Formula lui Green. Integrale curbilinii independente de drum.

Integralele curbilinii de specia a II-a (în raport cu coordonatele) sunt legate de integralele duble printr-o importantă teoremă, cunoscută sub numele de *Formula lui Riemann-Green* sau *Formula lui Green*. Formularea acesteia necesită câteva definiţii preliminare.

Domeniul plan şi mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$ se consideră a fi *orientat* dacă frontiera sa $\partial D = (\Gamma)$ este o curbă închisă parcursă în unul din cele două sensuri posibile : sensul direct (sau trigonometric pozitiv), respectiv în cel invers. Curba-frontieră este presupusă a fi netedă, cel puţin pe porţiuni (adică poate fi o reuniune de arce netede).

Teorema 10.3.2 (*Riemann-Green*). *Dacă funcţiile de două variabile P & Q admit derivate parţiale $\partial P / \partial y$ & $\partial Q / \partial x$ continue pe domeniul D atunci*

$$\boxed{\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint\limits_{(\Gamma^+)} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy\,.} \tag{10.144}$$

Notaţia (Γ^+) din membrul drept al acestei formule (10.144) semnifică parcurgerea curbei-frontieră în sens direct.

Exemple la **Formula lui Green (R-G)**

$\boxed{\text{Ex.}10.3-8}$ Se cere calcului integralelor de mai jos atât ca integrale duble / curbilinii cât şi cu formula (R-G) sau (10.141).

$$(i) \quad \iint\limits_D \cos(x+y)\, dx\, dy\,, \qquad D : \begin{cases} 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi/4 \le y \le \pi/2. \end{cases} \tag{10.145}$$

$$(ii) \quad \oint\limits_{(\Gamma^+)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\,, \quad (\Gamma) = C(O,1) : x^2 + y^2 = 1. \tag{10.146}$$

Funcţiile de sub integrala din (10.146) sunt presupuse a se anula în origine :

$$P(0,0) = Q(0,0) = 0. \tag{10.147}$$

$$(i) \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \sin y) - \frac{\partial}{\partial y}[\cos x\,(-\sin y)]\,. \tag{10.148}$$

Calculul ddirect al integralei din (10.145) conduce la

$$\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} dx \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x+y)\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\cos(x+y)\right]_{y=\pi/4}^{y=\pi/2} dx = \int_0^{\pi/2} [\sin(x+\pi/2) - \sin(x+\pi/4)]\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin x \cos\pi/2 + \cos x \sin\pi/2 - \sin x \cos\pi/4 - \cos x \sin\pi/4)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} [\cos x - (1/\sqrt{2})\sin x - (1/\sqrt{2})\cos x]\,dx =$$

$$= [\sin x]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}[\sin x]_0^{\pi/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}\,. \tag{10.149}$$

Integrala curbilinie din membrul drept al formulei lui Green (10.144) se calculează cu funcţiile P & Q ce rezultă din rescrierea lui $\cos(x+y)$ sub forma (10.148) :

$$(10.148) \Rightarrow \quad P(x,y) = -\cos x \sin y,\ \ Q(x,y) = \cos x \sin y\,. \tag{10.150}$$

(10.144) & (10.140) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy = \oint_{(\Gamma^+)} -\cos x \sin y\,dx + \cos x \sin y\,dy\,. \tag{10.151}$$

"Curba" închisă pe care trebuie calculată integrala din (10.151) este frontiera domeniului dreptunghiular din (10.145). Acesta se poate descompune ca reuniunea celor 4 laturi ale sale – segmentele de dreaptă care unesc punctele

$$A(0,\pi/4),\ B(\pi/2,\pi/4),\ C(\pi/2,\pi/2),\ D(0,\pi/2)\,. \tag{10.152}$$

Conturul poligonal (mai precis dreptunghiular) cu vârfurile din (10.152) trebuie parcurs în sens trigonometric pozitiv (sau direct), deci el se va putea scrie

$$(\Gamma^+) = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} \tag{10.153}$$

unde cele 4 segmente trebuie caracterizate parametric. Pe fiecare dintre laturi variază unul singur dintre argumentele x, y în timp ce variaţia celuilalt este nulă ; de exemplu, când punctul curent parcurge segmentul $\overline{AB}$ sau $\overline{CD}$ vom avea $dy = 0$, ceea ce anulează un termen de sub integrală. În descrierea parametrică a celor patru segmente vom utiliza şi o nota ţie mai pu ţin uzuală (cu săgeată spre stânga) atunci când parametrul descreşte de la limita din dreapta la limita stângă a intervalului. Aşadar,

$$\oint_{(\Gamma^+)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \underset{(10.153)}{=}$$

$$= \int_{\overline{AB}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\overline{BC}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\overline{CD}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\overline{DA}} P\,dx + Q\,dy \quad (10.154)$$

unde

$$\begin{cases} \overline{AB} : x = t \in [0,\pi/2], \;\; y = \pi/4 \Rightarrow dy = 0, \\ \overline{BC} : y = u \in [\pi/4,\pi/2], \; x = \pi/2 \Rightarrow dx = 0, \\ \overline{CD} : x = t \in [0,\overleftarrow{\pi}/2], \;\; y = \pi/2 \Rightarrow dy = 0, \\ \overline{DA} : y = u \in [\pi/\overleftarrow{4},\pi/2], \; x = 0 \Rightarrow dx = 0. \end{cases} \quad (10.155)$$

$$(10.144)\ \&\ (10.150) \;\Rightarrow\; \oint_{(\Gamma^+)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \underset{(10.150)}{=}$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos t)\,\sin\pi/4\,dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos\pi/2)\,\sin u\,du +$$

$$+ \int_{\pi/2}^{0} (-\cos t)\,\sin\pi/2\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi/4} (\cos 0)\,\sin u\,du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\sin t]_{\pi/2}^{0} + [\sin t]_{0}^{\pi/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\cos u]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}\,. \quad (10.156)$$

Aşa cum era de aşteptat, s-a regăsit valoarea integralei duble din (10.146). În calculul valorii din (10.156) am mai folosit inversarea limitelor pentru variaţiile unor primitive cu schimbarea semnului acestora.

$$(ii)\quad (10.146) \;\Rightarrow\; P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \;\;\&\;\; Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{10.157}$$

Funcţiile P & Q din (10.157) nu sunt continue în origine întrucât nu admit limite în acest punct. Totuşi, se pot calcula cele două integrale din formula lui Green şi se pot compara valorile obţinute. Pentru calculul integralei curbilinii din (10.143) vom folosi – în mod firesc – bine-cunoscuta parametrizare a cercului unitar centrat în origine :

$$(\Gamma^+) : \; x^2+y^2 = 1 \iff \begin{cases} x = \cos t\,, \\ y = \sin t\,, \end{cases} \; t \in [0, 2\pi]\,. \tag{10.158}$$

(10.158) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint\limits_{(\Gamma^+)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy = \int_0^{2\pi} [\cos t\,(-\sin t) + \sin t \cos t]\,dt = 0\,. \tag{10.160}$$

Cele două derivate parţiale, ale funcţiilor din (10.154), care intervin în integrala dublă din formula lui Green,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial P}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0\,. \tag{10.161}$$

Aşadar, formula lui Green (10.144) se verifică deşi condiţia de continuitate a integrandului din (10.160), membrul stâng, nu este îndeplinită, cele două ∂erivate nefiind continue în centrul domeniului originea. Verificarea egalităţii (10.144) este una banală : $0 = 0$.

10.3 A -3 Aplicaţii - exerciţii la formula lui Green.

3 A - 3.1 Să se calculeze, folosind formula lui Green, integralele curbilinii de mai jos.

$(i)\quad \oint\limits_{(\Gamma^+)} y^2 dx + x^2 dy\,, \qquad (\Gamma) : \begin{cases} x^2+y^2 = 1\,,\; y \ge 0 \\ x = t\,,\; y = 0\,,\; t \in [-1,1]\,. \end{cases}$

$(ii)\quad \oint\limits_{(\Gamma^+)} e^{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)\,, \qquad (\Gamma) : x^2+y^2 = 1\,.$

3 A - 3.2 Să se calculeze aria elipsei de semiaxe $a\,,b$ folosind o integrală curbilinie de specia a doua (respectiv cu formula lui Green).

3A-3.3 Să se calculeze, cu formula lui Green, integrala

$$I = \oint_{(\Gamma^+)} -x^2 y\,dx + x y^2\,dy, \text{ unde } \quad (\Gamma):\ x^2 + y^2 = a^2\ (a > 0).$$

Pentru fiecare dintre integralele de mai sus să se încerce verificarea rezultatului calculând şi cealaltă integrală din Formula lui Green (10.144).

3A-3.4 Să se calculeze, direct dar şi cu formula lui Green, integralele

$$(i) \qquad I = \oint_{(\Gamma^+)} (x - y)\,dx + dy, \quad \text{unde} \quad (\Gamma) = \partial D,\ D:\ x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0.$$

$$(ii) \qquad I = \oint_{(\Gamma^+)} (x^3 - 3xy^2)\,dx + (3x^2 y - y^3)\,dy, \quad (\Gamma):\ x^2 + y^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

$$(iii) \qquad I = \oint_{(\Gamma^+)} 2(x^2 + y^2)\,dx + (x - y)^2\,dy,$$

$$(\Gamma) = \triangle ABC \text{ cu } A(1,1),\ B(2,2),\ C(1,3).$$

Răspunsuri şi recomandări pentru rezolvare.

3A-3.1

(i) Conturul pe care se cere calculată integrala este semicercul superior al cercului unitar centrat în origine, completat cu diametrul său orizontal. Întrucât $P = y^2$ & $Q = x^2$,

$$\oint_{(\Gamma^+)} y^2 dx + x^2 dy \Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_D 2(x - y)\,dx\,dy = \ldots = -4/3.$$

Evident, pentru calculul integralei duble se foloseşte trecerea în coordonate polare, formula (10.119) cu $a = b = 0,\ r = 1,\ \theta \in [0, 2\pi]$. Nu se va omite jacobianul transformării din (10.122).

(ii) $P = -y e^{x^2 + y^2}$ & $Q = x e^{x^2 + y^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(2x^2+1+2y^2+1) = 2\,e^{x^2+y^2}(x^2+y^2+1).$$

Integrala dublă se va calcula tot prin trecerea în coordonate polare. Se va găsi valoarea

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \ldots = 2\,\pi\,e.$$

Cititorii interesaţi vor putea detalia calculele.

3 A – 3.2 Ecuaţia elipsei în coordonate cartesiene, raportate la axele de simetrie ale acesteia, respectiv ecuaţia sa parametrică, sunt

$$(E): \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \iff \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \ t \in [0, 2\pi]. \tag{10.162}$$

Schimbarea de coordonate (10.162) permite calculul integralei curbilinii pe conturul elipsei, dar ca să se obţină aria elipsei (mai exact – a discului eliptic) trebuie pus în evidenţa integrandul din formula Riemann-Green, adică $P\,dx + Q\,dy$;

$$\mathcal{A}_D = \frac{1}{2}\oint_{(E)} x\,dy - y\,dx \underset{(10.159)}{=} \int_0^{2\pi} ab\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = \pi\,a\,b.$$

Acelaşi rezultat rezultat se obţine calculând integrala dublă $\iint_D dx\,dy$

cu substituţia $\begin{cases} x = a\,\rho\cos t, \\ y = b\,\rho\sin t \end{cases}$ cu $\begin{cases} \rho \in [0,1], \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \dfrac{D(x,y)}{D(\rho,t)} = a\,b\,\rho.$

3 A – 3.3

Conturul de integrare este cercul de rază a centrat în origine. Deci integrala curbilinie se poate calcula imediat cu parametrizarea cunoscută,

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \ t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \oint_{(\Gamma^+)} -x^2 y\,dx + x y^2\,dy = \ldots$$

$$\ldots = 2\,a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\sin^2 t\,dt. \tag{10.163}$$

Integrala din (10.163) va putea fi calculată (de către cititorii interesaţi) prin dublarea repetattă a argumentului : trecerea în $\sin 2t$ şi apoi în $\cos 4t$. Se va găsi valoarea

$$I = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Se va putea regăsi această valoare cu integrala dublă din formula lui Green şi cu trecerea în coordonate polare.

3 A - 3.4 (i) Domeniul din enunţ este semidiscul circular

$$D(C,1) \cap (y \geq 0), \text{ cu } C(0,1) \tag{10.164}$$

Pentru integrala curbilinie se poate folosi parametrizarea

$$(\Gamma_1) : \begin{cases} x - 1 = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases} \theta \in [0, \pi] \;\; \& \;\; (\Gamma_2) : \{y = 0,\ x = t \in [0,2]\}.$$

În consecinţă, integrala se descompune în sumă de două integrale : $I = I_1 + I_2$ unde

$$I_1 = \ldots = \int_0^\pi (\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta - \sin\theta + \cos\theta)\, d\theta = \ldots = \frac{\pi}{2} - 2; \tag{10.165}$$

$$I_2 = \int_0^2 t\, dt = 2. \tag{10.166}$$

$$(10.165)\ \&\ (10.166) \Rightarrow I = \int_{(\Gamma^+)} (x - y)\, dx + dy = \frac{\pi}{2}. \tag{10.167}$$

Cititorul este invitat să detalieze calculele care au condus la valorile din (10.165) & (10.166).

Integrala dublă din Formula lui Green este imediată :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D dx\, dy = \frac{\pi}{2}$$

întrucât ea este egală cu aria unui semidisc circular de rază $= 1$. Deci s-a regăsit valoarea din (10.167). □

$$(ii) \quad P = x^3 - 3xy^2,\ Q = 3x^2y - y^3. \tag{10.168}$$

Pentru integrala pe sfertul de cerc unitar de rază $= 1$ se poate folosi reprezentarea parametrică din (10.155), dar intervalul pentru unghi va fi $[0,\pi/2]$. Pe cele două segmente

$$\overline{OA} \;\&\; \overline{BO} \text{ cu } A(1,0) \;\&\; B(0,1)$$

se vor putea folosi parametrizările

$$\overline{OA}: \begin{cases} x = t \in [0,1], \\ y = 0 \end{cases} \quad \& \quad \overline{BO}: \begin{cases} y = u \in [0,1], \\ x = 0. \end{cases}$$

Se va găsi valoarea $I = I_1 + I_2 + I_3 = 3/2$. A se detalia calculele.

Pentru integrala dublă oferim mai multe detalii.

$$(10.168) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy, \; \frac{\partial P}{\partial y} = -6xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 12 \iint_D xy\,dx\,dy. \tag{10.169}$$

În această intregrală este naturală (şi avantajoasă) trecerea în coordonate polare :

$$(D): \begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \sin\theta, \end{cases} \theta \in [0,\pi/2] \Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho. \tag{10.170}$$

$$(1.169)\;\&\;(1.170) \Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 12 \int_0^1 \rho^3\,d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,\sin\theta\,d\theta =$$

$$= 3 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\,d\sin^2\theta = \frac{3}{2}\,[\sin^2\theta]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}. \qquad \square$$

(*iii*) Conturul de integrare este unul triunghiular. Pentru integrala "curbilinie" (pe conturul poligonal) se pot folosi parametrizările

$$\overline{AB}: \begin{cases} x = y = t, \\ t \in [1,2], \end{cases} \quad \overline{BC}: \begin{cases} x = u \in [1,2], \\ y = 4 - u, \end{cases} \quad \overline{CA}: \begin{cases} x = 1, \\ y = v \in \in [1,3]. \end{cases} \tag{10.171}$$

Cu integrandul din enunţ şi reprezentările din (10.171) avem $I = I_1 + I_2 + I_3$ unde

$$I_1 = \int_1^2 4t^2\,dt = \frac{28}{3}\ ;\ I_2 = \ldots = 4\int_2^1 4\,du = -16\ ;\ I_3 = \int_3^1 (1-v)^2\,dv = -\frac{8}{3}\ ; \quad (10.172)$$

$$(10.171\text{-}172) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{3} - 10. \qquad (10.173)$$

Pentru calculul integralei duble pe domeniul triunghiular $[ABC]$, acesta poate fi descris analitic prin

$$[ABC] = \{(x,y) : 1 \le x \le 2\ \&\ x \le y \le 4-x\}. \qquad (10.174)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x-y) - 4y = 2x - 6y = 2(x-3y) \underset{(10.174)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 2\int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x-3y)\,dy = 2\int_1^2 \left[xy - \tfrac{3}{2}y^2\right]_{y=x}^{y=4-x} dx =$$

$$= 2\int_1^2 \left[4x - x^2 - \tfrac{3}{2}(x^2 - 8x + 16 - x^2)\right] dx = \qquad (10.175)$$

$$= 2\int_1^2 (16x - 2x^2 - 24)\,dx = 2\left[8x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 - 24x\right]_1^2 =$$

$$= -\tfrac{28}{3} = \tfrac{2}{3} - 10. \qquad (10.176)$$

A fost deci regăsită valoarea integralei pe contur din (10.173).

Notă. Cititorii sunt invitaţi să detalieze calculele care au condus la valorile din (10.172) & (10.173) precum, la integrala intermediară din (10.175) şi la valoarea finală din (10.176).

Ca observaţie, reprezentările parametrice ale laturilor din (10.171) au determinat ca în integrala I_1 pe $\overline{AB}$ să dispară al doilea termen, în I_2 să avem $dy = -du$ iar în I_3 să avem $dx = 0$ întrucât x era constant pe latura $\overline{CA}$.

Integrale curbilinii independente de drumul de integrare.

În anumite condiţii, integralele curbilinii de specia a doua pe curbe (sau drumuri) conţinute într-un anumit domeniu plan sau spaţial nu depind de drumul ales între două puncte A & B ci doar de aceste două extremităţi. În mod normal, o integrală de forma

$$I = \int_{(\Gamma)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{10.177}$$

depinde de cele trei funcţii P, Q, R, de drumul de integrare şi de sensul de parcurgere a acestuia. Dacă

$$(\Gamma) = \widehat{AB} \subset D \subseteq \mathbb{R}^3 \tag{10.178}$$

este un arc de curbă netedă sau o reuniune de astfel de arce (care constuie o curbă netedă pe porţiuni), atunci condiţiile ca o integrală de forma (10.177) să depindă numai de extremităţile drumului sunt formulate în

Teorema 10.3.3. *Fie funcţiile* P, Q, R *continue pe domeniul* D. *Condiţia necesară* şi *suficientă ca integrala* (10.177) *să nu depindă de drum în* D *constă în existenţa unei funcţii diferenţiabile* $V(x,y,z)$ *astfel încât*

$$\boxed{(\forall\ (x,y,z) \in D)\ \ dV(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.} \tag{10.179}$$

Demonstraţie. Presupunând că integrala din (10.177) nu depinde de drum, integrala de la un punct A (fixat) la un punct oarecare M va depinde numai de acesta din urmă, deci de coordonatele sale (x,y,z). Se poate deci nota valoarea integralei cu $V(x,y,z)$ şi se poate considera diferenţa

$$V(x+h,y,z) - V(x,y,z)$$

care reprezintă variaţia acestei funcţii între punctele

$M(x,y,z)$ & $M'(x+h,y,z)$, pe segmentul de dreaptă $\overline{MM'}$.

Întrucât funcţia a fost presupusă continuă, i se poate aplica (parţial) proprietatea de medie pentru fiecare variabilă, pe câte un interval de forma

$[x,x+h]$ | $[y,y+k]$ | $[z,z+\ell]$:

$$V(x+h,y,z) - V(x,y,z) = h\,P(x+\theta h,y,z) \text{ cu } 0<\theta<1. \tag{10.180}$$

Trecând la limită în rapoartele incrementare parţiale după fiecare variabilă, pentru funcţia $V(x,y,z)$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(x+h,y,z) - V(x,y,z)}{h} \underset{(10.180)}{=} \lim_{h \to 0} P(x+\theta h,y,z) = P(x,y,z). \quad (10.181)$$

$$(10.181) \Rightarrow \quad P(x,y,z) = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}. \quad (10.182)$$

Perfect anaalog se demonstrează că şi celelalte două funcţii Q & R sunt derivatele parţiale ale lui $V(x,y,z)$ în raport cu y & z, respectiv. Aşadar, expresia diferenţială de sub integrala din (10.177) este efectiv o diferenţială :

$$dV = P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \quad (10.183)$$

Se spune că expresia (sau forma) diferenţială de sub integrala din (10.177) sau din membrul drept al egalităţii (10.183) este o *diferenţială exactă*. Deci condiţia din enunţ este necesară. Suficienţa ei rezultă precum urmează. Întrucât (cu egalitatea (10.182) şi cu celelalte douî care n-au mai fost scrise) avem

$$P = \frac{\partial V}{\partial x},\ Q = \frac{\partial V}{\partial y},\ R = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (10.184)$$

Dacă (Γ) este o curbă de ecuaţii parametrice

$$(\Gamma): x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t) \text{ cu } t \in [\alpha,\beta] \quad (10.185)$$

cu cele trei funcţii continue şi cu derivate continue pentru $t \in [\alpha,\beta]$ iar punctele

$$M_0(x_0,y_0,z_0) \ \&\ M(x,y,z) \in D$$

corespund (respectiv) valorilor $t_0,\ \tau \in [\alpha,\beta]$, se poate scrie că

$$\int_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\widehat{M_0M}} \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz =$$

$$= \int_{t_0}^{\tau}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right]dt = \int_{t_0}^{\tau} \frac{d}{dt}[V(f(t),g(t),h(t))]\,dt =$$

$$= V(f(\tau),g(\tau),h(\tau)) - V(f(t_0),g(t_0),h(t_0))] = V(M) - V(A). \quad (10.186)$$

Din (10.186) rezultă tocmai independenţa de drum a integralei curbilinii, ceea ce completează demonstraţia. ■

Corolar. *Dacă funcţia componente* $V(x,y,z)$ *este de clasă* C_D^2 *atunci, pe baza teoremei lui Schwarz, derivatele sale mixte coincid şi egalităţile* (10.184) *sunt echivalente cu*

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.} \tag{10.187}$$

Observaţie. În cazul integralelor curbilinii pe curbe *din plan*, proprietăţile de mai sus rămân valabile dar ele se adaptează prin renunţarea la funcţia R şi la a treia variabilă z. Din egalităţile (10.187) rămâne doar prima, care este echivalentă cu

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.} \tag{10.188}$$

Înainte de a prezenta câteva exemple, se poate enunţa (şi se poate verifica uşor) o altă caracterizare a independenţei de drum :

Integralele curbilinii în raport cu coordonatele sunt independente de drum în domeniul D dacă şi numai dacă integrala curbilinie pe orice curbă închisă inclusă în D se anulează :

$$\boxed{\oint_{(\Gamma)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0.} \tag{10.189}$$

Exemple.

Ex.10.3 - 9 Să se verifice că integrala

$$I = \int_{(\Gamma)} (x^3 - yz)\,dx + (2y^3 - zx)\,dy + (3z^3 - xy)\,dz \tag{10.190}$$

nu depinde de drum şi să se calculeze valoarea ei între punctele $A(1,1,1)$ & $B(2,3,4)$.

(110.190) $\Rightarrow \quad P = x^3 - yz,\ Q = 2y^3 - zx,\ R = 3z^3 - xy \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -z = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -x = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -y = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{10.191}$$

Evident, (10.187) & (10.191) implică independenţa de drum.

Între cele două puncte date se poate alege aşadar orice drum care le uneşte. Una din cele mai simple alagarei constă dintr-un drum poligonal, format din trei segmente de dreaptă, fiecare paralel cu câte una din axele de coordonate. Aceste segmente pot fi determinate de punctele

$$A(1,1,1)\,,\quad A_1(2,1,1)\,,\ A_2(2,3,1)\,,\quad B(2,3,4). \tag{10.192}$$

$$(10.192)\ \Rightarrow\ \begin{cases} (Ox)\ ||\ \overline{AA_1}: \quad x = t \in [1,2]\,,\ y = z = 1\,; \\ (Oy)\ ||\ \overline{A_1A_2}: y = u \in [1,3]\,,\ x = 2\ \&\ z = 1\,; \\ (Oz)\ ||\ \overline{A_2B}: \quad z = v \in [1,4]\,,\ x = 2\ \&\ y = 3. \end{cases} \tag{10.193}$$

Evident, variaţiile argumentelor care sunt constante pe fiecare din cele trei segmente vor fi nule iar termenii corespunzători din integrală se vor anula. A se vedea şi exemplul Ex.10.3 – 8 de la pag. 376-377, cu relaţiile (10.153-155). Integrala se va descompune ca sumă de trei integrale şi anume :

$$I_1 = \int_{\overline{AA_1}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_1^2 (t^3 - 1)\,dt = \left[\tfrac{1}{4}t^4 - t\right]_1^2 = 3 - \frac{1}{4}\,; \tag{10.194}$$

$$I_2 = \int_{\overline{A_1A_2}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_1^3 (2u^3 - 2)\,du = \left[\tfrac{1}{2}u^4 - 2u\right]_1^3 = 36\,; \tag{10.195}$$

$$I_3 = \int_{\overline{A_2B}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_1^4 (3v^3 - 6)\,dv = \left[\tfrac{3}{4}v^4 - 6v\right]_1^4 = 173 + \frac{1}{4}. \tag{10.196}$$

$$(10.194\text{-}196)\ \Rightarrow\ I = 212.$$

Notă. Primitivele din (10.194-196) cu limitele de variaţie coincid cu cele din exemplul de la pag. 411 a tratatului de ANALIZĂ MATEMATICĂ [M. Roşculeţ, 1985] pe care l-am preluat, dar rezultatul final de acolo este 131 în loc de 212 ; cititorul este invitat sa verifice.

O altă verificare interesantă (a independenţei de drum) ar putea fi realizată alegând un alt drum între cele două puncte, de exemplu segmentul de dreaptă

$$\overline{AB}: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} = t\ \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t + 1, \quad t \in [0,1]. \\ z = 3t + 1, \end{cases} \tag{10.197}$$

$$(10.197) \Rightarrow \quad I = \int_0^1 (276t^3 + 276t^2 + 86t + 8)\, dt = \left[276\frac{t^4}{4} + 276\frac{t^3}{3} + 86\frac{t^2}{2} + 8t\right]_0^1 =$$

$$= 69 + 92 + 43 + 8 = 212,$$

deci s-a regăsit valoarea determinată integrând pe drumul poligonal din (10.193).
