10.3. Integrale duble

Fie D un domeniu plan mărginit şi f o funcţie definită şi continuă pe acest domeniu :

$$D \subset \mathbb{R}^2, \ f: D \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \in \mathbf{C}_D. \tag{10.71}$$

Funcţia f se presupune a fi mărginită ; dacă domeniul D este compact atunci ea este automat mărginită, conform unei cunoscute proprietăţi a funcţiilor continue pe domenii compacte, valabilă şi la funcţiile de mai multe variabile, în particular la cele de două variabile.

Domeniul fiind mărginit, se poate presupune că el este inclus într-un dreptunghi :

$$D \subseteq [a, b] \times [c, d], \ a < b \ \ \& \ \ c < d. \tag{10.72}$$

Mai mult decât atât, se poate presupune că frontiera domeniului atinge toate cele 4 laturi ale dreptunghiului din (10.72). De exemplu, D poate fi un disc eliptic având elipsa frontieră tangentă la cele 4 laturi ale dreptunghiului. O notaţie consacrată pentru frontiera unui domeniu din plan sau din spaţiu este ∂D.

Pe fiecare din intervalele din (10.72) se consideră câte o diviziune, ca la definirea integralei Riemann. Asemenea diviziuni au intervenit în definirea integralelor curbilinii în raport cu lungimea de arc – a se vedea intervalele din (10.13) sau diviziunile din (10.56), pentru integralele curbilinii în raport cu coordonatele. Acele diviziuni pe axele de coordonate erau induse de o diviziune a intervalului $[a, b]$ parcurs de parametrul t, în timp ce diviziunile necesare pentru definirea integralei duble sunt independente :

$$\begin{cases} \Delta_{x,m} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_m = b, \\ \Delta_{y,n} = \{c = y_0, y_1, \dots, y_j, \dots, y_n = d. \end{cases} \tag{10.73}$$

$$(10.73) \Rightarrow \begin{cases} [a, b] = \bigcup\limits_{i=1}^{m} [x_{i-1}, x_i], \\ [c, d] = \bigcup\limits_{j=1}^{n} [y_{i-1}, y_i]. \end{cases} \tag{10.74}$$

Produsul cartesian al celor două diviziuni din (10.73) produce o diviziune bidimensională a dreptunghiului din (10.72) :

$$\Delta_{x,y}(D) = \Delta_{x,m} \times \Delta_{y,n} = \{(x_i, y_j) : i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n}\}. \tag{10.75}$$

Cele $m\,n$ perechi de puncte din diviziunea 2-dimensională (10.75) sunt mai puţin relevante (sau importante) decât dreptunghiurile elementare pe care ele le determină :

$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \underset{\text{not}}{=} \delta_{ij},\ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n). \tag{10.76}$$

Din incluziunea (10.72) şi din (10.76) rezultă că

$$D \subseteq [a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \delta_{ij}. \tag{10.77}$$

Funcţia f fiind mărginită pe domeniul $D \subseteq [a, b] \times [c, d]$, ea este mărginită şi pe fiecare dreptunghi elementar de forma (10.76). Notăm cele două margini prin

$$m_{ij} = \inf f(\delta_{ij}),\ M_{ij} = \sup f(\delta_{ij})\ \ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n). \tag{10.78}$$

Dacă

$$m = \inf f(D) = \inf_D f,\ \ M = \sup f(D) = \sup_D f. \tag{10.79}$$

Din (10.78) & (10.79) rezultă tripla inegalitate

$$(\forall\ (x, y) \in \delta_{ij})\ \ m \le m_{ij} \le f(x, y) \le M_{ij} \le M\ \ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n). \tag{10.80}$$

Având în vedere că aria unui dreptunghi elementar de forma (10.76) este egală cu produsul lungimilor laturilor sale, se pot consideră *două sume de tip Darboux* – similare cu cele introduse pentru definirea integralei definite pe axa reală :

$$\begin{cases} \underline{S}(f;\ \Delta_{x,y}(D)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\sigma_{\overline{\delta_{ij}}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \\ \overline{S}(f;\ \Delta_{x,y}(D)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\sigma_{\overline{\delta_{ij}}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{cases} \tag{10.81}$$

Comentarii. ***C*.10.3.1** Ca şi în cazul integralei definite unidimensionale, cele două sume din (10.81) sunt *suma inferioară Darboux*, respectiv *suma superioară Darboux*.

***C*.10.3.2** Pentru o funcţie f continuă pe D, cele două margini m_{ij} & M_{ij} din (10.78) pe dreptunghiul elementar compact δ_{ij} care intervin în (10.78), (10.81-81) sunt chiar valori extreme (locale) ale funcţiei, deci

$$m_{ij} = \min f(\delta_{ij}) \;\;\&\;\; M_{ij} = \max f(\delta_{ij}).$$

Dar această observaţie nu afectează relaţiile (inegalităţile) scrise până acum şi nici pe cele care urmează.

***C*.10.3.3** Din inegalitatea multiplă (10.80) şi din definiţiile celor două sume integrale din (10.81) rezultă inegalitatea

$$m(b-a)(d-c) \le \underline{S}(f;\, \Delta_{x,y}(D)) \;\le \overline{S}(f;\, \Delta_{x,y}(D)) \;\le M(b-a)(d-c). \quad (10.82)$$

Evident, inegalităţile din (10.82) sunt verificate pentru orice diviziune (2-dimensională) a domeniului.

***C*.10.3.4** Să mai observăm, că pentru domenii D strict incluse într-un dreptunghi precum cel din (10.72), este posibil ca sumele din (10.81) să nu conţină exact câte $m\,n$ termeni pentru simplul motiv ca unele dreptunghiuri elementare δ_{ij} să cadă în afara domeniului D:

$$\delta_{ij} \subseteq [a,b] \times [c,d] \setminus D. \quad (10.83)$$

Dar această situaţie nu creează nici un fel de problemă întrucât funcţia f poate fi uşor prelungită la întregul dreptunghi, dândui-se valoarea 0 pe dreptunghiuri ca cele din (10.83). Astfel, fiecare sumă Darboux poate fi scrisă cu exact $m\,n$ termeni, dar eventualii termeni corespunzători dreptunghiurilor elementare din (10.83) vor fi nuli.

□

Ca şi în preliminariile la definirea integralei Riemann pe axa reală, pentru o divioziune ca cea din (10.75) a domeniului D şi pentru o alegere oarecare a unor puncte intermediare în dreptunghiurile diviziunii,

$$(\xi_i,\, \eta_j) \in \delta_{ij} \iff \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \;\;\&\;\; \eta_j \in [y_{i-1}, y_i], \quad (10.84)$$

se poate scrie Suma Riemann corespunzătoare :

$$\Sigma(f;\, \Delta_{x,y}(D), (\Xi, \mathrm{H})) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \quad (10.85)$$

Cu referire la inegaliatatea multiplă (10.82), o astfel de sumă Riemann se va încadra exact întree cele două sume Darboux, în virtutea inegalităţii (10.80).

Pentru a se ajunge la definiţia integralei duble cu ajutorul sumelor integrale este necesară – ca şi în cazul integrale definite pe $\mathbb{R}$ sau al integralelor curbilinii (de ambele specii) – considerarea *normei diviziunii* din (10.75), în determinare reciprocă (‚) cu normele diviziunilor din (10.72) :

$$\nu(\Delta_x \times \Delta_y) = \max_{i,j}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}\,. \tag{10.86}$$

Condiţionarea mai sus menţionată revine la implicaţii / echivalenţe de forma celor de la pag. 349 :

$$\nu(\Delta_x \times \Delta_y) \to 0 \iff [\nu(\Delta_x) \to 0 \;\;\&\;\; \nu(\Delta_y) \to 0] \Rightarrow m\,,n \to +\infty\,. \tag{10.87}$$

Normele diviziunilor pe cele două intervale de pe axe sunt definite (de obicei) exact ca în (10.55), dar reamintim acea definiţie :

$$\nu(\Delta_x) = \max_i (x_i - x_{i-1})\,,\;\; \nu(\Delta_y) = \max_i (y_i - y_{i-1})\,. \tag{10.88}$$

În (10.87) & (10.88) nu am mai pus în evidenţă numărul intervalelor celor două diviziuni, aşa cum apar ele în (10.75).

Definiţia 10.3.1. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune

$$\Delta_{x,y}(D) = \Delta_x \times \Delta_y \in \mathrm{DIV}_D\,,$$

$$\boxed{\nu(\Delta_{x,y}) < \delta \;\Rightarrow\; \overline{S}(f;\, \Delta_{x,y}(D)) - \underline{S}(f;\, \Delta_{x,y}(D)) < \varepsilon} \tag{10.89}$$

atunci funcţia f este *integrabilă pe domeniul plan* D. □

Această definiţie reprezintă *criteriul de integrabilitate al lui Darboux* prntru integrala dublă. Proprietatea de integrabilitate se poate defini (sau caracteriza), la fel ca în cazul integralei definite în $\mathbb{R}$ sau al integralelor curbilinii, şi prin intermediul sumelor integrale de tip Riemann. Am prezentat o astfel de sumă în (10.85).

Definiţia 10.3.2. Dacă există numărul $L \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice diviziune

$\Delta_{x,y}(D) = \Delta_x \times \Delta_y \in \mathrm{DIV}_D$ şi orice 2-vector de puncte intermediare $(\Xi\,, \mathrm{H})$,

$$\boxed{\lim_{\nu(\Delta_{x,y}) \to 0} \Sigma(f;\, \Delta_{x,y}(D)\,, (\Xi\,, \mathrm{H})) = L} \tag{10.90}$$

atunci funcţia f este *integrabilă pe domeniul plan* D iar limita din (10.90) este valoarea integralei, notată

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,.} \tag{10.91}$$

□

Se pot da exemple de aplicare a acestor două definiţii spre a se verifica integrabilitatea unei funcţii de două variabile pe un anumit domeniu, respectiv pentru a se calcula chiar valoarea unei asemenea integrale duble ca limită a unei sume integrale Riemann duble, ca în (10.90). Dar în cele mai multe aplicaţii practice interesează modalităţile practice de a calcula integralele duble, folosind formule similare cu formula Newton-Leibniz de la integrala definită din $\mathbb{R}$ (a se vedea secţiunea / capitolul **9.2**).

Formulele pentru calculul unei integrale duble depind în mare măsură de *forma domeniului plan* pe care trebuie calculată integrala. Cel mai simplu caz este

D.1 Domeniu dreptunghiular. În acest caz, incluziune (nestrictă) (10.72) este chiar o egalitate :

$$D \subseteq [a,b]\times[c,d]\,,\ \ a<b\ \ \&\ \ c<d. \tag{10.92}$$

Integrala dublă (10.91) pe un asemenea domeniu se poate scrie sub forma

$$\boxed{\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy\,.} \tag{10.93}$$

În (10.93) se foloseşte o simplă notaţie, care însă nu indică efectiv modul de calcul al integralei. Trebuie aleasă o anumită ordine de integrare : de exemplu, se poate calcula mai întâi integrala din $f(x,y)$ în raport cu prima variabilă x, pe intervalul $[a,b]$; rezultatul va fi o funcţie $g(y)$ care se integrează apoi pe intervalul $[c,d]$, obţinându-se valoarea integralei. Această modalitate de a calcula o integrală dublă prin culculul succesiv a două integrale definite simple se numeşte (în unele manuale / culegeri de ANALIZĂ) *iterare* a integralei duble. Evident, există două iterări posibile. Le prezentăm pe ambele, împreună cu câte o notaţie specifică, întrucâtva abuzivă, dar care precizează variabila în raport cu care se face integrarea pe fiecare interval.

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy \underset{\text{not}}{=} \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx\,. \tag{10.94}$$

Cealaltă modalitate de iterare (sau calcul iterat) al integralei duble din (10.93) este

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx \underset{\text{not}}{=} \int_a^b dx \int_a^b f(x,y)\,dy. \qquad (10.95)$$

Alegerea unui sau celuilalt mod de calcul iterat al unei integrale duble pe un dreptunghi este, în principiu, arbitrară. Dar se poate opta pentra una sau cealaltă ordine de integrare având în vedere şi natura (adică expresia analitică a) funcţiei $f(x,y)$: este posibil ca găsirea unei primitive în x – în vederea aplicării formulei Newton-Leibniz – să fie mai facilă decât găsirea unei unei primitive în y, sau invers. Mai mult decât atât, este posibil ca una dintre primitive să nu fie exprimabilă prin funcţii elementare.

Înainte de a oferi două-trei exemple, să semnalăm şi cazul particular, foarte avantajos în aplicaţii, când funcţia de integrat este o *funcţie separabilă*, adică se poate scrie ca produs de func ţii, una de variabila x iar cealaltă de variabila y :

$$f(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y). \qquad (10.96)$$

În acest caz, fiecare din cele două integrale definite simple din (10.94) sau (10.95) se calculează în raport cu o singură variabilă (fără cealaltă variabilă ca parametru) iar întgrela dublă rezzultă ca produsul a două integrale simple. Se poate spune că *integrala dublă dintr-o funcţie separabilă este factorizabilă* :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy \underset{(10.96)}{=} \int_a^b \int_c^d [\varphi(x)\,\psi(y)]\,dx\,dy = \int_a^b \varphi(x)\,dx \cdot \int_c^d \psi(y)\,dy. \qquad (10.97)$$

10.3 E -1 Exemple de integrale duble pe dreptunghiuri

Ex.10.3 – 1 $\iint_D (3x^2 - y)\,dx\,dy, \quad D = [1,3] \times [0,1]. \qquad (10.98)$

$$\iint_D (3x^2 - y)\,dx\,dy \underset{(10.94)}{=} \int_0^1 dy \int_1^3 (3x^2 - y)\,dx = \int_0^1 \left[(x^3 - xy)\Big|_{x=1}^{x=3} \right] dy =$$

$$= \int_0^1 (27 - 3y - 1 + y)\,dy = \int_0^1 (26 - 2y)\,dy = [26y - y^2]_0^1 = 25. \qquad (10.99)$$

Aceeaşi integrală se poate calcula şi folosind modalitatea de iterare din (10.95), deci inversând ordinea de integrare :

$$\iint_D (3x^2 - y)\,dx\,dy \underset{(10.95)}{=} \int_1^3 dx \int_0^1 (3x^2 - y)\,dy = \int_1^3 \left[(3x^2 y - y^2/2)\Big|_{y=0}^{y=1}\right] dx =$$

$$= \int_1^3 (3x^2 - 1/2)\,dx = [x^3 - x/2]_1^3 = 27 - \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 25.$$

S-a regăsit deci valoarea din (10.99) ceea ce este firesc întrucât schimbarea ordinii de integrare nu afectează valoarea integralei.

$\boxed{\text{Ex.10.3 – 2}}$ $$\iint_D \ln(x+y)\,dx\,dy, \qquad D = [0,1]\times[1,2]. \tag{10.100}$$

Se poate aplica oricare din cele două ordini de integrare (sau modalităţi de iterare), funcţia fiind simetrică în cele două variabile. Oricare ar fi alegerea, se va aplica metoda IPP (integrarea prin părţi).

$$\iint_D \ln(x+y)\,dx\,dy \underset{(10.94)}{=} \int_1^2 dy \int_0^1 \ln(x+y)\,dx\,; \tag{10.101}$$

$$\int_0^1 \ln(x+y)\,dx = [x\ln(x+y)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x}{x+y}\,dx =$$

$$= \ln(y+1) - \int_0^1 \frac{x+y-y}{x+y}\,dx = \ln(y+1) - [x]_0^1 + y\ln(y+1) - y\ln y =$$

$$= (y+1)\ln(y+1) - y\ln y - 1\,; \tag{10.102}$$

(10.101) & (10.102) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_D \ln(x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 [(y+1)\ln(y+1) - y\ln y - 1]\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(y+1)^2\ln(y+1) - \frac{1}{2}(y+1)^2 - y^2\ln y + \frac{1}{2}y^2 - 2y\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[9\ln 3 - \frac{9}{2} - 4\ln 2 + 2 - 4\ln 2 + 2 - \frac{1}{2} - 2\right] = \frac{9}{2}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}.$$

Notă. În răspunsul la acest exerciţiu, preluat din culegerea [S. Chiriţă, 1989 - p. 244], autorul foloseşte cealaltă ordine de integrare (întâi după y şi apoi după x). Evident, rezultatul este acelaşi.

Ex.10.3 - 3 Integrala dublă ce urmează se încadrează în formulele (10.96-97).

$$\iint_D [\cos(x+y) + \cos(x-y)]\, dx\, dy, \qquad D = [0, \pi/2] \times [\pi/4, \pi/2]. \tag{10.103}$$

Evident, aşa cum arată funcţia de sub integrala din (10.103) ea nu este separată, dar este separabilă conform unei cunoscute formule din TRIGONOMETRIE :

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \iint_D [\cos(x+y) + \cos(x-y)]\, dx\, dy = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos y\, dy =$$

$$= [\sin x]_0^{\pi/2} \cdot [\sin y]_{\pi/4}^{\pi/2} = 1 \cdot (1 - 1/\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}.$$

D.2 Integrale duble pe trapeze curbilinii.

Noţiunea de **trapez curbiliniu** trebuie înţeleasă *într-un sens foarte larg*. Practic, orice alt domeniu plan mârginit, cu frontiera formată din ardce de curbe netede, poate fi considerat un trapez curbiliniu sau poate fi descompus ca o reuniune de trapeze curbilinii.

În sens strict, un trapez curbiliniu este o regiune a planului S_2 sau $\mathbb{R}^2$ mărginită de axa (Ox), de două drepte verticale $(x = a)$ & $(x = b)$ cu $a < b$ şi de graficul unei funcţii $y = \varphi(x)$. Se poate considera că “bazele” trapezului sunt cele două segmente de pe dreptele $(x = a)$ & $(x = b)$ iar “laturile neparalele” sunt segmentul $[a, b]$ sau $\overline{AB}$ de pe axa (Ox) şi graficul funcţiei (Γ_φ). În această descriere a unui trapez curbiliniu se pot distinge două sau mai multe situaţii, în funcce de poziţia graficului lui $y = \varphi(x)$ faţă de axa (Ox) :

$$\begin{cases} (i)\ \ \varphi([a\,,b]) \geq 0 \ \Rightarrow\ (\Gamma_\varphi) \subset (x \geq 0)\,, \\ (ii)\ \ \varphi([a\,,b]) \leq 0 \ \Rightarrow\ (\Gamma_\varphi) \subset (x \leq 0)\,, \\ (iii)\ (\exists\ c \in (a\,,b))\ \ \varphi(c-0)\,\varphi(c+0) < 0 \ \Rightarrow \\ \qquad\qquad \Rightarrow\ [(\Gamma_\varphi) \cap (x > 0) \neq \varnothing \neq (\Gamma_\varphi) \cap (x < 0). \end{cases} \tag{10.104}$$

Cazul (10.104) – (i) revine la situarea graficului funcţiei $y = \varphi(x)$ în semiplanului superior al reperului $(O\,;x\,,y)$; în cazul (10.104) – (ii) acest grafic este situat în semiplanul inferior, iar în cazul cazul (10.104) – (iii) există cel puţin un punct în interiorul intervalului $[a\,,b]$ în a cărui vecinătate (suficient de mică sau chiar arbitrară) funcţia $y = \varphi(x)$ îşi schimbă semnul, deci graficul ei traversează axa $(O\,x)$ sau – altfel spus – trece dintr-un semiplan în celălalt.

În fiecare dintre aceste cazuri se poate scrie domeniul de integrare ca o mulţime de puncte, cu observaţia că în al treeilea caz trebuie avute în vedere toate punctele interioare în care $y = \varphi(x)$ îşi schimbă semnul. Vom caracteriza formal domeniul doar în cazul (10.104) – (i) :

$$D = \{M(x,y) :\ x \in [a\,,b]\ \ \&\ \ (\forall\ x \in [a\,,b])\ 0 \leq y \leq \varphi(x)\}.\,\mathrm{c} \tag{10.105}$$

Un caz mai general de trapez curbiliniu este decât cel descris anterior este acela în care ambele “laturi neparalele” ale acestuia sunt arce din graficele a două funcţii, $y = \varphi_1(x)$ şi $y = \varphi_2(x)$. Dar şi acest caz comportă trei subcazuri, similare cu cele din (10.104). Descriem doar situaţia în care

$$(\forall\ x \in [a\,,b])\quad \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)\ ; \tag{10.106}$$

Cu alte cuvinte, graficul funcţiei $y = \varphi_1(x)$ este situat sub cel al lui $y = \varphi_2(x)$. Expresia analitic[(10.105) devine

$$D = \{M(x,y) :\ x \in [a\,,b]\ \ \&\ \ (\forall\ x \in [a\,,b])\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}. \tag{10.107}$$

Dar este posibil (uneori şi mai convenabil pentru calculul integralei ca un domeniu de forma unui trapez curbiliniu să aibă cele două baze paralele nu cu axa $(O\,y)$ ci cu axa $(O\,x)$; în astfel de cazuri caracterizările analitice din (10.105) şi (10.106) devin

$$D = \{P(x,y) :\ y \in [c\,,d]\ \ \&\ \ (\forall\ y \in [c\,,d])\ 0 \leq x \leq \psi(y)\}, \tag{10.108}$$

$$D = \{P(x,y) :\ y \in [c\,,d]\ \ \&\ \ (\forall\ y \in [c\,,d])\ \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}. \tag{10.109}$$

Conceptul de (domeniu cu frontiera) trapez curbiliniu, în accepţiunea cea mai largă poate acoperi situaţii care par să nu aibă nimic în comun cu percepţia comună asupra unui trapez. De exemplu, un disc circular închis (centrat în origine) poate fi descris atât sub forma (10.107) cât şi ca o mulţime de forma (10.109) :

$$\bar{D}(O,r) \underset{\text{def}}{=} \{(x\ ,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\} =$$

$$= \{M(x,y) : x \in [-a,a] \ \&\ (\forall\, x \in [-a,a]) : -\sqrt{r^2 - x^2} \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\} =$$

$$= \{P(x,y) : y \in [-a,a] \ \&\ (\forall\, y \in [-a,a]) : -\sqrt{r^2 - y^2} \le x \le \sqrt{r^2 - y^2}\}.$$

De asemenea, domeniu de formă eliptică, cu frontiere de formă hiperbolică sau de orice altă formă pot fi caracterizate analitic ca în (10.107-109). Aceeaşi remarcă prive şte şi domeniile de formă triunghiulară / poligonală, dar în asemenea cazuri este posibil să fie necesară descompunerea domeniului ca reuniune de subdomenii mai simple, de formă efectiv trapezoidală. Aceste afirmaţii vor fi ilustrate prin unele din exemplele ce urmează.

Dacă la integralele pe dreptunghiuri ordinea de integrare putea fi (în principiu) oricare din cele două posibile, conform cu egalităţile (10.94) & (10.95), la integralele pe trapeze curbilinii este posibil ca una din cele două ordini de integrare să fie pereferabilă celeilalte. De exemplu, dacă domeniul este decsris ca în (10.107), este natural ca prima integrare să se efectueze după y, rezultând o funcţie în x care este variaţia primitivei în y între limitele funcţionale din (10.107) ; funcţia în x obţinută se integrează apoi pe intervalul $[a, b]$ ajungându-se astfel la valoarea integralei. Această discuţie mai curând descriptivă se poate concretiza formal prin

$$D = \{\ldots\} : \ (10.107) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx \underset{\text{not}}{=} \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,.} \qquad (10.110)$$

Integrala interioară (după x) din (10.110) este efectiv o integrală parametrică, cu variabila x în rol de parametru ca celălalt (adică primul) argument al funcţiei f dar şi ca argument al celor două funcţii limite de integrare. Se poate scrie o formulă similară cu (10.110) pentru cazul în care domeniul este caracterizat analitic prin (10.109), dar în acest caz ordinea de integrare va fi inversă : întâi după x şi apoi după y.

Să mai menţionăm că, în unele aplicaţii (exerciţii) intervalul cu limite constante percurs de una dintre variabile, deci $[a, b]$ pentru un domeniu ca cel din (10.107), respectiv $[c, d]$ pentru unul de forma (10.109) nu este dat prin enunţ ci trebuie determinat(e) intersectând cele două curbe-frontieră : dacă

$$(\gamma_1): y = \varphi_1(x) \ \& \ (\gamma_2): y = \varphi_2(x) \text{ atunci } \{a, b\} = (\gamma_1) \cap (\gamma_2). \tag{10.111}$$

Se procedează analog în cazul unui domeniu de forma (10.109) pentru c, d.

$\boxed{\text{Ex.10.3 - 4}}$

$$\iint_D x y \, dx \, dy, \tag{10.112}$$

$$D \text{ situat între curbele } \quad (\gamma_1): y = x^2, \ (\gamma_2): y = 2x + 3. \tag{10.113}$$

Intersecţia din 910.111) revine la rezolvarea sistemului format cu ecuaţiile din (10.113):

$$(\gamma_1) \cap (\gamma_2) : \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1, 1), \\ B(3, 9). \end{cases} \tag{10.114}$$

Cele două puncte din 910.114) sunt exact elementele din care constă intersecţia curbelor-frontieră. În (10.111) am scris doar abscisele punctelor de intersecţie spre a nu-i încărca expresia. Corect (sau mai exact) ar fi fost să scriem

$$(\gamma_1) \cap (\gamma_2) = \{A(a, \varphi_1(a) = \varphi_2(a)), B(b, \varphi_1(b) = \varphi_2(b))\}. \tag{10.115}$$

Aşadar, integrala dublă din enunţ va fi, conform cu (10.110) & (10.113-114),

$$\iint_D x y) \, dx \, dy = \int_{-1}^{3} \left[\int_{x^2}^{2x+3} x y \, dy \right] dx = \int_{-1}^{3} x \left[\int_{x^2}^{2x+3} y \, dy \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{3} x [(2x+3)^2 - x^4] \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{3} \left[4x^3 + 12x^2 + 9x - x^5 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x^4 + 4x^3 + \frac{9}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^6 \right]_{-1}^{3} = \frac{1}{2} \left[81 + 108 + \frac{81}{2} - \frac{729}{6} - 1 + 4 - \frac{9}{2} + \frac{1}{6} \right] =$$

$$= 96 - \frac{64}{3}. \tag{10.115}$$

Comentariu. Domeniul de integrare este limitat inferior de arcul de parabolă şi limitat superior de segmentul de dreaptă oblică, având extremităţi comune în punctele din (10.114). Integrala poate fi calculată şi folosind formula (10.109) dar – în acest caz – curba din stânga va fi formată din două arce de curbă, primul fiind arcul de parabolă de la $O(0,0)$ la $A(-1,1)$ iar al doilea = segmentul de dreaptă de la punctul $A(-1,1)$ la $B(3,9)$. Curba din dreapta este arcul de parabolă de la $O(0,0)$ la $B(3,9)$. Deci integrala se va descompune ca sumă de două integrale, integrala "exterioară" calculându-se pe intervalele $[0,1] \cup [1,9]$. Cititorul este invitat să calculeze această integrală şi cu formula (10.109), urmând să regăsească valoarea din (10.115). Se recomandă şi desenarea lui *D*.

$\boxed{\text{Ex.10.3-5}}$ În acest exemplu intervine un caz în care este efectiv necesară schimbarea ordinii de integrare întrucât integrala "interioară" are ca funcţie-integrand o funcţie ce nu admite primitivă exprimabilă prin funcţii elementare.

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\arcsin\sqrt{y}} \frac{x}{\sin x}\, dx. \tag{10.116}$$

Funcţia $x/\sin x$ nu admite primitivă exprimabilă prin funcţii elementare. Domeniul de integrare se poate preciza după limitele celor două integrale din (10.116).

$$D = \{M(x,y):\ y \in [0,1]\ \&\ (\forall\, y \in [0,1])\ \arcsin y \le x \le \arcsin\sqrt{y}\} =$$
$$= \{M(x,y):\ x \in [0,1]\ \&\ (\forall\, x \in [0,\pi/2])\ \sin^2 x \le y \le \sin x\}. \tag{10.117}$$

Prin urmare, integrala din (10.116) se poate rescrie sub forma

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\arcsin\sqrt{y}} \frac{x}{\sin x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\,[y]_{\sin^2 x}^{\sin x}\, dx =$$
$$= \int_0^{\pi/2} (x - x\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} x(1-\sin x)\, dx =$$
$$= \left[x(x+\cos x) - \frac{1}{2}x^2 - \sin x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

$\boxed{\text{D.3}}$ Calculul unor integrale duble prin trecerea în coordonate polare

Atunci când domeniul de integrare este un *disc circular* sau o porţiune din acesta şi anume un *sector de disc circular*, sau o *coroană circulară*, sau un *sector de coroană circulară*, trecerea de la coordonatele cartesiene (x, y) la coordonatele polare (ρ, θ) poate simplifica semnificativ calculul integralei duble. De regulă, această schimbare de variabile transformă domeniul de una din formele anterior menţionate într-un *dreptunghi*, fiecare din cele două integrale (după ρ / după θ având limite constante.

Prezentăm formulele de trecere în coordonate polare şi pentru cazul (i) când originea acestora este originea sistemului cartesian $(O\,;\,x, y)$ dar şi pentru cazul (ii) când domeniul implică un cerc / un disc (sau mai multe) având centrul într-un alt punct, $C(a, b)$.

$$(i) \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta\,, \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} \rho \in (0, r]\,, \\ \theta \in [0, 2\pi)\,. \end{cases} \tag{10.118}$$

În formulele (10.118) r este raza discului circular iar intervalul pentru parametrul unghiular θ, în radiani, corespunde unui cerc sau disc complet. Dacă este necesară limitarea la un sector de disc atunci se va reduce intervalul la un subinterval adequat.

$$(ii) \quad \begin{cases} x - a = \rho\cos\theta\,, \\ y - b = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} \rho \in (0, r]\,, \\ \theta \in [0, 2\pi)\,. \end{cases} \tag{10.119}$$

Când se aplică, într-o integrală dublă, o transformare de forma

$$\begin{cases} x = x(u, v)\,, \\ y = y(u, v) \end{cases} \tag{10.120}$$

sub integrala în noile variabile (u, v) va apărea ca factor jacobianul acestei transformări,

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{10.121}$$

În cazul trecerii în coordonate polare, jacobianul este

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho . \tag{10.122}$$

$\boxed{\text{Ex.10.3 - 6}}$ $$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy , \quad D : 1 \le x^2 + y^2 \le 2x. \tag{10.123}$$

Dubla inegalitate ce caracterizează domeniul de integrare reprezintă regiunea com-plementară discului de rază $r = 1$ centrat în origine faţă de discul de aceeaşi rază centrat în punctul $C(1,0)$. Într-adevăr, să notăm

$$D_1 = \bar{D}(C,1) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2x \iff (x-1)^2 + y^2 \le 1\}, \tag{10.124}$$

$$D_2 \subset D(O,1) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}. \tag{10.125}$$

$$\text{(10.123-125)} \Rightarrow \quad D = D_1 \setminus D_2 . \tag{10.126}$$

Având în vedere aditivitatea integralei duble în raport cu domeniul de integrare, rezultă din (10.123-126) că putem scrie integrala din enunţ ca o diferenţă,

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy = \iint_{D_1} \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy - \iint_{D_2} \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy \underset{\text{not}}{=} J_1 - J_2 . \tag{10.127}$$

Trecând în coordonate polare cu formulele (10.119-122) în prima integrală se ajunge la

$$J_1 = \iint_{D_1} \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho^2 \sin^2\theta}{(\rho\cos\theta + 1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho^3 \sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + 2\rho\cos\theta + 1}\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^1 \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + 2\rho\cos\theta + 1}\, d\theta . \tag{10.128}$$

Integrala în raport cu θ din expresia (10.128) poate fi calculată după obţinerea primitivei, cu metode specifice integralelor trigonometrice. Dar aceasta ar implica un efort care poate fi evitat, aşa cum justificăm mai jos. Dar am condus transformările până la expresia (10.128) spre a ilustra modul cum se poate aplica trecerea în coordonate polare (cu centrul în alt punct decât originea).

O altă modalitate de a calcula integrala constă în transformarea domeniului D într-un domeniu care să nu fie neapărat dreptunghiular. Acest domeniu D' poate fi caracterizat prin

$$D' : \begin{cases} \rho \geq 1, \\ \rho \leq 2\cos\theta, \end{cases} \quad \theta \in [-\pi/3, \pi/3]. \tag{10.129}$$

Caracterizarea din (10.129) rezultă din trecerea în coordonate polare (10.118), cu originea acestora în $O(0,0)$. Prima inegalitate din (10.129) caracterizează exteriorul domeniului D_2 din (10.125). A doua inegalitate caracterizează domeniul D_1 întrucât distanţa de la originea $O(0,0)$ la un punct M de pe cercul $(\Gamma_1) = C((1,0);1)$ este cateta care pleacă din origine a unui triunghi dreptunghic cu unghiul drept în acest punct curent M şi diametrul $= 2$, unghiul în $O(0,0)$ dintre axa absciselor şi raza vectoare (sau vectorul de poziţie $\mathbf{r}_M$) fiind tocmai unghiul θ din (10.125) & (10.129). Limitele de variaţie din (10.129) pentru acest unghi rezultă după găsirea punctelor de intersecţie ale celor două cercuri :

$$(\Gamma_1) \cap (\Gamma_2) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (\Gamma_1) \cap (\Gamma_2) = \{A(1/2, \sqrt{3}/2), A'(1/2, -\sqrt{3}/2)\}.$$

Aşadar, domeniul D' din planul coordonatelor polare (ρ, θ) este caracterizat de dubla inegalitate pentru parametrul $\rho =$ distanţa de la origine la punctul curent M :

$$D' = \{M(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2\cos\theta, \ \theta \in [-\pi/3, \pi/3].\} \tag{10.130}$$

(10.118) & (10.130) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_{D_1} \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta \int_1^{2\cos\theta} \frac{\rho^2 \sin^2\theta}{\rho^2 \cos^2\theta}\, \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2\theta\,(2\cos\theta - 1)^2\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2\theta\,(4\cos^2\theta - 1)\, d\theta = \tag{10.131}$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(2\sin^2\theta - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\theta\right) d\theta = 2\int_{0}^{\pi/3} \left(2\sin^2\theta - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\theta\right) d\theta\,. \qquad (10.132)$$

Egalitatea din (10.131) a rezultat prin neglijarea termenului central din desvoltarea pătratului diferenţei întrucât acesta era impar în θ iar intervalul de integrare simetric ; ultima expresie s-a obţinut cu proprietatea de integrare pe interval simetric a unei funcţii pare. În continuare, integrala din (10.132) se poate rescrie sub forma

$$\int_{0}^{\pi/3} \left(4\sin^2\theta - \mathrm{tg}^2\theta\right) d\theta = \int_{0}^{\pi/3} (1 - \cos^2\theta)\left(4 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta =$$

$$= \int_{0}^{\pi/3} \left(4 - 4\cos^2\theta - \frac{1}{\cos^2\theta} + 1\right) d\theta = \int_{0}^{\pi/3} \left(5 - 2(\cos 2\theta + 1) - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta =$$

$$= \left[3\theta - \sin 2\theta - \mathrm{tg}\,\theta\right]_0^{\pi/3} = \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,. \qquad (10.133)$$

Observaţii. Valoarea din (10.133) este aceea şi cea la care s-a ajuns în culegerea [S. Chiriţă, 1989 - p. 250] de unde a fost preluată această aplicaţie, dar fără a se detalia transformările din (10.132-133).

Integrala poate fi calculată şi folosind formula (10.109) pentru domeniu şi (10.137) de mai jos pentru integrală dar – în acest caz – curba din stânga va fi un sector din cercul unitar centrat în origine, dintre punctele

$$A'(1/2, -\sqrt{3}/2) \;\;\&\;\; A(1/2, \sqrt{3}/2) \qquad (10.134)$$

determinate anterior prin intersectarea celor două cercuri. Aşadar, cele două curbe-frontieră şi funcţii care intervin în formula (10.109) sunt

$$\begin{cases} (\Gamma_1): x = \sqrt{1 - y^2} = \psi_1(y), \\ (\Gamma_2): x = \sqrt{1 - y^2} + 1 = \psi_2(y), \end{cases} \quad y \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]\,.$$

Cititorul este invitat să calculeze această integrală şi cu formula (10.109), urmând să regăsească valoarea din (10.115). Se recomandă şi desenarea domeniului D.

Ex.10.3 - 7 Integrale duble pe **domenii triunghiulare** :

$$(i) \quad \iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy, \qquad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = x \;\&\; y = \pi. \end{cases} \tag{10.135}$$

$$(ii) \quad \iint_D (x^2 - y^2)^{1/2}\,dx\,dy, \quad D = [OAB] \text{ cu } A(1,-1) \;\&\; B(1,1). \tag{10.136}$$

(i) Domeniul din (10.135) poate fi descris analitic prin

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\pi] \;\&\; x \le y \le \pi\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,\pi] \;\&\; 0 \le x \le y\}.$$

Se poate aplica fie formula (10.110) fie alternativa sa, pentru un domeniu caracterizat ca în (10.109) :

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy \underset{\text{not}}{=} \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.} \tag{10.137}$$

$$\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^\pi dx \int_x^\pi \cos(x+y)\,dy = \ldots$$

$$\ldots = \int_x^\pi [\sin(x+\pi) - \sin 2x]\,dy = \ldots = -2.$$

(ii) Domeniul din (10.135) poate fi descris analitic prin

$$\begin{cases} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \;\&\; -x \le y \le x\} = \\ \quad = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0] \;\&\; -y \le x \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1] \;\&\; y \le x \le 1\}. \end{cases}$$

Se poate aplica formula (10.110) întrucât prima caracterizare a domeniului este mai simplă decât a doua (care este o reuniune de două triunghiuri dreptunghice) :

$$\iint_D (x^2 - y^2)^{1/2}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y}{2}\sqrt{x^2 - y^2} - \frac{x^2}{2}\arcsin\frac{y}{x} \right]_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) dx = \frac{\pi}{6}.$$

10.3 A Integrale duble - Exerciţii

10.3 A - 1 Se cere calculul integralelor ce urmează pe domeniile indicate.

3 A – 1.1 $I_1 = \iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy, \qquad D$ limitat de $\begin{cases} x = 0,\ x = y, \\ y = 1,\ y = \sqrt[3]{2}. \end{cases}$

3 A – 1.2 $I_2 = \iint_D \arcsin\sqrt{x+y}\, dx\, dy, \qquad D$ limitat de $\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$

3 A – 1.3 $I_3 = \iint_D (1-x)(1-xy)\, dx\, dy,$

$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \Rightarrow D = [0,1] \times [0,2].$

3 A – 1.4 $I_4 = \iint_D xy(1 + x^2 + y^2)^{-3/2}\, dx\, dy, \qquad D : \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$

3 A – 1.5 $I_5 = \iint_D (1-y)\, dx\, dy, \qquad D : \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2y, \\ y \le x^2,\ x \ge 0. \end{cases}$

3 A – 1.6 $I_6 = \iint_D (xy)^{1/2}\, dx\, dy, \qquad D : \begin{cases} y \ge x^3, \\ y \le x^2, \\ x \ge 0. \end{cases}$

10.3 A - 2 Să se transforme integralele de mai jos prin inversarea ordinii de integrare.

3 A – 2.1 $I_7 = \int_{-1}^{3} dx \int_{(x^2+2x-3)/4}^{x} f(x,y)\, dy.$

3 A - 2.2 $I_8 = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \int_0^1 f(x,y)\, dx.$

Răspunsuri şi recomandări de rezolvare

3 A - 1.1 Se poate integra întâi după x şi apoi după y. Domeniul este un trapez dreptunghic, cu bazele paralele cu axa (Ox). Integrala interioară este

$$J_1(y) = \int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx = \ldots = \frac{1}{2}\left[x \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \mid_0^y - \int_0^y \sqrt{x^2+y^2}\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} y^2 [\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})] \Rightarrow I_1 = \ldots = \frac{1}{6}[\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})].$$

A se detalia calculele.

3 A - 1.2 Deşi cele două drepte (bisectoarea a doua şi o paralelă la aceasta, situată deasupra sa) nu sunt mărginite, domeniul este mărginit datorită condiţiei implicate de argumentul funcţiei arcsinus :

$$0 \le x + y \le 1 \Rightarrow y \in [-1, 1] \;\&\; x \in [-y, 1-y]. \qquad (10.138)$$

Frontiera domeniului este deci un paralelogram.

$$J_2(y) = \int_{-y}^{1-y} \arcsin\sqrt{x+y}\, dx = \int_0^1 \arcsin\sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{2}.$$

A se detalia calculele.

3 A - 1.3 Domeniul de integrare este dreptunghiular. Având în vedere factorul care depinde numai de x, este preferabil ca prima integrare să se facă după y.

$$J_3(x) = \int_0^2 (1 - xy)\, dy = (y - xy^2/2)\Big|_0^2 = 2(1-x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow I_3 = \frac{2}{3}.$$

A se detalia calculele.

3 A - 1.4 Domeniul este pătratic iar funcţia-integrand este simetrică în cele două variabile, deci alegerea unei ordini de integrare sau a celeilalte este egală.

$$J_4(y) = \int_0^1 x(1 + x^2 + y^2)^{-3/2} dx = -\int_0^1 d[(1 + x^2 + y^2)^{-1/2}] =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right]_{x=1}^{x=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2 + y^2}}. \qquad (10.139)$$

$$(10.139) \Rightarrow I_4 = \iint_D xy(1 + x^2 + y^2)^{-3/2} dx\, dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{2 + y^2}}\right) dy =$$

$$= \left[\sqrt{1 + y^2} - \sqrt{2 + y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1.$$

3 A - 1.5 Domeniul de integrare este mărginit inferior de un arc al cercului $C((0,1);\ 1)$ şi mărginit superior de un arc al parabolei, ambele situate în semiplanul $(x \geq 0)$. Cele două curbe au ca punct comun originea dar şi un al doilea punct care se obţine din intersecţia

$$(\Gamma_1) \cap (\Gamma_1) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y = x^2,\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow O(0,0)\ \&\ A(1,1). \qquad (10.140)$$

Integrând mai întâi după y se obţine $J_5 x) = \frac{1}{2}(x^2 - x^4) \Rightarrow \ldots \Rightarrow I_5 = \frac{1}{15}$.

A se detalia calculele.