

9. Integrale din functii definite în $\mathbb{R}$

9.1. Primitive, integrala nedefinită

Succinte preliminarii teoretice (+ exemple)

Definiția 9.1.1. Fie $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală continuă pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. O funcție

$$F: I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (9.1)$$

care este derivabilă pe intervalul I , este o *primitivă* a funcției f pe acest interval dacă

$$(\forall x \in I) F'(x) = f(x). \quad (9.2)$$

Așadar, o primitivă este o funcție derivabilă a cărei derivată coincide cu funcția f pe intervalul I . Se mai folosește și termenul de *antiderivată* în loc de (sau echivalent cu cel de) primitivă, ca în volumul [Gh. Sirețchi 1985, vol. I, p. 260]. I poate să reprezinte fie un interval, fie o reuniune arbitrară de intervale nedegenerate (care nu se reduc la un punct). Proprietățile noțiunii de primitivă urmează a fi prezentate (și investigate), dar este evident că ele sunt esențial legate de cele ale derivatei și ale operației de derivare. Una dintre proprietățile imediate privește non-unicitatea primitivei asociate unei funcții date; mai exact, dacă o funcție f admite o primitivă atunci ea admite o *infinitate* de primitive.

P.9.1.1 Dacă F și Φ sunt două primitive ale aceleiași funcții f atunci ele pot să difere printr-o constantă reală.

Într-adevăr, din definiția (9.2) rezultă că

$$\begin{aligned} (\forall x \in I) F'(x) = \Phi'(x) = f(x) &\Rightarrow F'(x) - \Phi'(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (F - \Phi)'(x) = 0 &\Rightarrow (F - \Phi)(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + c. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Prin urmare, dacă se cunoaște o primitivă F a funcției f atunci orice altă primitivă se obține din aceasta prin adăugarea unei constante reale. Putem nota, ca în monografia mai sus citată, cu $\mathcal{A}(I)$ mulțimea tuturor funcțiilor antiderivabile pe intervalul I , adică mulțimea funcțiilor care admit primitive pe acest interval. Se poate afirma că primitiva unei funcții este unic determinată până la o constantă.

Definiția 9.1.2. Dată fiind o funcție f din $\mathcal{A}(I)$, mulțimea tuturor primitivelor sale se numește *integrala nedefinită* a lui f și se notează

$$\int f \quad \text{sau} \quad \int f(x) dx. \quad (9.4)$$

Așadar, dacă F este o primitivă a funcției f atunci

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (9.5)$$

Din Def. 9.1.2 rezultă că integrala nedefinită este mai curând o mulțime de funcții decât o funcție și ar trebui deci să scriem

$$\int f(x) dx = \{F(x) + c : F'(x) = f(x), \quad c \in \mathbb{R}\}. \quad (9.6)$$

Totuși, primitiva unei funcții este o funcție iar integrala nedefinită poate fi considerată o funcție care depinde și de un parametru c , ca în (9.5) (sau C), iar nu o mulțime de funcții ca în (9.6). Având în vedere derivatele unor funcții elementare, putem oferi câteva exemple imediate.

Exemple 9.1. (i) $\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

$$(ii) \quad \int (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \quad \int \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$(iv) \quad \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln(2x+3) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x > -\frac{3}{2}.$$

□

O serie de proprietăți ale primitivelor sau (mai general) ale integralei nedefinite decurg din proprietăți ale funcțiilor derivabile și ale derivatelor, cum sunt cele care implică operații cu astfel de funcții.

P.9.1.2 Dacă f și g sunt funcții care admit primitive pe un interval I atunci $f \pm g$ și Cf ($C \in \mathbb{R}$) admit de asemenea primitive și

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g, \quad \int (Cf) = C \int f. \quad (9.7)$$

Într-adevăr, dacă F & G sunt (respectiv) primitive ale celor două funcții atunci

$$\begin{aligned} F' = f \text{ \& } G' = g &\Rightarrow F' \pm G' = f \pm g \Rightarrow (F \pm G)' = f \pm g \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int (f \pm g) = F \pm G \Rightarrow \int (f \pm g) = \int f \pm \int g. \end{aligned} \quad (9.8)$$

În prima egalitate din (9.8) am omis constantele de integrare precum c din (9.5), dar

acesta nu este un aspect esențial. Dacă

$$\int f = F + c \text{ \& } \int g = G + d \text{ atunci}$$

$$\int f \pm \int g = (F + c) \pm (G + d) = F \pm G + (c \pm d) = \int (f \pm g),$$

întrucât $c \pm d = k$ este o constantă ce poate lua orice valoare reală atunci când c & d iau valori arbitrare în $\mathbb{R}$. A doua formulă din (9.7) este imediată.

O proprietate importantă a noțiunii de primitivă / integrală nedefinită este următoarea:

Dacă f este derivata unei funcții F (care poate fi indentificată) atunci are loc egalitatea (9.5), pe care o mai scriem o dată :

$$\boxed{\int f = F + c \text{ sau } \int f(x) dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}.} \quad (9.9)$$

Cele patru primitive (integrale nedefinite) din Exemplul 9.1 au fost deduse tocmai pe baza acestei proprietăți evidente. Tot pe această proprietate se bazează așa-numitul

TABEL AL PRIMITIVELOR IMEDIATE (UZUALE)

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad \int dx &= x + C; & 2^\circ \quad \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1; \\ 3^\circ \quad \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C, x \neq 0; & 4^\circ \quad \int \frac{dx}{x+a} &= \ln|x+a| + C, x \neq -a; \\ 5^\circ \quad \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1; & 6^\circ \quad \int e^x dx &= e^x + C; \\ 7^\circ \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0; \\ 8^\circ \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0; \end{aligned}$$

$$9^{\circ} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C ;$$

$$10^{\circ} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C ;$$

$$11^{\circ} \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C ; C$$

$$12^{\circ} \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C ;$$

$$13^{\circ} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C ;$$

$$14^{\circ} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C ;$$

$$15^{\circ} \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C ;$$

$$16^{\circ} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C ;$$

$$17^{\circ} \quad \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C ;$$

$$18^{\circ} \quad \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C ;$$

$$19^{\circ} \quad \int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C ;$$

$$20^{\circ} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C .$$

Funcțiile hiperbolice se definesc prin

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} ; \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; \quad (9.10)$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} ; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} . \quad (9.11)$$

Funcțiile din (9.10) sunt *cosinusul hiperbolic* și *sinusul hiperbolic*, iar cele din (9.11) sunt *tangenta hiperbolică* și *cotangenta hiperbolică*. Aceste funcții intervin în alte patru formule cu primitive uzuale.

$$21^{\circ} \quad \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C ;$$

$$22^{\circ} \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C ;$$

$$23^{\circ} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C ;$$

$$23^{\circ} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C .$$

Metode pentru determinarea primitivelor

Determinarea primitivelor unor funcții reale pot să implice atât formule simple precum cele din (9.7), primitive imediate (sau uzuale) ca cele din tabelul de mai sus, dar și unele metode de integrare specifice : *metoda integrării prin părți*, respectiv *integrarea prin substituții*.

Metoda integrării prin părți este o consecință imediată a formulei pentru derivarea produsului a două funcții :

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x). \quad (9.13)$$

Dacă se aplică operatorul de luarea a primitivei la cei doi membri ai egalității (9.13), înmulțiți cu dx , se obține

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\int f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.} \end{aligned} \quad (9.14)$$

În cazul funcția de sub integrală (a cărei primitivă este căutată) este de forma

$$f(x) = u(x)v'(x) \Rightarrow f(x)dx = u(x)dv(x)$$

formula integrării prin părți – sau IPP – (9.14) se poate rescrie sub forma

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

sau

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du.} \quad (9.15)$$

Evident, această formulă (sau metodă de integrare) este aplicabilă în momentul în care funcția de integrat (sau integrandul) poate fi pusă sub forma produsul dintre o funcție și derivata sau diferențiala altei funcții. În unele situații, existența unui astfel de produs nu este absolut evidentă dar el se poate totuși considera, iar formula IPP este singura care poate furniza o primitivă. Unul dintre cele mai simple exemple îl oferă formula **19°** din **TABELUL PRIMITIVELOR IMEDIATE** : se poate scrie că

$$f = \ln x \ \& \ g' = 1 \quad \text{sau} \quad u = \ln x \ \& \ dv = dx$$

de unde rezultă, fie cu formula (9.14), fie cu (9.15), că

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int (\ln x) \cdot 1 \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + C = x (\ln x - 1) + C.\end{aligned}$$

Urmează alte câteva exemple de aplicare a formulei IPP.

Exemplu 9.2. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} \, dx.$ (9.16)

Se pot aplica notațiile

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{\arcsin x}, \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = e^{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx, \\ v = -\sqrt{1-x^2}. \end{array} \right. \quad (9.17)$$

și – pentru comoditate – putem nota cu I integrala din (9.16).

$$\begin{aligned}(9.17) \Rightarrow I &= -e^{\arcsin x} \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} \, dx = \\ &= -e^{\arcsin x} \sqrt{1-x^2} + \int e^{\arcsin x} \, dx.\end{aligned} \quad (9.18)$$

Se mai aplică încă o dată formula IPP (9.15) integralei din ultimul membru al lui (9.18), cu

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} u = e^{\arcsin x}, \\ dv = dx \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = e^{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx, \\ v = x \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \int e^{\arcsin x} \, dx &= x e^{\arcsin x} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} \, dx \underset{(9.16)}{=} x e^{\arcsin x} - I.\end{aligned} \quad (9.19)$$

În fine,

$$(9.18) \& (9.19) \Rightarrow 2I = \left(x - \sqrt{1-x^2} \right) e^{\arcsin x} + c \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{1-x^2} \right) e^{\arcsin x} + C.$$

(ii) $I = \int e^x \cos x \, dx.$ (9.20)

Pentru această integrală alegerea celor două “părți” este arbitrară, între cele două funcții:

$$u = e^x \text{ \& } dv = \cos x \, dx \text{ sau } u = \cos x \text{ \& } dv = e^x \, dx. \quad (9.21)$$

Faptul că ambele alegeri din (9.21) sunt egal acceptabile rezultă din faptul că exponențiala rămâne neschimbată prin derivare sau integrare, în timp ce $\cos x \rightarrow \mp \sin x$. Dacă alegem

$$\begin{cases} u = e^x, \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x \, dx, \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow I = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx. \quad (9.22)$$

În integrala din (9.22) este necesară o nouă aplicare a IPP :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = e^x, \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = e^x \, dx, \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + I. \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$(9.22) \text{ \& } (9.23) \Rightarrow 2I = e^x(\sin x + \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + C. \quad (9.24)$$

Am adăugat constanta de integrare doar la ultima expresie a primitivei din (9.24).

În cazul altor integrale care se pot rezolva cu metoda IPP, alegerea “părților” nu este arbitrară, ca în cazul tocmai prezentat, cu integrala din (9.20). Aceasta fie din cauza faptului că o anumită alegere a funcției derivate v' sau – mai exact – a diferențialei dv fie nu permite găsirea imediată a primitivei acesteia, în vederea aplicării formulei (9.15), fie integrala din membrul drept al formulei (9.15) sau (9.14) devine mai complicată decât integrala inițială. Exemplul următor ilustrează o asemenea situație.

$$(iii) \quad \int (x^2 + 2x - 3) e^{2x} \, dx. \quad (9.25)$$

Examinând cele două funcții din produsul de sub integrala (9.25), este evident că trinomul de gradul II se simplifică prin derivare dar se complică prin integrare, în timp ce exponențiala rămâne sub integrala coborând doar în față un coeficient constant (2 sau 1/2). Așadar, alegerea logică este

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = x^2 + 2x - 3, \\ dv = e^{2x} \, dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = (2x + 2) \, dx, \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \\ I &= \frac{1}{2} (x^2 + 2x - 3) e^{2x} - \int \frac{1}{2} (2x + 2) e^{2x} \, dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 2x - 3) e^{2x} - \int (x + 1) e^{2x} dx. \quad (9.26)$$

Evident, ultimei integrale din (9.26) i se mai aplică odată metoda IPP și în final se obține

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} (x^2 + 2x - 3) e^{2x} - \frac{1}{2} (x + 1) e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 + 2x - 3 - x - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 + x - \frac{7}{2} \right). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Cititorul interesat va putea verifica primitiva din (9.27) prin derivare.

$$(iv) \quad \int e^{x^2} x^2 dx. \quad (9.28)$$

În această integrală, singura alegere posibilă pentru funcția nederivată, adică f pentru formula (9.14), respectiv u pentru formula (9.15), ar fi exponențiala întrucât $\text{EXP}(x^2)$ nu admite o primitivă exprimabilă prin funcții elementare. Dar formula IPP ar conduce la o integrală mai complicată întrucât în integrala din membrul drept al formulelor (9.14) / (9.15) puterea variabilei x crește la 3. Se mai poate totuși încerca aplicarea formulei IPP prin asocierea exponențialei cu un x din x^2 , ajungându-se astfel la

$$\begin{cases} u = x, \\ dv = e^{x^2} x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx, \\ v = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int e^{x^2} x^2 dx = \frac{x}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx. \quad (9.29)$$

Dar în (9.29) se ajunge din nou la integrala din (sau primitiva funcției) e^{x^2} care nu se poate exprima prin funcții elementare. Această integrală poate fi abordată în cadrul ANALIZEI COMPLEXE.

Integrarea prin substituții.

Unele integrale nedefinite (sau primitive) pot fi determinate prin metode de substituție, adică prin trecerea de la variabila de integrare x la o altă variabilă, sau printr-o schimbare de funcție dacă se poate pune în evidenție o altă funcție a cărei derivată să apară sub integrală. Există cel puțin două modalități de aplicare a metodei substituției. Înainte de a trece la o prezentare formalizată oferim descrierea semi-formalizată a acestora.

IPS – 1 **Metoda schimbării de variabilă** constă în înlocuirea variabilei independente cu o funcție derivabilă. Această schimbare de variabilă trebuie aleasă astfel încât

funcția a cărei primitivă este căutată să se simplifice prin această schimbare.

Formal, se înlocuiește

$$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt. \quad (9.30)$$

Funcția de integrat devine

$$f(x) = f(\varphi(t)) \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (9.31)$$

După determinarea primitivei din (9.31), să o notăm cu $\Phi(t)$, se obține primitiva $F(x)$ din (9.5) prin revenirea la variabila x . Practic, aceasta presupune inversarea funcției φ din (9.30). Așadar,

$$F(x) = \Phi[\varphi^{-1}(x)]. \quad (9.32)$$

Nu există criterii generale pentru a alege o schimbare de variabilă sau alta, dar se urmărește o asemenea schimbare care să conducă la o simplificare a problemei determinării primitivei din (9.31).

Exemplu 9.3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ (9.36)

Aceasta este o integrală irațională în sensul că integrandul $f(x)$ conține un radical (dintr-o funcție de gradul II). Se vor prezenta ulterior metode specifice de integrare a funcțiilor iraționale, iar această integrală din (9.36) se încadrează în chiar două clase din această categorie. Dar în multe cazuri în care funcția de integrat include un radical de forma celui din (9.36) este posibilă înlocuirea variabilei x cu una dintre funcțiile trigonometrice fundamentale, *sinus* sau *cosinus*. Dacă alegem

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt, \quad (9.37)$$

integrala (pe care o notăm din nou cu I) din (9.36) devine

$$\begin{aligned} I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} & \stackrel{(9.37)}{=} \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t} = \int \sin^2 t dt = \\ & = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right). \end{aligned} \quad (9.38)$$

Având în vedere substituția din (9.37) care implică

$$t = \arcsin x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

primitiva în t din (9.38) devine

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \left(\arcsin x - \frac{1}{2} \sin 2 \arcsin x \right) = \frac{1}{2} \left(\arcsin x - \frac{1}{2} \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right). \quad (9.39)
 \end{aligned}$$

Ca și la precedentul exemplu, cititorul este invitat să verifice primitiva din (9.39) prin derivare.

IPS – 2 Integrarea prin schimbarea de funcție.

Această metodă constă în rescrierea funcției-integrand ca o funcție Φ de o altă funcție în variabila x , fie aceasta $u(x)$, totul înmulțit cu derivata $u'(x)$. Formal, dacă există funcțiile

$$\Phi(u) \text{ \& } u(x) : f(x) = \Phi[u(x)] u'(x) \quad (9.40)$$

atunci

$$\int f(x) dx = \int \Phi[u(x)] u'(x) dx = \int \Phi[u(x)] du(x) = \int \Phi(u) du. \quad (9.41)$$

Dacă se poate determina primitiva din ultimul membru al egalității multiple (9.41) și aceasta este $\Psi(u)$, atunci primitiva căutată este

$$\boxed{\int f(x) dx = \Psi[u(x)] + C.} \quad (9.42)$$

Nu este necesară o demonstrație specială a acestei metode, care conduce la formula (9.42), ci doar aplicarea regulii de derivare a funcțiilor compuse :

$$\frac{d}{dx} \Psi[u(x)] = \Phi[u(x)] u'(x) = f(x).$$

Exemple 9.4.

$$(i) \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx. \quad (9.43)$$

Evident, în integrala din (9.43) vom observa că notația $u(x) = \ln x$ conduce la

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 = \frac{1}{3} \ln^3 x.$$

$$(ii) \quad \int \frac{t}{1+t^2} dt. \quad (9.44)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \\ &= \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C. \end{aligned}$$

Aplicații la metodele IPP & IPS.

9.1 – A Să se determine primitivele (integralele nedefinite) de mai jos cu schimbările de variabilă recomandate.

$$(i) \quad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx, \quad t = \ln x;$$

$$(ii) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}, \quad t = 5x;$$

$$(iii) \quad \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x}, \quad x = e^t;$$

$$(iv) \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}, \quad t = x^4;$$

$$(v) \quad \int \frac{\cos x}{a^2 + 2 \sin^2 x} dx, \quad t = \frac{1}{a} \sin x;$$

$$(vi) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad t^2 = 1 + \frac{1}{x^4};$$

$$(vii) \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx, \quad x = \operatorname{tg} t.$$

Să se determine integralele ce urmează cu metoda IPP.

$$(viii) \quad \int x e^{ax} dx;$$

$$(ix) \quad \int \frac{1}{x^2} \ln^3 x dx;$$

$$(x) \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} e^{\operatorname{arctg} x} dx;$$

$$(xi) \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx;$$

$$(xii) \quad \int e^{ax} \cos bx dx \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

Răspunsuri - recomandări pentru rezolvare.

$$(i) \quad I = \int t^{1/2} dt \Rightarrow \dots \Rightarrow I = \frac{2}{3} t^{3/2} = \frac{2}{3} (\ln x)^{3/2};$$

$$(ii) \quad I = 5 \arcsin(5x).$$

(iii) Utilizând o proprietate a funcției logaritm și substituția recomandată, integrala devine

$$\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x} = \int \frac{\ln 2 + t}{\ln 4 + t} dt = t - (\ln 2) \int \frac{dt}{\ln 4 + t} = t - (\ln 2) \ln(\ln 4 + t). \quad (9.45)$$

Cu substituția inversă $t = \ln|x|$ în (9.45) se obține

$$I = \ln|x| - (\ln 2) \ln(\ln 4|x|). \quad (9.46)$$

Cititorul este invitat să verifice calculele și primitiva din (9.46) prin derivare.

(iv) Cu substituția $t = x^4$, integrala din enunț devine

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4} \arcsin t + C.$$

Scrierea expresiei analitice finale a primitivei și verificarea ei revin cititorului.

(v) Substituția recomandată transformă integrala din enunț în

$$I = \int \frac{\cos x}{a^2 + 2 \sin^2 x} dx = \int \frac{a dt}{a^2(1 + 2t^2)} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} t.$$

Scrierea expresiei analitice finale a primitivei și verificarea ei revin cititorului.

$$(vi) \quad t^2 = 1 + \frac{1}{x^4} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{t^2 - 1} \Rightarrow 4x^3 dx = \frac{2t dt}{(t^2 - 1)^2} \Rightarrow \quad (9.47)$$

$$\Rightarrow x dx = \frac{1}{2} \frac{t dt}{(t^2 - 1)^{3/2}}; \quad (9.48)$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^4}} \stackrel{(9.47, 48)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{\sqrt{1 + \frac{1}{(t^2 - 1)^2}} (t^2 - 1)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2 - 1) t dt}{\sqrt{1 + (t^2 - 1)^2} (t^2 - 1)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{\sqrt{1 + (t^2 - 1)^2} (t^2 - 1)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\sqrt{t^2 - 1}}{\sqrt{1 + (t^2 - 1)^2}}. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Integrala din (9.49) necesită o nouă substituție, de exemplu $\sqrt{t^2 - 1} = u$, care o transformă în

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}. \quad (9.50)$$

Integrala din (9.50) este o integrală irațională de tip *integrală binomă*, dar care se încadrează și în alte tipuri de asemenea integrale. Integralele iraționale de diverse tipuri, cu metodele specifice de rezolvare, vor fi prezentate ulterior.

Pentru integrala din enunț este posibilă și aplicarea unei substituții mult mai simple (decât cea indicată de autor în [Gh. Procopiuc 2001, p. 392]) și anume

$$x^2 = v \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dv; \quad (9.51)$$

$$(9.51) \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}. \quad (9.52)$$

Integrala din (9.52) este irațională dar se încadrează în cazul în care se poate aplica o substituție trigonometrică și anume

$$v = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} = \cos \varphi \text{ \& } dv = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}; \quad (9.53)$$

$$(9.51) \text{ \& } (9.53) \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \quad (9.54)$$

Ultima expresie din (9.54) s-a obținut cu formula **16°** din TABELUL PRIMITIVELOR IMEDIATE.

$$(9.53) \Rightarrow \varphi = \underset{(9.51)}{\operatorname{arctg} v} = \operatorname{arctg} x^2. \quad (9.55)$$

Din (9.54) & (9.55) se obține integrala din enunț sub forma

$$I = \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C. \quad (9.56)$$

Vom relua această integrală și ca integrală irațională (așa cum am menționat mai sus). [Cititorul este invitat să verifice, prin derivare, expresia analitică din \(9.56\).](#)

(vii) Cu substituția recomandată în enunț,

$$x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \text{ \& } \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx = \int \frac{\cos^2 t dt}{\sin^2 t \cos^3 t} = \quad (9.57)$$

$$= \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t \cos^2 t} = \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t (1 - \sin^2 t)}. \quad (9.58)$$

În această integrală (9.58) se poate aplica substituția firească

$$u = \sin t \Rightarrow I = \int \frac{du}{u^2(1-u^2)} = \int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2} \right) du = \quad (9.59)$$

$$= \int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)} \right) du = -\frac{1}{u} + \ln \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}. \quad (9.60)$$

În (9.58) se aplică inversele substituțiilor din (9.57) & (9.59) și se ajunge la primitiva

$$I = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C. \quad (9.61)$$

A se detalia calculele și se verifica primitiva din (9.61) prin derivare.

$$(viii) \quad u = x, \quad dv = \dots \Rightarrow I = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C.$$

(ix) Se poate nota integrala cu I_3 (după puterea logaritmului) și se poate alege

$$u = \ln^3 x, \quad dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow I_3 = -\frac{1}{x} \ln^3 x + 3 I_2. \quad (9.62)$$

Sunt necesare o a doua și o a treia integrare prin părți. Se obțin relații de recurență similare cu cea din (9.62) :

$$I_2 = -\frac{1}{x} \ln^2 x + 2 I_1, \quad I_1 = -\frac{1}{x} (\ln x + 1). \quad (9.63)$$

$$(9.62) \& (9.63) \Rightarrow I_3 = -\frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6). \quad (9.64)$$

Cititorul este invitat să reconstituie în detaliu cele 3 integrări prin părți și să verifice prin derivare primitiva din (9.64).

(x) Având în vedere structura funcției-integrand, putem alege

$$\begin{cases} u = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}, \\ dv = \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}, \\ v = e^{\arctg x}. \end{cases} \quad (9.65)$$

Aplicând formula IPP cu (9.65) se ajunge la rezultatul

$$I = \frac{x-1}{2} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (9.66)$$

Cititorul este invitat să reconstituie în detaliu integrarea prin părți și să verifice prin derivare primitiva din (9.66).

(xi) Se poate nota integrala cu I_n (după puterea de la numitor) iar alegerea naturală (sau cea mai firească) este

$$\begin{aligned} u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{x^n} &\Rightarrow \dots \Rightarrow I_n = -\frac{\ln x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2} \frac{1}{x^{n-1}} = \\ &= -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \left(\ln x + \frac{1}{n-1} \right). \end{aligned} \quad (9.67)$$

Ca și în cazul integralelor precedente, cititorul este invitat să reconstituie în detaliu integrarea prin părți și să verifice prin derivare primitiva din (9.66).

(xii) Pentru această integrală alegerea celor două părți poate fi oricare din cele două posibile. Dacă se alege

$$\begin{cases} u = e^{ax}, \\ dv = \cos bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = a e^{ax}, \\ v = \frac{1}{b} \sin bx. \end{cases} \quad (9.68)$$

$$(9.67) \Rightarrow I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx. \quad (9.69)$$

Este necesară o a doua integrare prin părți cu aceeași funcție u (ca în (9.68)) și dv corespunzător, în integrala din membrul drept al lui (9.69). Se ajunge la o ecuație în I care conduce la

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx).$$

Integrarea prin relații de recurență (IRR).

Această metodă se bazează, în principiu, pe metoda IPP. Dacă o integrală depinde de un indice natural n , deci o putem nota cu I_n , iar prin aplicarea metodei IPP se obține în membrul drept o expresie care conține integrala precedentă I_{n-1} sau chiar integrale de ranguri mai mici, este posibilă – în principiu – determinarea expresiei integralei I_n adică a unei primitive de forma $F_n(x)$ sau $F(x, n)$.

Înainte de a oferi două exemple specifice, să observăm că rezolvarea aplicației (exercițiului) (ix) din setul anterior a implicat exact găsirea unor relații de recurență între I_3, I_2, I_1 .

Exemple 9.5.

$$(i) \quad I_n = \int x^n e^x dx. \quad (9.70)$$

Se notează $u = x^n, dv = e^x dx \Rightarrow$
(9.70)

$$\Rightarrow I_n = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n I_{n-1}. \quad (9.71)$$

Pe baza acestei relații de recurență (9.71) se va putea determina efectiv integrala I_n plecând de la integralele de indici mici, I_0, I_1, I_2 .

$$I_0 = \int e^x dx = e^x, \quad I_1 = \int x e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x - 1). \quad (9.72)$$

$$I_2 = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 e^x (x - 1) = e^x (x^2 - 2x + 2). \quad (9.73)$$

$$I_3 = \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 e^x (x^2 - 2x + 2) = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$$

$$(ii) \quad I_n = \int \sin^n x dx. \quad (9.74)$$

Dacă se face o alegere a părților de genul $u = \sin^n x, dv = dx$ se ajunge la o integrală în care apare și variabila liberă x așa încât, încă de a prima aplicare a metodei IPP, integrala se complică :

$$I_n = x \sin^n x - n \int x \sin^{n-1} x \cos x dx.$$

O alegere mai potrivită este

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1} x, \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx, \\ v = -\cos x. \end{cases} \quad (9.75)$$

$$\begin{aligned} (9.74-75) \Rightarrow I_n &= -\int \sin^{n-1} x d \cos x = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{n I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}.} \quad (9.76)$$

Această relație de recurență (9.76) leagă două integrale din șirul (9.74) aflate la distanță de 2 ranguri. În consecință vor trebui determinate primele două integrale I_0 & I_1 iar următoarele se vor găsi separat, pentru rangurile pare și respectiv impare.

$$(9.74) \Rightarrow I_0 = \int dx = x \text{ \& } I_1 = \int \sin x dx = -\cos x. \quad (9.77)$$

$$(9.76) \Rightarrow 2 I_2 = -\sin x \cos x + I_0 \Rightarrow_{(9.77)} I_2 = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x).$$

$$(9.76) \Rightarrow 3 I_3 = -\sin^2 x \cos x + 2 I_1 \Rightarrow_{(9.77)} I_3 = -\frac{1}{3} (2 \cos x + \sin^2 x \cos x).$$

Integralele de ranguri superioare se pot obține în aceeași manieră, aplicând relația de recurență (9.76) integralelor de rang par, respectiv impar.

Aplicații la metoda integrării prin recurență - IRR.

9.2 - A Să se determine câte o relație de recurență pentru integralele de mai jos.

$$(i) \quad I_n = \int \ln^n x dx; \quad (ii) \quad I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx;$$

$$(iii) \quad I_n = \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^n}, \quad x \neq a \neq 0; \quad (iv) \quad I_n = \int \cos^n x dx;$$

Să se determine o relație de recurență între I_{n-2} & I_n , J_{n-2} & J_n de mai jos folosind integrarea prin părți.

$$(v) \quad I_n = \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 + 1}}; \quad (vi) \quad J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Răspunsuri - recomandări pentru rezolvare.

$$(i) \quad I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}.$$

$$(ii) \quad I_{n+1} = \frac{1}{n} \operatorname{tg}^n x - I_{n-1}; \quad I_0 = x + C, \quad I_1 = -\ln|\cos x| + C.$$

$$(iii) \quad I_{n+1} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2n} \frac{x}{(a^2 - x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \right]; \quad I_1 = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$$

(iv) Se poate proceda în maniera în care a fost tratat **Exemplul 9.5 - (ii)**. Se vor

determina și primele integrale I_0 & I_1 .

(v) Se poate pleca de la I_{n-2} care se integrează prin părți, cu alegerea posibilă

$$u = \frac{1}{x^{n-2}}, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Se ajunge la relația de recurență

$$I_n = -\frac{1}{n-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \right).$$

Se pot calcula și primele integrale I_0 , I_1 & I_2 . Se procedează analog și pentru integralele J_{n-2} & J_n .

Integrarea unor clase de funcții.

Pentru anumite clase de funcții, determinarea primitivelor se poate realiza folosind anumite metode specifice, pe lângă cele generale mai sus prezentate precum IPP sau IRR.

1 Integrarea funcțiilor raționale

Funcțiile raționale au forma generală ca raport dintre două polinoame :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ cu } P \in \text{POL}_m(\mathbb{R}) \text{ \& } Q \in \text{POL}_n(\mathbb{R}). \quad (9.78)$$

Evident, indicii (inferiori) care intervin în (9.78) indică gradele polinoamelor respective. Pentru funcțiile de forma (9.78) sub posibile două cazuri :

$$\boxed{1.1} \quad \text{grad } P \geq \text{grad } Q \iff m \geq n. \quad (9.78)$$

În acest caz se procedează la împărțirea cu rest a lui P la Q și rezultă noua expresie a funcției de integrat,

$$f(x) = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ cu } C \in \text{POL}_{m-n}(\mathbb{R}) \text{ \& } R \in \text{POL}_{<n}(\mathbb{R}). \quad (9.79)$$

Evident, nota funcțiile din (9.79) nu mai trebuie explicate. Prin urmare, primitiva funcției din (9.78) se va determina ca suma dintre primitiva (banală a) unui polinom – polinomul cât – și cea dintr-o altă funcție rațională care se încadrează în cazul următor.

$$\boxed{1.2} \quad \text{grad } P < \text{grad } Q \iff m < n. \quad (9.78)$$

În acest caz se procedează la descompunerea polinomului de la numitor în factori ireductibili peste câmpul numerelor reale. După cum se vede și din ALGEBRA SUPERIOARĂ studiată în liceu, acești factori pot să fie sau liniari (corespunzând unor rădăcini reale) sau funcții de gradul al doilea cu rădăcini complex-conjugate. Dar ambele tipuri de factori pot să apară în descompunerea lui $Q(x)$ la câte o putere > 1 dacă factorul respectiv admite rădăcini multiple. Pentru a nu încălca expunerea, oferim forma cea mai generală a factorizării unui polinom cu coeficienți reali $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$:

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_p)^{k_p} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\ell_1} \dots (x^2 + b_q x + c_q)^{\ell_q}. \quad (9.80)$$

În această descompunere (9.80) intervin p factori ce corespund rădăcinilor reale, fiecare cu multiplicitatea sa k_h ($1 \leq h \leq p$) care apare la exponentul fiecărui factor, urmați de alți q factori ce corespund celor q perechi de rădăcini complex conjugate, de asemenea cu multiplicitățile lor ℓ_j ($1 \leq j \leq q$). Desigur, perechile de coeficienți din acești factori cu rădăcini complexe verifică inegalitățile

$$b_j^2 - 4c_j < 0 \quad (1 \leq j \leq q). \quad (9.81)$$

Odată identificată descompunerea de forma (9.80), al doilea termen din expresia (9.79) sau însăși funcția $f(x) = P(x)/Q(x)$ în cazul 1.2, se poate scrie ca o sumă de fracții simple care se încadrează în unul dintre cele 4 tipuri de mai jos:

$$\frac{A}{x - x_h}, \quad \frac{B}{(x - x_h)^r} \quad \text{cu } 1 \leq r \leq k_h, \quad (9.82)$$

$$\frac{Cx + D}{x^2 + b_j x + c_j}, \quad \frac{Ex + F}{(x^2 + b_j x + c_j)^s} \quad \text{cu } 1 \leq s \leq \ell_j. \quad (9.83)$$

Fiecare factor simplu contribuie cu câte o singură fracție simplă la descompunerea lui $f(x)$ în timp ce factorii aferenți rădăcinilor multiple contribuie, fiecare, cu un număr de fracții simple egal cu multiplicitatea rădăcinii (perechii de rădăcini) respective. Determinarea coeficienților constanți de la numărătorii fracțiilor de formele (9.82) & (9.83) se realizează prin *aducerea fracțiilor din sumă la același numitor* după care se aplică *metoda coeficienților nedeterminați*, identificându-se polinoamele de la numărătorul funcției date cu numărătorul obținut după acea aducere la același numitor.

Găsirea primitivelor fracții simple este o chestiune relativ simplă, dacă se folosește TABELUL PRIMITIVELOR IMEDIATE precum și primitivele fracțiilor cu numitori de gradul II care conduc la logaritmi și arc-tangente. Apoi primitiva lui $f(x)$ se scrie ca suma primitivelor tuturor fracțiilor simple din descompunerea acesteia. Exemplele ce urmează vor ilustra diverse cazuri care pot să apară în aplicații.

Exemple 9.6.

$$(i) \quad I = \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx. \quad (9.84)$$

$$(9.84) \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{3}{(x-2)(x-3)} = 3 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x + 3(\ln|x-3| - \ln|x-2|) + C = x + 3 \ln \frac{|x-3|}{|x-2|} + C.$$

$$(ii) \quad I = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)}. \quad (9.85)$$

Numitorul funcției de sub integrală are o rădăcină reală simplă și două rădăcini complex-conjugate (ale unității); deci în descompunerea sa ca sumă de fracții simple vor apărea două fracții, una de forma (9.82-1) iar cealaltă de tip (9.93-1):

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \ln|x+1| - \int \frac{x dx}{x^2+x+1}. \quad (9.86)$$

Integrala din (9.86) se determină printr-un artificiu care creează la numărător derivata numitorului de gradul II, urmat de un alt artificiu la numitor care va conduce la o primitivă cu arctg:

$$\int \frac{x dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \underset{\text{not}}{=} \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} J. \quad (9.87)$$

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow J = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + 3/4} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2x+1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad (9.88)$$

În fine, din (9.86-88) obținem

$$\Rightarrow I = \ln|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} J =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = \\
&= \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

$$(iii) \quad I = \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx. \quad (9.89)$$

Funcția de sub integrală are un numitor cu o pereche de rădăcini complex-conjugate duble. Așdar vom căuta pentru funcție o descompunere de forma

$$f(x) = \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2};$$

$$\begin{aligned}
(9.89) \Rightarrow f(x) &= \frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \\
&= \frac{Cx^3 + (2C+D)x^2 + (A+2C+2D)x + B+2D}{(x^2+2x+2)^2}. \quad (9.90)
\end{aligned}$$

Identificându-se numărătorul fracției din (9.90) cu cel al funcției din (9.89) se ajunge la sistemul algebric

$$\begin{cases} C = 0, \\ 2C + D = 0, \\ A + 2C + 2D = 3, \\ B + 2D = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = 5, \\ C = 0, \\ D = 0. \end{cases} \quad (9.91)$$

Rezultă că funcția de integrat nu mai trebuie rescrisă întrucât ea însăși este o fracție simplă. Dar am prezentat aceste calcule din (9.90) & (9.91) spre a ilustra modul în care se caută descompuneri pentru asemenea funcții cu numitori funcții de gradul doi la o putere, în acest caz la pătrat.

Se poate rescrie printr-un artificiu numărătorul funcției de sub integrală astfel încât să apară derivata trinomului de gradul II, $\pm$ o constantă :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} = 3 \frac{x+5/3}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{3}{2} \frac{2x+5/6}{(x^2+2x+2)^2} = \\
&= \frac{3}{2} \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} - \frac{3}{2} \frac{7/6}{(x^2+2x+2)^2} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} - \frac{7}{12} \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2}. \quad (9.92)$$

Aplicând operatorul de integrare (sau de luare a primitivei) la funcția descompusă sub forma (9.92) se va obține tot o fracție dar cu trinomialul de la numitor la puterea întâia (din primul termen), minus o altă primitivă care va conduce de asemenea la o fracție și la o arc-tangentă. Vom scrie

$$I = \int \frac{3x + 5}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \frac{3}{2} I_1 - \frac{7}{12} I_2. \quad (9.93)$$

$$I_1 = \int \frac{(2x + 2) dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = - \frac{1}{x^2 + 2x + 2}. \quad (9.94)$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{[(x + 1)^2 + 1]^2} = \int \frac{d(x + 1)}{[(x + 1)^2 + 1]^2}. \quad (9.95)$$

În integrala din (9.95) este perfect naturală o substituție și anume

$$t = x + 1 \Rightarrow dx = dt \text{ \& } I_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2}. \quad (9.96)$$

Integrala (primitiva) din (9.96) se va obține integrând prin părți integrala care are ca primitivă arc-tangenta :

$$\begin{aligned} J = \int \frac{dt}{t^2 + 1} &= \operatorname{arctg} t \text{ \& } \begin{cases} u = \frac{1}{t^2 + 1}, \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-2t dt}{(t^2 + 1)^2}, \\ v = t \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{arctg} t &= \frac{t}{t^2 + 1} + 2 \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t}{t^2 + 1} + 2 \int \frac{(t^2 + 1 - 1) dt}{(t^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{t}{t^2 + 1} + 2 \operatorname{arctg} t - 2 \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} t + \frac{t}{t^2 + 1} \right) = I_2. \end{aligned} \quad (9.97)$$

(9.93), (9.94), (9.96) & (9.97) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{7}{24} \left(\operatorname{arctg}(x + 1) + \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 1} \right). \quad (9.98)$$

Cititorul va verifica descompunerea în fracții simple din (9.106) pecum și primitiva din

(9.98), prin derivare.

$$(iv) \quad I = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}. \quad (9.99)$$

Pentru această funcție se va căuta o descompunere ca sumă de 3 fracții simple :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}. \quad (9.100)$$

Prin aducere la același numitor și identificarea coeficienților termenilor asemenea se ajunge la soluția

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = -1, \quad E = 0. \quad (9.101)$$

Din (9.100) & (9.101) se obține

$$I = \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{x}{(x^2+x+1)^2} - \frac{x}{x^2+x+1} \right] dx = \quad (9.102)$$

$$= \ln|x+1| - \int \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx - \int \frac{x}{x^2+x+1} dx \underset{\text{not}}{=} \ln|x+1| - J_2 - J_1. \quad (9.103)$$

Am notat cu J_2 & J_1 cele două integrale care intervin în (9.103) întrucât acestea nu sunt imediate ; între ele se poate stabili o legătură folosind procedee similare cu cele din [Ex. 9.6](#) - (iii).

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{(x^2+x+1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx. \end{aligned} \quad (9.104)$$

Se poate nota ultima integrală din (9.104), fără coeficient, cu I_2 ; deci

$$J_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} I_2 \quad \text{cu} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx. \quad (9.105)$$

Această integrală I_2 se determină similar cu modul în care s-a găsit primitiva J . Notând

$$x + \frac{1}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = dt, \\ x^2 + x + 1 = t^2 + \frac{3}{4}, \end{cases} \Rightarrow I_2(t) = \int \frac{1}{(t^2 + \frac{3}{4})^2} dt. \quad (9.106)$$

În integrala

$$\int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} \quad (9.107)$$

aplicăm (membrului stâng) formula IPP cu

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}, \\ dv = dt \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-2t}{(t^2 + \frac{3}{4})^2}, \\ v = t \end{cases} \quad (9.107) \\ \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} &= \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + \int \frac{2t^2}{(t^2 + \frac{3}{4})^2} dt = \\ &= \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + 2 \int \frac{t^2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{(t^2 + \frac{3}{4})^2} dt = \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + 2 \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} I_2(t). \end{aligned} \quad (9.108)$$

Reamintim că în (9.108) am notat cu $I_2(t)$ integrala din ultimul membru al relației (9.106).

$$\begin{aligned} (9.108) &\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} = \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + 2 \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} I_2(t) \quad (9.107) \\ &\Rightarrow I_2(t) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} \quad (9.106) \\ &\Rightarrow I_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}. \end{aligned} \quad (9.109)$$

(9.105) & (9.109) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J_2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} = \\ &= -\frac{x+2}{3(x^2+x+1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (9.110)$$

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.
 \end{aligned} \tag{9.111}$$

Ultima integrală din (9.111) a fost determinată în cadrul **Exemplului 9.6** - (ii): integrala J din (9.87-88). Rezultă

$$J_1 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}. \tag{9.112}$$

În fine, din (9.103) cu (9.110) & (9.111) se obține

$$\begin{aligned}
 I &= \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{x + 2}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{5}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad I &= \frac{x + 2}{3(x^2 + x + 1)} + \ln \frac{|x + 1|}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{5}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned} \tag{9.113}$$

Notă. Am prezentat în detaliu rezolvarea acestei aplicații având în vedere că aceasta prezenta unele dificultăți sau subtilități. Cititorul este invitat să verifice descompunerea în fracții simple din (9.102) pecum și primitiva din (9.113), prin derivare.

Aplicații la integrarea funcțiilor raționale

9.3 - A Să se determine primitivele (din funcții raționale) de mai jos.

$$(i) \quad I = \int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx;$$

$$(ii) \quad I = \int \frac{x^2 dx}{(x + 2)^2 (x + 4)^2};$$

$$(iii) \quad I = \int \frac{x^3}{2x^2 - 4x + 1} dx.$$

$$(iv) \quad I = \int \frac{x + 1}{2x^2 + 3x + 2} dx.$$

Răspunsuri - recomandări pentru rezolvare.

$$(i) \quad f(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1} = \frac{x^2}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{4} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1}; \tag{9.114}$$

$$(9.114) \Rightarrow I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \quad (9.115)$$

Cititorul va verifica descompunerea în fracții simple din (9.114) pecum și primitiva din (9.115), prin derivare.

(ii) Pentru această funcție se va căuta o descompunere ca sumă de 4 fracții simple :

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+4)^2} + \frac{D}{x+4}. \quad (9.116)$$

Procedând ca în exemplul anterior (ii) & (iii) (prin aducere la același numitor și identificarea coeficienților) se vor găsi valorile

$$A = 1, B = -2, C = 4, D = 2. \quad (9.117)$$

Din (9.116) & (9.117) se obține

$$I = \int \left[\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{x+2} + \frac{4}{(x+4)^2} + \frac{2}{x+4} \right] dx = \quad (9.118)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{x+2} - 2 \ln|x+2| - \frac{4}{x+4} + 2 \ln|x+4| + C = \\ &= -\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x+4} + \ln \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^2 + C. \end{aligned} \quad (9.119)$$

Cititorul este invitat să verifice descompunerea în fracții simple din (9.118) precum și primitiva din (9.119), prin derivare.

$$(iii) \quad I = \int \frac{x^3}{2x^2 - 4x + 1} dx. \quad (9.120)$$

Funcția de integrat are gradul numărătorului superior celui al numitorului, deci ea se situează în cazul 1.1 și trebuie scrisă sub forma (9.79) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{2x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} \frac{2x^3}{2x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} \left(x + 2 + \frac{7x-2}{2x^2 - 4x + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (x+2) + \frac{7x-2}{2x^2 - 4x + 1} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{7x-2}{2(x^2 - 2x + 1/2)}. \end{aligned} \quad (9.121)$$

Numitorul funcției admite două rădăcini reale dar iraționale :

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 2 \left(x - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(x - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (9.122)$$

Să observăm că factorizarea din (9.122) se mai poate scrie sub forma echivalentă

$$2x^2 - 4x + 1 = (\sqrt{2}x - 1 - \sqrt{2})(\sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2}). \quad (9.123)$$

Corespunător factorizării din (9.123) a numitorului, fracția din (9.121) se descompune în sumă de două fracții simple cu numitori funcții liniare care au ca primitive logaritmi naturali ai acestora. Se ajunge la primitiva (integrala nedefinită)

$$\begin{aligned} I = \dots &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{7}{8} \int \frac{(2x-2)dx}{x^2 - 2x + \frac{1}{2}} + \frac{5}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2 - \frac{1}{2}} = \dots \\ \dots &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{7}{8} \ln \left| x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right| + \frac{5\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}}{x\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned} \quad (9.124)$$

Urmează să se detalieze calculele care au condus la primitiva din (9.124) iar aceasta să fie verificată prin derivare.

$$(iv) \quad I = \int \frac{x+1}{2x^2 + 3x + 2} dx. \quad (9.125)$$

Numitorul funcției de sub integrală are rădăcini complexe. Deci funcția însăși este o fracție simplă și ea se integrează relativ ușor, prin două mici artificii.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \frac{4x+4}{2x^2 + 3x + 2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d(2x^2 + 3x + 2)}{2x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2x^2 + 3x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2 + (3/2)x + 1} dx. \end{aligned} \quad (9.126)$$

Integrala rămasă în (9.126) se aduce la o arc-tangentă, prin substituția $x + (3/4) = t$. Se ajunge la expresia finală

$$I = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x+3}{2\sqrt{7}}. \quad (9.127)$$

Urmează să se detalieze calculele care au condus la primitiva din (9.124) iar aceasta să fie verificată prin derivare.

2 Integrarea funcțiilor iraționale

Funcțiile iraționale sunt, în general, funcții care conțin radicali de diverse ordine și

din diverse alte funcții. Există o largă varietate de funcții iraționale, implicit și metode variate pentru a le găsi primitivele. Tocmai acest aspect face necesară prezentarea funcțiilor iraționale *clasificate în anumite categorii sau tipuri*, cu metodele de integrare adecuate fiecăreia. Fără a încerca o generalizare, în marea majoritate a cazurilor funcția irațională de integrat se transformă, printr-o substituție potrivit aleasă, într-o funcție rațională a cărei primitivă este determinată, după care se regăsește primitiva funcției date prin revenire la variabila inițială (cu substituția inversă). În cele ce urmează vom desemna prin R o funcție rațională, ca raport a două polinoame :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ sau } R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \text{ cu } P \in \text{POL}_m(\mathbb{R} | \mathbb{R}^2) \text{ \& } Q \in \text{POL}_n(\mathbb{R} | \mathbb{R}^2). \quad (9.128)$$

2.1 Integrale de forma

$$I = \int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx \text{ sau } I = \int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx. \quad (9.129)$$

În primul caz din (9.129) se aplică în mod firesc substituția

$$ax+b = t^n \Rightarrow dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt, \quad (9.130)$$

care elimină radicalul și conduce la integrarea unei funcții raționale. În cazul mai general, în care intervin radicali de diverse ordine din funcția liniară, substituția este exact cea din (9.130) însă n nu mai este ordinul unicului radical ci *cel mai mic multiplu comun* al celor k ordine :

$$n = [n_1, n_2, \dots, n_k] \Rightarrow \sqrt[n_j]{ax+b} = t^{n/n_j} = t^{m_j} \text{ cu } m_j \in \mathbb{Z}. \quad (9.131)$$

Acest tip de integrale include cazul particular în care funcția liniară de sub cei k radicali din (9.129) se reduce la variabila x . Urmează două exemple de această natură.

Exemple 9.7.

$$(i) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}. \quad (9.132)$$

Substituția (9.131) pentru funcția din (9.132) devine

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt; \quad (9.133)$$

(9.132) \& (9.133) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I(t) &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = \int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt = \\
&= \int (t^2 - t + 1) dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|. \quad (9.134)
\end{aligned}$$

Conform cu substituția (9.133) $\Rightarrow t^3 = \sqrt{x}$ & $t^2 = \sqrt[3]{x}$, primitiva din (9.134) conduce la

$$I = \frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.$$

Notă. Integrala din (9.132) se încadrează în tipul (9.129-2) dar și într-un tip de integrală irațională în care funcția de integrat este o funcție rațională de $k+1$ variabile, ultimele k argumente fiind *puteri raționale* ale variabilei x :

$$I = \int R(x, x^{r_1}, x^{r_2}, \dots, x^{r_k}) dx, \quad r_j = \frac{p_j}{q_j}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (9.135)$$

Exponenții raționali din (9.135) sunt (considerații ca fiind) *fracții ireductibile*, cu numărătorii și numitorii numere întregi. Acest tip de integrale este considerat separat în monografia [Gh. Siretchi 1985, vol. I, p. 284], deși el este asimilabil cu (9.129-2). Oferim un alt exemplu de integrală irațională care se încadrează efectiv în modelul (9.129-2), Exemplul 1 din volumul tocmai citat, pag. 286.

$$(ii) \quad I = \int \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt[3]{x+1}} dx. \quad (9.136)$$

Cu substituția $x+1 = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$, integrala din (9.136) devine

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int \frac{(1+t^3)6t^5}{1-t^2} dt = 6 \int \frac{(1-t+t^2)}{1-t} t^5 dt = \\
&= 6 \int t^5 dt + 6 \int \frac{t^7}{1-t} dt = t^6 + 6 \int \frac{t^7}{1-t} dt = \\
&= t^6 - 6 \int (t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}) dt = \\
&= t^6 - 6 \left(\frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{6} t^6 + \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 + t + \ln|t-1| \right). \quad (9.137)
\end{aligned}$$

În primitiva din (9.137) se înlocuiește $t = (x+1)^{1/6} = \sqrt[6]{x+1}$ (și se adaugă constanta de integrare) obținându-se integrala din (9.136), pe intervalul $(-1, +\infty)$.

2.2 Integrale de forma

$$I = \int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx, \quad ac \neq 0. \quad (9.138)$$

Substituția

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^n \quad (9.139)$$

conduce la o integrală dintr-o funcție rațională.

Exemplu 9.8.

$$I = \int (x-1) \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx. \quad (9.140)$$

Substituția (9.139) adaptată la funcția din (9.140) este

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} = t \Rightarrow \frac{x}{x+1} = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{2t dt}{(1-t^2)^2}. \quad (9.141)$$

(9.141) & (9.141) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2t^2-1}{1-t^2} \frac{2t^2 dt}{(1-t^2)^2} = 2 \int \frac{t^2(2t^2-1)}{(1-t^2)^3} dt. \quad (9.142)$$

Această ultimă integrală este una rațională dar obținerea primitivei ar necesita descompunerea funcției ca sumă de numai puțin de 6 fracții simple. Dar se poate proceda la o descompunere intermediară (și mai simplă) utilizând substituția $t^2 = u$ care conduce la

$$\frac{t^2(2t^2-1)}{(1-t^2)^3} = \frac{2u^2-2u}{(1-u)^3} = \frac{1}{(1-u)^3} - \frac{3}{(1-u)^2} + \frac{2}{1-u}. \quad (9.143)$$

Notând cu $g(t)$ funcția de sub integrala din (9.142), aceasta devine – conform cu (9.143) –

$$g(t) = \frac{1}{(1-t^2)^3} - \frac{3}{(1-t^2)^2} + \frac{2}{1-t^2} \Rightarrow \int g(t) dt = I_3 - 3I_2 + 2I_1. \quad (9.144)$$

Notațiile pe care le-am introdus în (9.144) vor facilita obținerea primitivei lui utilizând integrarea prin părți “în sens invers”, după cum urmează.

$$I_1 = \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|; \quad (9.145)$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{1-t^2}, \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2t}{(1-t^2)^2}, \\ v = t \end{cases} \text{ în } I_1 \Rightarrow \quad (9.146)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{t}{1-t^2} - 2 \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt = \frac{t}{1-t^2} + 2I_1 - 2I_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \frac{t}{1-t^2} + \frac{1}{2} I_1. \end{aligned} \quad (9.147)$$

Se continuă în mod similar cu a doua integrală :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = \frac{1}{(1-t^2)^2}, \\ dv = dt \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{4t}{(1-t^2)^3}, \\ v = t \end{cases} \text{ în } I_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow I_2 &= \frac{t}{(1-t^2)^2} - 4 \int \frac{t^2}{(1-t^2)^3} dt = \frac{t}{(1-t^2)^2} + 4 \int \frac{1-t^2-1}{(1-t^2)^3} dt = \\ &= \frac{t}{(1-t^2)^2} + 4I_2 - 4I_3 \Rightarrow 4I_3 = 3I_2 + \frac{t}{(1-t^2)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{4} \frac{t}{(1-t^2)^2}. \end{aligned} \quad (9.148)$$

Urmând în sens invers relațiile (de tip recurent) (9.148), (9.147) și expresia (9.145) a lui I_1 găsim succesiv

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{t}{1-t^2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|; \quad (9.149)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{4} \frac{t}{(1-t^2)^2} \stackrel{(9.149)}{=} \frac{1}{4} \frac{t}{(1-t^2)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{t}{1-t^2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{t}{(1-t^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{t}{1-t^2} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|. \end{aligned} \quad (9.150)$$

Din (9.144) plus (9.145), (9.149) & (9.150) obținem primitiva lui $g(t)$:

$$\begin{aligned} G(t) &= I_3 - 3I_2 + 2I_1 = \\ &= \frac{1}{4} \frac{t}{(1-t^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{t}{1-t^2} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{3}{2} \frac{t}{1-t^2} - \frac{3}{8} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{t}{(1-t^2)^2} - \frac{9}{8} \frac{t}{1-t^2} + \frac{13}{16} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|. \quad (9.151)$$

În fine, integrala din (9.140) se obține din această primitivă (9.151) înlocuind

$$t = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \quad \& \quad t^2 = \frac{x}{x+1}. \quad (9.152)$$

$$I = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x}{x+1}} (x+1)^2 - \frac{9}{8} \sqrt{\frac{x}{x+1}} (x+1) + \frac{13}{16} \ln(2x + 2\sqrt{x(x+1)} + 1) + C.$$

2.3 Integrale de forma

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0. \quad (9.153)$$

Integralele de acest tip se pot transforma în integrale din funcții raționale, aplicând substituții specifice pentru fiecare caz în parte : **substituțiile lui Euler**.

$$1^\circ \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a} \quad \text{dacă } a > 0. \quad (9.154)$$

$$2^\circ \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c} \quad \text{dacă } c > 0. \quad (9.155)$$

$$3^\circ \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) \quad \text{dacă } b^2 - 4ac \geq 0. \quad (9.156)$$

În toate aceste trei cazuri, ecuația care indică substituția specifică *se ridică la pătrat*, se operează o *reducere sau o simplificare*, apoi *se exprimă radicalul numai în variabila t* după ce variabila x a fost exprimată ca funcție de $x = x(t)$. Tot această exprimare permite scrierea diferențialei $dx = x'(t) dt$. Apoi radicalul ca funcție de t ,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = h(t), \quad (9.157)$$

$x = x(t)$ și $dx = x'(t) dt$ se introduc sub integrala din (9.153) și se obține astfel o integrală dintr-o funcție rațională

$$g(t) = R(x(t), h(t)) x'(t) \quad \text{cu} \quad G(t) = \int g(t) dt. \quad (9.158)$$

În fine, în primitiva din (9.158) se înlocuiește variabila t ca funcție de x , obținută prin inversarea expresiei $x = x(t)$ sau – de multe ori mai simplu prin scoaterea lui t din

substituția aplicată – una dintre cele trei : (9.154) | (9.155) | (9.156). Se găsește astfel primitiva (integrala nedefinită) căutată, cea din (9.153).

Descrierea modului de rezolvare a acestor integrale iraționale poate să pare insuficient de precis, dar se va vedea și din exemplele ce urmează că el funcționează în toate cazurile. Mai trebuie doar de precizat că, în cazul **3°**, înainte de ridicarea la pătrat a substituției din (9.156) este necesară factorizarea trinomului, care admite două sau o rădăcină reală :

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_0)(...). \quad (9.159)$$

Am lăsat în (9.159) un factor neprecizat întrucât acesta poate corespunde celeilalte rădăcini reale dacă $b^2 - 4ac > 0$, fie coincide cu $(x - x_0)$ dacă $b^2 - 4ac = 0$. Dar în acest al doilea caz integrala nici nu mai este irațională întrucât $(x - x_0)$ iese de sub radical, împreună cu $\sqrt{a}$. Așadar, aparenta slăbire a ipotezei din (9.156) privind semnul discriminantului este una mai curând irelevantă. Să mai remarcăm că în acest caz **3°**, după factorizarea trinomului și ridicarea la pătrat a ecuației de substituție, se operează o simplificare prin $(x - x_0)$.

Notă. Înainte de a oferi câteva exemple, să mai precizăm că cele trei cazuri mai sus prezentate nu sunt exclusive (sau incompatibile). Este posibil ca o aceeași integrală să se încadreze în două din aceste cazuri sau chiar în toate trei. Aplicând metode diferite de raționalizare se vor obține primitive $G_i(t)$ ($1 \leq i \leq 3$) eventual diferite în variabila t dar, după revenirea la variabila inițială x se va obține o aceeași primitivă (sau primitive echivalente, care pot să difere printr-o constantă).

Exemplu 9.9.

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}. \quad (9.160)$$

Este clar că această integrală se încadrează în toate cele trei cazuri întrucât $a > 0$, $c > 0$ iar trinomul de sub radical are două rădăcini reale și se factorizează sub forma

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2). \quad (9.161)$$

Se poate deci aplica oricare dintre cele trei substituții (9.154) | (9.155) | (9.156). Cu (9.154) avem

$$\sqrt{x^2-3x+2} = t+x \Rightarrow x^2-3x+2 = x^2+2tx+t^2 \Rightarrow 2tx+t^2 = 2-3x \Rightarrow \quad (9.162)$$

$$\Rightarrow x(2t+3) = 2-t^2 \Rightarrow x = \frac{2-t^2}{2t+3} \Rightarrow dx = -2 \frac{t^2+3t+2}{(2t+3)^2} dt. \quad (9.163)$$

$$(9.162) \& (9.163) \Rightarrow \sqrt{x^2-3x+2} = t + \frac{2-t^2}{2t+3} = \frac{t^2+3t+2}{2t+3} = h(t); \quad (9.164)$$

$$(9.163) \Rightarrow x - 1 = \frac{2 - t^2}{2t + 3} - 1 = \frac{2 - t^2 - 2t - 3}{2t + 3} = -\frac{t^2 + 2t + 1}{2t + 3} = -\frac{(t + 1)^2}{2t + 3}. \quad (9.165)$$

(9.162), (9.163) & (9.165) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I(t) = \int \frac{-2 \frac{t^2 + 3t + 2}{(2t + 3)^2} dt}{-\frac{t^2 + 3t + 2}{2t + 3} \frac{(t + 1)^2}{2t + 3}} = 2 \int \frac{1}{(t + 1)^2} dt = -\frac{2}{t + 1} + C. \quad (9.166)$$

În primitiva $G(t)$ din (9.166) se substituie t care se obține din

$$(9.162) \Rightarrow t = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x. \quad (9.167)$$

$$(9.166) \& (9.167) \Rightarrow I = G(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x + 1} + C.} \quad (9.168)$$

În această expresie a primitivei se poate folosi factorizarea

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x - 1} \sqrt{x - 2}$$

care va conduce la o expresie ceva mai simplă :

$$\boxed{I = 2 \frac{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 1}} + C = 2 + \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 1}} + C.} \quad (9.168')$$

Aceeași integrală din (9.160), considerată ca integrală de al doilea tip, se va putea raționaliza și cu substituția

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = tx + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = t^2 x^2 + 2\sqrt{2} tx + 2 \Rightarrow \quad (9.169)$$

$$\Rightarrow x(1 - t^2) = 2\sqrt{2}t + 3 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}t + 3}{1 - t^2}. \quad (9.170)$$

$$(9.169) \Rightarrow dx = \frac{2\sqrt{2}(1 - t^2) + 2t(2\sqrt{2}t + 3)}{(1 - t^2)^2} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2\sqrt{2}t^2 + 6t + 2\sqrt{2}}{(1 - t^2)^2} dt = 2\sqrt{2} \frac{t^2 + (3/\sqrt{2})t + 1}{(1 - t^2)^2} dt. \quad (9.171)$$

(9.162) & (9.163) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} &= t \frac{2\sqrt{2}t + 3}{1 - t^2} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}t^2 + 3t + \sqrt{2}}{1 - t^2} = \\ &= \sqrt{2} \frac{t^2 + (3/\sqrt{2})t + 1}{1 - t^2} = h(t); \end{aligned} \quad (9.172)$$

$$(9.169) \Rightarrow x - 1 = \frac{2\sqrt{2}t + 3}{1 - t^2} - 1 = \frac{t^2 + 2\sqrt{2}t + 2}{1 - t^2}. \quad (9.172)$$

(9.169), (9.171) & (9.172) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I(t) &= 2 \int \frac{1 - t^2}{t^2 + 2\sqrt{2}t + 2} \frac{1 - t^2}{t^2 + (3/\sqrt{2})t + 1} \frac{t^2 + 3\sqrt{2}t + 1}{(1 - t^2)^2} dt = \\ &= \int \frac{2}{t^2 + 2\sqrt{2}t + 2} dt = \int \frac{2}{(t + \sqrt{2})^2} dt = -\frac{2}{t + \sqrt{2}} = G(t). \end{aligned} \quad (9.173)$$

$$(9.169) \Rightarrow t = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)} - \sqrt{2}}{x}. \quad (9.174)$$

$$(9.171) \& (9.172) \Rightarrow I = \frac{-2x}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\sqrt{x-1})} + C. \quad (9.175)$$

Această primitivă din (9.175) se poate scrie și sub forma echivalentă

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{-2x(\sqrt{x-2} - \sqrt{2}\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}[x-2 - 2(x-1)]} = \frac{-2x(\sqrt{x-2} - \sqrt{2}\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(-x)} = \\ &= \frac{2(\sqrt{x-2} - \sqrt{2}\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}} = -2\sqrt{2} + 2\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}. \end{aligned} \quad (9.176)$$

Comparând primitivele din (9.168') & (9.176) se observă că ele nu diferă decât printr-o constantă.

Integralei din (9.160) i se poate aplica și al treilea tip de substituție, având în vedere factorizarea trinomului de sub radical, din (9.161). Substituția poate fi

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} = t(x-1) \Rightarrow (x-1)(x-2) = t^2(x-1)^2 \Rightarrow \quad (9.177)$$

$$\Rightarrow x-2 = t^2(x-1) \Rightarrow x(t^2-1) = t^2-2 \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{t^2-1}; \quad (9.178)$$

$$(9.178) \Rightarrow x - 1 = \frac{t^2 - 2}{t^2 - 1} - 1 = \frac{-1}{t^2 - 1}; \quad (9.179)$$

$$(9.177) \& (9.178) \Rightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} = \frac{-t}{t^2 - 1}; \quad (9.180)$$

$$(9.178) \Rightarrow dx = d \frac{t^2 - 2}{t^2 - 1} = \frac{2t}{(t^2 - 1)^2} dt; \quad (9.181)$$

$$(9.179), (9.180) \& (9.181) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = 2 \int \frac{(t^2 - 1)^2}{t} \frac{t}{(t^2 - 1)^2} dt = \int 2 dt = 2t \xrightarrow{(9.177)}$$

$$\Rightarrow I = 2 \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}} + C. \quad (9.182)$$

Comentarii. Comparând primitivele din (9.168'), (9.176) & (9.182), se constată că toate cele trei **substituții ale lui Euler** au condus la aceeași integrală nedefinită, constantele aditive care diferă nefiind esențiale.

Aplicații la integrarea funcțiilor iraționale

9.4 - A Să se determine primitivele (din funcții iraționale) de mai jos.

$$(i) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}};$$

$$(ii) \quad I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}};$$

$$(iii) \quad I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}};$$

$$(iv) \quad I = \int \frac{3\sqrt[6]{x} dx}{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}};$$

$$(v) \quad I = \int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} + 1} dx;$$

$$(vi) \quad I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Răspunsuri - recomandări pentru rezolvare.

(i) Integrala se încadrează în modelul **2.1** - (9.129). Substituția specifică este

$$\sqrt[4]{2x-1} = t \iff 2x-1 = t^4 \Rightarrow x = \frac{t^4+1}{2} \Rightarrow dx = 2t^3 dt. \quad (9.183)$$

Integrala rațională în t este

$$I(t) = \int \frac{2t^3 dt}{t^2 - t} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = \dots = 2 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) = t^2 + 2t + \ln(t-1)^2. \quad (9.184)$$

Primitiva (integrala nedefinită) în variabila inițială x se obține din (9.183) înlocuind pe t din (9.183).

(ii) Este o integrală de tip Euler, **2.3** - (9.153). Trinomul de sub radical are rădăcini complexe, deci ea se încadrează doar în subcazurile **1°** & **2°**. Se poate aplica, de exemplu, o substituție de tip (9.154) :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = x + t \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2xt + t^2 \Rightarrow 2x(1-t) = t^2 - 2 \Rightarrow \quad (9.185)$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2(1-t)} \Rightarrow dx = \frac{-t^2 + 2t - 2}{2(1-t)^2} dt; \quad (9.186)$$

$$(9.185) \& (9.186) \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{t(t-2)}{2(1-t)} \Rightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{2-t^2}{2-2t}.$$

Integrala rațională în t este

$$I(t) = \int \frac{2-2t}{2-t^2} \cdot \frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)^2} dt = -2 \int \frac{t^2-2t+2}{(2-t^2)(1-t)} dt = \quad (9.187)$$

$$= 2 \int \frac{t^2-2t+2}{(t^2-2)(1-t)} dt = 2 \int \frac{t^2-2t+2}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(1-t)} dt. \quad (9.188)$$

Funcția rațională de sub integrală se descompune ca sumă de trei fracții simple :

$$\frac{t^2-2t+2}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(1-t)} = \frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+\sqrt{2}} + \frac{C}{1-t}. \quad (9.189)$$

Prin metoda prezentată la secțiune **Integrale din funcții raționale**, coeficienții din (9.189) se determină ca fiind $A = B = C = -1 \Rightarrow$

$$I(t) = -2 \int \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} + \frac{1}{t+\sqrt{2}} + \frac{1}{1-t} \right) = \dots = \ln \left(\frac{(1-t)^2}{(t^2-2)^2} \right). \quad (9.190)$$

Primitiva în variabila inițială x se obține din (9.190) înlocuind pe t din (9.185),

$$t = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x.$$

Cititorul este invitat să verifice descompunerea în fracții simple din (9.190), primitiva în t și apoi primitiva în x , după înlocuirea mai sus menționată. Pentru o mai facilă derivare, se poate reveni la primitive scrise ca sume algebrice de logaritmi.

(iii) Integrala este de asemenea de tip Euler și se poate aplica oricare dintre substituțiile (9.154) & (9.155). Pentru variație, se poate scrie

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = tx + 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = t^2 x^2 + 2tx + 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}. \quad (9.191)$$

$$(9.191) \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \frac{2t - t^2}{1 - t^2}, \\ dx = \frac{2t - t^2}{2(1 - t)^2} dt; \end{cases} \quad (9.192)$$

$$(9.191) \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} = t \frac{2t - 1}{1 - t^2} + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2}; \quad (9.193)$$

(9.191), (9.192) & (9.192) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I(t) &= \int \frac{1 - t^2}{2t - t^2} \cdot \frac{1 - t^2}{t^2 - t + 1} \cdot \frac{2t - t^2}{2(1 - t)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1 - t)^2} dt \Rightarrow \dots \\ \dots \Rightarrow I &= \frac{x}{2(x - \sqrt{x^2 + x + 1})} + C. \end{aligned} \quad (9.194)$$

Expresia finală din (9.194) s-a obținut înlocuind variabila t dedusă din substituția (9.191) în primitiva $I(t)$. [Urmează a se verifica toate calculele și a se proceda la verificări.](#)

(iv) Integrala este similară cu cea din exemplul de la pag. 235, (9.132), [Exemplul 9.7](#), (i) :

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt; \quad (9.195)$$

(9.195) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I(t) = \int \frac{18t^6 dt}{2t^3 + t^2} = 9 \int \frac{2t^4 dt}{2t + 1} = 9 \int \left(t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8} + \frac{1/8}{2t + 1} \right) dt. \quad (9.196)$$

Primitiva din (9.196) este imediată. Primitiva în x , adică $F(x)$, se obține prin înlocuirea lui $t = x^{1/6}$ în $I(t)$:

$$I = 9 \left(\frac{1}{4}x^{2/3} - \frac{1}{6}x^{1/2} + \frac{1}{8}x^{1/3} - \frac{1}{8}x^{1/6} - \frac{1}{16} \ln|2x^{1/6} - 1| \right) C.$$

(v) Ca și în cazul primei integrale din acest set de aplicații, și aceasta se încadrează în modelul [2.1](#) - (9.129). Substituția adecvată este

$$x + 1 = t^6 \Rightarrow x = t^6 - 1 \Rightarrow dx = 6t^5 dt. \quad (9.197)$$

Integrala rațională în t este

$$I(t) = 6 \int \left(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{t-1}{t^2+1} \right) dt. \quad (9.198)$$

Ultima fracție de sub integrală se poate scrie sub forma

$$\frac{t-1}{t^2+1} = \frac{1}{2} \frac{2t-2}{t^2+1} = \frac{1}{2} \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \text{ cu primitiva } \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - \arctg t.$$

Ceilalți termeni din $I(t)$ vor fi puteri ale variabilei ; a nu se neglija coeficienții care apar. În fine, integrala cerută se obține prin înlocuirea lui $t = (x+1)^{1/6}$ în $I(t)$.

(vi) Aceasta este o altă integrală de tip Euler, cu trinomial de sub radical având rădăcini complexe. Se poate utiliza substituția (9.154) :

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = x + t \Rightarrow x^2 - x + 1 = x^2 + 2xt + t^2 \Rightarrow x(2t+1) = 1 - t^2 \Rightarrow \quad (9.199)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-t^2}{2t+1} \Rightarrow dx = \frac{-3t^2-2t-2}{(2t+1)^2} dt; \quad (9.200)$$

$$(9.199) \& (9.200) \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{1-t^2}{2t+1} + t = \frac{t^2+t+1}{2t+1}.$$

$$(9.200) \Rightarrow x^2 = \frac{(1-t^2)^2}{(2t+1)^2}; \quad (9.201)$$

Integrala rațională în t este

$$\begin{aligned} I(t) &= - \int \frac{(1-t^2)^2}{(2t+1)^2} \cdot \frac{2t+1}{t^2+t+1} \cdot \frac{3t^2+2t+2}{(2t+1)^2} dt = \\ &= - \int \frac{(1-t^2)^2}{(2t+1)^3} \cdot \frac{3t^2+2t+2}{t^2+t+1} dt. \end{aligned} \quad (9.202)$$

Funcția rațională de sub integrală este

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{(1-t^2)^2}{(2t+1)^3} \cdot \frac{3t^2+2t+2}{t^2+t+1} = \frac{(1-t^2)^2}{(2t+1)^3} \cdot \frac{3t^2+3t+3-t-1}{t^2+t+1} = \\ &= \frac{(1-t^2)^2}{(2t+1)^3} \cdot \left(3 - \frac{t+1}{t^2+t+1} \right). \end{aligned} \quad (9.203)$$

Se poate continua cu descompunerea funcției din (9.203) în fracții simple, după împărțirea necesară pentru primul factor. [Invităm cititorul să continue cu găsirea primitivei \$I\(t\)\$ și apoi a integralei din enunț pe această cale.](#)

Dar este posibilă și utilizarea unei substituții de tip (9.155) :

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = tx + 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = t^2 x^2 + 2tx + 1 \Rightarrow \quad (2.204)$$

$$\Rightarrow x(1 - t^2) = 2t + 1 \Rightarrow x = \frac{2t + 1}{1 - t^2} \Rightarrow dx = 2 \frac{t^2 + t + 1}{(1 - t^2)^2} dt; \quad (2.205)$$

$$(2.205) \Rightarrow x^2 = \frac{(2t + 1)^2}{(1 - t^2)^2}; \quad (9.206)$$

$$(9.204) \& (9.205) \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{1 - t^2}. \quad (9.207)$$

Din ultimele trei expresii se ajunge la integrala

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{(2t + 1)^2}{(1 - t^2)^2} \cdot \frac{1 - t^2}{t^2 + t + 1} \cdot 2 \frac{t^2 + t + 1}{(1 - t^2)^2} dt = \\ &= 2 \int \frac{(2t + 1)^2}{(1 - t^2)^3} dt. \end{aligned} \quad (2.208)$$

Este evident că integrarea funcției din (2.208) este mai facilă, deci preferabilă celei din (9.203). Funcția de sub integrală va avea o descompunere ca sumă de trei fracții simple :

$$\frac{(2t + 1)^2}{(1 - t^2)^3} = \frac{A}{(1 - t)^3} + \frac{B}{(1 - t)^2} + \frac{C}{1 - t} + \frac{D}{(1 + t)^3} + \frac{E}{(1 + t)^2} + \frac{F}{1 + t}. \quad (2.109)$$

Prin aducere la același numitor în membrul drept al egalității (2.209) și prin identificarea coeficienților celor doi numărători se ajunge la un sistem algebric liniar neomogen de dimensiune 6 x 6 care admite soluția unică

$$[A \ B \ C \ D \ E \ F] = \left[\frac{9}{8} \ \frac{3}{16} \ -\frac{1}{16} \ \frac{1}{8} \ -\frac{5}{16} \ -\frac{1}{16} \right]. \quad (2.110)$$

Cititorul este invitat să obțină efectiv sistemul liniar menționat și să-l rezolve, preferabil cu metoda eliminării gaussiene pe matricea sa lărgită.

Din (2.208-110) se ajunge la integrala în variabila t

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \left[\frac{9/4}{(1 - t)^3} + \frac{3/8}{(1 - t)^2} - \frac{1/8}{1 - t} + \frac{1/4}{(1 + t)^3} - \frac{5/8}{(1 + t)^2} - \frac{1/8}{1 + t} \right] dt = \\ &= \frac{9}{8} \frac{1}{(1 - t)^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{1 - t} + \frac{1}{8} \ln|1 - t| - \frac{1}{8} \frac{1}{(1 + t)^2} + \frac{5}{8} \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{8} \ln|1 + t|. \end{aligned} \quad (2.211)$$

Unii termeni din expresia (2.211) se mai pot grupa și se obține

$$G(t) = \dots = \frac{1}{8} \frac{t^3 + 9t + 8}{(1 - t^2)^2} - \frac{1}{8} \ln \frac{|1 - t|}{|1 + t|}. \quad (2.212)$$

Cu substituția inversă care decurge din (2.204), adică

$$t = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x}, \quad (2.213)$$

primitiva în variabila inițială este

$$I = \frac{1}{8} \frac{8x^4 - 12x^3 + 32 - 4x + (10x^3 - x^2 + 4x)\sqrt{x^2 - x + 1}}{5x^2 - 8x + 8 + 4(x - 2)\sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{1}{8} \ln \left| -2x + 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right| + C. \quad (2.214)$$

Primitiva din (2.214) poate fi verificată determinând expresiile în x ale lui t^3 , t și $(1 - t^2)^2$ care se vor înlocui în (2.212).

2.4 **Integrale iraționale binome.** Forma generală a acestora este

$$I = \int x^m (ax^n + b)^p dx \text{ cu } a, b \in \mathbb{R} \text{ \& } m, n, p \in \mathbb{Q} \quad (9.215)$$

Cei trei exponenți care apar sub integrală sunt considerați ca fiind fracții ireductibile. În vederea prezentării substituțiilor care pot conduce la raționalizarea integralelor de acest tip vom nota exponenții sub forma

$$m = \frac{m_1}{m_2}, \quad n = \frac{n_1}{n_2}, \quad p = \frac{p_1}{p_2} \quad (9.216)$$

cu numitorii acestor fracții întregi și pozitivi. Sunt posibile trei cazuri în care integralele de forma (9.215) se pot transforma în integrale din funcții raționale.

$$\boxed{1^\circ} \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (2.917)$$

Dacă al treilea exponent este întreg dar primii doi sunt efectiv raționali, integrala este una irațională dar se încadrează în tipul (9.135) de la pag. 235. În acest caz se va aplica substituția corespunzătoare, adică

$$x = t^{[m_2, n_2]} \text{ unde } [m_2, n_2] = \text{c.m.m.m.c.}(m_2, n_2). \quad (9.218)$$

$$\boxed{2^\circ} \quad p \notin \mathbb{Z} \text{ dar } \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}. \quad (9.219)$$

În acest caz substituția specifică este

$$(ax^n + b)^{1/n_2} = t \iff ax^n + b = t^{n_2}. \quad (9.220)$$

$$\boxed{3^\circ} \quad p \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z} \text{ dar } \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}. \quad (9.221)$$

În acest caz substituția specifică este

$$(a + bx^{-n})^{1/n_2} = y \iff a + bx^{-n} = y^{n_2}. \quad (9.222)$$

Dacă nici una dintre condițiile (2.917), (9.219) sau (9.221) nu se verifică atunci, conform unei teoreme a lui Čebyšev, integrala (primitiva) din (9.215) nu este exprimabilă prin funcții elementare. Substituțiile din (9.218), (9.220) & (9.222) se numesc *substituțiile lui Čebyšev*.

Exemple 9.10.

$$(i) \quad I = \int x^{5/4} (1 + x^{3/5})^{-2} dx. \quad (9.223)$$

Întrucât $p = -2 \in \mathbb{Z}$, integrala se situează în cazul 1° . Se va putea aplica o substituție de forma (9.218) cu

$$[4, 5] = 20 \Rightarrow x = t^{20} \Rightarrow dx = 20 t^{19} dt; \quad (9.224)$$

$$(9.224) \Rightarrow I(t) = \int t^{25} (1 + t^{12})^{-2} 20 t^{19} dt = 20 \int \frac{t^{44}}{(1 + t^{12})^2} dt. \quad (9.225)$$

Comentariu. Integrala rațională din (9.225) nu este una simplă din cauza puterilor mari care intervin. Dar se va face împărțirea numitorului la numitor rezultând un polinom de gradul 20 plus o fracție cu numitorul din (9.225), care trebuie descompusă în fracții simple. Mai exact, $g(t)$ (sau $R(t)$, ca să folosim notația de la funcții raționale) este

$$g(t) = \frac{t^{44}}{(1 + t^{12})^2} = t^{20} - 2t^8 + \frac{3t^{20} + 2t^8}{t^{24} + 2t^{12} + 1}. \quad (9.226)$$

Găsirea acestei descompunerii nu este simplă, dar ea poate fi simplificată folosind substituția $u = t^4$.

În volumul [Gh. Sirețchi 1985, Vol. 1, p. 291] din care am preluat acest exemplu,

integrala (9.223) este tratată nu ca una de tipul **1°** ci se propune o substituție mai adecvată pentru integralele de tip (9.135), anume

$$(x^{3/5})^{1/4} = t \Rightarrow x = t^{20/3} \Rightarrow dx = \frac{20}{3} t^{17/3} dt \quad (9.227)$$

care povine din egalitatea

$$\frac{m+1}{n} = \left(\frac{5}{4} + 1 \right) \frac{5}{3} = \frac{15}{4}.$$

$$(9.227) \Rightarrow I(t) = \int t^{\frac{20}{3} \cdot \frac{5}{4}} \left(1 + t^{\frac{20}{3} \cdot \frac{3}{5}} \right)^{-2} \frac{20}{3} t^{17/3} dt = \frac{20}{3} \int \frac{t^{14}}{(1+t^4)^2} dt. \quad (9.228)$$

Evident, funcția rațională din integrala (9.228) este ceva mai simplă decât (cea din) precedenta, dar și aceasta necesită o dezvoltare în fracții simple relativ laborioasă.

$$g(t) = \frac{t^{14}}{(t^4+1)^2} = t^6 - 2t^2 + \frac{3t^6 + 2t^2}{t^8 + 2t^4 + 1}. \quad (9.229)$$

Cu substituția provizorie $u = t^2$ în fracția de mai sus se găsește

$$\begin{aligned} \frac{3u^3 + 2u^2}{(u^2+1)^2} &= -\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{3u}{u^2+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3t^6 + 2t^2}{t^8 + 2t^4 + 1} &= -\frac{t^2}{(t^4+1)^2} + \frac{3t^2}{t^4+1}. \end{aligned} \quad (9.230)$$

Numitorul primei fracții din (9.229) se poate rescrie pe baza identității

$$t^4 + 1 = t^4 + 2t^2 + 1 - 2t^2 = (t^2 + 1)^2 - 2t^2 = (t^2 - \sqrt{2}t + 1)(t^2 + \sqrt{2}t + 1). \quad (9.231)$$

Pe baza acestei descompuneri se ajunge la

$$J_1(t) = \int \frac{1}{t^4+1} dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + \sqrt{2}t + 1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}. \quad (9.232)$$

Primitiva

$$J_2(t) = \int \frac{1}{(t^4+1)^2} dt$$

se obține integrând prin părți pe $J_1(t)$, cu

$$\begin{cases} u = \frac{1}{t^4+1}, \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{4t^3 dt}{(t^4+1)^2}, \\ v = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
J_1(t) &= \frac{t}{t^4+1} + 4 \int \frac{t^4 dt}{(t^4+1)^2} = \frac{t}{t^4+1} + 4 \int \frac{t^4+1-1}{(t^4+1)^2} dt = \\
&= \frac{t}{t^4+1} + 4J_1(t) - 4J_2(t) \Rightarrow J_2(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{t}{t^4+1} + 3J_1(t) \right). \tag{9.233}
\end{aligned}$$

Din (9.233) cu (9.232) se obține expresia analitică a lui $J_2(t)$, în care se va înlocui x din (9.227).

$$(ii) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}. \tag{9.234}$$

Integrala din (9.234) este evident una binomă, cu

$$m = -\frac{3}{2}, \quad n = \frac{3}{4}, \quad p = -\frac{1}{3}; \tag{9.235}$$

(9.235) $\Rightarrow$ condiția (9.221) este verificată. Se poate deci aplica substituția

$$1 + x^{-3/4} = y^3 \Rightarrow x = (y^3 - 1)^{-4/3} \Rightarrow \tag{9.236}$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{4}{3} \frac{3y^2 dy}{(y^3 - 1)^{7/3}} = -4 \frac{y^2}{(y^3 - 1)^{7/3}} dy; \tag{9.237}$$

(9.236, 237) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I(y) = -4 \int \frac{(y^3 - 1)^2 (y^3 - 1)^{1/3} y^2}{(y^3 - 1)^{7/3} y} dy = -4 \int y dy = -2y^2. \tag{9.238}$$

$$(9.236) \Rightarrow y = (1 + x^{-3/4})^{1/3} = \left(\frac{x^{3/4} + 1}{x^{3/4}} \right)^{1/3} = \frac{(x^{3/4} + 1)^{1/3}}{x^{1/4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{(x^{3/4} + 1)^{2/3}}{x^{1/2}} \Rightarrow I = -2 \frac{(x^{3/4} + 1)^{2/3}}{x^{1/2}} + C. \tag{9.239}$$

Cititorul va putea verifica (prin derivare) că funcția din (9.239) este primitiva corectă.

Aplicații la integrale iraționale binome

9.5 – A Să se determine primitivele de mai jos.

$$(i) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x} + 1)^{10}};$$

$$(ii) \quad I = \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}};$$

$$(iii) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + 1}} ;$$

$$(iv) \quad I = \int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx ;$$

$$(v) \quad I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx ;$$

$$(vi) \quad I = \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} .$$

Răspunsuri și recomandări pentru rezolvare

$$(i) \quad m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = -10 ;$$

integrala este de tipul **1°**, pag. 248. Se va putea aplica o substituție de forma (9.218) :

$$\sqrt[4]{x} = t \Rightarrow x = t^4 .$$

Se ajunge la o diferență de integrale din fracții simple, ușor de obținut.

$$(ii) \quad m = -1, n = 2, p = -1/3 \Rightarrow \text{integrala este de tipul } \mathbf{2^\circ}, \text{ pag. 248.}$$

$$\sqrt[3]{x^2 + 1} = t \Rightarrow x^2 + 1 = t^3 \Rightarrow 2x dx = 3t^2 dt. \quad (9.240)$$

Se poate amplifica funcția-integrand cu $(2x)/(2x)$ spre a se profita de ultima egalitate din (9.240) și a se evita astfel calcule mai complicate. Substituția conduce la o diferență de primitive ale unor fracții simple care au mai fost întâlnite în subsecțiunea consacrată integrării funcțiilor raționale :

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{3}{2} \int \frac{t}{t^3 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{t - 1}{t^2 + t + 1} dt = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} \ln |t - 1| - \frac{1}{4} \ln |t^2 + t + 1| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} . \end{aligned} \quad (9.241)$$

Se va ajunge la primitiva în x înlocuind în (9.241) pe t din (9.240).

$$(iii) \quad m = 0, n = 4, p = -1/4 \Rightarrow \text{integrala este de tipul } \mathbf{3^\circ}, \text{ pag. 248.}$$

$$\sqrt[4]{1 + x^{-4}} = y \Rightarrow \frac{x^4 + 1}{x^4} = y^4 \Rightarrow x = (y^4 - 1)^{-1/4} \Rightarrow \quad (9.242)$$

$$\Rightarrow dx = -(y^4 - 1)^{-5/4} y^3 dy. \quad (9.243)$$

Din ultimele două expresii și din expresia radicalului

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1 + x^4} &= y(y^4 - 1)^{-1/4} \Rightarrow \\ \Rightarrow I(y) &= - \int (y^4 - 1)^{1/4} (y^4 - 1)^{-5/4} y^2 dy = - \int \frac{y^2}{y^4 - 1} dy . \end{aligned} \quad (9.244)$$

Prin descompunere în fracții simple a ultimei funcții din (9.244) și prin integrarea acestora se ajunge la

$$\Rightarrow I(y) = -\frac{1}{4} \ln \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y.$$

Cu substituția din (9.242) se ajunge la integrala cerută.

(iv) $m = 0, n = 1/4, p = 1/3 \Rightarrow$ integrala este de tipul **2°**, pag. 248.

$$\sqrt[3]{1+x^{1/4}} = u \Rightarrow 1+x^{1/4} = u^3 \Rightarrow x = (u^3-1)^4 \Rightarrow \quad (9.246)$$

$$\Rightarrow dx = 4(u^3-1)^3 3u^2 du = 12(u^3-1)^3 u^2 du. \quad (9.247)$$

$$(9.246) \& (9.247) \Rightarrow I(u) = 12 \int (u^3-1)^3 u^3 du. \quad (9.248)$$

Integrala (9.248), dintr-o funcție polinomială, este una banală. Integrala în x cerută se obține din $I(u)$ cu substituția din (9.246).

(v) $m = -1/2, n = 1/4, p = 1/3 \Rightarrow$ integrala este de tipul **2°**, pag. 248.

Substituția este aceeași ca aceea din (9.246), împreună cu (9.2247). Dar integrala în u este

$$I(u) = 12 \int \frac{(u^3-1)^3 u^3}{(u^3-1)^2} du = 12 \int (u^3-1) u^3 du = \frac{12}{7} u^7 - 3u^4 + C.$$

(vi) $m = 1, n = 2/3, p = -1/2 \Rightarrow$ integrala este de tipul **2°**, pag. 248.

$$\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} = u \Rightarrow 1+x^{2/3} = u^2 \Rightarrow x = (u^2-1)^{3/2} \Rightarrow \quad (9.249)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{3}{2} (u^2-1)^{1/2} 2u du = 3\sqrt{u^2-1} u du. \quad (9.250)$$

$$(9.29) \& (9.250) \Rightarrow I(u) = 3 \int (u^2-1)^2 du. \quad (9.251)$$

Integrala (9.251) este una imediată.

3 Integrarea funcțiilor trigonometrice

Prin “funcții trigonometrice” înțelegem o clasă foarte largă de funcții compuse ce implică funcții trigonometrice fundamentale precum $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ etc. Tocmai din cauza caracterului vag al acestei descrieri, integralele (primitivele) unor astfel de funcții pot fi foarte diverse, la fel ca și metodele pentru determinarea lor.

3.1 De multe ori, prin *funcții trigonometrice* se înțeleg funcții raționale în $\sin x$ & $\cos x$ întrucât tangenta și cotangenta sunt ele însele funcții raționale în $\sin x$ & $\cos x$. Forma lor generală este

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx. \quad (9.240)$$

Teoretic, orice astfel de funcție poate fi transformată într-o altă funcție rațională de variabila t prin substituția $t = \operatorname{tg}(x/2)$ întrucât cele două funcții trigonometrice fundamentale se exprimă în tangenta jumătății de unghi prin

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \end{cases} \quad (9.241)$$

Aceeași substituție $t = \operatorname{tg}(x/2)$ conduce la

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}. \quad (9.242)$$

Rezultă că substituția $t = \operatorname{tg}(x/2)$ transformă integrala din (9.240) într-o integrală dintr-o funcție rațională. Teoretic, orice integrală de forma (9.240) se poate astfel determina. Însă expresiile (9.241) ale funcțiilor sinus și cosinus pot conduce la integrale raționale destul de complicate, în timp ce anumite proprietăți ale funcțiilor trigonometrice sau alte substituții ar permite o mai facilă determinare a primitivei.

Pentru anumite proprietăți ale funcției raționale R este posibilă aplicarea unor alte substituții care conduc la o integrare mai simplă :

$$\boxed{1^\circ} \quad R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x) \Rightarrow \cos x = t; \quad (9.243)$$

$$\boxed{2^\circ} \quad R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x) \Rightarrow \sin x = t; \quad (9.244)$$

$$\boxed{3^\circ} \quad R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x) \Rightarrow \operatorname{tg} x = t. \quad (9.245)$$

Exemple 9.11.

$$(i) \quad I = \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}. \quad (9.246)$$

Se poate aplica substituția generală $t = \operatorname{tg}(x/2)$ cu (9.241, 242).

$$I(t) = \int \frac{1+t^2}{3(1+t^2)+5(1-t^2)} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2}. \quad (9.247)$$

Ultima integrală din (9.247) este una rațională dintre cele mai simple :

$$I(t) = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right|. \quad (9.248)$$

$$(2.248) \ \& \ t = \operatorname{tg}(x/2) \Rightarrow$$

$$I(t) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+\operatorname{tg}(x/2)}{2-\operatorname{tg}(x/2)} \right| = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2\cos(x/2) + \sin(x/2)}{2\cos(x/2) - \sin(x/2)} \right| + C. \quad (9.249)$$

□

$$(ii) \quad I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}. \quad (9.250)$$

Cu substituția generală $t = \operatorname{tg}(x/2)$, integrala din (9.250) devine

$$I(t) = \int \frac{1+t^2}{2(1+t^2) - (1-t^2) + 5} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{6+3t^2} = \int \frac{dt}{3+t^2}. \quad (9.251)$$

Conform unei formule din TABELUL PRIMITIVELEOR IMEDIATE, integrala din (9.251) este

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} + C.$$

□

Funcțiile trigonometrice din (9.243-245) pot fi caracterizate nu numai prin acele proprietăți de paritate / imparitate (în una sau ambele variabile) ci și prin puterile la care apar în R cele două funcții trigonometrice fundamentale. De exemplu, dacă $\sin x$ apare la o putere pară iar $\cos x$ la o putere impară, funcția $R(\sin x, \cos x)$ se va putea rescrie reținând un $\cos x$ pentru $d \sin x = \cos x dx$ iar ceilalți termeni sau/și factori să se exprime doar în funcție de $\cos^2 x$ întrucât și $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Exemplele ce urmează vor ilustra cum se tratează astfel de integrale.

$$(iii) \quad I = \int \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} dx. \quad (9.252)$$

Funcția de sub integrală se încadrează la cazul (9.243), fiind impară în $\sin x$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} = -\frac{(\cos x)'}{2 - \cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int \frac{d \cos x}{\cos x - \sqrt{2}} - \int \frac{d \cos x}{\cos x + \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\cos x - \sqrt{2}}{\cos x + \sqrt{2}} \right| + C.$$

Ultima expresie a integralei a rezultat din integrarea unei funcții raționale cu numitorul $u^2 - 2 = (u - \sqrt{2})(u + \sqrt{2})$, $u = \cos x$, dar n-am mai scris efectiv această substituție. $\square$

$$(iv) \quad I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}. \quad (9.253)$$

Integrala se încadrează în cazul (9.245) dar – pentru o mai facilă obținere a primitivei – substituția recomandată acolo, adică $\operatorname{tg} x = t$, poate fi înlocuită cu

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 2t \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + 4t^2} \text{ sau } dt = \frac{dx}{2 \cos^2 x}; \quad (9.254)$$

$$\begin{aligned} (9.253) \Rightarrow I &= \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 2)} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 2} \stackrel{(9.254)}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow I(t) = \int \frac{2 dt}{4t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{2}} \stackrel{(9.254)}{\Rightarrow} I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \end{aligned} \quad (9.255)$$

Cititorul poate verifica prin derivare că primitiva din (9.225) este una corectă. $\square$

3.2 Funcții trigonometrice integrabile prin alte metode.

Alte integrale din funcții trigonometrice pot să nu aibă structura din (9.240) ci să implice funcțiile fundamentale nu neapărat prin intermediul unei funcții raționale. Tocmai acest caracter general al funcțiilor care implică funcții trigonometrice face imposibilă descrierea unor metode standard de determinare a primitivelor. În foarte multe cazuri, găsirea unei primitive este facilitată de aplicarea unor formule din trigonometrie, de exemplu cele care exprimă funcții trigonometrice de sume / diferențe de unghiuri, funcții de unghiuri multiple, formulele de transformare a sumelor în produse și invers. Câteva exemple de mai jos ilustrează câteva astfel de situații și metode de integrare.

Exemple 9.12.

(i) Se cere calcularea (determinarea) integralelor

$$I(x) = \int \frac{dx}{\cos x \cos 2x}, \quad J(x) = \int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}. \quad (9.256)$$

$$I(x) = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x \cos 2x} dx = \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)(1 - 2 \sin^2 x)} dx. \quad (9.257)$$

În integrala (9.257) se poate face substituția naturală $u = \sin x \Rightarrow \cos x dx = du$, cu care avem

$$\begin{aligned} I(u) &= \int \frac{du}{(1 - u^2)(1 - 2u^2)} = \int \left(\frac{2}{1 - 2u^2} - \frac{1}{1 - u^2} \right) du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{1 - \sqrt{2}u} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}u} \right) \sqrt{2} du - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) du. \end{aligned}$$

Primitivile în u și în x sunt

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2}u}{1 - \sqrt{2}u} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right|, \\ I(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \sin x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C. \end{aligned}$$

A doua integrală din (9.256) se determină de o manieră similară.

□

$$(ii) \quad I(x) = \int \sin 5x \cos x dx; \quad J(x) = \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx. \quad (9.258)$$

Pentru prima integrală, la funcția de integrat se poate folosi formula

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

care conduce la

$$f(x) = \sin 5x \cos x = \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 4x) \Rightarrow I(x) = -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x.$$

Pentru a doua integrală se poate folosi formula

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (9.259)$$

care, aplicată produsului $\cos x \cos 3x$, conduce la

$$g(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2} \cos 2x (\cos 2x + \cos 4x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J(x) &= \frac{1}{2} \int \cos 2x (\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \int (\cos^2 2x + \cos 2x \cos 4x) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 4x) + \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x) \right] dx = \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{24} \sin 6x + C.
\end{aligned}$$

Aceea și formulă (9.259) a fost aplicată și produsului $\cos x \cos 3x$, spre a se obține penultima expresie a integralei.

□

(iii) Unele integrale de forma (9.240) – deci raționale în sinus și cosinus – dar care cad în *cazul al treilea* din (9.245) se pot integra prin substituția recomandată $\operatorname{tg} x = t$ dar este posibilă și rescrierea funcției – integrand prin folosirea formulei (formulelor) pentru $\cos 2x$. Aceasta permite reducerea puterilor (pare) la care apar $\sin x$ & $\cos x$ sub funcția rațională R . Metoda este ilustrată prin exemplul ce urmează.

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}. \quad (9.260)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} = \frac{16}{(1 - \cos 2x)^2 (1 + \cos 2x)^2} = \frac{16}{(1 - \cos^2 2x)^2}; \quad (9.261)$$

dar numitorul din ultima expresie ce apare în (9.261) poate fi rescris prin

$$\begin{aligned}
\cos^2 2x &= \frac{1 + \cos 4x}{2} \Rightarrow (1 - \cos^2 2x)^2 = \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - \cos 4x)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow_{(9.261)} f(x) = \frac{64}{(1 - \cos 4x)^2}; \quad (9.262)
\end{aligned}$$

Deci, prin dublarea repetată a argumentului, puterea cumulată 8 a celor două funcții din (9.260) & (9.261) – prima expresie a fost redusă de 4 ori. Primitiva funcției sub forma din (9.262) se va deduce prin substituția naturală

$$\operatorname{tg} 2x = t \Rightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \frac{dt}{1 + t^2} \text{ \& } \cos 4x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad (9.263)$$

$$(9.262) \Rightarrow I(x) = \int \frac{64 dx}{(1 - \cos 4x)^2} \Rightarrow_{(9.263)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G(t) &= 64 \int \frac{1}{\left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \frac{1}{2} \frac{dt}{1+t^2} = 32 \int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4} \frac{dt}{1+t^2} = \\
&= 8 \int \frac{1+t^2}{t^4} dt = -\frac{8}{3t^3} - \frac{8}{t}.
\end{aligned} \tag{9.264}$$

În fine, primitiva în t din (9.264) și substituția din (9.263) conduc la

$$\boxed{I(x) = -\frac{8}{3\operatorname{tg}^3 2x} - \frac{8}{\operatorname{tg} 2x} + C.} \tag{9.265}$$

Să încheiem acest exemplu cu observația că, dacă în integrala din (9.260) ar fi fost folosită substituția standard pentru clasa respectivă de funcții, adică $\operatorname{tg} x = t$, integrala s-ar fi transformat în una rațională dar procesul de obținere a primitivei ar fi fost mult mai greoi din cauza puterilor mari la care ar fi intervenit noua variabilă. În culegerea [S. Chiriță, 1989, p. 210], de unde am preluat această aplicație, se oferă și răspunsul (la pag. 561) bazat pe substituției $\operatorname{tg} x = t$, sub forma primitivei în acest t :

$$I(t) = 3 \left(t - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{3} \left(t^3 - \frac{1}{t^3} \right) + C. \tag{9.266}$$

Dacă în primitiva din (9.265) se înlocuiește $\operatorname{tg} 2x = 2t/(1-t^2)$ se ajunge exact la primitiva din (9.266). Dar este evidentă ușurința cu care s-a obținut primitiva din (9.264), consecință a celor două transformări trigonometrice aplicate anterior.

□

(iv) Exemplul care urmează ilustrează o situație oarecum inversă. Unele integrale trigonometrice care conțin cel puțin una din funcțiile $\sin x$, $\cos x$ sub un radical de ordin par pot fi (eventual) rezolvate, mai exact raționalizate, prin înjumătățirea argumentului și utilizarea formulelor pentru cosinusul unghiului dublu.

$$I(x) = \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - \cos x}}. \tag{9.267}$$

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2) dx}{\sqrt{2 \sin^2(x/2)}} = \sqrt{2} \int \frac{\cos(x/2) dx}{|\sin(x/2)|} = \\
&= 2\sqrt{2} \int \frac{d \sin(x/2)}{\sin(x/2)} = 2\sqrt{2} \ln |\sin(x/2)| + C.
\end{aligned}$$

3.1 Utilizarea unor substituții trigonometrice în integrale iraționale.

Anumite integrale iraționale pot fi abordate utilizând substituții trigonometrice în funcțiile de sub radicali care permit eliminarea acestora. Un exemplu a fost oferit anterior pentru metoda substituției (sau a schimbării de variabilă), anume **Exemplul 9.3** de la pag. 215. O asemenea substituție, $x = \operatorname{tg} t$, a fost recomandată și pentru exercițiul **9.1-A (vii)** de la pag. 217. Urmează alte câteva exemple.

Exemple 9.13.

(i) Se cere calcularea (determinarea) integralelor

$$I(x) = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad J(x) = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx. \quad (9.268)$$

În prima integrală se poate utiliza substituția $x = \sin t$ care conduce la

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t} = \int \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \Rightarrow \\ &\Rightarrow I(x) = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Pentru a doua integrală din (9.268) substituția firească este

$$x = \operatorname{tg} t \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t} \text{ \& } dx = \frac{dt}{\cos^2 t}; \quad (9.269)$$

(9.269) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow J(t) = \int \frac{(1/\cos t)(1/\cos^2 t) dt}{\operatorname{tg} t} = \int \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t} dt = \quad (9.270)$$

$$= \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt + \int \frac{1}{\sin t} dt = \frac{1}{\cos t} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C. \quad (9.271)$$

$$(9.271) \Rightarrow J(x) = \frac{1}{\cos \operatorname{arctg} x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right| + C. \quad (9.272)$$

Expresia din (2.272) se mai poate explicita dacă se exprimă cosinusul în funcție de tangentă:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} \Rightarrow \cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ \& } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad (9.273)$$

$$(9.272, 273) \Rightarrow J(x) = \sqrt{1+x^2} + \ln \left| \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right| + C. \quad (9.274)$$

Dezvoltarea din (9.270) este cea propusă în culegerea anterior citată, în răspunsul de la pag. 204. Dar exista și o altă modalitate de a obține primitiva în t , plecând de la (9.270):

$$\begin{aligned} J(t) &= \int \frac{(1/\cos t)(1/\cos^2 t) dt}{\operatorname{tg} t} = \int \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = - \int \frac{d \cos t}{\sin^2 t \cos^2 t} = \\ &= - \int \frac{d \cos t}{(1 - \cos^2 t) \cos^2 t}. \end{aligned} \quad (9.275)$$

Cu o nouă substituție, anume $u = \cos t$, se ajunge la primitiva în t

$$J(t) = \frac{1}{\cos t} + \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| + C. \quad (9.276)$$

Cu expresia cosinusului din (9.273) se ajunge la aceea și primitivă ca în (9.276),

$$J(x) = \sqrt{1+x^2} + \ln \left| \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right| + C.$$

□

$$(ii) \quad I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}. \quad (9.277)$$

Primitiva se poate găsi utilizând substituția $5x = t$, care va conduce la un arcsin. Dar se poate încerca și

$$5x = \sin t \Rightarrow x = \frac{1}{5} \sin t \Rightarrow dx = \frac{1}{5} \cos t dt; \quad (9.278)$$

$$(9.277) \& (9.278) \Rightarrow I(t) = \frac{1}{5} \int \frac{\cos t dt}{\cos t} = \frac{1}{5} t + C \Rightarrow I(t) = \frac{1}{5} \arcsin(5x) + C.$$

□

Aplicațiile care urmează includ atât integrale din funcții trigonometrice cât și integrale din alte funcții (iraționale) care pot fi determinate utilizând substituții trigonometrice.

Aplicații la integrale din funcții și cu substituții trigonometrice

9.6 – A Să se determine primitivele de mai jos.

$$(i) \quad I = \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x};$$

$$(ii) \quad I = \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2};$$

$$(iii) \quad I = \int \sin 3x \cos 5x dx;$$

$$(iv) \quad I = \int \sin 10x \cos 8x dx;$$

$$(v) \quad I = \int \frac{\cos x}{\cos 2x} dx;$$

$$(vi) \quad I = \int \frac{\sin 2x dx}{(2 + \sin x)^2};$$

$$(vii) \quad I = \int \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x};$$

$$(viii) \quad I = \int \frac{\sin 2x dx}{(2 + \sin x)^2};$$

$$(ix) \quad I = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2} + 1-x^2};$$

$$(x) \quad I = \int \frac{\sqrt{x^2 + 1} dx}{x^2};$$

$$(xi) \quad I = \int \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$(xii) \quad I = \int \frac{(1+x) dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(xiii) \quad I = \int (1+x^2)^{3/2} dx.$$

Răspunsuri și recomandări pentru rezolvare

(i) Se recomandă substituția generală $t = \mathbf{tg}(x/2)$. Primitiva în t se obține foarte ușor :

$$I(t) = \ln |t + 1|.$$

(ii) După rescrierea numitorului se poate aplica substituția $t = \mathbf{tg} x$.

(iii) & (iv) Se transformă produsele în sume sau diferențe utilizând formule trigonometrice precum cele folosite la integralele din (9.258), la pag. 258-259.

(v) Se va exprima $\cos 2x$ în $\sin x$ iar integrala rațională care rezultă se obține ușor după descompunerea în fracții simple.

$$I(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \sin x} \right| + C.$$

(vi) Integrala este similară cu precedentă. Prin aceeași trecere a lui în $\sin x$ se ajunge la o integrală rațională ;

$$I = \frac{-2}{2 + \sin x}.$$

(vii) Numitorul se poate rescrie prin dublarea argumentului, adică se poate exprima ca un binom în $\cos 2x$, dar apoi se trece totul în $\sin 2x$. Integrala rațională obținută conduce la o primitivă similară cu cea de la exercițiul (v) dar cu $\sin 2x$ în loc de $\sqrt{2} \sin x$.

(ix) Radicalul se poate elimina imediat cu una din substituțiile $x = \sin t$ sau $x = \cos t$.
Integrala devine

$$I(t) = \int \frac{dt}{2 + \cos t},$$

iar aceasta se va integra cu substituția generală $u = \operatorname{tg}(t/2)$.

(x) Se poate încerca substituția $x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = dt/(\cos^2 t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow I(t) = \int \frac{(1/\cos t)}{\operatorname{tg}^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t \cos t}. \quad (9.279)$$

Integrala din (9.279) este similară cu cea din (9.270) și se poate transforma în aceeași manieră în care s-a obținut integrala din (9.275).

$$I(t) = \int \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t \cos^2 t} = \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t (1 - \sin^2 t)} = \frac{1}{\sin t} + \ln \left| \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \right| + C.$$

Primitiva în x se obține revenind la substituție sau, mai simplu, exprimând $\sin t$ în $\operatorname{tg} t = x$.

(xi) Se aplică aceeași substituție (adică una din cele două posibile) ca la aplicația (ix).
 $I(t)$ se obține prin trecerea în $\cos 2t$.

(xii) Substituția $x = \sin t$ transformă integrala în una rațională în $\sin t$ & $\cos t$:

$$G(t) = \dots = \int (1 + \sin t) \, dt = t - \cos t.$$

(xiii) Se poate aplica substituția $t = \operatorname{tg} x$. Se ajunge la

$$I(t) = \int \frac{1}{\cos^5 t} \, dt.$$

Integrala este impară în $\cos t$, deci va fi necesară o nouă schimbare de variabilă, $u = \operatorname{tg} t$.

$$I(x) = x(1 + x^2)^{-1/2} + C.$$

4 Integrearea funcțiilor hiperbolice și cu substituții hiperbolice

Prin “funcții trigonometrice” înțelegem o clasă de funcții compuse ce implică funcții hiperbolice precum $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ etc. Funcțiile hiperbolice au fost definite în secțiunea **FUNCTII DERIVABILE**. Iar primitivele funcțiilor hiperbolice fundamentale figurează

în TABELUL PRIMITIVELOR IMEDIATE (la pag. 210). Le reamintim :

Funcțiile hiperbolice se definesc prin

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} ; \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; \quad (9.280)$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} ; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} . \quad (9.281)$$

Funcțiile din (9.280) sunt *cosinusul hiperbolic* și *sinusul hiperbolic*, iar cele din (9.281) sunt *tangenta hiperbolică* și *cotangenta hiperbolică*. Aceste funcții intervin în alte patru formule cu primitive uzuale.

$$21^\circ \quad \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C ; \quad 22^\circ \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C ; \quad (9.282)$$

$$23^\circ \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C ; \quad 23^\circ \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C . \quad (9.283)$$

Prin funcții hiperbolice mai generale înțelegem funcții compuse care au ca argumente funcții hiperbolice, de exemplu funcții raționale de $\operatorname{ch} x$ & $\operatorname{sh} x$. Metode generale pentru a obține primitive ale unor astfel de funcții sunt mai greu de formulat dar – în general – se aplică schimbări de variabilă și se folosesc primitivele din (9.282) & (9.283). După câteva exemple de integrare a unor funcții (care implică funcții) hiperbolice vom discuta și ilustra prin exemple modul în care se pot obține anumite integrale nedefinite prin utilizarea unor schimbări de variabilă (substituții) cu funcții hiperbolice.

Exemple 9.14.

(i) Să se determine câte o relație de recurență pentru fiecare din integralele

$$I_n = \int \operatorname{ch}^n x \, dx, \quad J_n = \int \operatorname{sh}^n x \, dx. \quad (9.284)$$

Se aplică metoda integrării prin părți (IPP). Pentru I_n ,

$$\begin{cases} u = \operatorname{ch}^{n-1} x, \\ dv = \operatorname{ch} x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1) \operatorname{ch}^{n-2} x \operatorname{sh} x \, dx, \\ v = \operatorname{sh} x. \end{cases} \quad (9.285)$$

$$(9.284) \text{ \& } (9.284) \Rightarrow I_n = \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x - (n-1) \int \operatorname{ch}^{n-2} x \operatorname{sh}^2 x \, dx. \quad (9.286)$$

Dar relația fundamentală între funcțiile hiperbolice este

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow I_n = \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x - (n-1) \int (\operatorname{ch}^n x - \operatorname{ch}^{n-2} x) x \, dx \Rightarrow \\
&\Rightarrow I_n = \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x - (n-1) (I_n - I_{n-2}) \Rightarrow n I_n = \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + (n-1) I_{n-2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \boxed{I_n = \frac{1}{n} \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}}. \quad (9.287)
\end{aligned}$$

Pentru a doua integrală se procedează similar și se găsește relația recurentă

$$\boxed{J_n = \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - \frac{n-1}{n} J_{n-2}}. \quad (9.288)$$

□

(ii) Folosind (și) relațiile de recurență (9.287) & (9.288), se pot determina (în principiu) integralele de forma (9.284) până la la orice ordin ; ne limităm la ordinul 4 inclusiv.

$$I_0 = J_0 = \int dx = x + C.$$

Însă aceste două integrale banale nici nu sunt, de fapt, integrale hiperbolice. Primele astfel de integrale sunt cele de ordinul 1. Ele sunt prezentate mai sus, la **22°** & **21°**, dar le reluăm pentru unitatea prezentării ; vom omitele constantele de integrare care sunt implicite.

$$I_1 \underset{(9.284)}{=} \int \operatorname{ch} x \, dx \underset{(9.280)}{=} \frac{1}{2} \int (e^x + e^{-x}) \, dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x. \quad (9.289)$$

$$I_2 \underset{(9.284)}{=} \int \operatorname{ch}^2 x \, dx \underset{(9.284)}{=} \frac{1}{4} \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2) \, dx = \frac{1}{8} (e^{2x} - e^{-2x} + 4x). \quad (9.290)$$

$$I_3 \underset{(9.284)}{=} \int \operatorname{ch}^3 x \, dx \underset{(9.287)}{=} \frac{1}{3} \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x + \frac{2}{3} I_1 \underset{(9.289)}{=} \frac{1}{3} \operatorname{sh} x (\operatorname{ch}^2 x + 2).$$

$$\begin{aligned}
I_4 \underset{(9.284)}{=} \int \operatorname{ch}^4 x \, dx &\underset{(9.287)}{=} \frac{1}{4} \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \frac{3}{4} I_2 \underset{(9.290)}{=} \\
&= \frac{1}{4} \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \frac{3}{4} \frac{1}{8} (e^{2x} - e^{-2x} + 4x) = \frac{1}{4} \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \frac{3}{32} (e^{2x} - e^{-2x} + 4x) = \\
&= \frac{1}{4} \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \frac{3}{32} (2 \operatorname{sh} 2x + 4x).
\end{aligned}$$

Cititorul este invitat să determine cele 3 integrale J_k , $k = \overline{2,4}$ plecând de la

$$J_1 \underset{(9.282)}{=} \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x$$

și procedând ca în cazul integralelor I_k , $k = \overline{2, 4}$.

□

Integrarea unor funcții folosind substituții cu funcții hiperbolice

Anumite integrale, în special din funcții iraționale, pot fi determinate mai simplu (decât cu alte substituții) dacă se procedează la schimbări de variabilă prin funcții hiperbolice.

Exemple 9.15.

Să se determine primitivele

$$(i) \quad I = \int \sqrt{x^2 - 2x + 2} \, dx ; \quad (9.291)$$

$$(ii) \quad J = \int (3 - 2x - x^2)^{-3/2} \, dx . \quad (9.292)$$

(i) Trinomul de sub radical se poate scrie

$$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \quad (9.293)$$

și se poate utiliza substituția

$$x - 1 = \operatorname{sh} t \Rightarrow \begin{cases} dx = \operatorname{ch} t \, dt, & x^2 - 2x + 2 = 1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t, \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \operatorname{ch} t; \end{cases} \quad (9.294)$$

$$(9.2291) \text{ \& } (9.294) \Rightarrow I(t) = \int \operatorname{ch}^2 t \, dt = \int \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} \, dt = \quad (9.295)$$

$$= \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 2t + 1) \, dt = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t + \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \frac{t}{2} . \quad (9.296)$$

Pentru a reveni la variabila inițială x se folosește substituția din (9.294) dar și expresia lui care decurge din aceasta, ambele înlocuite în (9.296) împreună cu

$$e^t = x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Rightarrow t = \ln |x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}| . \quad (9.297)$$

$$(9.296) + (9.294), (9.297) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} (x - 1) \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2} \ln |x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}| + C.$$

□

(ii) Trinomul de sub radicalul din (9.292) se poate scrie sub forma echivalentă

$$3 - 2x - x^2 = 4 - (x + 1)^2 \quad (9.298)$$

și se poate utiliza substituția

$$x + 1 = 2 \operatorname{th} t \Rightarrow 3 - 2x - x^2 = 4 - (x + 1)^2 = 4 - 4 \operatorname{th}^2 t = \quad (9.299)$$

$$= 4 \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{4}{\operatorname{ch}^2 t} ; \quad (9.300)$$

$$(9.299) \Rightarrow dx = 2 d \operatorname{th} t = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t} dt ; \quad (9.301)$$

$$(9.296) + (9.294) , (9.297) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J(t) = \int \left(\frac{\operatorname{ch}^2 t}{4} \right)^{3/2} \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t} dt = \frac{1}{4} \int \operatorname{ch} t dt = \frac{1}{4} \operatorname{sh} t . \quad (9.302)$$

Revenirea la variabila inițială x decurge din substituția din (9.299) dar și din expresia lui

$$\operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 t} - 1 = \frac{\operatorname{th}^2 t}{1 - \operatorname{th}^2 t} \Rightarrow \operatorname{sh} t = \frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 t}} . \quad (9.303)$$

$$(9.299) \& (9.303) \Rightarrow \operatorname{sh} t = \frac{(x + 1)/2}{\sqrt{1 - [(x + 1)/2]^2}} = \frac{x + 1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} ; \quad (9.304)$$

$$(9.299) \& (9.303) \Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{4} \frac{x + 1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} + C .} \quad (9.305)$$

□

Aplicații la integrale din funcții și cu substituții hiperbolice

9.7 - A Să se determine primitivele de mai jos.

$$(i) \quad I = \int \operatorname{ch}^2 x dx ;$$

$$(ii) \quad J = \int \operatorname{sh}^2 x dx ;$$

$$(iii) \quad I = \int \operatorname{th}^2 x dx ;$$

$$(iv) \quad I = \int \frac{1}{\operatorname{th}^2 x} dx ;$$

$$(v) \quad I = \int e^x \operatorname{ch} x dx ;$$

$$(vi) \quad I = \int \frac{1}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a} dx .$$

Să se determine primitivele (integralele nedefinite) ce urmează folosind substituții hiperbolice.

$$(vii) \quad I = \int \sqrt{x^2 + 2x} \, dx ;$$

$$(viii) \quad I = \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx, \, a \neq 0 ;$$

$$(ix) \quad I = \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \, a \neq 0 ;$$

$$(x) \quad I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} ;$$

$$(xi) \quad I = \int (1 - 2x - x^2)^{-3/2} \, dx ;$$

$$(xii) \quad I = \int \sqrt{1 + \tanh^2 x} \, dx .$$
