Algebră liniară & Geometrie - II Iunie 2009 A

A.1 Să se determine (valorile lui) $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, şi $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ şi $\mathbf{v}_3 = \lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ să fie $= 5$. Cu una din aceste valori să se determine şi dublele produse vectoriale $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ şi $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3)$.

A.2 Ecuația generală a planului, cazuri particulare. Pozițiile relative a două plane în spațiu, unghiul între două plane.

Aplicație. Să se determine (prin cosinus) unghiul dintre planele

$(p_1) : 4x + 2y - 3z - 1 = 0$ şi $(p_2) : x - 4y + 2z + 1 = 0.$

Să se găsească punctul în care dreapta lor comună intersectează planul (xOz). Să se scrie ecuația planului (p_3) care *este ortogonal* pe dreapta $(d) = (p_1) \cap (p_2)$ şi care trece prin punctul $M_0(1,0,2)$.

A.3 Definiția generală a conicelor în plan (prin F, (Δ), ε); ecuațiile canonice ale elipsei şi hiperbolei (cu $.\varepsilon \neq 1$).

Aplicație. Dată fiind hiperbola $(H) : 16x^2 - y^2 - 48 = 0,$ să se determine coordonatele focarelor ei, să se scrie ecuațiile celor două directoare şi ecuațiile asimptotelor.

A.4 Să se studieze (în funcție de $\lambda \in \mathbf{R}$) natura conicelor din familia

$$(C_\lambda) : x^2 + 2xy + y^2 + 2\lambda x + 2y - 3 = 0.$$

Pentru cazul când conica este degenerată să se reprezinte grafic aceasta, după rescrierea ecuației sale (factorizate) în reperul inițial $(O; x, y)$.

Răspunsuri - indicații de rezolvare.

A.1 Se calculează produsul mixt

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \det\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2 + 6\lambda - \lambda + 8 = 5\lambda + 10.$$

Condiția din enunț conduce la ecuația

$$|5\lambda + 10| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda + 10 = 5 \\ -5\lambda - 10 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}.$$

Dacă se alege prima valoare, vectorii devin $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, şi $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ şi $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ Cele două duble produse vectoriale se pot calcula (cel mai uşor) cu formulele scrise ca determinanți (simbolici) de ordinul 2 :

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} = \ldots = -8\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 = -11\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 16\mathbf{k}.$$

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{vmatrix} = \ldots = -3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{k}.$$

A.2 Ecuația generală a unui plan (p) în spațiul 3D este $(p) : Ax + By + Cz + D = 0$ (1). Ea se obține, în primul caz $\boxed{1}$ prezentat la curs, din condiția ca $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$ unde $\mathbf{n}$ (A, B, C) este o direcție normală la plan iar $M_0(x_0, z_0, y_0)$ este un punct dat. Diverse cazuri privind ecuația (1) corespund unor poziții particulare ale planului (p) în raport cu axele de coordonate, repectiv planele de coordonate ale reperului $(O; x, y, z)$. De exemplu, $A = 0 \Rightarrow \mathbf{n}\,(0, B, C) \parallel (yOz) \Rightarrow (p) \parallel (Ox)$; $B = C = 0 \Rightarrow \mathbf{n}$ $= A\mathbf{i} \Rightarrow (p) \parallel (yOz)$.

Dacă cele două plane sunt caracterizate prin ecuațiile lor generale,

$$(p_i)\ A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0\ ,\ i = \overline{1,2} \Rightarrow \mathbf{n}_i\,(A_i, B_i, C_i) \perp (p_i), \tag{2}$$

cele două plane admit <u>trei</u> poziții posibile care pot fi caracterizate vectorial, apoi şi analitic folosind coeficienții A_i, B_i, C_i şi termenii liberi D_i. Planele coincid (sau sunt identice) dacă şi numai dacă cele două ecuații liniare din (2) *sunt echivalente*.

$$(i)\ \ (p_1) \equiv (p_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{A_2}; \tag{3}$$

$$(ii)\ \ (p_1) \parallel (p_2) \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{A_2} \tag{4}$$

$$(iii)\ \ (p_1) \nparallel (p_2) \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ sau } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}\ \ldots \tag{5}$$

Cele trei caracterizări de mai sus, prin rapoarte, pot fi exprimate echivalent (şi mai simplu) folosind două matrici şi rangurile lor :

$$S = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

$(i) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow \left[\text{rang } T\right] = 1$; $\quad (3')$

$(ii) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow \left[\text{rang } S\right] = 1 \ \& \left[\text{rang } T\right] = 2$; ; $\quad (4')$

$(iii) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow \left[\text{rang } S\right] = 2 \quad (5')$

Aplicație. Ca o consecință a egalității unghiurilor cu laturi (respectiv) perpendiculare, unghiul θ dintre planele

$$(p_1) : 4x + 2y - 3z - 1 = 0 \text{ şi } (p_2) : x - 4y + 2z + 1 = 0.$$

este egal cu unghiul dintre normalele acestor plane, $\mathbf{n}_1(4,2,-3)$ şi $\mathbf{n}_2(1,-4,2)$ care se determină prin cosinus :

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{n_1 \, n_2} = \frac{-10}{\sqrt{29}\,\sqrt{21}} = \frac{-10}{\sqrt{609}}.$$

Planul (p_3), care *este ortogonal* pe dreapta $(d) = (p_1) \cap (p_2)$, va avea ca normală exact vectorul director al acestei drepte care este dat de

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -8\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 18\mathbf{k} = -(8\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 18\mathbf{k}), \quad (7)$$

Cu acest vector normal din (7), cel dintre paranteze), se va putea scrie ecuația planului (p_3) după folosind şi coordonatele lui $M_0(1,0,2)$:

$$(p_3) : 8(x-1) + 11y + 18(z-2) = 0 \Leftrightarrow 8x + 11y + 18z - 44 = 0.$$

A.3 Definiția generală a conicelor în plan (prin F, (Δ), ε) este

$$(C) : \frac{d(M,F)}{d(M,(\Delta))} = \varepsilon \quad (1)$$

unde F este un punct dat numit **focar**, (Δ) este o dreaptă dată numită (dreapta) **directoare** iar $\varepsilon \geq 0$ este **excentricitatea** conicei.; în plus, $F \notin (\Delta)$.

Printr.o alegere adecvată a reperului $(O; x, y)$ în plan, din definiția (1) se poate ajunge la o ecuație analitică a conicei de cea mai simplă formă posibilă, care se numeste **ecuație canonică**. Natura conicelor definite prin (1) depinde de poziția constantei ε față de 1. Pentru $\varepsilon \neq 1$ conica poate fi o *elipsă* sau o *hiperbolă*, având un centru de simetrie. Pentru $\varepsilon = 1$ conica va fi o *parabolă*, fără centru de simetrie. .

Pentru $\boxed{\varepsilon \neq 1}$ reperul $(O; x, y)$ se alege astfel încât (Ox) este perpendiculara prin F pe (Δ). Axa ordonatelor $(O\,x)$ va fi determinată odată ce poziția originii O pe axa (Ox) va fi cunoscută. Aceasta se determină prin condițiile asupra coordonatelor focarului şi ecuației directorae:

$$F(a\varepsilon, 0) \ \& \ (\Delta) : x = a/\varepsilon. \quad (2)$$

În (2), $a > 0$ este un număr a cărui semnificație geometrică va rezulta ulterior. Cu elementele din (2) şi punctul curent $M(x,y) \in (C)$, distanțele care intervin în (1) sunt

$$d(M,F) = \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2} \quad \text{şi} \quad d(M,(\Delta)) = |x - a/\varepsilon|. \tag{3}$$

Introducând distanțele din (3) în (1), ridicând ecuația obținută la pătrat şi efectuând calculele necesare, se ajunge la ecuația

$$(C) : \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-\varepsilon^2)a^2} - 1 = 0}. \tag{4}$$

Înegalitatea $\varepsilon \neq 1$ se explicitează în cele două inegalități posibile : $(i)\ 0 \leq \varepsilon < 1$ şi $(ii)\ \varepsilon > 1$. Primul caz este cel al **elipsei**, iar ecuația (4) se rescrie notând $(1-\varepsilon^2)a^2 = b^2$:

$$(E) : \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0}. \tag{5}$$

Cazul $(ii)\ \varepsilon > 1$ corespunde **hiperbolei** ; pentru a avea ambii numitori pozitivi în (4), se amplifică a doua fracție cu -1 şi se obține ecuația

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(\varepsilon^2 - 1)a^2} - 1 = 0. \tag{6}$$

Notând $(\varepsilon^2 - 1)a^2 = b^2$ se obține ecuația canonică a hiperbolei:

$$(H) : \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0}. \tag{7}$$

Notând cu $F(x,y)$ membrul stâng al ecuației (5), respectiv (7), se constată cu uşurință că atât elipsa cât şi hiperbola sunt curbe <u>simetrice</u> față de axele de coordonate (Ox) şi (Oy) precum şi în raport cu originea O, întrucât $F(-x,y) = F(x,-y) = F(-x,-y) = F(x,y)$. <u>Intersecțiile</u> elipsei cu axele de coordonate sunt

$$(E) \cap (Ox) = \{A(a,0), A'(-a,0)\} \ \ \& \ \ (E) \cap (Oy) = \{B(0,b), B'(0,-b)\} .$$

Punctele $A(a,0)$ şi $A'(-a,0)$ se numesc <u>vârfurile</u> elipsei iar distanța $2a$ dintre ele este <u>axa mare</u>, în timp ce $d(B,B') = 2b$ este <u>axa mică</u>. Notând $a\varepsilon = c$, punctele $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$ sunt cele două focare ale elipsei,. cu distanța focală $2c$. Ecuațiile (4) şi (5) se pot obține şi înlocuind focarul F, respectiv directoarea (Δ) cu simetricele lor, $F'(-a\varepsilon,0)$ şi $(\Delta') : x = -a/\varepsilon$.

Rescriind sub forme echivalente ecuația (5) a elipsei se constată că

$$x^2 \leq a^2 \Rightarrow |x| \leq a \Rightarrow x \in [-a,a] \ \ \& \ \ y^2 \leq b^2 \Rightarrow |y| \leq b \Rightarrow y \in [-b,b] ;$$

Aşadar, elipsa este o curbă <u>mărginită</u>, fiind înscrisă în dreptunghiul $[-a,a] \times [-b,b]$;

Intersecțiile hiperbolei cu axele de coordonate sunt numai

$(H) \cap (Ox) = \{A(a,0), A'(-a,0)\}$.

Spre deosebire de elipsă, hiperbola este o curbă <u>nemărginită</u> întrucât

$$(7) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \Rightarrow [x \to \pm\infty \Leftrightarrow x \to \pm\infty].$$

Se poate demonstra (cu mijloacele analizei matematice) că hiperbola admite două <u>asimptote</u> <u>oblice</u>, dreptele simetrice (care trec prin origine) de ecuații

$$(\mathrm{As})_{1,2} : y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{8}$$

Rescriind ecuația (7), cu al doilea termen trecut în membrul drept, rezultă

$x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| \geq a \Rightarrow x \in (-\infty - a] \cup [a, -\infty) \Rightarrow (H)$ nu are niciun punct în banda verticală $(-a,a) \times \mathbb{R}$.

<u>Aplicație</u>. Dată fiind hiperbola $(H) : 16x^2 - y^2 - 48 = 0,$ coordonatele focarelor ei se obțin rescriind ecuația sub forma echivalentă (prin împărțire la 48),

$$(H) : \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{48} - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \ \& \ b^2 = 48 \Rightarrow a = \sqrt{3},\ b = 4\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\varepsilon^2 - 1)3 & = & 48 \\ (\mathrm{As})_{1,2} : y & = & \pm 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon^2 - 1 & = & 16 \\ \varepsilon^2 & = & 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon & = & \sqrt{17} \\ c & = & \sqrt{51} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(\sqrt{51}, 0) \\ F'(\sqrt{51}, 0) \end{cases}.$$

Ecuațiile directoarelor vor fi

$$(\Delta) : x = \sqrt{3/17} \ \& \ (\Delta') : x = -\sqrt{3/17}.$$

A.4 Se cere să se studieze (în funcție de $\lambda \in \mathbb{R}$) natura conicelor din familia

$$(C_\lambda) : x^2 + 2xy + y^2 + 2\lambda x + 2y - 3 = 0. \tag{1}$$

Matricea conicelor reprezentate prin ecuația (1) este

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & -3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} \delta & = & 0, & (3) \\ I & = & 2, & (4) \\ \Delta(\lambda) & = & -(\lambda^2 - 2\lambda + 1). & (5) \end{cases}$$

Din (3) rezultă că <u>toate</u> conicele din familie sunt **de tip parabolic**, deci nu au un centru unic de simetrie. Întrucât $(5) \Rightarrow \Delta(\lambda) = -(\lambda - 1)^2$ urmează că aceste conice sunt nedegerate $\Leftrightarrow \lambda \neq 1$. Pentru $\lambda = 1$ se obține o singură conică, **degenerată**. Ea ar putea să se reducă la o dreapta sau la două drepte paralele. Cu $\lambda = 1$ în ecuația (1) se obține ecuația

$$(C_1) : x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0. \tag{6}$$

$$(6) \Leftrightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) - 3 = 0. \tag{7}$$

Notând $x + y = u$, ecuația (7) devine

$$u^2 + 2u - 3 = 0 \Rightarrow u_1 = 1 \ \ \& \ \ u_2 = -3.$$

Aşadar, ecuația $(6) \Leftrightarrow (7)$ se poate rescrie sub forma

$$(x+y-1)(x+y+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (C_1) = (d_1) \cup (d_2) \text{ cu } \begin{cases} (d_1) : \ x + y - 1 = 0, \\ (d_2) : \ x + y + 3 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Ecuațiile liniare din (8) reprezintă două drepte paralele între ele şi paralele cu bisectoarea a doua, care taie axa verticală (Oy) în punctele $M_1(0,1)$ şi $M_2(0,-3)$.

Cazul nedegerat. Pentru $\lambda \neq 1$, orice conică din familia (1) este o **parabolă**. Ecuația (1) poate fi redusă efectuând – în primul rând – o rotație a reperului inițial,

$$(\mathrm{Ro}_\theta) : (O; x, y) \to (O; x', y') \text{ cu } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Matricea P din (9) constă din versorii proprii $\mathbf{u}_1$ & $\mathbf{u}_2$ ai matricei $\mathbf{a}$. Aceştia corespund valorilor proprii $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = I = 2$, respectiv. Ei se determină ca soluții a două sisteme liniare omogene simple, de tip 2×2. având matricele :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \tag{10}$$

$$\mathbf{a} - 2I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{11}$$

$$(10) \ \&(11) \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Matricea P din (12) furnizează atât *direcțiile noilor axe*, după rotație, cât şi transformarea efectivă de coordonate din (9) ; direcțiile reperului rotit rezultă şi din vectorii proprii U_1 & U_2 găsiți în (10) & (11) :

$$(10) \Rightarrow \mathbf{i}' \parallel \mathbf{i} - \mathbf{j}, \ (11) \Rightarrow \mathbf{j}' \parallel \mathbf{i} + \mathbf{j}\,; \tag{13}$$

Aşadar, unghiul de rotație este $\theta = -\pi/4$.

$$(12) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x' + y' \\ -x' + y' \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Înlocuind coordonatele inițiale din (14) în ecuația (1), folosind şi gruparea primilor 3 termeni ca pătrat, ca în ecuțaia (6), găsim

$$(P_\lambda) : 2y'^2 + \sqrt{2}\,\lambda(x' + y') + \sqrt{2}\,(x' - y') - 3 = 0. \quad (15)$$

Ecuația (15) se împarte prin 2 şi se grupează termenii asemenea ; se obține astfel

$$(P_\lambda) : y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda(x' + y') + \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$. \qquad \Rightarrow y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda - 1)x' + \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda + 1)y' - \frac{3}{2} = 0 \quad (16)$$

În ecuația (16) se grupează mai întâi termenii în y' formând un pătrat perfect, ca în metoda **Gauss** de la formele pătratice :

$$(16) \Rightarrow y'^2 + 2y'\frac{\lambda + 1}{2\sqrt{2}} + \left(\frac{\lambda + 1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda - 1)x' - \left(\frac{3}{2} + \frac{(\lambda + 1)^2}{8}\right) = 0. \quad (17)$$

Se poate continua cu calculele în această ecuație (17) spre a ajunge la ecuația canonică a unei parabole care depinde de parametrul λ Dar este cazul să particularizăm ecuația luând, pentru $\lambda,$.o valoare diferită de 1 : de exemplu, $\boxed{\lambda = 2}$. Această valoare, introdusă în (1), conduce la ecuația (şi curba) particulară

$$(C_2) : x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0. \quad (18)$$

Ecuația (obținută după rotație) (17) devine

$$(C_2) : y'^2 + 2y'\frac{3}{2\sqrt{2}} + \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y' + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{21}{8} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y' + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' - \frac{21\sqrt{2}}{8}\right) = 0 \quad (19)$$

Funcțiile liniare dintre cele două perechi de paranteze ce intervin în (19) oferă exact translația necesară spre a transforma această ecuația în ecuația canonică a parabolei $(C_2) = (P)$:

$$\left(\mathrm{Tr}_{\overrightarrow{OO'}}\right) : \begin{cases} X = x' - \dfrac{21\sqrt{2}}{8}, \\ Y = y' + \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \end{cases}. \quad (20)$$

$$(19)\ \&\ (20) \Rightarrow (C_2) = (P): \boxed{Y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} X = 0 \Leftrightarrow Y^2 = -\frac{2}{2\sqrt{2}} X}. \qquad (21)$$

Studiul complet al unei conice implică şi schițarea (desenarea) graficului acesteia în reperul inițial $(O; x, y)$. Pentru aceasta mai sunt necesare coordonatele vârfului O' al lui (P). Ele se pot obține intersectând parabola de ecuație (18) cu axa sa de simetrie care - în general - are ecuația

$$I a_{11} x + I a_{12} y + a_{11} a_{10} + a_{12} a_{20} = 0. \qquad (22)$$

În cazul particular al parabolei caracterizate prin ecuația (18), având matricea şi invariații

$$A(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \ (2') \Rightarrow \begin{cases} \delta = 0, & (23) \\ I = 2, & (24) \\ \Delta(2) = -1, & (25) \end{cases},$$

ecuația (22) devine

$$2x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow x + y + 3/2 = 0. \qquad (26)$$

$$(26) \Rightarrow x + y = -3/2 \underset{(18)}{\Rightarrow} (-3/2)^2 + 4x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 2y - 3/4 = 0 \Rightarrow 2x + y - 3/8 = 0; \qquad (27)$$

$$(26)\ \&\ (27) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = -3, \\ 2x + y = 3/8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15/8, \\ y = -27/8. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O'(15/8, -27/8) \qquad (28)$$

este vârful parabolei, fiind originea ultimului reper $(O'; X, Y)$ obținut din reperul inițial prin rotația (14) şi apoi translația (20). În acest reper,e cuația canpnică a parabolei este (21). Cea de a doua formă a ei, comparată cu ecuația canonică generală $Y^2 = 2pX$, ne oferă parametrul parabolei care este $p = -\sqrt{2}/2$. În acest moment se poate face o mică verificare cu formula care leagă invariații din I şi Δ de acest parametru p :

$$p^2 = -\frac{\Delta}{I^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow p = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

valoare ce este compatibilă cu cea găsită în urma rotației şi translației. Faptul că $p = -1/2\sqrt{2} < 0$ are drept consecință faptul că parabola va fi situată în semiplanul $(X \leq 0)$ al reperului final.

Notă. Celor interesați li se recomandă să deseneze graficul acestei parabole, ca şi pe cel al hiperbolei de la Aplicația **A.3** , precum si configurația celor trei plane $(p_1), (p_2), (p_3)$ de la Aplicația la **A.2** .Programul ***SWP5.0*** (sau ***SciWord***), folosit la redactarea acestor **Răspunsuri şi indicații de rezolvare**, face mai dificilă elaborarea si inserarea de figuri.

Revenind la graficul parabolei din (18), se va desena reperul $(O; x, y)$. apoi se va plasa originea ultimului reper O' cu coordonatele din (28), calculate aproximativ : $O'(1.875, -3.375)$. În acest punct se vor plasa vectorii directori ai celor două axe de coordonate, $(O'X) \parallel \mathbf{i} - \mathbf{j}$ şi $(O'Y) \parallel \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Aşadar, vârful parabolei se află în cadranul IV iar parabola va avea deschiderea în direcția **NW**, a vectorului $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Se poate obține un grafic mai exact dacă se determină punctele de intersecție ale parabolei (P) cu cele două axe ale reperului inițial $(O; x, y)$, (Ox) şi respectiv (Oy) :

$$(P) \cap (Ox) : \ (18)\Big|_{y=0} \Rightarrow x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 - \sqrt{7},\ x_2 = -2 + \sqrt{7}\ ;$$

$$(P) \cap (Oy) : \ (18)\Big|_{x=0} \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = -1 - 2 = -3,,\ y_2 = -1 + 2 = 1\ ,$$

Aşadar, parabola trece prin punctele $A_1(-2 - \sqrt{7}, 0)$ & $A_1(-2 + \sqrt{7}, 0) \in (Ox)$ şi respectiv $B_1(0, -3)$ & $B_2(0, 1) \in (Oy)$.

Am prezentat în detaliu studiul unei familii de parabole, cu cazul degenerat şi apoi cu cel nedegerat, inclusiv unul particular, întrucât studiul conicelor de acest tip este ceva mai laborios decât cel al conicelor de tip eliptic şi de tip hiperbolic.

Răspunsuri - indicații de rezolvare.

B.1 Produsul mixt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ se defineşte în două moduri care se vor dovedi a fi echivalente, anume

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad \text{sau} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \tag{1}$$

Proprietățile produsului mixt se grupează în : (i) cazuri de ***anulare***, (ii) proprietăți de ***liniaritate***, (iii) ***interpretarea geometrică***, (iv) ***comportarea la permutări si inversiuni*** de factori. .

$$(i) \ \ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{0} \ \text{ sau } \ \mathbf{b} = \mathbf{0} \ \text{ sau } \ \mathbf{c} = \mathbf{0}\text{ , sau} \\ \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}\text{ , sau} \\ \mathbf{a} \perp (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel (p)_{\mathbf{b},\mathbf{c}}. \end{cases} \tag{2}$$

Aceste cazuri de anulare rezultă imediat din proprietățile de anulare ale produsul scalar, respectiv ale celui vectorial ; ultimul caz din (2) urmează – de asemenea – din anularea produsului scalar de vectori ortogonali, iar ultima caracterizare înseamnă că vectorul $\mathbf{a}$ este paralel cu planul determinat de vectorii $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ ceea ce este ecvhivalent cu *coplanaritatea celor trei vectori*. Să mai observăm că produsul mixt se anulează dacă cel puțin doi dintre cei trei factori sunt colineari, întrucât – în acest caz – cei trei vectori sunt coplanari.

(ii) Produsul mixt **este liniar** în fiecare dintre cei trei factori, ceea ce rezultă din liniaritate produsului vectorial şi a celui scalar. Există deci trei proprietăți de liniaritate, şi apoi combinații ale acestora de câte două precum şi liniaritatea simultană în toate cele trei argumente-vectori. Evident că nu este cazul să fie scrise toate aceste ci doar câteva.

$$(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \lambda_1 [\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] + \lambda_2 [\mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})], \qquad (\text{LIN}_1)\ ,$$

$$\mathbf{a} \cdot [(\mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2) \times \mathbf{c}] = \mu_1 [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c})] + \mu_2 [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{c})], \qquad (\text{LIN}_2)\ ,$$

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\nu_1 \mathbf{c}_1 + \nu_2 \mathbf{c}_2)] = \nu_1 [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}_1)] + \nu_2 [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}_2)], \qquad (\text{LIN}_3)\ .$$

Aceste trei proprietăți de liniaritate rezultă din proprietățile corespunzătoare ale produsului scalar, respectiv ale produsului vectorial, în fiecare argument. Ele se extind prin inducție la proprietățile de **liniaritate extrinsă** (tot în fiecare argument, apoi simultan în toate cele trei).

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i\right) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\ ; \qquad (\text{LIN.Ext}_1)\ ,$$

$$\mathbf{a} \cdot \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathbf{b}_j\right) \times \mathbf{c}\right] = \sum_{j=1}^{n} \mu_j [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_j \times \mathbf{c})]\ ; \qquad (\text{LIN.Ext}_3)\ ,$$

$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\sum_{k=1}^{p}\nu_k\,\mathbf{c}_k)] = \sum_{k=1}^{p}\nu_k[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}_k)]\ . \qquad \text{(LIN.Ext}_3\text{)}\ ,$$

Combinând aceste trei proprietăți de liniaritate extinsă va rezulta că produsul mixt de trei combinații liniare, prima de m vectori $\mathbf{a}_i$, a doua de n vectori $\mathbf{b}_j$, a treia de p vectori $\mathbf{c}_k$, se va desvolta ca o sumă triplă de mnp termeni, fiecare conținut un produs mixt de forma $\mathbf{a}_i\cdot(\mathbf{b}_j\times\mathbf{c}_k)$. Cititorul este invitat să scrie această proprietate.

(iii) **Interpretarea geometrică** a produsului mixt se deduce construind un paralelipiped având drept muchii adiacente vectorii necoplanari

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA},\ \mathbf{b} = \overrightarrow{OB},\ \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$$

fixați – evident – în acelaşi punct O. Celelalte patru vârfuri ale paralelipipedului se pot nota D, E, F, G. Astfel, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ şi $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ sunt laturile adiacnte ale paralelogramului $OBDC$ care poate fi considerat ca bază a pararelipipedului. Înălțimea acestuia poate fi distanța de la vârful A pe planul $(OBDC)$. Această înălțime, pe care o putem nota h_A, este egală cu lungimea vectorului $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ înmulțită cu cosinusul unghiului dintre acest vector şi normala la planul bazei, care este exact $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Aria bazei este

$$\sigma_{\overline{[OBDC]}} = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|.$$

Prin urmare, volumul paralelipipedului va fi

$$\text{Vol}_{[OADBCEFG]} = \sigma_{\overline{OBDC}}\,h_A = a\cos\widehat{(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b}\times\mathbf{c})}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}), \qquad (3)$$

conform definiției produsului scalar (aplicată vectorilor $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Întrucât produsul mixt este - în fond - un produs scalar, el are ca valoare un număr real care ar putea fi şi negativ, în timp ce un volum nu poate fi decât pozitiv. În consecință, asupra produsul mixt din (3) trebuie aplicată funcția valoare absolută:

$$\text{Vol}_{[OADBCEFG]} = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|, \qquad (4)$$

(iv) **Comportarea la permutări şi inversiuni**. Interpretarea geometrică a produsului mixt, în prima sa variantă din (1), conduce la constatarea că prin permutari curculare ale celor trei factori valoarea produsului mixt rămâne aceeaşi. Aceasta deoarece paralelogramul de bază $OBDC$, de arie $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$, poate fi înlocuit cu $OCEA$ de arie $|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|$; înălțimea h_A se va înlocui cu h_B, iar volumul paralelipipedului va fi acelaşi. Se poate opera şi o a doua permutare circulară, lucrând cu baza $OAFB$ şi înălțimea h_C. Aşadar, obținem egalitățile

$$\text{Vol}_{[OADBCEFG]} = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| = |\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})| = |\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|. \qquad (5)$$

Dacă se renunță la valorile absolute care intervin în (5) ar fi - teoretic - posibil ca cele trei produse mixte să aibă valori absolute egale dar să difere ca semn. Se poate însă demonstra că semnul produselor mixte obținute prin permutări circulare este acelaşi ; v. o demonstrație în [Cărăuşu, 2003] .Aşadar, se poate scrie egalitatea

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \qquad (6)$$

Dacă se inversează doi factori ai unui produs mixt, semnul acestuia se schimbă. Această proprietate rezultă din proprietățile produsului scalar, a celui vectorial şi din inverianța le permutări circulare din (5). De exemplu,

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot[-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})])\ = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{7}$$

Analog ase demonstrează schimbarea semnului la celelalte două inversiuni posibile de factori. În egalitățile din (7) a intervenit simetria produslui scalar şi antisimetria celui vectorial. În fine, o ultimă consecință a acestor proprietaăți constă în echivalența celor două definiții ale produslului mixt din (1):

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \underset{(6)}{=} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{8}$$

În consecință, ordinea celor trei factori contează (în acest caz, ordinea alfabetică sau "naturală") dar nu şi ordinea celor două operații – produsul scalar şi cel vectorial – care se pot inversa, dar cu păstrarea parantezelor în jurul factorilor produsului vectorial. Această proprietate a dus la adoptarea unei notații specifice pentru produsul mixt,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \underset{(6)}{=} (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \underset{\text{not}}{=} \boxed{\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle}. \tag{9}$$

Toate proprietățile anterior formulate (şi demonstrate) pot fi rescrise folosind notația din (9). De exemplu,

$$\boxed{\text{Vol}_{[OADBCEFG]} = |\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle|}.$$

Expresia produslui mixt în baza standard $\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{bmatrix}$ rezultă din expresiile celor trei vectori-argumente în acestă bază şi din proprietatea de liniaritate extinsă (în toate cele trei argumente):

$$\begin{cases} \mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} = x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}, \\ \mathbf{c} = x_c\mathbf{i} + y_c\mathbf{j} + z_c\mathbf{k} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle = \langle x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}, x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}, x_c\mathbf{i} + y_c\mathbf{j} + z_c\mathbf{k}\rangle \underset{(9)}{=}$$

$$= (x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k})\cdot[(x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k})\times(x_c\mathbf{i} + y_c\mathbf{j} + z_c\mathbf{k})] =$$

$$= (x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} =$$

$$= x_a\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & y_c \end{vmatrix} - y_a\begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} + z_a\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \tag{10}$$

<u>Aplicație</u>. Dați fiind vectorii $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, se cere să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ să fie paralel cu planul (xOy) al versorilor $\mathbf{i}$ & $\mathbf{j}$. Produsul dublu vectorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ se poate calcula cu prima formulă care a intervenit în răspunsul la subiectul **A.1**:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 2\lambda + 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{b} - (2\lambda + 1)\mathbf{c} =$$

$$= 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k} - (2\lambda + 1)(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = (1 - 2\lambda)\mathbf{i} + (4\lambda + 1)\mathbf{j} - (\lambda + 1)\mathbf{k}. \tag{11}$$

Condiția $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \parallel (xOy)$ revine la anularea celei de a treia coordonate a acestui dublu produs, care apare în (11): aşadar,

$$-(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}. \tag{12}$$

Cu al doilea vector astfel precizat, al doilea dublu produs vectorial se calculează cu formula corespunzătoare,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix} = \mathbf{b} - 3\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} - 3(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) =$$

$$= -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

Produsul mixt al celor 3 vectori se calculează imediat, cu formula analitică din (10):

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

B.2 Poziția relativă a dreptelor

$$(d_1) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-7}{-5} \quad \text{şi} \quad (d_2) : \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{5} \tag{1}$$

se determină cu ajutorul produsului mixt al celor doi vectori directori şi al vectorului $\overrightarrow{M_1M_2}$ sau $\overrightarrow{M_2M_1}$ care uneşte punctele ce intervin în caracterizările celor două drepte prin ecuațiile (1).

$$(1.1) \Rightarrow M_1(1,\ 4,\ 7) \quad \& \quad \mathbf{v}_1(2, 3, -5), \tag{2}$$

$$(1.1) \Rightarrow M_2(-7, -1, -3) \ \& \ \mathbf{v}_2(3, 2, 5). \tag{3}$$

$$(2)\ \&\ (3) \Rightarrow \overrightarrow{M_2M_1}\,(8,5,10). \qquad (4)$$

$$(2)\ ,\ (3)\ \&\ (4) \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{M_2M_1}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \right\rangle =$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 \neq 0, \qquad (5)$$

deci dreptele sunt *necoplanare*. În consecință, este relevantă determinarea ecuațiilor perpendicularei comune şi a distanței dintre cele două drepte. Perpendiculara comună va avea direcția vectorului .

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 25\,\mathbf{i} - 25\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k} = 5\,(5\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} - \mathbf{k}), \qquad (6)$$

Ecuațiile perpendicularei comune $(d^{\perp})$ se obțin din $(d^{\perp}) = (p_1) \cap (p_2)$, unde cele două plane trec (respectiv) prin punctele din (2) & (3) si sunt respectiv paralele cu vectorii $\mathbf{v}_1$ & $\mathbf{n}$, $\mathbf{v}_2$ & $\mathbf{n}$; spre a simplifica ecuațiile, în loc de $\mathbf{n}$ din (6) se poate lucra cu un vector de 5 ori mai scurt - cel tditre paranteze :

$$(p_1)\ :\ \left\langle \overrightarrow{M_1M}, \mathbf{v}_1,\ \mathbf{n} \right\rangle = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-7 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_1)\ :\ -28\,(x-1) - 23\,(y-4) - 25\,(z-7) = 0 \Rightarrow 28x + 23y + 25z - 295 = 0\ ; \quad (7)$$

$$(p_2)\ :\ \left\langle \overrightarrow{M_2M}, \mathbf{v}_2,\ \mathbf{n} \right\rangle = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+7 & y+1 & z+3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_1)\ :\ 23\,(x+7) + 28\,(y+1) - 25\,(z+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 27x - 28y + 25z + 236 = 0\ . \quad (8)$$

$$(7)\ \&\ (8) \Rightarrow (d^{\perp})\ :\ \begin{cases} 28x + 23y + 25z - 295 = 0, \\ 23x + 28y - 25z + 114 = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

În acest moment se poate face o mică <u>verificare</u> : vectorul director al dreptei $(d^{\perp})$ cu ecuațiile (9)trebuie să fie colinear cu vectorul din (6) ;

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 28 & 23 & 25 \\ 23 & 28 & -25 \end{vmatrix} = -25 \cdot 51\,\mathbf{i} + 25 \cdot 51\,\mathbf{j} + 5 \cdot 51\,\mathbf{k} = -51(5\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} - \mathbf{k}) \parallel \mathbf{n}\ :\ \boxed{\text{OK}}$$

Distanța $d((d_1),(d_2)) = \delta$ se poate calcula cu formula prezentată la curs, ca fiind raportul dintre volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{M_2M_1}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ca muchii adiacente şi aria bazei acestui paralelipiped, cu $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ca laturi adiacente. Volumul a fost deja calculat în ecuația (5), iar aria rezultă din expresia (6) a lui $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$:

$$\mathrm{Vol}_{[M_2M_1\ldots]} = \left| \left\langle \overrightarrow{M_2M_1}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \right\rangle \right| = 25\ ; \tag{10}$$

$$\sigma_{\overline{[M_2M_1.]}} = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = 5\sqrt{51}\,. \tag{11}$$

$$(7)\ \&\ (8) \Rightarrow d((d_1),(d_2)) = \delta = \frac{25}{5\sqrt{51}} = \frac{5}{\sqrt{51}}\,.$$

B.3 Date fiind (în plan) dreptele de ecuații $(d_1) : x - y + 3 = 0,$, $(d_2) : x + y - 5 = 0,$ $(d_3) : y + 4 = 0,$ vârfurile A, B, C ale triunghiului având aceste drepte ca laturi se găsesc uşor intersectând dreptele, două câte două.

$$(d_1) \cap (d_2) = \{A\} : \begin{cases} x - y = -3, \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(1,4)\ ; \tag{1}$$

$$(d_1) \cap (d_3) = \{B\} : \begin{cases} x - y = -3, \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow B(-7,-4)\ ; \tag{2}$$

$$(d_2) \cap (d_3) = \{C\} : \begin{cases} x + y = 5, \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(9,-4)\ . \tag{3}$$

Ecuația înălțimii (h_B) din $B = (d_1) \cap (d_3)$ pe latura $(AC) = (d_2)$ va fi de forma $y + 4 = m(x - 1),$ avâbnd în vedere coordonatele din (2). Panta acestei drepte va fi opusa înversei pantei lui (d_2), $m_2 = -1,$ deci luăm $m = 1$ şi avem .

$$(h_B) : y + 4 = x - 1 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0 \Rightarrow (h_B) \equiv (d_2)\ \&\ \widehat{A} = \pi/2. \tag{4}$$

Lungimea înălțimii, $h_B = d(B,(AC)),$ rezultă din (4) întrucât triunghiul fiind dreptunghic în A,

$$h_B = d(B, A) = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}\,.$$

Cei interesați sunt invitați să schițeze configurația geometrică corespunzătoare acestei probleme.

B.4 Studiul conicelor cu centru pe ecuația lor generală pleacă de la ecuația

$$(C) : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{1}$$

Ecuației (1) i se asociază o matrice simetrică de ordinul trei, dup ce se notează $a_{12} = a_{21},\ \ a_{10} = a_{01},\ a_{20} = a_{02}$. Indicele 1 corespunde variabile x, 2 – variabilei y iar indicele 0 elementelor de pe coloana / linia a 3-a. Aşadar, .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{bmatrix}; \tag{2}$$

Submatricea de ordinul 2 formată cu primele două linii şi primele două coloane se notează $\mathbf{a}$; ea conține coeficienții celor 4 termeni de ordinul 2, care formează o formă pătratică. Matricelor A şi li se asociază trei numere reale numite **invarianții conicei**,

$$\delta = \det\mathbf{a} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\ I = \mathrm{Tr}\,\mathbf{a} = a_{11} + a_{22},\ \ \Delta = \det A. \tag{3}$$

Cele trei numere din 3 se numesc *invarianți* deoarece sunt invariante la transformări de tip translații şi rotații ale reperului (sistemului de coordonate). Ele permit stabilirea naturii conicei.

$$\begin{cases} \delta \neq 0 \ \Rightarrow \ \begin{matrix}(C) \text{ are centru} \\ \text{de simetrie ;}\end{matrix} \begin{cases} \delta > 0 \ \Rightarrow \ (C) \text{ este } \textit{de tip eliptic} \text{ ;} & (4.1) \\ \delta < 0 \ \Rightarrow \ (C) \text{ este } \textit{de tip hiperbolic} \text{ ;} & (4.2) \end{cases} \\ \delta = 0 \ \Rightarrow \ (C) \text{ nu are (un singur) centru de simetrie} \quad (5) \end{cases}$$

În raport cu determinantul $\Delta = \det A,$ conica (C) poate fi

$$\begin{cases} \textit{nedegenrată} \text{ pentru } \Delta \neq 0, & (6) \\ \textit{degenerată} \text{ pentru } \Delta = 0. & (7) \end{cases}$$

Evident, cazurile din (4) & (5) pot fi combinate cu cele din (6) & (7): conica poate fi de tip eliptic şi nedegenerată, de tip hiperbolic şi degenerată etc. Aceste concluzii asupra tipului / naturii conicei vor rezulta după reducerea ecuației generale la forme mai simple, prin transformări de tip translație / rotație ale reperelor.

$\boxed{\delta \neq 0}$ În acest caz, transformările la care vor fi supuse sistemele de coordonate vor fi o translație (Tr) urmată de o rotație (Ro). Originea reperului inițial $(O; x, y).$ se translează în noua origine O'.rezultând noul sistem de coordonate, $(O'; x', y').$, direcțiile axelor de coordonate nu se schimbă, rămânând paralele cu versorii standard $\mathbf{i}$ & $\mathbf{j}$, respectiv. Notând coordonatele noii origini în reperul inițial $O'(x_0, y_0),$ vectorul translației şi vectorii de poziție ai unui punct curent în reperul inițial şi în cel translat vor fi (respectiv)

$$\overrightarrow{OO'}(x_0, y_0),\ \overrightarrow{OM} = \mathbf{r}_M(x, y),\ \ \overrightarrow{O'M} = \mathbf{r}'_M(x', y') \ \text{ cu } \ \mathbf{r}_M = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}'_M, \tag{8}$$

Din (8) rezultă legătura dintre coordonatele inițiale şi cele de după translație ale punctului curent, fiind implicate şi coordonate noii origini.

$$(\mathrm{Tr})_{\overrightarrow{OO'}} : \begin{cases} x - x_0 = x', \\ y - y_0 = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases} \tag{9}$$

Introducând (x, y) din (9) în ecuația (1) şi operând grupările termenilor asemenea, se ajunge la noua ecuație în coordonatele (x', y') :

$$(C) : a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \\ 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x' + 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y' + F(x_0, y_0) = 0. \tag{10}$$

Funcția F care intervine în (termenul liber al ecuației) (10) este membrul stâng al ecuației (1). Curba (C), caracterizată prin ecuația (10) în reperul $(O'; x', y')$, va fi simetrică în raport cu originea O' dacă şi numai dacă $F'(x', y') = F'(x', y')$, unde $F'(x', y')$ este membrul stâng al ecuației (10). Evident, schimbarea semnelor celor două variabile nu afectează termenii de ordinul 2, care şi-au păstrat coeficienții din ecuația (1). Singurii care sunt afectați de schimbarea semnelor sunt termenii liniari, care apar pe al doilea rând din ecuația (10). Aşadar, pentru a asigura simetria față de origine, coeficienții acestor termeni trebuie să se anuleze ; se ajunge astfel la sistemul liniar neomogen

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Sistemul niliar (11) este de tip Cramer (compatibil şi determinat) având determinantul $\delta \neq 0$; aşadar, el admite o soluție unică ce constă tocmai din coordonatele centrului de simetrie, $O'(x_0, y_0)$.

Se demonstrează (v. [Cărăuşu,2003]) că termenul liber din (10) este

$$F(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Aşadar, în urma translației (9) de la O' la O' cu coordonatele verificând sistemul (11), ecuația (10) devine

$$(C) : a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{12}$$

În continuare, grupul termenilor de gradul 2 trebuie transformat astfel încât termenul în $x'y'$. Întrucât aceşti termeni constituie o formă patratică, metoda (cea mai) adecvată constă în diagonalizarea acestei $\varphi(x'y')$. Matricea lui φ este $\mathbf{a}$, pentru care trebuie găsite valorile proprii şi doi vectori proprii corespunzători.

$$\det(\mathbf{a} - I_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - I\lambda + \delta \tag{13}$$

este polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{a}$, $P_{\mathbf{a}}(\lambda)$. Rădăcinile ecuației caracteristice $P_{\mathbf{a}}(\lambda) = 0$ sunt λ_1, λ_2 - cele două valori proprii. Întrucât ele verifică ecuația

$$\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = I \ \& \ \lambda_1\lambda_2 = \delta. \tag{14}$$

Cei doi vectori proprii corespunzători valorilor proprii din (14) sunt U_1, U_2 ; după verificarea ortogonalității lor şi transformarea lor în versorii proprii $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, se construieşte matricea

$$P = \left[\mathbf{u}_1 \ \ \mathbf{u}_2\right] \text{ cu proprietatea că } P^{\mathsf{T}}\mathbf{a}P = \lceil \lambda_1 \ \ \lambda_2 \rfloor = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Din teoria diagonalizării formelor pătratice prin transformări ortogonale (v. $\left[\text{Cărăuşu, 1999}\right]$), se ştie că P este transpusa matricei de transformare care reduce forma pătratică $\varphi(x' \, y')$.ce intervine în (12) în expresia sa diagonală, având drept coeficienți valorile proprii din (15). Legătura între variabilele dinainte şi de după rotație este

$$(\text{Ro}_\theta) \ : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Expresia diagonală (sau canonică) a formei pătratice devine

$$\varphi(X \ Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \ ; \tag{17}$$

$$(12) \ \& \ (17) \Rightarrow (C) : \boxed{\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0}. \tag{18}$$

(18) este ecuația redusă a conicei în ultimul reper $(O'; X, Y)$, obținut prin translația (9) şi rotația (16) .

Ecuația (18) permite identificarea a două cazuri - cu câte trei sau două subcazuri fiecare - prin comparație cu ecuațiile canonice ale **elipsei** şi **hiperbolei**.

(i) $\boxed{\delta > 0} \underset{(14)}{\Rightarrow} \lambda_1\lambda_2 > 0 \Rightarrow (C)$ este *de tip eliptic.*

Cazul nedegenerat. $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ ecuația (18) are termen liber nenul, deci ea poate reprezenta o elipsă, dar aceasta poate fi reală sau imaginară. Suma primilor 2 termeni are semnul lui $\lambda_1 + \lambda_2 = I$, care se compară cu semnul lui Δ :

$(i.1)$ $I\Delta > 0 \Rightarrow$ membrul stâng al ecuației (18) este strict pozitiv (> 0), deci aceasta nu reprezintă o curbă reală şi se spune că (C) este o elipsă imaginară ;

$(i.2)$ $I\Delta < 0 \Rightarrow$ suma primilor 2 termeni din (18) are semn contrar termenului liber, deci ecuația reprezintă o curbă reală, care este o *elipsă reală.* Ecuația sa canonică se poate obține uşor, după înmulțirea ecuației (18) cu $-\delta / \Delta$, ceeace ce va produce termenul liber $= -1$, ca în ecuația canonică.

Determinarea centrului de simetrie O', valorile proprii şi ecuația redusă în X, Y, determinarea direcțiilor axelor de simetrie cu ajutorul vectorilor proprii ; efectul translației şi apoi al rotației asupra ecuației generale, respectiv al celei în x', y'.

Cazul degenerat. (18) & $\Delta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (C) : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 \Rightarrow X = Y = 0 \Rightarrow (C) = \{O'\}.$$

Deci, o conică de tip eliptic care este degenerată *se reduce la un singur punct*, originea ultimului reper.

(ii) $\boxed{\delta < 0} \underset{(14)}{\Rightarrow} \lambda_1\lambda_2 < 0 \Rightarrow (C)$ este *de tip hiperbolic.*

Cazul nedegenerat. $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ ecuația (18) are termen liber nenul, deci ea poate reprezenta o *hiperbolă.* Obținerea ecuației canonice se realizează ca mai sus, prin formarea termenului liber $= -1$

Cazul degenerat. (18) & $\Delta = 0 \Rightarrow$ (pentru $\lambda_1 > 0$ şi $\lambda_2 < 0$, de exemplu)

$$\Rightarrow (C) : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\lambda_1}\, X - \sqrt{-\lambda_2}\, Y\right)\left(\sqrt{\lambda_1}\, X + \sqrt{-\lambda_2}\, Y\right) = 0. \quad (19)$$

Evident, ecuația (19) este echivalentă cu două ecuații liniare care reprezintă două drepte, secante în originea O'.

$$(C) = (d_1) \cup (d_2),\ (d_1) \cap (d_2) = \{O'\}, \begin{cases} (d_1) : & \sqrt{\lambda_1}\, X - \sqrt{-\lambda_2}\, Y = 0, \\ (d_2) : & \sqrt{\lambda_1}\, X + \sqrt{-\lambda_2}\, Y = 0. \end{cases}$$

Dreptele sunt simetrice față de axele ultimului reper. Dacă semnele celor două rădăcini sunt $\lambda_1 < 0$ şi $\lambda_2 > 0$, se vor rescrie în mod adecvat coeficienții care apar sub radicali. Înacest caz, al unei hiperbole degenerate care se reduce la două drepte secante, se recomandă determinarea ecuațiilor lor în reperul inițial, folosind ecuația unei drepte care trece printr-un punct de coordonate cunoscute, în cazul nostru $O'(x_0, y_0)$:

$$(d) : y - y_0 = m_{1,2}(x - x_0). \quad (20)$$

Efectuând produsul membrilor stângi ai celor două ecuații din (20) şi identificându-l cu membrul stâng al ecuației (1) se vor putea deduce cele două pante care intervin în (20).

Aplicație. Se cere să se studieze conica dată prin ecuația

$$(C) : 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0. \quad (21)$$

Se poate proceda aşa cum s-a descris mai sus studiul unei conice cu centru : se scrie matricea A, se determină invarianții şi natura conicei, se determină centrul de simetrice, se determină valorile şi vectorii proprii ai matricei $\mathbf{a}$, se scrie ecuația redusă (18) şi apoi cea canonică, se trasează graficul conicei folosind şi direcțiile axelor de simetrie $(O'x')$ şi $(O'y')$ date de vectorii proprii.

$$(21) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}; \tag{22}$$

$$(22) \Rightarrow \delta = \det \mathbf{a} = 50, \;\; I = 15, \;\; \Delta = -50. \tag{23}$$

$(23) \Rightarrow (C) = (E) -$ ***elipsă reală***.

$$O'(x_0, y_0) : \begin{cases} 9x - 2y + 3 = 0, \\ -2x + 6y - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow O'(-1/5, 3/5); \tag{24}$$

$$(23) \Rightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 50 \Rightarrow \lambda_1 = 5 \;\;\&\;\; \lambda_2 = 10 \tag{25}$$

$$\mathbf{a} - 5I_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \tag{26}$$

$$\mathbf{a} - 10I_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow U_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{27}$$

Ecuația redusă:

$$(25) \Rightarrow (E) : 5X^2 + 10Y^2 - 1 = 0. \tag{28}$$

Ecuația (27) are deja termenul liber $= -1$, dar pentru a obține ecuația canonică propriu-zisă cei doi coeficienți trebuie "coborâți cu 2 etaje":

$$(28) \Leftrightarrow (E) : \frac{X^2}{1/5} + \frac{X^2}{1/10} + 1 = 0. \tag{29}$$

Direcțiile axelor de simetrie:

$$(26) \;\;\&\;\; (27) \Rightarrow \begin{cases} (O'X) \parallel \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \\ (O'Y) \parallel -2\mathbf{i} + \mathbf{j}. \end{cases} \tag{30}$$

Cu centrul din (24), cu direcțiile axelor din (30) şi cu semiaxele $a = 1/\sqrt{51}$ şi $b = 1/\sqrt{10}$, care rezultă din (29), se poate trasa graficul elipsei dată prin ecuația (21).

Algebră liniară & Geometrie - II   Iunie 2009 C

C.1 Produsul vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ şi proprietăţile sale.

Aplicaţie. Folosind produsul vectorial, să se determine parametrii λ & μ cu condiţia ca vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + (\lambda - \mu)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$ să fie colineari. După determinarea celor 2 parametri, să se determine o relaţie de colinearitate (proporţionalitate) între cei doi vectori. Dat fiind şi vectorul $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, să se determine aria tringhiului având vectorii $\mathbf{v}_1$ & $\mathbf{v}_3$ ca două laturi adiacente. .

C.2 Date fiind, în spaţiu, dreptele

$$(d_1) : \begin{cases} 2x + 2y - z = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad (d_2) : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4} .$$

Să se verifice că $(d_1) \parallel (d_2)$, să se determine distanţa între aceste drepte precum şi ecuaţia planului care le conţine.

Sugestii. Se recomandă determinarea direcţiei $\mathbf{v}_1 \parallel (d_1)$ şi a unui punct $M_1 \in (d_1)$. Utilizând şi punctul $M_2 \in (d_2)$, se poate determina $\delta = d((d_1),(d_2))$ fie utilizând vectorii $\overrightarrow{M_2M_1}$ şi $\mathbf{v}_2 \parallel (d_2)$ + o funcţie trigonometrică, fie determinând punctul $M_2{}' \in (d_1)$, $M_2{}' =$ Proj$_{(d_1)}\, M_2 = (d_1) \cap (p_2)$ unde planul $(p_2) \perp \mathbf{v}_1 \parallel (d_1)$ prin M_2. Ecuaţia planului $(p) \supset (d_1),(d_2)$ se poate determina utilizând vectorii $\overrightarrow{M_2M_1}$ şi $\mathbf{v}_2$ (sau $\mathbf{v}_1$) plus unul din punctele M_1, M_2.

C.3 Să se studieze conica dată prin ecuaţia

$$(C) : 3x^2 + 4xy + 8y - 16 = 0.$$

C.4 Hiperboloidul cu o pânză (H_1) şi proprietăţile sale geometrice (forma sa). (H_1) ca suprafaţă riglată.

Aplicaţie. Să se scrie ecuaţiile celor două familii de generatoare rectilinii ale suprafeţei

$$(H_1) :. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} - 1 = 0 ;$$

Caz particular : Ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin punctul $M_0(5,4,3)$ (după verificarea poziţiei $M_0 \in (H_1)$).

Indicații de rezolvare.

$\boxed{\text{C.1}}$ Aplicație. Colinearitatea celor doi vectori se va caracteriza prin proporționalitatea coordonatelor lor (dubla egalitate a celor trei rapoarte) ; va rezulta un sistem liniar de două ecuații în λ & μ, a cărei soluție va permite scrierea vectorilor particulari şi a unei relații de proporționalitate de forma $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2$ sau $\mathbf{v}_2 = \beta\mathbf{v}_1$. Aria tringhiului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_3$ (ca laturi adiacente) fi jumatate din lungimea produsului vectorial $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3$.

$\boxed{\text{C.2}}$ Vectorul director al dreptei (d_2) apare în enunț, iar cel al dreptei (d_1) se va determina ca în cazul dreptei definite ca intersecție a două plane. Se vvor compara cei doi vectori (care trebuie să fie proporționali). Se va urma procedura recomandată în Sugestii.

$\boxed{\text{C.3}}$ Se va urma procedura descrisă la subiectul (teoretic) $\boxed{\text{B.4}}$; se va constata că (C) este *de tip hiperbolic*, însă *degenerată*. Se va proceda ca în descrierea modului de studiu al conicelor cu centru, cazul $\delta < 0$ şi $\Delta = 0$.

$\boxed{\text{C.4}}$ Suprafața (H_1) are ecuația canonică

$$(H_1) :. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,. \tag{1}$$

Este o suprafață nemărginită. Intersecțiile cu plane orizontale $(z = h)$ sunt elipse, iar cele cu plane verticale $(x = k)$, respectiv $(y = \ell)$, sunt hiperbole. (H_1) este o suprafață **riglată**, în sensul că există două familii de generatoare rectilinii situate pe această suprafață. Determinarea ecuațiilor acestora se face ca în aplicația ce urmează.

Aplicație. Să se scrie ecuațiile celor două familii de generatoare rectilinii ale suprafeței

$$(H_1) :. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1 - \frac{y^2}{4^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{5} - \frac{z}{3}\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{z}{3}\right) = \left(1 - \frac{y}{4}\right)\left(1 + \frac{y}{4}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (g_\lambda) : \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{z}{3} = \lambda\left(1 - \frac{y}{4}\right), \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{3} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{4}\right); \end{cases} \quad \& \quad (g_\mu) : \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{z}{3} = \mu\left(1 + \frac{y}{4}\right), \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{3} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{4}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Cele două perechi de ecuații din (2) reprezintă cele două familii de generatoare rectilinii. Pentru a găsi ccuațiile generatoarelor rectilinii care trec prin punctul $M_0(5,4,3)$, se introduc coordonatele acestui punct în fiecare perche de ecuații din (2) determinându-se parametrul λ, respecziv parametrul μ :

$(2_\lambda)\Big|_{M_0} \Rightarrow$ prima ecuație e banală (0=0) iar a doua devine $2 = (1/\lambda)2 \Rightarrow \lambda = 1,$

valoare care introdusă în (1) oferă ecuațiile primei generatoare.

$(2_\mu)\Big|_{M_0} \Rightarrow$ prima ecuație devine $2\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow 3x - 5z = 0;$; a doua ecuație amplificată cu μ, apoi luat $\mu = 0$, devine (în punctul M_0) $y = 4.$ Acestea sunt ecuațiile celei de a doua generatoare, din a doua familie, care trece prin punctul M_0.

Algebră liniară & Geometrie - II Iunie 2009 D

D.1 Vectori colineari ($\mathbf{a} \| \mathbf{b}$) : definiţie şi caracterizări. Baze de vectori în plan ($\mathcal{V}_2$)..Vectori coplanari în $\mathcal{V}_3$, baze de vectori în spaţiul 3D al vectorilor liberi ; baze ortogonale şi ortonormate, baza standard (sau canonică) $E = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Aplicaţie. Se consideră în spaţiul $\mathcal{V}_3$ 5 vectori, $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_5 = -\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$..

(i) Să se determine λ şi μ astfel încât $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ şi $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ să fie familii de vectori coplanari.

(ii) Cu valorile găsite mai sus, să se determine direcţia dreptei comune a planelor $(p_1) \supset \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ şi $(p_2) \supset \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$.

Sugestie. După determinarea parametrilor λ şi μ, fiecare din cele două familii poate fi redusă la câte 2 vectori independenţi ; se recomandă eliminarea lui $\mathbf{v}_3$.Scriind egalitatea unui vector generat de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ cu unul generat de $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ se obţine un sistem omogen (de tip 3×4) a cărui soluţie generală este un vector din $\mathbf{R}^3$, componentele acestuia fiind coordonatele vectorului director al dreptei comune $(d) =.(p_1) \cap (p_2)$.

D.2 Să se scrie ecuaţia unui plan (p) care trece prin punctele $M_1(1,2,1)$, $M_2(2,3,4)$ şi este ortogonal pe planul $(p_0) : 2x + y - 3z + 5 = 0$. Apoi să se scrie ecuaţiile dreptei comune $(d) = (p) \cap (p_0)$, să se determine direcţia $\mathbf{v}$ a acesteia şi un punct $Q \in (d)$, colinear cu M_1, M_2.

Sugestie. Se recomandă scrierea ecuaţiilor dreptei (M_1M_2) şi ecuaţia fascicolului de plane având aceasta dreaptă ca axă. Coordonatele punctului de intersecţie Q se pot obţine prin rezolvarea unui sistem liniar (neomogen) de 3 sau 4 ecuaţii în (x,y,z). Pentru determinarea ecuaţiei lui (p) se poate utiliza şi ecuaţia generală a planului dar aceasta presupune eliminarea a 4 parametru în loc de a unuia singur (sau a doi parametri).

D.3 Să se determine natura conicei date prin ecuaţia

$$(C) : 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0,$$

apoi centrul de simetrie O' şi direcţiile axelor de simetrie. Să se scrie ecuaţia sa redusă (în X, Y), ecuaţia polarei lui (C) în raport cu polul $P_0(-1,3)$ şi ecuaţia diametrului conjugat cu direcţia $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

D.4 Paraboloidul hiperbolic (P_H) şi proprietăţile sale geometrice (forma sa). (P_H) ca suprafaţă riglată.

Aplicaţie. Să se scrie ecuaţiile celor două familii de generatoare rectilinii ale suprafeţei

$$(P_H) :. \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 2z ;$$

Caz particular : Ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin punctul $M_0(7, 3, 0)$ (după verificarea poziţiei $M_0 \in (P_H)$).

Indicaţii de rezolvare.

D.1 Aplicaţie. (i) Condiţia de coplanaritate pentru vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ - exprimată cu produsul mixt - conduce la valoarea $\lambda = -3.$ Analog, $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ coplanari $\Rightarrow$ $\mu = 2.$ (ii) Cu aceste valori gasite, se consideră câte un vector din planul genetrat de familiile $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\},\ \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ Întrucât fiecare din ele este o familie liniar depedndentă, se poate elimina câte un vector, iar cea mai logică este eliminarea lui $\mathbf{v}_3.$ Se scrie egalitatea între doi vectori, fiecare generat de câte o subfamilie :

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = \lambda_4\mathbf{v}_4 + \lambda_5\mathbf{v}5. \tag{1}$$

Ecuaţia (1) este una tipică pentru determinarea intersecţiei a două subspaţii. Ea este echivalentă cu un sistem omogen ale cărui coloane sunt formate cu coloanele celor 4 vectori implicati :

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3/5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4/5 & 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 0 & 1 & 0 \\ -3/5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{2}$$

$$(2) \Rightarrow \Lambda(\alpha) = \begin{bmatrix} 5\alpha \\ -4\alpha \\ 3\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Rezultă din soluţia generală (3) că un vector comun celor două plane respectiv generate de perechile de vectori consideraţi va avea coordonatele de forma de forma

$$5\alpha\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - 4\alpha\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ -6\alpha \\ 15\alpha \end{bmatrix} = 3\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix};$$

aşadar, acest vector comiun, care dă şi direcția dreptei comune, este (de forma) $\mathbf{v} = 3\alpha(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = 3\alpha\mathbf{v}_3$ ceea ce era previzibil, întrucât acest $\mathbf{v}_3$ face parte din amble efamilii generaroare. O verificare se poate face lucrând şi cu celelalte două componente ale soluției generale din (3):

$$3\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\alpha\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ -6\alpha \\ 15\alpha \end{bmatrix} = 3\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} : \boxed{\text{OK}}$$

D.2 Ecuația unui planului (p) care trece prin punctele $M_1(1,2,1)$, $M_2(2,3,4)$ şi este ortogonal pe planul $(p_0) : 2x + y - 3z + 5 = 0$ se poate obține urmând recomandările.

$$(M_1M_2) : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 3x - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (p_\lambda) : (3\lambda + 1)x - y - \lambda z + 1 - 2\lambda = 0 : \qquad (2)$$

$$(p_\lambda) \perp (p_0) \underset{(2)}{\Rightarrow} 9\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/9. \qquad (3)$$

Valoarea din (3) se introduce în (2) şi se obține ecuația planului (p). Aceasta, împreună cu ecuația dată a lui (p_0), caracterizează analitic dreapta de intersecție (d) a celor doză plane. Direcția s-a se determină în mod obişnuit, cu ajutorul produsului vectorial. Punctul $Q \in (d)$ se poate obține rezolvând sistemul de tip 4x3 care este format din (1) şi ecuațiile dreptei (d).

D.3 Natura conicei date prin ecuația

$$(C) : 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0, \qquad (1)$$

şi elementele sale geometrice se determină ca în cazul general. similar cu studiul conicei de la Aplicația subiectului **B.4** .

$$(1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & -16 \\ -2 & -16 & -6 \end{bmatrix}; \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \delta = \det\mathbf{a} = 50,\ I = 15,\ \Delta = -2000. \qquad (3)$$

$(3) \Rightarrow (C) = (E) -$ ***elipsă reală***.

$$O'(x_0,\, y_0) : \begin{cases} 6x - 2y - 2 = 0, \\ -2x + 9y - 16 = 0. \end{cases} \Rightarrow O'(1,\, 2); \tag{4}$$

Polinomul caracteristic şi valorile proprii sunt aceleaşi ca la elipsa anterior studiată.

Polara lui (C) în raport cu polul $P_0(-1,3)$ se obține uşor din ecuația (1) prin procedeul "dedublării" sau al polarizării.:

$$(p_{P_0}) : -6x - 2(3x - y) + 27y - 2(x - 1) - 16(y + 3) - 6 = 0 \Rightarrow \ldots \tag{5}$$

$$(d_{\mathbf{v}}) : -3(6x - 2y - 2) + 2(-2x + 9y - 16) = 0 \Rightarrow \ldots \tag{6}$$

Se recomandă şi verificarea faptului că diametgrul conjugat din (6) trece prin centrul de simetrie din (4).

D.4 Paraboloidul hiperbolic (P_H) este caracterizat prin ecuația canonică

$$(P_H) :.\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z\ . \tag{1}$$

Este o suprafață nemărginită. Intersecțiile cu plane orizontale $(z = h)$ sunt hiperbole, iar cele cu plane verticale $(x = k)$, respectiv $(y = \ell)$, sunt parabole. (P_H) este o suprafață **riglată**, în sensul că există două familii de generatoare rectilinii situate pe această suprafață. Determinarea ecuațiilor acestora se face ca în aplicația ce urmează.

Aplicație. Ecuațiile celor două familii de generatoare rectilinii ale suprafeței din enunț se obțin prin factorizări echivalente ale ecuației sale :

$$(P_H) :.\ \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 2z \Leftrightarrow \frac{x^2}{7^2} - \frac{z^2}{3^2} = 2z \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{7} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{7} + \frac{y}{3}\right) = 2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g_\lambda) : \begin{cases} \frac{x}{7} - \frac{y}{3} = 2\lambda, \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = \frac{1}{\lambda}z; \end{cases} \quad \& \quad (g_\mu) : \begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 2\mu, \\ \frac{x}{7} - \frac{y}{3} = \frac{1}{\mu}z; \end{cases} \tag{3}$$

Caz particular : Ecuațiile generatoarelor rectilinii care trec prin punctul $M_0(7,3,0)$ se obțin (ca şi în cazul hiperboloidului cu o pânză de la subiectul **C.4**) înlocuind coordonatele punctului M_0 în ecuații din (3), alese adecvat.

$(3_\lambda)\Big|_{M_0} \Rightarrow$ prima ecuație devine $\lambda = 0 \Rightarrow 3x - 7y = 0$, iar a doua, amplificată cu $\lambda(= 0)$, devine $z = 0$. Aşadar, prima generatoare este o dreaptă situată în planul (xOy).

$(3_\mu)\Big|_{M_0} \Rightarrow$ prima ecuație devine $2\mu = 2 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow 3x + 7y = 42$; a doua – cu

$\mu = 1$ şi amplificată cu 21 – devine $.3x - 7y = 21z$ Acestea sunt ecuațiile celei de a doua generatoare, din a doua familie, care trece prin punctul M_0.