţei de rotaţie (sau de revoluţie) descrisă de curbă. Urmează un exemplu.

13° Se cere determinarea *momentului static* al conturului unei elipse cu densitate omogenă (de semiaxe a şi b, reprezentată prin ecuaţia sa canonică), în raport cu axa

$(O\,x)$, apoi momentul pentru semielipsa superioară. Apoi să se determine poziţia centrului de greutate $G(\xi\,,\eta)$ al acestui arc superior, pe baza *Teoremei lui Guldin*.

Formula (9.441) pe ntru momentul static $/\,(O\,x)$ se particularizează prin

$$2\,\pi\,S\,\eta = M_x = 2\,\pi\int_0^S y\,ds \underset{(9.431)}{=} 2\,\pi\,\frac{b}{a}\int_0^S \sqrt{a^2 - x^2}\,ds\,, \tag{9.443}$$

iar elementul de arc ds apare sub integrala (9.434) şi se poate continua cu integrarea ca în determinarea suprafeţei elipsoidului.

Aria elipsoidului de rotaţie a fost determinată anterior, dar ea se poate rescrie folosind excentricitatea elipsei, $\varepsilon = c\,/\,a$:

$$P = 2\,\pi\,b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right). \tag{9.444}$$

Centrul de greutate al întregii elipse va coincide cu centrul de simetrie al acesteia care este chiar originea $O(0\,,0)$, din motive evidente de simetrie. Problema centrului de greutate devine interesantă dacă ne limităm doar la semielipsa superioară. În acest caz, unghiul de rotaţie este de numai π radiani iar formula (9.442) devine

$$P = S\cdot\pi\,\eta \;\Rightarrow\; \eta = \frac{P}{S}. \tag{9.445}$$

P este jumătate din aria elipsoidului de rotaţie, deci, conform cu (9.444) ace(a)sta este

$$P = \pi\,b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right) \underset{(9.445)}{\Rightarrow} \eta = \pi\,b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)\frac{1}{S}. \tag{9.446}$$

Coordonatele centrului de greutate vor fi $G(0\,,\eta)$. Dar atât în formula (9.443) cât şi în (9.446) intervine lungimea S a arcului de elipsă, deci a semielipsei (superioare). Determinarea acesteia nu este o chestiune simplă întrucât nu se mai produce simplificarea care a condus la integrala din (9.434). Conform formulei (9.421),

$$S = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} ds = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

dar această integrală iraţională este dificilă chiar şi în ce priveşte determinarea primitivei. O alternativă o oferă reprezentarea parametrică a elipsei,

$$(E):\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi)) \;\Rightarrow\; ds = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt. \tag{9.447}$$

Lungimea semielipsei S va fi integrala pe intervalul $[0, \pi]$ din elementul de arc (9.447). Dar nici aceasta nu este o integrală simplă. Ea se poate reduce la a doua dintre *funcţiile lui Legendre,*

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt. \tag{9.448}$$

Nu are sens prezentarea în detaliu a teeoriei acestor integrale. Se poate consulta tratatul [G.M. Fihtenholc, 1964, Vol. II, pp. 111 & 166], unde se justifică în detaliu valoarea căutată a lungimii care este

$$\boxed{S = 2a\,E(\varepsilon, \pi/2) = 2a\,\mathbf{E}(\varepsilon).}$$

A.5 – M Determinarea centrului de greutate al unei plăci plane omogene

Dacă $f(x) > 0$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$, coordonatele centrului de greutate G al zonei plane mărginite de axa (Ox), dreptele $(x = a)$ & $(x = b)$ şi graficul funcţiei Γ_f sunt date de

$$x_G = \frac{1}{M_1}\int_a^b x\,f(x)\,dx\,,\quad y_G = \frac{1}{2M_1}\int_a^b f^2(x)\,dx \;\text{ cu }\; M_1 = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{9.449}$$

14° Exemplu. Să se determine centrul de greutate al regiunii (plăcii) plane mărginite de axa axa (Ox), dreptele $(x = 0)$ & $(x = 1/\sqrt{2})$ şi curba de ecuaţie

$$f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^2}}\,. \tag{9.450}$$

În integrala care va da numitorul M_1 din (9.449) se poate aplica substituţia

$$x = \sin t \;\Rightarrow\; dx = \cos t\,dt \;\;\&\;\; \begin{cases} x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \\ x = 1/\sqrt{2} \;\Rightarrow\; t = \pi/4\,. \end{cases} \tag{9.451}$$

(9.450) & (9.451) $\Rightarrow$

$$M_1 = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sin^4 t\,dt = \ldots = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}. \tag{9.452}$$

Aceeaşi substituţie este utilizabilă şi în a doua integrală din (9.449) :

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sin^4 t \sin t\,dt = \ldots = \frac{8}{15} - \frac{43}{60\sqrt{2}}; \tag{9.453}$$

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^6}{1-x^2}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(-x^6 - x^4 - x^2 - 1 - \frac{1}{x^2-1}\right)dx = \ldots$$

$$\ldots = -\frac{1017}{840\sqrt{2}} + \ln(\sqrt{2}+1). \tag{9.454}$$

În fine, (9.452), (9.453), (9.454) şi formulele (9.449) conduc la coordonatele cerute ale lui G :

$$x_G = \ldots = \frac{8(32\sqrt{2} - 43)}{15\sqrt{2}\,(3\pi - 8)}; \quad y_G = \left[-\frac{1017}{840\sqrt{2}} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]\frac{16}{3\pi - 8}. \tag{9.455}$$

Notă. Acest exemplu a fost preluat din culegerea [S. Chiri ţă, 1989, pag. 219], împreună cu rezultatele numerice finale din ultimele 4 egalităţi. Cititorul este invitat să detalieze calculele care au condus la primitivele şi valoarile din (9.452-455).

9.2 - A.2 Exerciţii cu aplicaţii ale integralei în Geometrie şi Mecanică

(*i*) Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de graficul funcţiei $f(x) = e^{-x}\sin x$, axa (Ox) şi dreptele $(x = 0)$ & $(x = 2\pi)$.

(*ii*) Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele

$$(\Gamma_1):\ y^3 = x^2,\ (\Gamma_2):\ y = 2 - x^2.$$

(*iii*) Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele

$$(\Gamma_1):\ y = x^2,\ (\Gamma_2):\ y = \frac{x^2}{2},\ (d):\ y = 2x.$$

Să se calculeze lungimile arcelor de curbe

(*iv*) $(C):\ y = x^{3/2},\ x \in [0,4]$; **(*v*)** $(C):\ y = \arcsin e^{-x},\ 0 \le x \le 1$;

$$\textbf{(\textit{vi})}\quad (\Gamma):\ x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y,\ y \in [1,e];$$

(*vii*) Să se determine coordonatele centrului de greutate al domeniului plan limitat de curba $y = \sin x,\ x \in [0,\pi]$ şi axa (Ox).

(*viii*) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea curbei $y = x\ln x,\ x \in [1,e]$ în jurul axei (Ox).

(*ix*) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea curbei curbei

$y = \sin x,\ x \in [0,\pi]$ în jurul axei (Oy).

(*ix*) Să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie generată prin rotirea curbei

$y = \arcsin x,\ y \in [0,\pi]$ în jurul axei (Oy).