10.4. Integrale triple

Fie V un domeniu spaţial mărginit şi f o funcţie definită şi continuă pe acest domeniu

$$V \subset \mathbb{R}^3 , \; f : V \longrightarrow \mathbb{R} , \; f \in \mathbf{C}_V . \tag{10.201}$$

Funcţia f se presupune a fi mărginită ; dacă domeniul V este compact atunci ea este automat mărginită, conform unei cunoscute proprietăţi a funcţiilor continue pe domenii compacte, valabilă şi la funcţiile de mai multe variabile, în particular la cele de 3 variabile.

Domeniul fiind mărginit, se poate presupune că el este inclus într-un paralelipiped:

$$V \subseteq [a_1 , b_1] \times [a_2 , b_2] \times [a_3 , b_3] , \; a_i < b_i , \; i = \overline{1,3} . \tag{10.202}$$

Mai mult decât atât, se poate presupune că frontiera domeniului atinge toate cele 6 feţe ale paralelipipedului din (10.202). De exemplu, V poate fi interiorul unui elipsoid având elipsoidul frontieră tangent la cele cele 6 feţe ale paralelipipedului . O notaţie consacrată pentru frontiera unui domeniu din spaţiu este ∂V.

Pe fiecare din intervalele din (10.202) se consideră câte o diviziune, ca la definirea integralei Riemann. Asemenea diviziuni au intervenit şi în definirea integralelor duble – a se vedea (10.73) la pag. 355.

$$\begin{cases} \Delta_{x,\,m} = \{ a_1 = x_0 , x_1 , \dots , x_i , \dots , x_m = b_1 \} , \\ \Delta_{y,\,n} = \{ a_2 = y_0 , y_1 , \dots , y_j , \dots , y_n = b_2 \} , \\ \Delta_{z,\,p} = \{ a_3 = z_0 , y_1 , \dots , z_k , \dots , z_p = b_3 \} . \end{cases} \tag{10.203}$$

$$(10.203) \Rightarrow \begin{cases} [a_1 , b_1] = \bigcup\limits_{i=1}^{m} [x_{i-1} , x_i] , \\ [a_2 , b_2] = \bigcup\limits_{j=1}^{n} [y_{j-1} , y_j] , \\ [a_3 , b_3] = \bigcup\limits_{k=1}^{p} [z_{k-1} , z_k] . \end{cases} \tag{10.204}$$

Produsul cartesian al celor trei diviziuni din (10.203) produce o diviziune tridimensională paralelipipedului din (10.202) :

$$\Delta_{x,y,z}(V) = \Delta_{x,\,m} \times \Delta_{y,\,n} \times \Delta_{z,\,p} = \{ (x_i , y_j , z_k) : i \in \overline{1,m} , \; j \in \overline{1,n} , \; k \in \overline{1,p} \} . \tag{10.205}$$

Cele $m\,n\,p$ triplete de puncte din diviziunea 3-dimensională (10.205) sunt mai puţin relevante (sau importante) decât prismele elementare pe care ele le determină :

$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \underset{\text{not}}{=} \delta_{ijk}, \ (1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n, \ 1 \le k \le p). \quad (10.206)$$

Din incluziunea (10.202) şi din (10.206) rezultă că

$$V \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{p} \delta_{ijk}. \quad (10.207)$$

Funcţia f fiind mărginită pe domeniul $V \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, ea este mărginită şi pe fiecare paralelipiped elementar de forma (10.206). Notăm cele două margini prin

$$m_{ijk} = \inf f(\delta_{ijk}), \ M_{ijk} = \sup f(\delta_{ijk}) \ \ (1 \le i \le m, 1 \le j \le n, 1 \le k \le p). \quad (10.208)$$

Dacă

$$m = \inf f(V) = \inf_V f, \ \ M = \sup f(V) = \sup_V f. \quad (10.209)$$

Din (10.208) & (10.209) rezultă tripla inegalitate

$$(\forall\, (x, y, z) \in \delta_{ijk}) \ \ m \le m_{ijk} \le f(x, y, z) \le M_{ijk} \le M \ \ (1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n, \ 1 \le k \le p). \quad (10.210)$$

Având în vedere că volumul unui paralelipiped elementar de forma (10.206) este egală cu produsul lungimilormuchiilor sale, se pot consideră *două sume de tip Darboux* – similare cu cele introduse pentru definirea integralei definite pe axa reală şi a integralei duble :

$$\begin{cases} \underline{S}(f;\, \Delta_{x,y,z}(V)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} m_{ijk} \mathrm{Vol}_{\delta_{ijk}} = \\ \qquad = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} m_{ijk} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}), \\ \overline{S}(f;\, \Delta_{x,y,z}(V)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} M_{ijk} \mathrm{Vol}_{\delta_{ijk}} = \\ \qquad = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} M_{ijk} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}). \end{cases} \quad (10.211)$$

Comentarii. **C.10.4.1** Ca şi în cazul integralei definite unidimensionale sau al integralei duble, cele două sume din (10.211) sunt *suma inferioară Darboux*, respectiv *suma* *superioară Darboux.*

C.10.4.2 Pentru o funcţie f continuă pe V, cele două margini m_{ijk} & M_{ijk} din (10.208) pe paralelipipedul elementar compact δ_{ijk} care intervin în (10.208), (10.210-2111) sunt chiar valori extreme (locale) ale funcţiei, deci

$$m_{ijk} = \min f(\delta_{ijk}) \ \ \& \ \ M_{ijk} = \max f(\delta_{ijk}).$$

Dar această observaţie nu afectează relaţiile (inegalităţile) scrise până acum şi nici pe cele care urmează.

C.10.4.3 Din inegalitatea multiplă (10.210) şi din definiţiile celor două sume integrale din (10.211) rezultă inegalitatea

$$\begin{aligned} m(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) &\le \underline{S}(f;\Delta_{x,y}(D)) \le \\ &\le \overline{S}(f;\Delta_{x,y}(D)) \le M(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3). \end{aligned} \tag{10.212}$$

Evident, inegalităţile din (10.212) sunt verificate pentru orice diviziune (3-dimensională) a domeniului.

C.10.4.4 Să mai observăm, că pentru domenii V strict incluse într-un dreptunghi precum cel din (10.72), este posibil ca sumele din (10.211) să nu conţină exact câte mnp termeni pentru simplul motiv ca unele paralelipipede elementare δ_{ijk} să cadă în afara domeniului V:

$$\delta_{ijk} \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \setminus V. \tag{10.213}$$

Dar această situaţie nu crează nici un fel de problemă întrucât funcţia f poate fi uşor prelungită la întregul dreptunghi, dândui-se valoarea 0 pe dreptunghiuri ca cele din (10.213). Astfel, fiecare sumă Darboux poate fi scrisă cu exact mnp termeni, dar eventualii termeni corespunzători paralelipipedelor elementare din (10.213) vor fi nuli.

Ca şi în preliminariile la definirea integralei Riemann pe axa reală şi a celei duble, pentru o diviziune ca cea din (10.205) a domeniului spaţial V şi pentru o alegere oarecare a unor puncte intermediare în paralelipipedele diviziunii,

$$(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \in \delta_{ijk} \iff \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ \eta_j \in [y_{i-1}, y_i] \ \& \ \zeta_k \in [z_{k-1}, z_k], \tag{10.214}$$

se poate scrie *suma Riemann* corespunzătoare :

$$\Sigma(f;\Delta_{x,y}(V),(\Xi,\mathrm{H},\mathrm{Z})) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}). \tag{10.215}$$

Cu referire la inegaliatatea multiplă (10.212), o astfel de sumă Riemann se va încadra exact între cele două sume Darboux, în virtutea inegalităţii (10.210).

Pentru a se ajunge la *definiţia integralei triple cu ajutorul sumelor integrale* este necesară – ca şi în cazul integralelor definite pe $\mathbb{R}$ sau al integralelor duble – considerarea *normei diviziunii* din (10.205), în determinare reciprocă (,) cu normele diviziunilor din (10.202) :

$$\nu(\Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_z) = \max_{i,j,k} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}\,. \tag{10.216}$$

Condiţionarea mai sus menţionată revine la implicaţii / echivalenţe de forma celor de la pag. 349 :

$$\nu(\Delta_x \times \Delta_y) \rightarrowtail 0 \iff [\nu(\Delta_x) \rightarrowtail 0 \ \ \& \ \ \nu(\Delta_y) \rightarrowtail 0] \Rightarrow m, n \rightarrowtail +\infty\,. \tag{10.217}$$

Normele diviziunilor pe cele două intervale de pe axe sunt definite (de obicei) exact ca în (10.88) la pag. 357, dar reamintim acea definiţie, extinsă şi la a treia variabilă :

$$\nu(\Delta_x) = \max_i (x_i - x_{i-1}),\ \nu(\Delta_y) = \max_j (y_j - y_{j-1}),\ \nu(\Delta_z) = \max_k (z_k - z_{k-1})\,. \tag{10.218}$$

În (10.217) & (10.218) nu am mai pus în evidenţă numărul intervalelor celor două diviziuni.

Definiţia 10.4.1. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune

$$\Delta_{x,y,z}(V) = \Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_z \in \mathrm{DIV}_V\,,$$

$$\boxed{\nu(\Delta_{x,y,z}) < \delta \Rightarrow \overline{S}(f; \Delta_{x,y,z}(D)) - \underline{S}(f; \Delta_{x,y,z}(D)) < \varepsilon} \tag{10.219}$$

atunci funcţia f este *integrabilă pe domeniul spaţial* V. □

Această definiţie reprezintă *criteriul de integrabilitate al lui Darboux* pentru integrala triplă. Proprietatea de integrabilitate se poate defini (sau caracteriza), la fel ca în cazul integralei definite în $\mathbb{R}$ sau al integralelor duble, şi prin intermediul sumelor integrale de tip Riemann. Am prezentat o astfel de sumă în (10.215).

Definiţia 10.4.2. Dacă există numărul $L \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice diviziune

$\Delta_{x,y,z}(V) = \Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_z \in \mathrm{DIV}_V$ şi orice 3-vector de puncte intermediare $(\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z})$,

$$\boxed{\lim_{\nu(\Delta_{x,y,z}) \rightarrowtail 0} \Sigma(f; \Delta_{x,y,z}(D), (\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z})) = L} \tag{10.220}$$

atunci funcţia f este *integrabilă pe domeniul plan* D iar limita din (10.220) este valoarea integralei, notată

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.} \tag{10.221}$$

□

Se pot da exemple de aplicare a acestor două definiţii spre a se verifica integrabilitatea unei funcţii de trei variabile pe un anumit domeniu, respectiv pentru a se calcula chiar valoarea unei asemenea integrale duble ca limită a unei sume integrale Riemann triple, ca cea dn (10.215). Dar în cele mai multe aplicaţii practice interesează modalităţiile practice de a calcula integralele triple, folosind formule similare cu *formula Newton-Leibniz* de la integrala definită din $\mathbb{R}$ (a se vedea secţiunea / capitolul **9.2**).

Formulele pentru calculul unei integrale duble depind în mare măsură de *forma domeniului plan* pe care trebuie calculată integrala. Cel mai simplu caz este

T.1 Domeniu paralelipipedic. În acest caz, incluziunea (nestrictă) (10.202) este chiar o egalitate :

$$V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]\,,\ a_i < b_i\,,\ i = \overline{1,3}\,. \tag{10.222}$$

Integrala triplă (10.221) pe un asemenea domeniu se poate scrie sub forma

$$\boxed{\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.} \tag{10.223}$$

În (10.223) se foloseşte o simplă notaţie, care însă nu indică efectiv modul de calcul al integralei. Trebuie aleasă o anumită ordine de integrare : de exemplu, se poate calcula mai întâi integrala din $f(x,y,z)$ în raport cu a treia variabilă z, pe intervalul $[a_3, b_3]$; rezultatul va fi o funcţie $g(x,y)$ care se integrează apoi, ca integrală dublă, pe dreptunghiul $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ obţinându-se valoarea integralei. Această modalitate de a calcula o integrală triplă prin calculul succesiv a două integrale definite simple se numeşte (în unele manuale / culegeri de ANALIZĂ) *iterare* a integralei triple. Evident, există mai multe modalităţi de a calcula o integraală triplă. Alternativ (faţă de varianta tocmai prezentată), integralaa interioară poate fi o integrală dublă în raport cu două dintre variabile, iar cea exterioară va fi o integrală simplă în raport ca variabila rămasă.

Prezentăm prima alternativă, împreună cu câte o notaţie specifică, întrucâtva abuzivă, dar care precizează variabila / variabilele în raport cu care se face integrarea pe fiecare interval / domeniu.

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right]dx\,dy \underset{\text{not}}{=}$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} dx\,dy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\,. \tag{10.224}$$

Dacă prima integrare se face după x, y iar cea extrerioară după z atunci ordinea operaţiilor de integrare se poate pune în evidenţă sub forma

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_3}^{b_3}\left[\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\right]dz \underset{\text{not}}{=}$$

$$= \int_{a_3}^{b_3} dz \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,. \tag{10.225}$$

Alegerea unuia sau altui mod de calcul iterat al unei integrale triple pe un paralelipiped este, în principiu, arbitrară. Dar se poate opta pentra una sau altă ordine de integrare având în vedere şi natura (adică expresia analitică a) funcţiei $f(x, y, z)$: este posibil ca găsirea unei primitive în x – în vederea aplicării formulei Newton-Leibniz – să fie mai facilă decât găsirea unei unei primitive în y, sau invers. Mai mult decât atât, este posibil ca una dintre primitive să nu fie exprimabilă prin funcţii elementare, sau determinarea ei să fie mai dificilă. În ce priveşte integralele duble care intervin atât în (10.224) cât şi în (10.225), ele se calculează aşa cum s-a explicat în secţiunea precedentă **10.3 – Integrale duble**, pag. 358-359.

Înainte de a oferi două-trei exemple, să semnalăm şi cazul particular, foarte avantajos în aplicaţii, când funcţia de integrat este o *funcţie separabilă*, adică se poate scrie ca produs de funcţii, una de variabila x, a doua în variabila y iar a treia în z :

$$f(x, y, z) = \varphi(x)\,\psi(y)\,\eta(z). \tag{10.226}$$

În acest caz, integrala pe un paralelipiped de forma (10.202) va fi egală cu un produs de trei integrale Riemann simple. Se poate spune că *integrala triplă dintr-o funcţie separabilă este factorizabilă* :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}[\varphi(x)\,\psi(y)\,\eta(z)]\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1}\varphi(x)\,dx\cdot\int_{a_2}^{b_2}\psi(y)\,dy\cdot\int_{a_3}^{b_3}\eta(z)\,dz\,. \qquad (10.227)$$

10.4 E -1 Exemple de integrale triple pe paralelipipede

Ex.10.4-1 $$\iiint_V \frac{x\,y\,z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz\,,\quad V=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\,. \qquad (10.228)$$

Domeniul este cubul unitar cu un colţ în origine, situat în primul octant. Funcţia fiind simetrică în cele trei variabile, ordinea de integrare va fi arbitrară. Dacă alegem ordinea de integrare ca în (10.224), integrala se scrie sub forma

$$\iiint_V \frac{x\,y\,z}{(1+x^2+y^2+z^2)^4}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 dx\,dy\int_0^1\frac{x\,y\,z}{(1+x^2+y^2+z^2)^4}\,dz\,. \qquad (10.229)$$

De sub integrala interioară din (10.229) se pot scoate în factor (sub integrala exterioară) produsul $x\,y$ iar primitiva integralei interioare în z va fi $-1/6$ dintr-o funcţie raţională, dar cu puterea de la numitor $=3$:

$$\int_0^1\frac{x\,y\,z}{(1+x^2+y^2+z^2)^4}\,dz = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\right]_{z=0}^{z=1} =$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(2+x^2+y^2)^3}-\frac{1}{(1+x^2+y^2)^3}\right]. \qquad (10.230)$$

$$(10.229)\ \&\ (10.230)\ \Rightarrow\ \int_0^1\int_0^1 dx\,dy\int_0^1\frac{x\,y\,z}{(1+x^2+y^2+z^2)^4}\,dz =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1\left[\int_0^1\left(\frac{y}{(1+x^2+y^2)^3}-\frac{y}{(2+x^2+y^2)^3}\right)dy\right]x\,dx =$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1\left[\frac{1}{(2+x^2+y^2)^2}-\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\right]_{y=0}^{y=1}x\,dx =$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 \left[\frac{x}{(3+x^2)^2} - \frac{2x}{(2+x^2)^2} + \frac{x}{(1+x^2)^2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{48}\int_0^1 \left[\frac{1}{3+x^2} - \frac{2}{2+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right]_1^0 = \frac{1}{48}\left(\frac{1}{3} - 1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{192}\,.$$

Cititorul este invitat să detalieze calculele şi să încerce calculul acestei integrale cu o altă ordine de integrare.

$\boxed{\text{Ex.10.4-2}}$

$$\iiint_V 2\,x\,e^{x^2+2y}\cos^2 z\;dx\,dy\,dz\,, \tag{10.231}$$

$$V = [0\,,1]\times[1\,,2]\times[0\,,\pi/2]\,. \tag{10.232}$$

Funcţia de integrat din (10.231) este *separabilă* iar domeniul de integrare este un paralelipiped, deci se poate aplica factorizarea din (10.227).

$$\iiint_V 2\,x\,e^{x^2+2y}\cos^2 z\;dx\,dy\,dz = \int_0^1 2\,x\,e^{x^2}dx \cdot \int_1^2 e^{2y}dy \cdot \int_0^{\pi/2}\cos^2 z\,dz =$$

$$= \left[e^{x^2}\right]_0^1 \cdot \tfrac{1}{2}\left[e^{2y}\right]_1^2 \cdot \tfrac{1}{2}\left[z + \tfrac{1}{2}\sin 2z\right]_0^{\pi/2} = e\cdot\frac{1}{4}\,(e^4 - e^2)\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi(e^5 - e^3)}{8}\,.$$

$\boxed{\text{T.2}}$ Integrale triple pe domenii mai generale

Domeniile din spaţiul 3-dimensional (3D) pe care se pot considera integrale triple pot fi foarte diverse ca formă, implicit şi caracterizările lor analitice vor fi variate iar o prezentare (mai mult sau mai puţin) sistematică a acestora ar consuma prea mult spaţiu. Câteva domenii spaţiale tipice vor interveni în exemplele care urmează. Menţionăm totuşi domeniile având frontiera ∂V formată din plane, caz în care domeniul este unul *poliedral*; un caz particular al acestora este cel al domeniile paralelipipedice, ca în cele două exemple anterioare. Un alt caz este acela în care ∂V este o *suprafaţă cuadrică* precum elipsoidul, hiperboloizii, paraboloizii, cilindrii sau conurile, eventual o porţiune dintr-o astfel de suprafaţă completată cu unul sau mai multe plane, eventual chiar plane de coordonate : (xOy), (xOz) sau (yOz). Forma domeniului de ingerare şi caracterizarea / caracterizările analitice ale frontierei sale vor fi esenţiale pentru stabilirea limitelor integralelor simple sau duble ce vor interveni în calculul integralei triple, prin metoda iterării.

Vom încerca o prezentare cât mai generală a cazurilor care pot interveni. Prin analogie cu trapezele curbilinii ca domenii generale pentru integralele duble, orice domeniu spaţial poate fi considerat ca având proiecţia pe unul din planele de coordonate un domeniu plan D iar volumul respectiv să fie limitat – în direcţia ortogonală pe respectivul plan de coordonate – de două suprafeţe simple în raport cu această direcţie şi netede, eventual pe porţiuni. Pentru a face mai clară acestă descriere cam generală, considerăm cazul

$$D \subset \mathbb{R}^2 \rightleftarrows (xOy),\ D = \mathrm{Proj}_{(xOy)} V \ \& \tag{10.233}$$

$$\boxed{V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\forall\ (x,y) \in D)\ \ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}.} \tag{10.234}$$

Cele două funcţii de x, y care intervin în (10.234) reprezintă analitic două suprafeţe presupuse a fi *simple în raport cu axa* (Oz), ceea ce însemană că orice dreaptă verticală, adică paralelă cu (Oz), intersectează fiecare din cele două suprafeţe în cel mult un punct. Putem descrie aceste suprafeţe prin

$$\begin{cases} (S_1) = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\forall\ (x,y) \in D)\ \ z = \varphi_1(x,y), \\ (S_2) = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\forall\ (x,y) \in D)\ \ z = \varphi_2(x,y). \end{cases} \tag{10.235}$$

Rezultă din aceste două caracterizări analitice că toate punctele suprafeţei (S_1) sunt situate sub punctele suprafeţei (S_2).

În unele aplicaţii (exerciţii) ecuaţiile analitice ale celor două suprafeţe sunt date, dar în alte cazuri suprafeţele sunt descrise doar geometric iar ecuaţiile lor trebuie deduse / scrise de cel ce abordează un asemenea exerciţiu. Să încheiem această descriere care ţine mai curând de GEOMETRIA ANALITICĂ cu o interpretare a (frontierei) domeniului de integrare ca fiind formată dintr-un *cilindru cu generatoarele verticale* $\| \ (Oz)$, având drept *curbă directoare* în planul (xOy) frontiera domeniului D :

$$(\Gamma) = \partial D \subset (xOy)\,. \tag{10.236}$$

Evident, curba-frontieră din (10.236) este presupusă a fi netedă, cel puţin pe porţiuni, şi reprezentabilă analitic printr-una sau mai multe ecuaţii. Alternativ, curba frontieră a domeniului D poate avea o reprezentare parametrică. Aceste aspecte au fost discutate şi în secţiunea precedentă, **10.3 – Integrale duble.** Volumul pe care se face integrare este situat în interiorul cilindrului şi este mărginit inferior / superior de suprafeţele (S_1) & (S_2), respectiv. În condiţiile unei integrale pe un domeniu ca cel tocmai descris, inclusiv prin ecuaţiile (10.234) & (10.235), integrala triplă se va calcula cu formula

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy\,.} \tag{10.237}$$

Să mai menţionăm că natura, deci forma curbei directoare $(\Gamma) = \partial D \subset (x\,O\,y)$ poate fi cât se poate de diversă. De exemplu, ea poate fi o linie poligonală, o reuniune de arce de curbă netede etc. etc. Exemplele ce urmează vor ilustra diverse situaţii.

Ex.10.4 - 3 $$\iiint_V \frac{z^3\,dx\,dy\,dz}{(y+z)(x+y+z)}\,, \qquad V: \begin{cases} x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ z \ge 0\,, \\ x + y + z \le 1. \end{cases} \tag{10.238}$$

Se constată cu uşurinţă că domeniul de integrare este un *tetraedru tridreptunghic*, cu unghiul triedru drept având vârful în origine şi cele trei muchii concurente în acest punct - segmente de lungime situate pe cele trei axe de de coordonate. Triunghiul care închide tetraedrul este unul echilateral. Folosind o notaţie specifică noţiunii de *simplex*, ceea ce şi este acest corp, putem scrie

$$V = [O\,A\,B\,C] \text{ cu } O(0,0,0),\ A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(0,0,1). \tag{10.239}$$

Din această caracterizare rezultă că domeniul plan pe care se proiectează volumul este triunghiul (mai exact, simplexul triunghiular) dreptunghic

$$D = [O\,A\,B] \subset (x\,O\,y)\,. \tag{10.240}$$

Din această incluziune (10.240) rezultă şi suprafaţa inferioară,

$$(S_1) = (x\,O\,y):\ z = 0 \ \Rightarrow\ \varphi_1(x,y) \equiv 0\,. \tag{10.241}$$

Suprafaţa superioară este planul triunghiului echilateral anterior menţionat, deci ea se poate scrie şi caracteriza analitic sub forma

$$(S_2) = (A\,B\,C):\ z = 1 - x - y \ \Rightarrow\ 0 \ \Rightarrow\ \varphi_2(x,y) = 1 - x - y\,. \tag{10.242}$$

Această alegere corespunde descrierii unui domeniu spaţial anterior discutat, dar mai există şi alte două posinilităţi analoage. Alegerea ca prima integrare să se facă după variabila z

nu este cea mai adecvată întrucât aceasta este prezentă în trei factori (la numărător şi la numitorul funcţiei raţionale de sub integrală), iar descompunerea acestei funcţii în fracţii simple ar implica un efort inutil. Alternativ, se poate alege domeniul plan

$$D = [OBC] \subset (yOz)\,. \tag{10.243}$$

Din această incluziune (10.243) rezultă şi cele două suprafeţe care limitează volumul :

$$(S_1) = (yOz):\ x = 0 \ \Rightarrow\ \psi_1(y,z) \equiv 0\,; \tag{10.244}$$

$$(S_2) = (ABC):\ x = 1 - y - z \ \Rightarrow\ 0 \ \Rightarrow\ \psi_2(y,z) = 1 - y - z\,. \tag{10.245}$$

În consecinţă, se poate încerca integrarea cu formula

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \Bigg[\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\Bigg]dy\,dz \underset{(10.244-245)}{=}$$

$$= \iint_{[OBC]} \frac{z^3}{y+z}\Bigg[\int_0^{1-y-z} \frac{dx}{x+y+z}\Bigg]dy\,dz =$$

$$= \iint_{[OBC]} \frac{z^3}{y+z}\big[\ln(x+y+z)\big]_0^{1-y-z} dy\,dz = -\int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{z^3\ln(y+z)}{y+z}\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 z^3\big[\ln^2(y+z)\big]_{y=0}^{y=1-z} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 z^3 \ln^2 z\,dz\,. \tag{10.246}$$

Integrala Riemann simplă din (10.246) se poate calcula cu metoda IPP (prin părţi). Se poate nota integrala din (10.246) cu I şi

$$\begin{cases} u = \ln^2 z\,, \\ dv = z^3 dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2}{z}\ln z\,, \\ v = \dfrac{z^4}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I = \frac{1}{2}\int_0^1 z^3 \ln^2 z\,dz = \frac{1}{2}\Bigg[\frac{z^4}{4}\ln^2 z\,\Bigg]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 z^3\ln^2 z\,dz\Bigg]. \tag{10.247}$$

Primul termen al expresiei din (10.247) a integralei nu este o simplă variaţie a produsului respectiv de funcţii întrucât acesta se anulează evident în limita superioară în timp ce "valoarea" sa în limita inferioară este de fapt o limită cunoscută (se poate revizita şi secţiunea **Limite de funcţii**) dar ea se poate calcula efectiv, de exemplu cu regula lui l'Hospital :

$$\lim_{z \searrow 0} \frac{z^4}{4} \ln^2 z = \frac{1}{4} \lim_{z \searrow 0} \frac{\ln^2 z}{z^{-4}} = -\frac{1}{8} \lim_{z \searrow 0} \frac{\ln z}{z^{-4}} = \frac{1}{32} \lim_{z \searrow 0} z^2 = 0. \tag{10.248}$$

Din (10.247) şi din limita (10.248) se ajunge la ecuaţia

$$\frac{3}{2} I = 0 \;\Rightarrow\; I = 0. \tag{10.249}$$

Notă. În culegerea de probleme [D. Flondor & N. Donciu, Vol. II, 1979], de unde a fost preluat acest exerciţiu, se ajunge (în cadrul răspunsului de la pag. 334-335) la expresia (10.246) a integralei dar apoi se aplică substituţia $\ln z = t$ cu care se regăseşte valoarea integralei din (10.249), trecând printr-o integrală improprie pe interval nemărginit. Considerăm că utilizarea limitei din (10.248) şi a a ecuaţiei din (10.249) reprezintă o variantă preferabilă. Cititorii interesaţi sunt invitaţi să verifice calculele care au condus la expresia din (10.246) şi la valoarea finală.

Ex.10.4-4 $\qquad \iiint\limits_V x y \, dx \, dy \, dz, \qquad V : \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \; x \ge 0, \; y \ge 0, \\ 0 \le z \le 1. \end{cases} \qquad (10.250)$

Domeniul de integrare este sfertul de cilindru circular drept (vertical) de rază unitară, centrat în origine, limitat inferior de planul de coordonate $(x O y)$ şi limitat superior de planul paralel cu acesta $(z = 1)$. Pe de altă parte, funcţia de sub integrală este evident separabilă dar domeniul de intergare nefiind prismatic (adică paralelipipedic), integrala nu se poate factoriza ca produs de trei integrale. Totuşi, ea se poate scrie ca produsul dintre o integrală dublă şi o integrală Riemann simplă :

$$I = \iiint\limits_V x y \, dx \, dy \, dz = \iint\limits_D x y \, dx \, dy \cdot \int_0^1 dz = \iint\limits_D x y \, dx \, dy. \tag{10.251}$$

Integrala după z era una banală, iar domeniul plan din ultima integrală ce intervine in (10.251) este sfertul de disc circular unitar centrat în origine. Este aşadar naturală trecerea în coordonate polare : a se vedea formulele (10.118) şi (10.122) de la pag. 366 & 367, pe care le reamintim şi le adaptăm la sfertul de disc din (10.250) :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} \rho \in (0, 1], \\ \theta \in [0, \pi/2]. \end{cases} \tag{10.252}$$

Jacobianul schimbării de variabile este

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho . \tag{10.253}$$

Din (10.252) & (10.253), integrala din (10.251) este

$$I = \ldots = \iint_D x\, y\, dx\, dy = \ldots = \int_0^1 \rho^3\, d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}.$$

D.3 **Integrale triple rezolvabile prin schimbări de variabile.**

Pentru calculul anumitor integrale triple este necesară trecerea de la variabilele cartesiene uzuale (x, y, z) la alte variabile, de exemplu (t, u, v). O astfel de transformare este de forma

$$\begin{cases} x = x(t,u,v), \\ y = y(t,u,v), \\ z = z(t,u,v). \end{cases} \tag{10.254}$$

Sub integrala în noile variabile (u, v) va apărea ca factor jacobianul acestei transformări,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(t,u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{10.255}$$

La fel ca şi în cazul integralei duble, într-o astfel de schimbare de variabile este esenţial şi modul în care se transformă domeniul de integrare. Dacă domeniul "iniţial" de integrare este, ca în formula (10.221), V şi notăm cu W domeniul variabilelor (t, u, v) atunci legătura între cele două domenii de integrare se poate scrie sub forma

$$V = (x, y, z)(W) \tag{10.256}$$

unde (x, y, z) nu este, de această dată, un triplet de variabile independente ci o funcţie vectorială în variabilele (t, u, v) cu componentele din (10.254).

Cu aceste precizări, formula de schimbare a variabilelor în integrala triplă se poate scrie sub forma

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\boxed{= \iiint_W f[x(t, u, v), y(t, u, v), z(t, u, v)]\, \frac{D(x, y, z)}{D(t, u, v)}\, dt\, du\, dv\,.} \tag{10.257}$$

Una din cele mai cunoscute (şi folosite) schimbări de variabile în integrala triplă constă în trecerea de la coordonatele cartesiene la cele sferice. Dacă integrala este scrisă în coordonate cartesiene, în raport cu reperul standard $(O; x, y, z)$, formulele de legătură (de la coordonatele sferice la cele cartesiene) sunt

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi\,, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi\,, \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} \rho = d(O, M)\,, & \rho \in [0, +\infty), \\ \theta = \sphericalangle(\mathbf{k}, (OM)), & \theta \in [0, \pi]\,, \\ \varphi = \sphericalangle(\mathbf{i}, (OM')), & \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases} \tag{10.258}$$

În formulele (10.258) M este un punct curent din spaţiu, M' este proiecţia acestuia]n planul de coordonate (xOy), (OM) & (OM') sunt semidrepte care unesc originea cu puctele respective iar $\mathbf{i}$ & $\mathbf{k}$ sunt bine-cunoscuţii versori ai reperului cartesian ortonormat. Cele trei coordonate sferice (ρ, θ, φ) reprezintă, aşadar, distanţa de la origine la punctul curent, unghiul dintre versorul semiaxei verticale (Oz) şi vectorul de poziţie al punctului curent M şi – respectiv – unghiul dintre versorul semiaxei (Ox) şi vectorul de poziţie al proiecţiei M' a punctului curent M în planul orizontal de coordonate. Din aceste definiţii geeometrice ale ceelor trei coordonate sferice rezultă şi intervalele pentru fiecare din ele, precizate în (10.258). Se poate afirma câ întreg spaţiul $\mathbb{R}^3$ este imaginea prin transformarea (10.258) a domeniului prismatic semi-infinit

$$[0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi). \tag{10.259}$$

Corespondenţa între tripletele de coordonate cartesiene şi cele de coordonate sferice este biunivocă : ele se determină reciproc, în mod unic. Se pot scrie şi formulele de trecere de la coordonatele cartesiene la cele sferice, deci cele care definesc inversa transformării din (10.258).

Jacobianul transformării (10.258) se poate calcula imediat :

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin\theta + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + \sin^3\theta\cos^2\varphi) =$$

$$= \rho^2(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta) = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\sin\theta = \rho^2\sin\theta\,. \qquad (10.260)$$

Prin urmare, o integrală triplă rezolvabilă prin trecerea în coordonate sferice va putea fi calculată cu formula ce derivă din formula mai generală (10.257), transformarea (10.258) şi jacobianul din (10.260) :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\boxed{= \iiint_W f(\rho\sin\theta\cos\varphi\,,\rho\sin\theta\sin\varphi\,,\rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\,.} \qquad (10.261)$$

În această fomulă (10.261) nu am specificat limitele pentru cele trei integrale după ρ, θ, respectiv φ. Dacă domeniul iniţial este o sferă completă de rază R atunci limitele vor fi

$$0 \le \rho \le R\,,\ 0 \le \theta \le \pi\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \qquad (10.262)$$

Dacă (însă) domeniul V este o parte dintr-o sferă sau, mai exact, din bila de rază R, intervalele pentru cele două unghiuri vor fi modificate corespunzător. În toate cazurile, noul domeniu de integrare W din spaţiul coordonatelor sferice (ρ,θ,φ) este un paralelipiped ceea ce - în multe cazuri - face mai simplă obţinerea valorii integralei.

Înainte de a oferi câteva exemple, să mai observăm că trecerea de la coordonatele cartesiene (x,y,z) la cele sferice (ρ,θ,φ) este analoagă cu trecerea de la (x,y) la coordonatele polare, în cazul integralelor duble. (**§ 10.3**, pag. 366-367).

$\boxed{\text{Ex.10.4-5}}$ $$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz, \tag{10.263}$$

$$V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 2, \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0. \end{cases} \tag{10.264}$$

Domeniul de integrare este sfertul de “bilă” sferică de rază $R=\sqrt{2}$ situat în primul octant al spaţiului. Este deci naturală trecerea în coordonate sferice. Schimbarea de variabile este

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z=\rho\cos\theta \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} \rho\in[0,\sqrt{2}\,], \\ \theta\in[0,\pi/2], \\ \varphi\in[0,\pi/2]. \end{cases} \tag{10.265}$$

Deci domeniul V din (10.264) este imaginea prin transformarea (10.265) a paralelipipedului $[0,\sqrt{2}\,]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$. Cu formula (10.261) adaptată la limitele din (10.265) şi funcţia din (10.263), integrala (pe care o putem nota cu I), devine

$$I=\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,d\rho\cdot\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\cdot\int_0^{\pi/2}d\varphi=\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}}\cdot[\cos\theta]_{\pi/2}^{0}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{Ex.10.4-6}}$ $$\iiint_V (x^2+y^2)^{1/2}\,dx\,dy\,dz,\quad V:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2, \\ 0\le z\le 2a-x-y. \end{cases} \tag{10.266}$$

Domeniul este o porţiune din cilindrul vertical de rază $R=a$ centrat în origine, limitată inferior de planul de coordonate (xOy) şi limitat superior de planul

$$(p):\ x+y+z\le 2a. \tag{10.267}$$

Pentru această integrală, cea mai oportună schimbare de variabile este trecerea în *coordonate cilindrice*, având în vedere şi forma domeniului de integrare. Această transformare revine la trecerea de la coordonatele cartesiene cartesiene (x,y) la cele polare (r,φ) în planul (xOy) în timp ce variabila z nu se schimbă (variază liber în $\mathbb{R}$). Formulele de transformare sunt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi\,, \\ z \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{10.268}$$

Intervalele pentru cele două coordonate polare sunt exact ca în (10.258). Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x\,,y\,,z)}{D(\rho\,,\varphi\,,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \tag{10.269}$$

Pentru domeniul de integrare din enunţ, intervalele de variaţie pentru cele trei coordonate din (10.268) sunt

$$0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2a - x - y. \tag{10.270}$$

Având în vedere limita superioară pentru a treia variabilă, care depinde de primele două, este normal ca integrala interioară să fie în raport cu z în timp ce domeniul integralei duble după $(x\,,y)$, D, va fi discul de rază a centrat în origine :

$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2)^{1/2}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D (x^2 + y^2)^{1/2}\Big[\int_0^{2a-x-y} dz\Big]\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_D (x^2 + y^2)^{1/2}(2a - x - y)\, dx\, dy \underset{(10.268-270)}{=}$$

$$= \int_0^a r^2\Big[\int_0^{2\pi} (2a - r\cos\varphi - r\sin\varphi)\, d\rho\Big]\, d\varphi =$$

$$= \int_0^a r^2\Big[\int_0^{2\pi} (2a - r\cos\varphi - r\sin\varphi)\, d\rho\Big]\, d\varphi = \frac{a^3}{3}\cdot 4a\pi - I_2 = 4\pi\frac{a^4}{3} - I_2$$

unde

$$I_2 = -\int_0^a r^3\, dr \cdot \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi = -\frac{a^4}{4}\big[\sin\varphi - \cos\varphi\big]_0^{2\pi} = 0. \tag{10.271}$$

Rezultă că valoarea integralei este $I = 4\pi a^4/3$ întrucât integrala I_2 din (10.271) se anulează datorită periodicităţii funcţiei trigonometrice, având variaţia nulă între 0 şi

2π .

$\boxed{\text{Ex.10.4-7}}$ $$\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x^2+y^2+z^2)^3}}\,, \qquad V:\begin{cases} x^2+y^2 \ge z \ge 0\,, \\ x^2+y^2 \le 1\,. \end{cases} \tag{10.272}$$

Domeniul de integrare este întrucâtva asemănător cu cel al integralei precedente, din (10.266). El este situat în interiorul *cilindrului circular unitar centrat în origine*, în semispaţiul $(z \ge 0)$ şi este *limitat superior de un paraboloid de rotaţie*. Ca şi în cazul precedent, calculul acestei integrale poate fi facilitat prin trecerea în coordonate cilindrice, cu formulele (10.268) & (10.269). Intervalele de variaţie pentru cele trei coordonate cilindrice sunt precizate prin inegalităţile

$$0 \le r \le 1\,,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le z \le x^2+y^2. \tag{10.273}$$

Ca de obicei, vom nota integrala cu I.

(10.268-269) & (10.272-273) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I = \iint\limits_D \Big[\int_0^{x^2+y^2} (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\, dz \Big] dx\, dy\,. \tag{10.274}$$

Integrala interioară din (10.274) este o integrală iraţională în raport cu variabila z şi anume o integrală binomă. Dar determinarea ei poate fi mai simplă dacă se trece în coordonatele polare, de la (x,y) la (r,φ), chiar în acest stadiu. Cu schimbarea de variabile (10.268-269) integrala din (10.274) devine

$$I = \iint\limits_D \Big[\int_0^{r^2} (r^2+z^2)^{-3/2}\, dz \Big] r\, dr\, d\varphi\,. \tag{10.275}$$

Se poate aplica o substituţie specifică acestui tip de integrale, cazul **3°** din substituţiile lui Čebyšev :

$$\frac{r^2+z^2}{z^2} = t^2 \;\Rightarrow\; r^2+z^2 = t^2 z^2 \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{r^2}{t^2-1} = r^2(t^2-1)^{-1} \;\Rightarrow \tag{10.276}$$

$$\Rightarrow\; z = r(t^2-1)^{-1/2} \;\Rightarrow\; dz = -\frac{r}{2}(t^2-1)^{-3/2}\, 2t\, dt = -r(t^2-1)^{-3/2}\, t\, dt\,. \tag{10.277}$$

Cu substituţia din (10.276), funcţia de integrat devine

$$(r^2+z^2)^{-3/2} = (tz)^{-3} = (rt)^{-3}(t^2-1)^{3/2}. \tag{10.278}$$

Noile limite de integrare rezultă din (10.276) :

$$t = \frac{1}{z}\sqrt{r^2+z^2} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \;\Rightarrow\; t = +\infty, \\ z = r^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{r^2+1}/r. \end{cases} \tag{10.279}$$

(10.277), (10.278) & (10.279) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow J(r) = \int_{+\infty}^{\sqrt{r^2+1}/r} (rt)^{-3}(t^2-1)^{3/2}[-r(t^2-1)^{-3/2}t]\,dt =$$

$$= \frac{1}{r^2}\int_{\sqrt{r^2+1}/r}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{t}\right]_{+\infty}^{\sqrt{r^2+1}/r} = \frac{1}{r\sqrt{r^2+1}}. \tag{10.280}$$

(10.275) & (10.280) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \iint_D \frac{1}{r\sqrt{r^2+1}}\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \tag{10.281}$$

$$= 2\pi\left[\ln(r+\sqrt{r^2+1})\right]_0^1 = 2\pi\ln(1+\sqrt{2}). \tag{10.281}$$

Comentarii. În penultima expresie din (10.280) s-a ţinut seama de semnul primitivei lui $1/t^2$ prin inversarea limitelor variaţiei acesteia. În calculul integralei din (10.281) a fost luat în considerare şi jacobianul transformării din (10.269), de la (x,y) la (r,φ). Din punct de vedere geometric, mai putem observa că cele două suprafeţe se intersectează pe cercul

$$(\Gamma) = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1 \;\&\; z = 1\}$$

iar suprafaţa superioară, adică paraboloidul de rotaţie, este tangentă la discul inferior în origine.

Cititorii sunt invitaţi să detalieze calculele, în special cele cu determinarea primitivei din integrala binomă.

10.4 - A Integrale triple - Exerciţii

10.4 A - 1 Se cere calculul integralelor ce urmează pe domeniile indicate.

4A-1.1 $I_1 = \iiint_V (x+y)z\,dx\,dy\,dz$, $\quad V: \begin{cases} x+y+z \le 1, \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0. \end{cases}$

4A-1.2 $I_2 = \iiint_V \cos(x+y)\,\mathrm{tg}\,z\,dx\,dy\,dz$, $\quad V = [0, \pi/2] \times [\pi, 3\pi/2] \times [0, \pi/4]$.

4A-1.3 $I_3 = \iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz$, $\quad V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le a^2, \\ x^2+y^2+z^2 \le 2az. \end{cases}$

4A-1.4 $I_4 = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, $\quad V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le a^2, \\ y^2+z^2 \le x^2,\ x \ge 0. \end{cases}$

4A-1.5 $I_5 = \iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, $\quad V: \begin{cases} x^2+y^2 \le 2z, \\ 0 \le z \le 2. \end{cases}$

4A-1.6 $I_6 = \iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz$, $\quad V: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1.$

10.4 A - 2 Pentru integralele de mai jos să se descrie geometric domeniile de integrare.

4A-2.1 $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a} f(x,y,z)\,dz.$

4A-2.2 $\int_0^a dz \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax}} f(x,y,z)\,dy.$

10.4 A - 3 Să se calculeze integralele de mai jos prin trecerea în coordonate sferice.

4A-3.1 $I_1 = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,dx\,dy\,dz$, $\quad V: x^2+y^2+z^2 \le z.$

4A-3.2 $I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz.$

4A-3.3 $I_3 = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad V:\ x^2+y^2+z^2 \le R^2.$

10.4 A - 4 Să se calculeze integralele de mai jos prin trecerea în coordonate cilindrice.

4A-4.1 $I_1 = \iiint_V (x^2+y^2)^{1/2}\,dx\,dy\,dz, \qquad V: \begin{cases} x^2+y^2-2x \le 0, \\ y \ge 0,\ 0 \le z < 1. \end{cases}$

4A-4.2 $I_2 = \iiint_V (x^2+y^2)^{1/2}\,dx\,dy\,dz, \qquad V: \begin{cases} x^2+y^2 \le 2z, \\ x^2+y^2+z^2 \le 8. \end{cases}$

4A-4.3 $I_3 = \iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x^2+y^2-z)^3}}, \qquad V: \begin{cases} x^2+y^2 \ge z, \\ x^2+y^2 \le 1,\ z \ge 0. \end{cases}$

Răspunsuri - recomandări pentru rezolvare

4A-1.1 Domeniul de integrare este tetraedrul tridreptunghic, cu vârful unghiului triedru drept în origine, întâlnit şi în exemplul Ex.10.4-3 : el se poate nota ca şi acolo, $V = [O\,A\,B\,C]$ iar suprafeţele inferioară / superioară sunt cele din (10.2410) & (10.242), cu domeniul plan triunghiular $D = [O\,A\,B] \subset (x\,O\,y)$.

$$I_1 = \iiint_V (x+y)\,z\,dx\,dy\,dz = \iint_{[OAB]} (x+y)\left[\int_0^{1-x-y} z\,dz\right]dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)(1-x-y)^2\,dy = \ldots = \frac{1}{60}.$$

Cititorul este invitat să detalieze calculele care conduc la această valoare.

4A-1.2 Domeniul de integrare este un paralelipiped, deci intervalul de integrare după fiecare variabilă va avea limite constante. Mai mult decât atât, funcţia-integrand se poate rescrie (pe baza undei identităţi trigonometrice) ca o diferenţă de funcţii separabile, deci integrala va fi o diferenţă de produse de câte trei integrale simple.

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \iint_D (\cos x \cos y - \sin x \sin y)\, dx\, dy \cdot \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} z\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \left([\sin x]_0^{\pi/2} \cdot [\sin y]_{\pi}^{3\pi/2} - [\cos x]_0^{\pi/2} \cdot [\cos y]_{\pi}^{3\pi/2} \right) = \ldots = \ln 2.$$

Cititorul este invitat să detalieze calculele care conduc la această valoare.

$\boxed{\mathbf{4A-1.3}}$ Domeniul de integrare V este situat în interiorul sferei de rază a centrată în origine dar şi în interiorul sferei de aceeaşi rază, cu centrul deplasat în punctul $C(0,0,a)$. Aşadar, domeniul se poate scrie sub forma

$$V = B(O,a) \cap B(C,a). \tag{10.282}$$

În (10.282), $B(O,a)$ & $B(C,a)$ reprezintă bilele (închise) cu centrele în cele două puncte. Cele două sfere se intersectează pe cercul

$$(\Gamma) = \bar{S}(O,a) \cap \bar{S}(C,a) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2/4, \\ z = a/2. \end{cases} \tag{10.283}$$

Din (10,283) rezultă domeniul plan de integrare pentru integrala dublă,

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 3a^2/4\}. \tag{10.284}$$

Forma domeniului de integrare induce oportunitatea trecerii în coordonate cilindrice, cu formulele (10.268) - (10.269).

$$I_3 = \iiint_V z^2\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} z^2\, dz \right] dx\, dy. \tag{10.285}$$

În integrala interioară din (10.285), cele două suprafeţe sunt sfera cu centrul în C şi sfera cu centrul în origine, respectiv. Aşadar, această integrală este

$$J_3(x,y) = \int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z^2 dz = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3} - (a - \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,)^3\right].$$

(10.286)

Funcţia iraţională din ultimul membru al acestei expresii ar mai putea fi rearanjată prin amplificări cu expresii conjugate, dar se poate aplica – în acest moment – primul pas al *trecerii în coordonate cilindrice* adică trecerea de la (x,y) la (r,φ) ca în exemplul Ex.10.4-7, cu formula (10.268). Se obţine astfel o expresie în r a integralei din (10.286) :

$$J_3(r) = \int_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} z^2 dz = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(a^2-r^2)^3} - (a - \sqrt{(a^2-r^2}\,)^3\right]. \qquad (10.287)$$

(10.284) & (10.287) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \; I_3 = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}a/2}\left[\sqrt{(a^2-r^2)^3} - (a - \sqrt{a^2-r^2}\,)^3\right] r\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \qquad (10.288)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\sqrt{3}a/2}\left[\sqrt{(a^2-r^2)^3} - (a - \sqrt{a^2-r^2}\,)^3\right] r\,dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\sqrt{3}a/2}\left[(a^2-r^2)^{3/2} + (\sqrt{a^2-r^2} - a)^3\right] r\,dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\sqrt{3}a/2}\left[2(a^2-r^2)^{3/2} - 3(a^2-r^2)a + 3\sqrt{a^2-r^2}\,a^2 - a^3\right] r\,dr. \qquad (10.289)$$

În integrala după r din (10.288) a fost introdus jacobianul $(=r)$ din (10.269). Pentru calculul integralei din (2.289) este oportună aplicarea substituţiei

$$\boxed{a^2 - r^2 = u} \quad \Rightarrow \quad -2r\,dr = du \;\; \& \;\; \begin{cases} r = 0 \;\Rightarrow\; u = a^2, \\ r = \sqrt{3}\,a/2 \;\Rightarrow\; u = a^2/4. \end{cases} \qquad (10.290)$$

(10.289) & (10.290) $\Rightarrow$

$$I_3 = \dots = \frac{\pi}{3} \int_{a^2/4}^{a^2} \left[u^{3/2} + (u^{3/2} - a)^3) \right] du = \dots \tag{10.291}$$

$$\dots = \frac{\pi}{3} \left[\frac{4}{5} \frac{31}{32} a^5 - \frac{3}{2} \frac{15}{16} a^5 + \frac{14}{8} a^5 - \frac{3}{4} a^5 \right] = \dots = \frac{59 \pi a^5}{480}. \tag{10.292}$$

Cititorul este invitat să detalieze calculele care au condus la ecuaţiile celor două suprafeţe din (10.286), la expresia integralelor din (10.289) & (10.291) precum şi la valoarea din (10.292).

4 A - 1.4 Ca şi la integrala precedentă, domeniul este inclus în interiorul sferei de rază a centrată în origine dar şi în interiorul conului de rotaţie cu vârful în origine, având ca axă de rotaţie (semi)axa (Ox) iar generatoarele rectilinii la unghi de $45°$ faţă de această axă şi faţă de planul de coordonate (yOz). Aşadar, domeniul se poate caracteriza sub forma

$$V: \ V = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq x^2 \leq a^2 - y^2 - z^2, \ x \geq 0\}. \tag{10.293}$$

Având în vedere această caracterizare analitică, este natural ca integrala interioară să se calculeze după x, rezultatul fiind funcţia-integrand pentru o integrală dublă după y, z. Aceasta din urmă se va calcula prin trecerea în coordonate polare, $(y, z) \rightarrow (r, \varphi)$.

Cititorul este invitat să efectueze toate calculele (urmând procedurile din exemple şi exerciţii anterioare), care vor conduce la valoarea

$$I_4 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \dots = \frac{1}{5} \pi a^5 (2 - \sqrt{2}).$$

4 A - 1.5 Domeniul V are ca frontieră paraboloidul de rotaţie cu vârful în origine şi (Oz) ca axă de rotaţie, limitat superior de planul orizontal $(z = 2)$. Se poate proceda în aceeaşi manieră ca la integralele precedente, însă limitele constante fiind cele pentru variabila z, este normal ca integrala interioară să fie cea în raport cu această variabilă.

$$I_5(x, y) = \int_{(x^2 + y^2)/2}^{2} dz = 2 - (x^2 + y^2)/2. \tag{10.294}$$

Integrala (exterioară) dublă va fi

$$I_5 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)[2 - (x^2 + y^2)/2]\,dx\,dy, \tag{10.295}$$

domeniul plan de integrare fiind discul de rază 2 centrat în origine, $D: x^2 + y^2 \le 4$. Prin trecerea în coordonate polare, în (10.295), se va ajunge la

$$I_5 = \int_0^2 r^2[2 - r^2/2]\,r\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \ldots = \frac{16}{3}\pi. \tag{10.296}$$

Cititorul este invitat să detalieze toate calculele, care conduc la valoarea din (10.296).

4A-1.6 Domeniul de integrare este *elipsoidul* de semiaxe a, b, c cu originea ca centru de simetrie şi $(Ox), (Oy), (Oz)$ ca axe de simetrie. Pentru un astfel de domeniu, este oportună trecerea în ceea ce am putea numi *coordonate elipsoidale*, o generalizare a coordonatelor sferice, cele din (10.258).

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} \rho = d(O,N)/d(O,M), & \rho \in [0,1], \\ \theta = \sphericalangle(\mathbf{k},(OM)), & \theta \in [0,\pi], \\ \varphi = \sphericalangle(\mathbf{i},(OM')), & \varphi \in [0,2\pi). \end{cases} \tag{10.297}$$

În (10.297), $M \in (E)$ este punctul curent de pe suprafaţa elipsoidului (care se obţin din expresiile coordonatelor (x,y,z) pentru $\rho = 1$), iar N este un punct curent pe raza vectoare a lui M. Această primă coordonată elipsoidală este tocmai raportul celor două distanţe. Celelalte două coordonate unghiulare au exact interpretarea de la coordonatele sferice, Jacobianul transformării (10.297) este

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \ldots = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\rho\cos\theta\cos\varphi & -a\rho\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta\sin\varphi & -c\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= abc\rho^2 \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \ldots = abc\rho^2\sin\theta. \tag{10.298}$$

Cu (10.297) & (10.298), integrala din enunţ devine

$$I_6 = \iiint\limits_V x^2\, dx\, dy\, dz = a^3 b c \int_0^1 \rho^4\, d\rho \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi . \tag{10.299}$$

Integrala din (10.299) este un produs de trei integrale Riemann simple, care se pot calcula fără dificultate, ceea ce revine ca exerciţiu pentru cititorii interesaţi.

Se va ajunge la valoarea

$$I_6 = \pi \frac{a^3 b c}{15} .$$

10.4 A - 2 Domeniile se vor putea caracteriza interpretând cele trei duble inegalităţi aferente intervalelor de integrare după fiecare variabilă.

4 A - 2.1

$$-a \le x \le a \;\&\; -\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2} \;\&\; \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 \le a^2 \;\&\; z^2 \ge x^2 + y^2 \;\&\; z \le a . \tag{10.300}$$

Din inegalităţile (10.300) rezultă că domeniul de integrare este interiorul conului circular drept limitat superior de planul orizontal $(z = a)$. Acest domeniu se proiectează, în planul de coordonate $(x O y)$, pe discul centrat în origine de rază $R = a$.

4 A - 2.2

$$0 \le x \le a \;\&\; 0 \le y \le \sqrt{a x} \;\&\; 0 \le z \le a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V \subset [0,1] \times [0, +\infty) \times [0,1] . \tag{10.301}$$

Domeniul din membrul drept al incluziunii (10.301) este o prismă cu secţiune pătrată, semi-infinită spre $+\infty$, cu muchiile şi planele frontieră paralele cu axa $(O y)$. Dar domeniul este mărginit întrucât este limitat spre stânga de planul de coordonate $(x O z)$ iar spre dreapta de suprafaţa cilindrică, în sens larg,

$$y^2 = a x, \; z \in \mathbb{R} . \tag{10.302}$$

Această suprafaţă din (10.302) este o *suprafaţă cuadrică*. De fapt, a treia variabilă z, ca şi variabila x de altfel, nu parcurg toată axa reală ci doar intervalul unitar $[0,1]$. Deci domeniul de integrare V este inclus în paralelipipedul $[0,1] \times [0, \sqrt{a}\,] \times [0,1]$. El se proiectează, în primul cadran al planului $(x O y)$, pe un triunghi curbiliniu limitat de cele două axe de coordonate şi de arcul de parabolă ce uneşte originea cu punctul $A(1, \sqrt{a}\,)$.

Cititorii interesaţi vor putea încerca reprezentarea grafică a acestor două domenii.

10.4 A - 3

4A-3.1 Domeniul este sfera de rază $R = 1/2$ cu centrul în $C(0,0,1/2)$. Deci ar putea fi oportună schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi\,, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi\,, \\ z - 1/2 = \rho\cos\theta \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} \rho \in [0\,,1/2]\,, \\ \theta \in [0\,,\pi]\,, \\ \varphi \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

dar aceasta ar complica transformata în coordonate sferice a funcţiei-integrand. Alternativ, se poate aplica trecerea în coordonate sferice cu centrul în origine, cea din (10.268), dar în acest caz intervalul pentru prima prima coordonată sferică ρ nu va mai avea ambele extremităţi constante ; cea superioară va depinde de unghiul θ :

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi\,, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi\,, \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} \rho \in [0\,,\cos\theta]\,, \\ \theta \in [0\,,\pi/2]\,, \\ \varphi \in [0,2\pi]. \end{cases} \tag{10.303}$$

Corectitudinea intervalelor pentru parametrii ρ & θ va putea fi constatată de cititor dacă acesta va desena un cerc de secţiune prin sfera $S(C\,,1/2)$ cu un plan vertical ce conţine axa (Oz).

(10.303) & (10.269) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ I_1 = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\cos\theta} \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \ldots = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{5}\left[\cos^5\theta\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{\pi}{10}\,. \tag{10.304}$$

Cititorul este invitat să detalieze toate calculele, care conduc la valoarea din (10.304).

4A-3.2 Domeniul poate fi determinat (sau identificat din p.d.v. geometric) într-o manieră similară cu cea folosită pentru exerciţiul **4A-2.1** : domeniul plan D este primul sfert al discului unitar de rază 1 centrat în origine (din primul cadran), iar inegalitatea pentru variabila z este

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2} \ \Rightarrow\ x^2+y^2 \le z^2 \le 2-x^2-y^2\,. \tag{10.305}$$

Deci V este solidul cuprins între conul circular drept care a mai fost întâlnit anterior şi sfera de rază $\sqrt{2}$ centrată în origine, intersectat cu primul octant al spaţiului. Cele două suprafeţe se întâlnesc pe cercul

$$(\Gamma) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases} \tag{10.306}$$

Trecând în coordonate sferice (v. (10.258-260)),

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin\theta, \ \sqrt{2 - x^2 - y^2} = \sqrt{2 - \rho^2 \sin^2\theta}. \tag{10.307}$$

(10.306) & (10.307) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_{\rho\sin\theta}^{\sqrt{2-\rho^2\sin^2\theta}} \rho^3 \, d\rho. \tag{10.308}$$

Această integrală din (10.308) nu este una imediată. Integrala după φ este independentă de celelalte două şi are valoarea $\pi/2$. În raport cu celelalte două variabile, se va calcula întâi integrala după ρ cu valoarea depinzând de θ, iar rezultatul se va integra după θ, împreună cu cei doi factori care apar sub integrala mediană din (10.308).

Dar, deşi pentru această integrală se recomandă trecerea în coordonate sferice (în culegerea [S. Chiriţă, 1989, pag. 271], natura funcţiei-integrand şi forma domeniului de integrare face mai oportună utilizarea *coordonatelor cilindrice*, ca în exemplul Ex.10.4-7. Se va ajunge la o integrală factorizată şi anume

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^1 \left[\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 \, dz \right] r \, dr = \ldots = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2} - 1). \tag{10.309}$$

Cititorul este invitat să detalieze toate calculele, care conduc la valoarea din (10.309), eventual şi cu utilizarea coordonatelor sferice. .

4A-3.3 Aceasta este o integrală mult mai simplă şi perfect adequată pentru utilizarea coordonatelor sferice (ρ, θ, φ). Domeniul este sfera de rază R.

$$I_3 = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \ldots = \pi R^4.$$

Se recomandă verificarea acestui rezultat prin detalierea calculelor.

10.4 A - 4 Se vor putea aplica formulele (10.268) - (10.269).

4 A - 4.1 Domeniul V este un semicilindru având ca frontieră suprafaţa cilindrică generată de semicercul $(\Gamma): (x-1)^2 + y^2 = 1, \; y \geq 0$. Pentru coordonatele V se pot transforma în coordonatele polare (r, φ) cu centrul fie în originea $O(0,0)$, fie în centrul (semi)cercului $C(1,0)$. În prima variantă funcţia-integrand în (r, φ) va fi mai simplă, $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r$, iar în a doua descrierea domeniului plan D este mai simplă. Cu formulele menţionate (10.268) - (10.269),

$$I_1 = \iiint_V (x^2 + y^2)^{1/2} dx\,dy\,dz = \iint_D r^2\,dr\,d\varphi \cdot \int_0^1 dz = \iint_D r^2\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = \ldots = \frac{16}{9}. \tag{10.310}$$

Cititorul este invitat să detalieze toate calculele care conduc la valoarea din (10.310), justificând şi limitele celor două integrale simple din primul membru.

4 A - 4.2 Domeniul de integrare este situat între un paraboloid de rotaţie (ca suprafaţă inferioară) şi sfera centrată în origine, de rază $2\sqrt{2}$ (ca suprafaţă superioară). Domeniul plan D al integralei duble este discul de rază $R = 2$ centrat în origine, iar cele două suprafeţe se întâlnesc pe cercul

$$(\Gamma): \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

$$I_2 = \iiint_V (x^2 + y^2)^{1/2} dx\,dy\,dz = \iint_D (x^2 + y^2)^{1/2} dx\,dy \int_{(x^2+y^2)/2}^{(8-x^2-y^2)^{1/2}} dz. \tag{10.311}$$

Evident, integrala din (10.311) se va calcula după trecerea în coordonate polare, cu formulele menţionate în enunţ. Se va obţine

$$I_2 = \iint_D r^2\,dr\,d\varphi \int_{r^2/2}^{(8-r^2)^{1/2}} dz = \int_0^2 r^2[(8-r^2)^{1/2} - r^2/2]\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \int_0^2 r^2[(8-r^2)^{1/2} - r^2/2]\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\left[\int_0^2 r^2(8-r^2)^{1/2}dr - \int_0^2 r^4/2]\,dr\right] \underset{\text{not}}{=}$$

$$= 2\pi\left[J_2 - K_2\right]. \tag{10.312}$$

Integrala J_2 este iraţională şi binomă dar ea poate fi mai facil calculată aplicând substituţia trigonometrică

$$r = 2\sqrt{2}\sin t \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; J_2 = 64\int_0^{\pi/4} \sin^2 t\cos^t dt = \ldots = 2\pi. \tag{10.313}$$

Integrala K_2 este mult mai simplă :

$$K_2 = \frac{1}{10}\left[r^5\right]_0^2 = \frac{16}{5}. \tag{10.314}$$

$$(10.312\text{-}314) \;\Rightarrow\; I_2 = \frac{4\pi}{5}(5\pi - 8). \tag{10.315}$$

Cititorul este invitat să detalieze toate calculele care conduc la valorile din (10.313) & (10.315).

4A-4.3 Domeniul de integrare este un *corp de rotaţie*, situat în interiorul cilindrului de rotaţie de rază 1 cu (Oz) ca axă, limitat inferior de discul de rază 1 şi limitat superior de paraboloidul de rotaţie

$$(P_{\text{rot}}) : \; z = x^2 + y^2. \tag{10.316}$$

Prin trecerea în coordonate cilindrice, integrala se poate scrie sub forma

$$I_3 = \iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2 - z)^3}} = \iint_D r\,dr\,d\varphi \int_0^{r^2} \frac{1}{(1 + r^2 - z)^{3/2}}\,dz. \tag{10.317}$$

În integrala iraţională din (10.317) se poate aplica substituţia

$$1 + r^2 - z = u^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} dz = -2u\,du, \\ (1 + r^2 - z)^{-3/2} = 1/u^3 \end{cases} \;\&\; \begin{cases} z = 0 \;\Rightarrow\; u = \sqrt{r^2 + 1}, \\ z = r^2 \;\Rightarrow\; u = 1. \end{cases} \tag{10.318}$$

$$(10.318) \quad \Rightarrow \quad \int_0^{r^2} \frac{dz}{(1+r^2-z)^{3/2}} = 2\int_1^{\sqrt{r^2+1}} \frac{du}{u^2} = \ldots = 2\left(1 - 1/\sqrt{r^2+1}\right). \qquad (10.319)$$

(10.317) & (10.319) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \int_0^1 \left[2r - \frac{2r}{\sqrt{r^2+1}}\right] dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi\left[r^2 - 2\sqrt{r^2+1}\right]_0^1 = 2\pi\left(3 - 2\sqrt{2}\right). \qquad (10.320)$$

Cititorul este invitat să detalieze toate calculele care conduc la expresia (10.317) şi la valorile din (10.319) & (10.320).