Algebra liniară - I	Subiecte pentru teză - soluții	A

A.1 Utilizând vectorii bazei A si expresia lui X se obține

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ (1)\ ; \quad \text{coordonatele lui } X \text{ în baza } A \text{ sunt } X_A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Coordonatele lui X în baza B se pot obține cu schema (lanțul) de transformări

$$[T^{\mathrm{T}} \mid X_A] \to \ \ldots \to [I_3 \mid X_B] \ \Rightarrow X_B = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -16/5 \\ -7/5 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

În enunț se cere și determinarea vectorului X_B al coordonatelor în noua bază B și utilizând-o efectiv pe aceasta. Se poate aplica formula $B = A\,T^{\mathrm{T}}$ care va conduce la

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

iar transformările $\begin{bmatrix} B \mid X \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} I_3 \mid X_B \end{bmatrix}$ trebuie să furnizeze același vector de coordonate ca în (4). Se poate proceda și la o verificare a coordonatelor din (4) cu cormula $B X_B = X$, acest X fiind cel obținut în (1).

A.2 Se vor prezenta cele două definiții (echivalente) ale unui subspațiu, $W \subseteq_{\text{subsp}} V$, închiderea la combinații liniare generale (de m vectori), apoi cele trei operații cu (două) subspații. $W_1, W_2 \subseteq_{\text{subsp}} V$ și propoziția privind suma și intersecția,ca subspații. Se va enunța propoziția privind descompunerea unică $x = x_1 + x_2$; se va enunța și teorema dimensiunilor (a lui Grassmann). Subspații-nucleu pentru forme liniare $f : V \to \mathbb{R}$, respectiv forme biliniare simetrice $f : V \times V \to \mathbb{R}$,, ambele notate .Ker$f$, sunt ambele subspații iar demonstrația este foarte simplă.

Aplicație. Se va determina câte o bază pentru $W_1 + W_2$ și $W_1 \cap W_2$; generatorii celor două subspații pot fi notați $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ și – respectiv – $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ iar un vector din W_1 va fi de forma $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$; analog pentru W_2. Din cei 4 vectori care generează *suma* trebuie selectată o bază. O bază pentru *intersecție* se va găsi dupaă rezolvarea sistemului omogen în $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 . \lambda_4)$ echivalent cu ecuația $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = \lambda_3\mathbf{a}_3 + \lambda_4\mathbf{a}_4$. Se va găsi $\dim\ (W_1 \cap W_2) = 1$. Apoi se va verifica teorema dimensiunilor (Grassmann) pentru subspațiile spațiului $\mathbf{R}^3$ mai jos indicate:

A.3 O formă pătratică $\varphi : V \to \mathbb{R}$. se definește ca fiind asociată unei forme biliniare simetrice $f : V \times V \to \mathbb{R}$; se va prezenta matricea coeficienților și expresia analitică, inclusiv în cazul particular $V = \mathbb{R}^n$. Diagonalizrea unei forme pătratice însemană aducerea acesteia la o expresie canonică ; se va scrie o astfel de expresie, în general. Se va defini signatura și se va enunța Teorema de inerție a lui Sylvester.

Aplicație. Din expresia $\varphi(X) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ (1) se va scrie matricea acesteia,

$$f(E^{\mathrm{T}},E) = [\varepsilon] \underset{\text{not}}{=} A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Metoda **Gauss** este aplicabilă pentru diagonalizarea oricărei Q-forme şi constă în gruparea succesivă de termeni cu formarea unor pătrate de funcţii liniare, prin artificii cu scaderi / adunări de termeni. Prima grupare (cu termenii ce-l conţin pe x_1) se va face după scoaterea lui $a_{11} = 7$ ca factor forţat din aceşti termeni :

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= 7\left(x_1^2 - \frac{2}{7}x_1x_2 - \frac{4}{7}x_1x_3\right) + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_2x_3 = \\ &= 7\left[\left(x_1 - \frac{1}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3\right)^2 - \frac{1}{49}x_2^2 - \frac{4}{49}x_3^2 - \frac{4}{49}x_2x_3\right] + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_2x_3 = \\ &= \ \dots = 7\left(x_1 - \frac{1}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3\right)^2 + \frac{48}{7}\left(x_2^2 - \frac{2}{3}x_2x_3\right) + \frac{66}{7}x_3^2 = \\ &= 7(\dots)^2 + \frac{48}{7}\left(x_2 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{26}{3}x_3^2.\end{aligned} \tag{3}$$

Din această expresie (3) rezultă trnsformarea care conduce la o expresie diagonală, anume

$$(T) : \begin{cases} \overline{x}_1 = x_1 - \frac{1}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3, \\ \overline{x}_2 = x_2 - \frac{1}{3}x_3, \\ \overline{x}_3 = x_3, \end{cases} \underset{(3)}{\Rightarrow} \quad \overline{\varphi}(\overline{X}) = 7\overline{x}_1^2 + \frac{48}{7}\overline{x}_2^2 + \frac{26}{3}\overline{x}_3^2. \tag{4}$$

Se constată că $\varphi(X)$ pozitiv definită întrucât $\operatorname{sgn}\varphi = (3,0,0)$.

Metoda **Jacobi** este şi ea aplicabilă la diagonalizarea acestei forme pătratice, întrucât

$$\Delta_0 = 1 \ \text{ şi } \ (2) \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 = 7,\ \Delta_2 = 48,\ \Delta_3 = \det A = 416 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \varphi(\widetilde{X}) = \frac{1}{7}\widetilde{x}_1^2 + \frac{7}{48}\widetilde{x}_2^2 + \frac{3}{26}\widetilde{x}_3^2. \tag{5}$$

Se observă că, în expresiile (4) şi (5), coeficienţii sunt respectiv inverşi unii faţa de ceilalţi. Metoda **EVV** (a **Tranformărilor ortogonale**) este – în principiu – aplicabilă dar valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 8 - 2\sqrt{3},\ \lambda_3 = 8 + 2\sqrt{3}$ iar determinarea vectorilor proprii U_2, U_3 ar fi mai dificilă.

A.4 Se recomandă transpunerea matricei endomorfismilui $L : V \to V$, dată într-o bază A, apoi scrierea polinomului caracteristic.:

$$L_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_A^{\mathrm{T}} \underset{\text{not}}{=} M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ (1) \ \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}P_L(\lambda) &= \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 3(\lambda - 1) + 1 - \lambda = \ \dots = \\ &= -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)\ ;\end{aligned} \tag{2}$$

$$P_L(\lambda) = 0 \underset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2}. \tag{3}$$

Cei trei vectori proprii se determină introducând succesiv valorile proprii din (3) în locul variabilei λ din matricea ce apare în al doilea membru al egalității multiple (3) şi rezolvând sistemele omogene (echivalente cu) $(M - \lambda_j I_3)U_j = \mathbf{0}$ cu matricile astfel obținute.

$$M - \lambda_1 I_3 = M - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{4}$$

$$M - \lambda_2 I_3 = M + I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \tag{5}$$

$$M - \lambda_3 I_3 = M - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Vectorii din (4), (5), 6) sunt vectori din $\mathbb{R}^3$ care au drept componente *coordonatele vectorilor proprii* în baza A ; aşadar, vectorii bazei canonice B – în care matricea endomorfismului va fi diagonală – sunt

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{b}_2 = 3\,\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\,\mathbf{a}_3, \\ \mathbf{b}_3 = -3\,\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \end{cases} \tag{7}$$

iar matricea lui L în această bază B va fi $L_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \lceil 1 \ \ -1 \ \ 2 \rfloor$. (8)

Verificarea rezultatului din (8) nu este obligatorie dar este recomandabilă. Expresiile (7) ale vectorilor bazei B în funcție de cei ai bazei A inițiale oferă matricea de transformare

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Cei interesați pot verifica dacă inversa din (9) este corectă. În continuare, cu matricea L_A din (1), cu matricile T & T^{-1} din (8) şi cu formula de schimbare a matricei unui endomorfism la schimbarea bazei se obține

$$L_B = T L_A T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \lceil 1 \quad -1 \quad 2 \rfloor =$$

$$= \lceil \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \rfloor .$$

Aşadar diagonalizarea din (8) este corectă.

Algebra liniară - I   Subiecte teză - ghid şi răspunsuri   B

B.1 Din definiția noțiuni de bază a unui spațiu liniar $V = \mathcal{L}(A)$ rezultă că orice vector $x \in V$ se poate exprima liniar, de o manieră unică, în baza A ; în scriere matriceală, $x = AX_A = X_A^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$; se va demonstra unicitatea (vectorului) coordonatelor X_A. Se va mai demonstra că orice două baze ale aceluiaşi spațiu liniar V constă din acelaşi număr de vectori, care defineşte dim V = dimensiunea spațiului respectiv (finit generat); aceasta demonstrație face uz de o *Lemmă* pentru care se cere doar enunțul. Caracterizările echivalente ale noțiunii de bază implică dimensiunea spațiului V, independența vectorilor familiei respective A şi faptul că A este o familie generatoare a spațiului: $V = \mathcal{L}(A)$.

Aplicație. Se vor scrie – mai întâi – coordonatele X_A care rezultă din expresia analitică dată a lui x. Aplicând formula $X_B = T^{-\mathrm{T}} X_A$, care presupune rezolvarea sistemului neomogen de matrice lărgită / extinsă $\left[T^{\mathrm{T}} | X_A \right]$, se va găsi

$$X_B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Corectitudinea acestora se poate verifica revenind la baza A, folosind matricea de transformare care este dată ; se va regăsi expresia inițială a vectorului x, $x = -2a_1 + a_2 - 2a_3 + a_4$..

B.2 Întrucât parametrul α apare în mai multe elemente ale matricei, se va calcula întâi determinantul acesteia, procedând întâi la obținerea a trei elemente = 0 pe o linie sau o coloană ; cea mai oportună alegere este coloana I-a, deci se vor obține trei 0-uri sub elementul 1 din colțul de NW (de exemplu). Se va găsi $\det A(\alpha) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 14)$. În consecință, va rezulta că $\operatorname{rang} A(\alpha) < 4 \Longleftrightarrow \alpha \in \{1, -14\}$. Se va constata că $\operatorname{rang} A(1) = 2$ şi $\operatorname{rang} A(-14) = 3$, folosind metoda aducerii matricei la o formă quasi-triunghiulară (de preferință). Rezolvând sistemul omogen de matrice $A(1)$ se va determina o relație generală de dependență liniară între cele 4 coloane, depinzând de 2 parametri reali arbitrari, de ex. β şi γ. O astfel de ralație este $(6\beta + 5\gamma)C_1 - (7\beta + 4\gamma)C_2 + 3\beta C_3 + \gamma C_4$. Din ea se pot obține oricâte relații de depemdență particulare dorim, dând valori arbitrare celor doi parametri.

B.3 Din expresia analitică dată $\varphi(X) = 2cx_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ se va deduce matricea A a formei pătratice. Metoda **Gauss** este foarte uşor aplicabilă, dar este necesară scoaterea în factor a lui 2 din termenii care-l conțin pe x_1. Se va determina o expresie canonică de forma $\varphi(\overline{X}) = 2\overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2 + 4\overline{x}_3^2$.

Metoda transformărilor ortogonale - EVV necesită scrierea *polinomului caraczteristic* al matricei A şi determinarea *valorilor proprii* ; acestea sunt

$$P_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{bmatrix} = \ldots = \qquad (1)$$

$$= -(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8) \; ; \qquad (2)$$

$$P_L(\lambda) = 0 \underset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4}. \qquad (3)$$

Rezolvând cele trei sisteme omogene $(M - \lambda_j I_3)U_j = \mathbf{0}$ $(j = \overline{1,3})$ se vor determina cei trei *vectori proprii* corespunzători,

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix};\; U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix};\; U_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Utilizând produsul scalar uzual din $\mathbb{R}^3$, $U_i \cdot U_j$ se va constata că cei trei vectori din (4) sunt 2 câte 2 ortogonali. Pe de altă parte, ei au aceeaşi normă:

$$\| U_1 \| = \| U_2 \| = \| U_3 \| = 3. \tag{5}$$

Din (4) şi (5) se deduce *matricea ortogonală* a *versorilor proprii*,

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \tag{6}$$

Calculând produsul $P^{\mathrm{T}}AP$, cu P din (6) şi A scrisă anterior, se va găsi $P^{\mathrm{T}}AP = \mathrm{diag}(1,-2,4)$, cu valorile proprii din (3) pe diagonala principală. Expresia canonice ce corespunde acestei matrici este

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}) = \widetilde{x}_1^2 - 2\widetilde{x}_2^2 + 4\widetilde{x}_3^2, \tag{7}$$

signatura sa fiind aceeaşi cu cea care rezultă din expresia canonică Gauss : $\mathrm{sgn}\,\varphi = (2,1,0)$. Să mai precizăm că versorii proprii din (6) constituie chiar *baza canonică* $B = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}$, în care matricea formei pătratice are forma diagonală menționată, iar expresia sa analitică este expresia canonică (7).

B.4 Endomorfismele liniare sunt morfisme de la un spațiu V la (în) el însuşi, $L : V \to V$. Dacă V este generat de o bază A, deci $V = \mathcal{L}(A)$, matricea sa în baza A este unic definită prin relația $LA^{\mathrm{T}} = L_A \cdot A^{\mathrm{T}}$. Expresia analitică a imaginii unui vector $x = AX_A = X_A^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ în baza A este dată de $Lx = X_A^{\mathrm{T}} \cdot L_A \cdot A^{\mathrm{T}}$; ca detaliu, punctul din această expresie se poate omite, fiind vorba de produse de matrici. Scalarul λ este o *valoare proprie* a lui L iar $x \neq \mathbf{0}$ este un *vector propriu* corespunzător acesteia dacă ei sunt legați prin relația $\boxed{Lx = \lambda x}$. În tratarea acestui subiect teoretic se vor defini multimea $S^*(\lambda)$ şi subspațiul $W(\lambda)$, se vor enunța proprietățile lor. Se va arăta că orice vector nenul din cele două mulțimi este un vector propriu corespunzător lui λ; se va arăta că $W(\lambda) = S^*(\lambda) \cup \{\mathbf{0}\}$ este un subspațiu, *invariant în raport cu* L. Se va enunța *problema diagonalizării* unui endomorfism L (prin găsirea unei baze "canonice" B în care matricea sa L_B să fie o matrice diagonală).

Aplicație. Pentru a determina valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dat prin matricea sa (în baza canonică E), se recomandă transpunerea acesteia:

$$L_E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_E^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = M. \tag{1}$$

În acest caz particular cele două matrici coincid întrucât matricea L_E era simetrică. În continuare se va scrie polinomul caracteristic $P_L(\lambda)$ şi se vor determina rădăcinile sale, adică *valorile proprii* ale endomorfismului, aşa cum s-a procedat în aplicarea metodei **EVV** pentru diagonalizarea formei pătratice de la subiectul $\boxed{\mathbf{B.3}}$ .Se va obţine $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$ cu rădăcinile (valorile proprii)

$$\boxed{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4} \tag{2}$$

şi vectorii proprii corespunzători $U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ U_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};\ U_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3)

Se va putea verifica că – în baza $B = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix}$ – matricea $L_B = \lceil \lambda_1 \ \ \lambda_2 \ \ \lambda_3 \rfloor$ constatând că se verifică egalitatea $MS = S \lceil \lambda_1 \ \ \lambda_2 \ \ \lambda_3 \rfloor$, unde $S = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix}$. Egalitatea celor două produse este echivalentă cu *relaţia de asemănare* (*similaritate*) între matricea L_E^{T} şi matricea diagonală

$\lceil \lambda_1 \ \ \lambda_2 \ \ \lambda_3 \rfloor$.

C.1 Se va prezenta forma generală a unui sistem liniar (de m ecuații în n necunoscute), *echivalent cu ecația matriceală* $AX = b$. Se vor clasifica sistemele (neomogene / omogene) după vectorul termenilor liberi $b \in \mathbb{R}^m$. Se va scrie matricea lărgită (sau extinsă) $\widetilde{A}$, relevantă doar pentru sistemele neomogene. Se va defini mulțimea soluțiilor $S = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = b\}$. Se vor clasifica sistemele liniare după multimea S a soluțiilor (în *compatibile* / *incompatibile*, iar cele compatibile în *determinate* / *nedeterminate*). Se va arăta că S este un subspațiu, în cazul unui sistem omogen (cu $.b = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$) Se va arăta că − dacă S are mai mult de o soluție − atunci ea conține o infinitate de soluții (fiind de puterea continuului, ca şi $\mathbb{R}$). Se vor enunța *teoremele clasice de compatibilitate* (Kronecker-Capelli şi Rouché).

Aplicație. Se scrie matricea lărgită a sistemului neomogen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{array}\right]. \quad (2)$$

Prin transformări aplicate <u>numai asupra liniilor</u> acestei matrici ea poate fi redusă la o formă quasi-triunghiulară şi apoi la una quasi-diagonală (care o conține pe I_r − matricea unitate de ordin r = rang$A$) ca submatrice, din care se va putea scrie imediat soluția generală a sistemului (1). Prezentăm câteva transformate ale matricei lărgite din (2), cititorul urmând să identifice ce transformări cu liniile au fost efectiv aplicate.

$$\widetilde{A} \backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right] \backsim$$

$$\backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \backsim \quad (3)$$

La ultima matrice din (3) se observă ultimele două linii proporționale, ceea ce permite eliminarea ultimei linii, deci a ultimei ecuații; dar, pentru a pune în evidență forma quasi-triunghiulară şi chiar quasi-diagonală, facem transformarea $L_4 - 2L_3$ care face să apară blocul zero inferior (mai precis, linia $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^5$). Se observă că rang$A = 3$ iar a patra variabilă este secundară şi se poate nota $x_4 = \alpha$. Rezultă

$$\ldots \backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad X(\alpha) = \begin{bmatrix} 5-3\alpha \\ -5+2\alpha \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Se poate verifica soluția generală din (4) calculând produsul $AX(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

$\boxed{\textbf{C.2}}$ Formele liniare (FL) sunt aplicații de la un spațiu liniar V la corpul scalarilor $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). O formă finiară $f : V \to \mathbb{K}$ verifică proprietatea de liniaritate:

$$(\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K})\,(\forall x_1, x_2 \in V)\ \boxed{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}\,. \tag{LIN}$$

Se va enunța şi demonstra (prin inducție) proprietatea *liniarității extinse* şi se va scrie această proprietate cu notații matriceale. Dacă $V = \mathcal{L}(A)$, coeficienții unei FL f în baza $A = [a_1\ a_2 \ldots a_n]$ sunt componentele vectorului-linie $f(A) = [f(a_1)\ \ f(a_2)\ \ldots\ f(a_n)] = [\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n] = [\alpha]$ .Expresia analitică a imaginii unui vector $x = AX_A$ este dată de

$$f(x) = [\alpha] X_A. \tag{1}$$

Se va demonstra expresia (1) folosind liniaritatea extinsă (în scriere matriceală). Dacă baza A se transformă în baza B cu matricea de transformare T (deci $B^{\mathrm{T}} = TA^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow B = AT^{\mathrm{T}}$) atunci coeficienții formei liniare se schimbă cu formula $f(B) = [\beta] = [\alpha]T^{\mathrm{T}}$; se va demonstra această formulă.

Aplicație. Forma liniară $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ fiind definită prin $f(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$, rezultă imediat coeficienții săi în baza cnonică E a spațiului $\mathbb{R}^4$,

$$f(E) = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Calculul lui $f(X)$ pentru $X = [7\quad -4\quad 1\quad 2]^{\mathrm{T}}$. revine la aplicarea formulei generale (2) cu $[\alpha] \to [\varepsilon]$ din (2) şi $X_A \to X_E = X$:

$$f(X) = [\varepsilon]X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 7 - 8 + 3 + 2 = 4\,. \tag{3}$$

Determinarea coeficienților $[\beta]$ ai lui f în baza

$$B = [\mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2\ \ \mathbf{b}_3\ \ \mathbf{b}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

se obține utilizând formula din partea teoretică a acestui subiect, cu înlocuirile $A \to E$, $[\alpha] \to [\varepsilon]$ din (2) şi $T^{\mathrm{T}} = B$. Aşadar

$$f(B) = [\beta] = [\varepsilon]B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 & -2 & -13 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Regăsirea valorii $f(X) = 4$ din (3), găsită în baza canonică E, necesită determinarea coordonatelor X_B Acestea se obțin rezolvând sistemul neomogen (echivalent cu ecuația $BX_B = X$) prin transformările

$$[B|X] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -1 & -8 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & -5 & -8 & -7 \\ 8 & 0 & -4 & -8 & -10 \end{array}\right] \backsim$$

$$\backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -1 & -8 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & -4 & -5 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & -8 & -4 \\ -4 & 1 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 0 & -4 & -11 \end{array}\right] \backsim$$

$$\backsim \left[\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 7/4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -3/2 & 0 & 0 & 1 & 11/4 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 7/4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -3/2 & 0 & 0 & 1 & 11/4 \end{array}\right] \backsim$$

$$\backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 13/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 1 & -7/4 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad X_B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -12 \\ 13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Cu formula (1) şi cu înlocuirile necesare (aferente bazei B), utilizând coeficienții din (5) şi coordonatele din (6), avem

$$f(X) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 16 & 9 & -2 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 \\ 13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(-192 + 117 + 91) = \frac{16}{4} = 4,$$

deci s-a regăsit valoarea din (3). Aceasta confirmă faptul că valoarea unei FL (cu coeficienți dați sau cu expresie analitică dată, într-o anumită bază) rămâne aceeaşi chiar dacă se schimbă baza, implicit coeficienții formei şi coordonatele vectorului-argument.

$\boxed{\textbf{C.3}}$ Matricea formei liniare $\varphi(X) = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$ (1) este

$$f(E^{\mathrm{T}}, E) = [\varepsilon] \underset{\text{not}}{=} A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) + 4(\lambda - 1) + 4(\lambda + 1) = \tag{3}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 9)\,; \tag{4}$$

Metoda transformărilor ortogonale (sau **EVV**) continuă cu determinarea *valorilor proprii*:

$$(4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 3} \tag{5}$$

Continuăm ca şi la rezolvarea subiectului $\boxed{\textbf{B.3}}$, rezolvând cele trei sisteme omogene $(A - \lambda_j I_3)\,U_j = \mathbf{0}$ $(j = \overline{1,3})$ pentru a determina cei trei *vectori proprii* corespunzători:

$$A - \lambda_1 I_3 = A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \backsim$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}; \tag{6}$$

$$A - \lambda_2 I_3 = M + 3I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \backsim$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow U_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \tag{7}$$

$$A - \lambda_3 I_3 = A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \backsim$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow U_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

$$(6)+(7)+(8) \Rightarrow \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Utilizând produsul scalar uzual din $\mathbb{R}^3$, $U_i \bullet U_j$, se constată că cei trei vectori din (9) sunt 2 câte 2 ortogonali. Pe de altă parte, ei au aceeaşi normă:

$$\| U_1 \| = \| U_2 \| = \| U_3 \| = 3. \tag{10}$$

Din (9) şi (10) se deduce *matricea ortogonală* a *versorilor proprii*,

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \tag{11}$$

Calculând produsul $P^{\mathrm{T}}AP$, cu P din (11) şi A din (2) (şi folosind simetria matricei P), avem

$$P^{\mathrm{T}}AP = PAP = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \lceil 0 \quad -3 \quad 3 \rfloor. \tag{12}$$

Aşadar, $P^{\mathrm{T}}AP = \operatorname{diag}(0,-3,3)$, cu valorile proprii din (4) pe diagonala principală. Expresia canonică ce corespunde matricei diagonale (12) este

$$\varphi(\widetilde{X}) = -3\tilde{x}_2^2 + 3\tilde{x}_3^2,$$

cu signatura $\operatorname{sgn}\varphi = (1,1,1)$.. Deci φ este o formă pătratică nedefinită.

$\boxed{\textbf{C.4}}$ Morfismele liniare $f: U \to V$ sunt aplicaţii de la un spaţiu liniar U într-un (posibil alt) spaţiu V, care verifică proprietatea de liniaritate, formal identica cu (LIN) de la subiectul $\boxed{\textbf{C.2}}$. Liniaritatea extinsă exprimă imaginea unei combinaţii liniare de oricâţi vectori şi se poate scrie şi utilizând notaţii matriceale:

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i) \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathcal{X}\Lambda) = f(\mathcal{X})\Lambda \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\mathcal{X}^{\mathrm{T}}\right) = \Lambda^{\mathrm{T}} f(\mathcal{X}^{\mathrm{T}}). \tag{1}$$

În a doua şi a treia exprimare din (1), $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}$ iar $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.
Matricea $F_{A,B}$ într-o pereche de baze (A,B) se defineşte prin imaginea bazei A – cu $U = \mathcal{L}(A)$ – exprimată în baza B care-l generează pe V ($V = \mathcal{L}(B)$) :

$$\boxed{f\left(A^{\mathrm{T}}\right) = F_{A,B}\,B^{\mathrm{T}}}. \tag{2}$$

Expresia analitică a unei imagini $y = f(x)$ se obține din relația (2), exprimarea liniară a vectorului-argument $x = AX_A = X_A^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$ în baza A şi din liniaritatea extinsă (1) :

$$\boxed{f(x) = f\left(X_A^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\right) = X_A^{\mathrm{T}} F_{A,B}\,B^{\mathrm{T}}}. \tag{3}$$

Schimbarea matricei la schimbările celor doua baze (cu matricea S, respectiv T). rezultă din legăturile $\overline{A}^{\mathrm{T}} = SA^{\mathrm{T}}$ şi $\overline{B}^{\mathrm{T}} = TB^{\mathrm{T}}$, plus liniaritatea extinsă aplicată simultan pentru liniile matricei S, respectiv T ca linii de scalari, în rolul lui Λ din (1). Ca şi $F_{A,B}$, $F_{\overline{A},\overline{B}}$ se defineşte printr-o relație de forma (2):

$$f\left(\overline{A}^{\mathrm{T}}\right) = F_{\overline{A},\overline{B}}\,\overline{B}^{\mathrm{T}} = F_{\overline{A},\overline{B}}\,TB^{\mathrm{T}} = f\left(SA^{\mathrm{T}}\right) = Sf\left(A^{\mathrm{T}}\right) = S\,F_{A,B}\,B^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Egalând (direct) al treilea cu ultimul membru al acestei egalități multiple (4) şi aplicând proprietatea unicității coordonatelor (în baza B) se obține

$$F_{\overline{A},\overline{B}}\,T = S\,F_{A,B} \;\Rightarrow\; \boxed{F_{\overline{A},\overline{B}} = SF_{A,B}\,T^{-1}}. \tag{5}$$

Aplicație. Morfismul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definit prin $f(X) = [x_1 + 2x_3 \quad x_1 + x_2 - x_3]^{\mathrm{T}}$ se scrie, mai explicit,

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = MX. \tag{6}$$

Această egalitate furnizează matricea M care este transpusa matricei morfismului f în perechea de baze canonice ale celor două spații, (E_3, E_2). Aşadar,

$$F_{E_3,E_2} = M^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Pentru determinarea subspațiilor $\mathrm{Ker}f$ *şi* $\mathrm{Im}\,f$ se folosesc definițiile acestora. Un vector $X \in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow MX = \mathbf{0}$; aşadar, se rezolvă sistemul omogen de matrice M :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X(\alpha) = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow \mathrm{Ker}f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \tag{8}$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\,f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right). \tag{9}$$

Dar cei trei vectori generatori ai imaginii din (9) nu sunt independenți întrucât $\dim \mathbb{R}^2 = 2$; evident, se poate elimina al treilea vector şi rezultă că

$$\mathrm{Im} f = \mathcal{L}(E_2) = \mathbb{R}^2. \tag{10}$$

Din (8) şi (10) rezultă că morfismul f nu este injectiv dar este surjectiv.

Matricea $F_{A,B}$ în perechea de baze (A,B), unde

$$A: \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ iar } B: \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

se obţine cu formula (5), ştiind că trecerea de la o matrice canonică precum E_3 la baza A se realizează cu matricea de trensformare $S = A^{\mathrm{T}}$. Analog, $T = B^{\mathrm{T}}$, însă această ultimă matrice trebuie inversată:

$$\left[B^{\mathrm{T}} \mid I_2\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^{-1} = B^{-\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Aşadar, (5) + (11.1) + (7) + (12) conduc la

$$F_{A,B} = S\,F_{E_3,E_2}T^{-1} = A^{\mathrm{T}}\,F_{E_3,E_2}\,B^{-\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -11 \\ 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

În fine, imaginea $f(X) = Y$ a lui $X = a_1 - 2a_2 + 5a_3$ se va determina atât cu X ca vector din $\mathbb{R}^3$ şi definiţia (6) a morfismului, cât şi cu X exprimat în baza A. şi matricea $F_{A,B}$.

$$X = a_1 - 2a_2 + 5a_3 \underset{(11.1)}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}; \tag{14}$$

$$(6)\ \&\ (14) \Rightarrow f(X) = \begin{bmatrix} 3+12 \\ -2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -8 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Coordonatele X_A rezultă imediat din expresia analitică dată în enunţ: $X_A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ iar formula (3) cu matricea din (13) conduc la

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -11 \\ 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -23 & -61 \end{bmatrix} B^{\mathrm{T}} = -23\,\mathbf{b}_1 - 61\,\mathbf{b}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} -46 + 61 \\ -69 + 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -8 \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Imaginea determinată în (16) cu utilizarea perechii de baze (A, B) coincide cu cea gasită în (15) lucrând cu bazele canonice (E_3, E_2), ceea ce constituie o verificare.

Algebra liniară - I   Subiecte teză - ghid şi răspunsuri   D

D.1 Coordonatele unui vector $x \in V = \mathcal{L}(A)$ în baza A a spaţiului V rezultă din proprietatea unei baze $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ de a genera întreg spaţiul. Există deci n scalari $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ astfel încât

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \xi_1 \mathbf{a}_1}. \tag{1}$$

Utilizând notaţii matriceale şi anume baza A ca linie de vectori (asa cum a fost scrisă mai sus) iar coordonatele lui x drept componente ale unei coloane notată $X_A = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, expresia lui x din (1) se poate scrie sub una din formele echivalente

$$\boxed{x = AX_A = X_A^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}}. \tag{2}$$

Unicitatea vectorului(-coloană al) coordonatelor unui vector $x \in V$ dat, într-o bază dată A, se demonstrează prin reducere la absurd, utilizând proprietatea de independenţă liniară a vectorilor bazei. Dacă baza A se transformă într-o bază B cu matricea de transformare T ($B^{\mathrm{T}} = TA^{\mathrm{T}}$), coordonatele în baza iniţială X_A se vor transforma în noile coordonate X_B cu formula de transformare

$$\boxed{X_B = T^{-\mathrm{T}} X_A} \quad \text{unde} \quad T^{-\mathrm{T}} = \left(T^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \tag{3}$$

Demonstraţia se face utilizând notaţiile matriceale, mai exact a doua expresie a lui x din (2) precum şi cea care corespnde "noii" baze $B : x = X_B^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}$. Evident se va folosi şi legătura între cele două baze, cu matricea de transformare T, scrisă sub forma $B^{\mathrm{T}} = TA^{\mathrm{T}}$. Determinarea noilor coordonate X_B revine la rezolvarea sistemului neomogen $T^{\mathrm{T}} X_B = X_A$.

Aplicaţie. Matricea de trecere (sau de transformare) de la baza

$$A : \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{la } B : \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

se obţine utilizând relaţia $B = AT^{\mathrm{T}}$ care este o ecuaţie matriceală de tip $AX = B$ şi se rezolvă prin transformări pe matricea bloc

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \backsim \tag{4}$$

$$\backsim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow T^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$X = 3a_1 - a_2 + 5a_3 \quad \Rightarrow \quad X_A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

$$(3)+(5)+(6) \quad \Rightarrow \quad X_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \ldots = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -50 \\ -16 \\ 35 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Inversa care apare în (7) nu trebuie determinată ca atare; vectorul-coloană X_B se poate obține direct rezolvând matriceal sistemul neomogen de matrice lărgită $\left[\, T^{\mathrm{T}} \mid X_A \,\right]$.

A doua modalitate pentru obținerea (vectorului) coordonatelor X_B necesită găsirea vectorului $X \in \mathbb{R}^3$ din expresia sa lineară (6) înlocuind vectorii bazei A dați în enunț; de asemenea, se folosesc și vectorii bazei B dați de asemenea în enunț. Formula $BX_B = X$ reprezintă un sistem care se rezolvă pe matricea lărgită

$$\widetilde{B} = [B \mid X] \ \text{ cu } X = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Se vor regăsi coordonatele din (7).

$\boxed{\textbf{D.2}}$ Formele biliniare (FBL) $f : U \times V \to \mathbb{R}$ sunt aplicații scalare de două variabile-vectori $(x, y) \in U \times V$. Pentru ca să fie o FBL, aplicația f trebuie să verifice *proprietatea de liniaritate* (LIN), întâlnite și la formele liniare (precum și la morfisme liniare), *în fiecare din cele două argumente*; în cazul când cele două spații sunt definite peste corpul complex $\mathbb{C}$, liniaritatea în y are o formă specifică, în sensul că scalarii de la argument se mută ca factori "în fața lui f" sub formă conjugată. Prezentăm mai jos proprietățile mai generale de liniaritate <u>extinsă</u>, în fiecare argument.

$$(\mathrm{LIN}_1\text{-Ext}) \quad f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, y\right) = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i, y)\,; \tag{1}$$

$$(\mathrm{LIN}_2\text{-Ext}) \quad f\left(x, \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j\right) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \overline{\mu}_j f(x, y_j) \tag{2}$$

În aceste egalități apar numere diferite de vectori în fiecare din cele două combinații liniare, și este posibil ca acestea să coincidă (respectiv) cu dimensiunile celor 2 spații U, V. În prezentarea acestui subiect se vor scrie proprietățile din (1) & (2) și folosind *notații matriceale.*

Matricea $F_{A,B}$ într-o pereche de baze (A,B), unde $A = [a_1\ a_2 \ldots a_m]$ și $B = [b_1\ b_2 \ldots b_n]$, se definește ca matricea ale cărei elemente sunt valorile luate de FBL pentru fiecare pereche de vectori din (A,B), adică (a_i, b_j):

$$\boxed{F_{A,B} = [f(a_i, b_j)]_{m\times n} = [\varphi_{ij}]_{m\times n} = f\left(A^{\mathrm{T}}, B\right)}. \tag{3}$$

Expresia analitică pentru $f(x, y)$. rezultă din aplicarea proprietăților de liniaritate extinsă (1) & (2), simultan în amblele variabile, cu argumentele x, y exprimate fiecare în baza spațiului respectiv: :

$$f(x, y) = f\left(X_A^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}, B Y_B\right) \underset{(1,2)}{=} X_A^{\mathrm{T}} f\left(A^{\mathrm{T}}, B\right) Y_B \underset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{f(x, y) = X_A^{\mathrm{T}} F_{A,B}\, Y_B} \tag{4}$$

Scrierea matricei $F_{A,B}$ sub forma $f\left(A^{\mathrm{T}}, B\right)$ se justifică întrucât elementul curent $\varphi_{ij} = f(a_i, b_j)$ se găsește pe linia i ce corespunde lui a_i din A^{T}, respectiv pe coloana j ce corespunde lui b_j din B.

Formula de *schimbare a matricei la schimbările celor două baze* (cu matricea S, respectiv T) rezultă din proprietățile de liniaritate extinsă în fiecare argument, aplicate relațiilor de legătură între perechile respective de baze (veche şi nouă) în fiecare spațiu şi matricele respective de transformare. Dacă $U = \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\overline{A})$ şi $V = \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(\overline{B})$, atunci

$$\overline{A}^{\mathrm{T}} = SA^{\mathrm{T}} \text{ şi } \overline{B}^{\mathrm{T}} = TB^{\mathrm{T}} \Rightarrow F_{\overline{A},\overline{B}} \underset{(3)}{=} f\left(\overline{A}^{\mathrm{T}},\overline{B}\right) = f\left(SA^{\mathrm{T}},BT^{\mathrm{T}}\right) = Sf\left(A^{\mathrm{T}},B\right)T^{\mathrm{T}} \underset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\overline{A},\overline{B}} = S\,F_{A,B}\,T^{\mathrm{T}}}. \tag{5}$$

Aplicație. Rangul formei biliniare f (definită pe $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$) cu matricea într-o bază A,

$$[\varepsilon] = A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6+\lambda \\ 2 & 3 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 & -5 \\ 1 & 6 & 12 & 19 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

va depinde – în mod necesar – de valorile lui $\lambda \in \mathbb{R}$. Dezvoltând deteminantul lui $A(\lambda)$ după coloana I-a, transformată în prealabil prin $L_2 - 2L_1$, $L_3 - L_1$, $L_3 - L_1$, va conduce la un determinant de ordinul 3 având valoarea lui $|A(\lambda)| = (\lambda-1)^2(\lambda+14)$. Aşadar, $\operatorname{rang}A(\lambda) = 4$ pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,-14\}$ şi $\operatorname{rang}A(\lambda) < 4$ pentru $\lambda \in \{1,-14\}$. Considerăm ca valoare a lui λ cu rang $f < 4$ valoarea pozitivă $\lambda = 1$. Obținem matricea

$$[\varepsilon] = A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 6 & 12 & 19 \end{bmatrix}.$$

Utilizând formula (4) adaptată la cazul particular $U = V = \mathbb{R}^4 \Rightarrow X_A = X$ & $Y_B = Y$, obținem

$$f(X,Y) = X^{\mathrm{T}}[\varepsilon]Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 6 & 12 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 36 & 68 & 104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -8+36+208 = 236.$$

D.3 Pentru Q-forma (definită pe $\mathbf{R}^3$)

$$\varphi(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3. \tag{1}$$

se pot aplica cel puțin două metode de diagonalizare întrucât matricea sa este

$$f\left(E^{\mathrm{T}},E\right) = A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Metoda Gauss este oricând aplicabilă, şi se observă din (2) că al doilea determinant este $\Delta_2 = -3,$ deci şi metoda **Jacobi** va fi aplicabilă. Putem începe cu acesta, scriind

$$\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = -3,\ \Delta_3 = --27 \Rightarrow \overline{\varphi}\,(\overline{X}) = \overline{x}_1^2 - \frac{1}{3}\,\overline{x}_2^2 + \frac{1}{9}\,\overline{x}_3^2. \tag{3}$$

Metoda **Gauss**. $\varphi(X) = (x_1^2 - x_1x_3) - 4x_2x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3 = \ldots$

$$= (x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 - 3(x_2 + 2x_3)^2 + 9x_3^2. \tag{4}$$

Similar cu soluția la subiectul $\boxed{\textbf{A.3}}$, se scrie transformarea

$$(T):\ \begin{cases} \widetilde{x}_1 &= x_1 - 2x_2 - 2x_3, \\ \widetilde{x}_2 &= x_2 + 2x_3, \\ \widetilde{x}_3 &= x_3, \end{cases} \quad \underset{(4)}{\Rightarrow} \quad \widetilde{\varphi}(\widetilde{X}) = \widetilde{x}_1^2 - 3\widetilde{x}_2^2 + 9\widetilde{x}_3^2. \tag{5}$$

Evident, $\varphi(X)$ este nedefinită întrucât $\operatorname{sgn}\varphi = (2,1,0),$ aşa cum rezultă din (3) şi (5).

Metoda **EVV**. Se obține polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \ \ldots\ = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27) \ \Rightarrow \tag{6}$$

$$\left[P_A(\lambda) = 0 \ \underset{(2)}{\Rightarrow} \ \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -3} \right]. \tag{7}$$

$$(2)+(7) \quad \Rightarrow \ A - \lambda_{1,2} I_3 = A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$U_{1,2}(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \tag{8}$$

$$\Rightarrow U_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ \& \ U_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

$$(2)+(7) \quad \Rightarrow \ A - \lambda_3 I_3 = A + 3I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \backsim$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{cu} \quad \| U_3 \| = \sqrt{3} \; ; \tag{10}$$

$$(7) \quad \Rightarrow \quad \| U_1 \| = \| U_2 \| = \sqrt{2} \ \text{însă} \ U_1 \cdot U_2 = 1 \neq 0 \; ; \tag{11}$$

(11) $\Rightarrow$ U_1 & U_2 nu sunt ortogonali, deci unul din ei trebuie înlocuit de exemplu, vom căuta un vector propriu U_2' de forma primului vector din (8) care să fie $\perp U_1$:

$$U_1 \perp \begin{bmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha \, ; \tag{12}$$

$$U_{1,2}(\alpha, -2\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} \underset{\alpha=1}{\Rightarrow} U_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{cu} \quad \| U_2' \| =. \sqrt{6} \tag{13}$$

$$\text{Se constată că vectorii proprii } U_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ U_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ U_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

sunt 2 câte doi ortogonali. Ținând seama de normele lor din (11), (10) şi (13) putem acum scrie – la fel ca în rezolvarea subiectului $\boxed{\mathbf{B.3}}$ – matricea ortogonală P:

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Calculând produsul care trebuie să furnizeze matricea diagonală, prinn transformarea ortogonală de matrice P din (15), se va găsi

$$P^{\mathrm{T}} A P = \operatorname{diag}(3, 3, -3),$$

cu valorile proprii din (7) pe diagonala principală. Expresia canonice ce corespunde acestei matrici este

$$\varphi'(X') = 3x_1'^2 + 3x_2'^2 - 3x_3'^2 \,, \tag{16}$$

Se regăseşte aceeaşi signatură $\operatorname{sgn}\varphi = (2, 1, 0)$ ca şi cu celelalte două metode. Reamintim că $B = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}$ este baza canonică, cu $[\beta] = \lceil 3 \quad 3 \quad -3 \rfloor$, adică baza în care Q-forma capătă expresia diagonală (sau canonică) din (16).

$\boxed{\textbf{D.4}}$ Valorile proprii ale endomorfismului dat prin matricea sa (într-o bază A) se obțin din ecuația caracteristică:

$$L_A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \ (1) \quad \Rightarrow \quad M_L =. \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad (2)$$

$$\Rightarrow P_L(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \ \ldots \ = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3 \ ; \qquad (3)$$

$$(3) \ \Rightarrow \ \left[P_L(\lambda) = 0 \ \underset{(2)}{\Rightarrow} \ \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1} \right]. \qquad (4)$$

Aşadar, endomorfismul dat prin matricea sa (1) într-o bază A admite *o singură valoare proprie triplă*. Urmează să se rezolve un singur sistem omogen de matrice

$$M_L + I_3 \underset{(2)}{=} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ U_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

este *singurul* vector propriu al endomorfismului, ceea ce înseamnă că multiciplicitatea geometrică a valorii proprii triple din (3) este $h_1 = 1$ în timp ce multiplicitatea sa algebrică este $k_1 = 3$; în aceste condiții, endomorfismul L *nu este diagonalizabil*; el admite o formă normală Jordan.

E.1 Mulțimea $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ generată de o familie de vectori $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset V$ se defineşte ca mulțimea combinațiilor liniare de aceşti vectori (numiți generatori). Notăm deci

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m \, : \, \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ pentru } i = \overline{1,m} \right\}. \tag{1}$$

Proprietatea mulțimii $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ de a fi un subspațiu al spațiului $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ rezultă imediat, considerând doi vectori din $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ şi o combinație liniară arbitrară a acestora:

$$(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \; \& \begin{cases} x &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m \\ y &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_m u_m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha x + \beta y =$$

$$= \alpha(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m) +$$

$$+ \beta(\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_m u_m) = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) u_1 + \ldots + (\alpha\lambda_m + \beta\mu_m) u_m \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha x + \beta y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq_{\text{subsp}} V.$$

Un spațiu liniar V este finit generat dacă există o familie finită de vectori $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ astfel încât $V = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Familia $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset V$ este liniar dependentă / independentă dacă vectorii din care este formată au această proprietate; se va formula analitic această proprietate şi se va enunța formal (eventual şi demonstra) Propoziția conform căreia, *dacă $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ este o familie independentă de vectori atunci orice $p+1$ vectori din $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ sunt liniar dependenți.*

Aplicație. Determinarea rangului matricei

$$A = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \mathbf{a}_3 \;\; \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{bmatrix} \tag{2}$$

ca şi a parametrului λ pentru care vectorul $b(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \\ \lambda \end{bmatrix}$ (3)

este exprimabil liniar în vectorii familiei $\mathcal{A}$ (sau ai unei subfamilii a acesteia) se pot realiza simultan cu transformări asupra liniilor matricei lărgite a sistemului neomogen $AX = b(\lambda)$, adică

$$\widetilde{A}(\lambda) \underset{(2,3)}{=} \left[\begin{array}{rrrr|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{rrrr|c} 21 & -15 & 0 & -6 & 21 \\ 28 & -20 & 0 & -8 & 28 \\ -8 & 6 & 1 & 5 & -9 \\ 63 & -45 & 0 & -18 & \lambda + 63 \end{array}\right]; \tag{4}$$

se obaervă că liniile L_1, L_2 şi (chiar) L_4 din a doua matrice ce apare mai sus sunt proporționale cu linia $\left[7 \;\; -5 \;\; 0 \;\; -2 \;|\; 7\right] \Leftrightarrow \lambda = 0$. Într-adevăr, prin transformările $\frac{1}{3} L_1$, $\frac{1}{4} L_2$ şi $\frac{1}{9} L_4$ conduc la

$$\backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 0 & -2 & 7 \\ -8 & 6 & 1 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda/9 \end{array}\right]. \tag{5}$$

Rezultă din (5) că sistemul va fi compatibil $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda = 0}$. Cu această valoare a parametrului, sistemul se reduce la numai 2 ecuații iar matricea sa lărgită la numai două linii, anume

$$\widetilde{A}(0) \backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -5 & 0 & -2 & 7 \\ -8 & 6 & 1 & 5 & -9 \end{array}\right] \underset{1/7\,L_1}{\backsim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5/7 & 0 & -2/7 & 1 \\ -8 & 6 & 1 & 5 & -9 \end{array}\right] \backsim \tag{6}$$

$$\backsim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5/7 & 0 & -2/7 & 1 \\ 0 & 2/7 & 1 & 19/7 & -1 \end{array}\right]. \tag{7}$$

Variabilele x_2 şi x_4 ale sistemului cu matricea lărgită (echivalentă) (7) sunt – evident – variabile secundare; spre a evita apariția fracțiilor, le vom nota (respectiv) $x_2 = 7\alpha$ şi $x_4 = 7\beta$ ceaa ce conduce la soluția generală (care depinde de cei doi parametri α şi β)

$$X(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 + 5\alpha + 2\beta \\ 7\alpha \\ -1 - 2\alpha - 19\beta \\ 7\beta \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Din această soluție generală (8) rezultă o dublă infinitate de exprimări ale vectorului $b(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ în funcție de coloanele matricei A din (2), notate $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_4$. Dând valori particulare celor doi parametri se obțin exprimări particulare. De exemplu, cu $\alpha = \beta = 1$ obținem

$$X(1, 1) = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -22 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow b(0) = 8\mathbf{a}_1 + 7\mathbf{a}_2 - 22\mathbf{a}_3 + 7\mathbf{a}_4. \tag{9}$$

Cei interesați vor putea verifica exprimarea liniară (9).

Observație. Exista şi o abordare mai "clasică" a rezolvării acestui subiect, începând cu determinarea lui rang$A$ care ar fi fost găsit $= 2$. Ar fi urmat calculul a doi determinați caracteristici (de ordin 3), iar condiția de anulare a ambilor (conform Teoremei lui Rouché) ar fi impus $\lambda = 0$; mai departe, rezolvarea sistemului redus la numai două ecuații ar fi continuat la fel ca mai sus, eventual prin transformări pe matricea lărgită constând din L_2 şi L_3 ale matricei $\widetilde{A}(0)$, echivalentă cu matricea (de tip 2×5) din (6) ş.a.m.d.

E.2 Matricile pătratice din spațiul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sunt matrici de forma $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Pe lângă proprietățile matricelor din spațiul mai general al $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ al matricelor "dreptunghiulare"), cele pătratice au proprietăți suplimentare (sau specifice), mai ales în raport cu produsul de matrici. Listăm – fără demonstrații – aceste proprietăți ; demonstrațiile se prezintă în liceu (cl. a XI-a) iar unele din ele se pot găsi în manualul $\left[\text{Carausu,1999}\right]$. sau în notele de curs.

(i) Produsul $AB = C$ este peste tot definit în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; (ii) $(AB)C = A(BC)$ − asociativitatea ; (iii) $A(B+C) = AB + AC$ − distributivitatea produsului față de sumă, valabilă şi la matrici generale ; (iv) produsul a două matrici este – în general – necomutativ : $AB \neq BA$;
(v) existența *elementului neutru* la produs, matricea unitate I_n, cu proprietatea $AI_n = I_nA = A$; (v) definiția determinatului asociat unei matrici pătratice A prin

$\det A = |A| = \sum_1^{n!}(-1)^\sigma a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$ unde σ = numărul de inversiuni ale permutării indicilor de coloane $\left(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n\right)$;

(vii) *Proprietățile determinaților* sunt (trebuie să fie) cunoscute din algebra de liceu şi sunt prezentate în manualul anterior citat cât şi în (notele de) curs, urmând a fi prezentate, fără demonstrații. Cele mai importante sunt cele relative la transformările asupra liniilor / coloanelor unui determinant, respectiv cazurile când un determinant $|A|$ se anulează.; cea mai generală condiție - necesară şi suficientă - pentru $|A| = 0$ este existența unei relații de dependență liniară între liniile / coloanele acestuia, care include existența unei linii / coloane nule (egală cu vectorul $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$), respectiv existența a două linii / coloane proporționale, în particular egale. Aceste proprietăți se vor prezenta formalizat, cu notațiile A_i = linia i a matricei A, respectiv A^j = coloana j a aceleiaşi matrici ;($viii$) $|AB| = |A|\,|B|$.(ix) O matrice A este *nesingulară* $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ $|A| \neq 0$, consecință proprietății ($viii$).

(ix)Se defineşte o inversă a matricei A ca fiind o matrice B cu proprietatea $AB = BA = I_n$ şi se demonstrează apoi unicitatea acestei inverse, după care se notează (şi se defineşte) inversa prin

$$\boxed{A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}. \tag{1}$$

Se demonstrează că matricea A este i*nversabilă* (admite inversă) $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

Aplicație. Inversa matricei $A =$ se poate găsi (cel mai uşor) prin *metoda transformărilor*, bazată pe *eliminarea gaussiană* folosită în rezolvarea sistemelor liniare.

$$[A|I_n] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 18 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \backsim$$

$$\backsim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{rrr|rrr} -24 & 0 & 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1 \end{array}\right] \backsim$$

$$\backsim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/24 & 5/72 & 3/24 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/24 & 5/72 & 3/24 \\ 0 & 1 & 0 & 6/24 & -6/72 & 6/24 \\ 0 & 0 & 1 & 2/24 & 14/72 & -624 \end{array}\right]. \tag{2}$$

Ca observație de ordin tehnic, unele elemente-fracții din blocul drept al matricei (2) s-ar putea simplifica, dar aceasta n-ar avea sens cât timp numitorul 72 rămâne la cel puțin un element ; fracția $1/72$ se scoate în factor forțat şi obținem *inversa* de mai jos:

$$A^{-1} = \frac{1}{72}\begin{bmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 18 & -6 & 18 \\ 6 & 14 & -18 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Se recomandă verificarea inversei prin egalitatea de definiție, relația (1) de mai sus. Este sufiecient calculul unui din cele două produse.

Pentru rezolvarea *ecuației matriceale* din enunț se poate efectua produsul

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \ \ldots \ = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -1 \\ 66 \\ -10 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Aceeaşi soluție din (4) se poate obține şi rezolvând (sistemul neomogen echivalent cu) ecuația matriceală $AX = b$ unde. b este vectorul-coloană din enunț, care apare şi în primul membru din (4). Recomandăm şi această modalitate de rezolvare *ca verificare.*

$\boxed{\textbf{E.3}}$ Dată fiind FBL simetrică $f(X, Y) = X^{\mathrm{T}}[\varepsilon]\, Y$ cu matricea în baza canonică E dată prin

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \ (1) \ \text{ şi subspațiul } \ U = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

nucleul $\mathsf{Ker} f$ coincide cu muțimea S a soluțiilor sistemului omogen de matrice $[\varepsilon]$; dar observăm că $\det[\varepsilon] = 1 - 4 = -3 \neq 0 \ \Rightarrow \ S = \{\mathbf{0}\} = \mathsf{Ker} f$, deci nucleul acestei FBL este <u>cel banal</u>, subspațiul zero. Ortogonalul subspațiului U din enunț, notat $U^{\perp_f}$, se găseşte ca mulțime a soluțiilor sistemului omogen de matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \backsim$$

$$\backsim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & -7/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ X(\alpha) = \begin{bmatrix} 5\alpha \\ 7\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \in U^{\perp_f}.$$

Verificarea se va face pe baza definiției subspațiului $U^{\perp_f}$, cu $(\forall\, Y \in U) \ f(X(\alpha), Y) = 0.$

Expresia analitică a FBL se scrie imediat pe baza matricei (1) :

$$f(X, Y) = X^{\mathrm{T}}[\varepsilon]\, Y \underset{(1)}{=} x_1 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_1 - x_2 y_2 + 2x_2 y_3 + 2x_3 y_3\,. \tag{3}$$

$$\varphi(X) \underset{\text{def}}{=} f(X, X) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3\,.$$

$\boxed{\textbf{E.4}}$ Valorile proprii ale endomorfismului $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dat prin

$$. \qquad LX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} X. \tag{1}$$

sunt rădăcinile polinomului caracteristic

$$P_L(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & -5 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \ \dots \ = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \, ; \tag{2}$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2} \, .$$

Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ se găsește *un singur vector propriu* $U_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

iar pentru $\lambda_3 = 2$ .se va găsi $U_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Prin urmare endomorfismul dat prin (1) *nu este diagonalizabil* ; el admite o formă normală Jordan.
