Algebra liniară - I | Subiecte pentru teză (proba scrisă) | A

A.1 În spațiul $\mathbf{R}^3$ se consideră baza A formată din

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Să se determine vectorul $X = 3\,\mathbf{a}_1 - 2\,\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ (ca vector din $\mathbf{R}^3$) şi – apoi – coordonatele sale în baza B ce se obține din A cu matricea de transformare

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(cu formula de determinare a noilor coordonate şi – apoi – utilizând efectiv noua bază B).

A.2 Subspațiile unui spațiu liniar: definiții, proprietăți, operații cu subspații. Sume directe. Subspații-nucleu pentru forme liniare şi biliniare simetrice.

Aplicație. Să se determine $W_1 + W_2$ şi $W_1 \cap W_2$, apoi să verifice teorema dimensiunilor (Grassmann) pentru subspațiile spațiului $\mathbf{R}^3$ mai jos indicate:

$$W_1 = \mathcal{L}\left\{[1 \;\; 2 \;\; 2]^{\mathrm{T}}, [5 \;\; 6 \;\; 6]^{\mathrm{T}}\right\}, \quad W_2 =. \mathcal{L}\left\{[-1 \;\; -3 \;\; 4]^{\mathrm{T}}, [0 \;\; 4 \;\; -3]^{\mathrm{T}}\right\}.$$

A.3 Forme pătratice. Definiție, problema diagonalizării. Signatura, Teorema lui Sylvester.

Aplicație. Utilizând două metode, să se determine câte o expresie diagonală şi signatura Q-formei (definită pe $\mathbf{R}^3$)

$$\varphi(X) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Este $\varphi(X)$ pozitiv / negativ definită ?

A.4 Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului dat prin matricea sa (într-o bază A)

$$L_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Să se verifice forma sa diagonală.

Algebra liniară - I | Subiecte pentru teză (proba scrisă) | B

B.1 Noțiunea de bază a unui spațiu liniar şi caracterizări ale ei. Dimensiunea unui spațiu finit generat.

Aplicație. Într-un spațiu V de dimensiune 4 cu baza A se consideră vectorul $x = -2a_1 + a_2 - 2a_3 + a_4$. Să se găsească coordonatele X_B ale lui x în baza $B = AT^{\mathrm{T}}$, unde

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

B.2 Să se determine, în funcție de $\alpha \in \mathbf{R}$, rangul matricei

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6+\alpha \\ 2 & 3 & 4-\alpha & 2 \\ 1 & 1-\alpha & -2 & -5 \\ 1 & 6 & 12 & 19 \end{bmatrix}.$$

Pentru (un caz când) $\operatorname{rang} A < 4$ să se determine o relație de dependență liniară între coloanele matricei A.

B.3 Să se diagonalizeze (cu metoda transformărilor ortogonale - EVV / cu metoda Gauss) forma pătratică

$$\varphi(X) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

B.4 Endomorfisme liniare - problema diagonalizării: Notiunea de (valoare proprie − vector propriu), multimea $S^*(\lambda)$ şi subspațiul $W(\lambda)$, proprietăți.

Aplicație. Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dat prin matricea sa (în baza canonică E)

$$L_E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Algebra liniară - I	Subiecte pentru teză (proba scrisă)	C

C.1 Sisteme liniare: multimea S a soluțiilor, clasificări. Subspațiul soluțiilor unui sistem omogen.

Aplicație. Să se stabilească dacă este compatibil şi să se determine (dacă este cazul) soluția generală a sistemului neomogen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases}.$$

C.2 Forme liniare : definiție, liniaritatea extinsă, coeficienții într-o bază A şi expresia lui $f(x)$. în această bază. Schimbarea coeficienților la schimbarea bazei (cu matricea T).

Aplicație. Forma liniară $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$. Să se calculeze $f(X)$ pentru $X = [7 \quad -4 \quad 1 \quad 2]$. Apoi să se determine coeficienții $[\beta]$ ai lui f în baza

$$B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

coordonatele X_B şi să se regăsească valoarea $f(X)$ găsită în baza canonică.

C.3 Utilizând metoda transformărilor ortogonale (sau EVV), să se aducă la o expresie canonică forma pătratică

$$\varphi(X) = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

C.4 Morfisme liniare $f : U \to V$; definiții, liniaritatea extinsă, matricea $F_{A,B}$ într-o pereche de baze (A,B) şi expresia analitică pentru $f(x)$. Schimbarea matricei la schimbările celor doua baze (cu matricea S, respectiv T).

Aplicație. Pentru morfismul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definit prin $f(X) = [x_1 + 2x_3 \quad x_2 - x_3]^{\mathrm{T}}$, să se determine $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ şi matricea $F_{A,B}$ în perechea de baze (A,B) unde

$$A : \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ iar } B : \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine imaginea $f(X) = Y$ a lui $X = a_1 - 2a_2 + 5a_3$, atât ca vector din $\mathbb{R}^2$ cât şi exprimat în baza B.

Algebra liniară - I | Subiecte pentru teză (proba scrisă) | D

D.1 Coordonatele unui vector $x \in V = \mathcal{L}(A)$ în baza A a spațiului V şi schimbarea lor la schimbarea bazei A în B cu matricea de transformare $T\,(A^{\mathrm{T}} = TB^{\mathrm{T}})$.

Aplicație. Să se determine matricea de trecere (sau de transformare) T de la baza

$$A:\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ la } B:\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Să se determine (pe două căi) coordonatele vectorului $X = 3a_1 - a_2 + 5a_3$ în baza B.

D.2 Forme biliniare $f: U \times V \to \mathbb{R}$: definiție, matricea $F_{A,B}$ într-o pereche de baze (A,B) şi expresia analitică pentru $f(x,y)$. Schimbarea matricei la schimbările celor doua baze (cu matricea S, respectiv T).

Aplicație. Să se determine, în funcție de $\lambda \in \mathbf{R}$, rangul formei biliniare f (definită pe $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$) cu matricea în baza canonică E

$$[\varepsilon] = A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6+\lambda \\ 1 & 1-\lambda & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 6 & 12 & 19 \end{bmatrix}.$$

Pentru o valoare a lui λ cu rang $f < 4$ să se scrie expresia analitică a lui f şi să se calculeze $f(X,Y)$ unde

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

D.3 Utilizând două metode, să se determine câte o expresie diagonală şi signatura Q-formei (definită pe $\mathbf{R}^3$)

$$\varphi(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Este $\varphi(X)$ pozitiv / negativ definită ?

D.4 Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului dat prin matricea sa (într-o bază A)

$$L_A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Algebra liniară - I	Subiecte pentru teză (proba scrisă)	E

E.1 Mulțimea $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ generată de o familie de vectori $\mathcal{A}$ ca subspațiu, spații liniare finit generate. Familii liniar dependente / independente de vectori. Dependența liniară a $p+1$ vectori din $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ generată de p vectori liniar independenți.

Aplicație. Să se determine rangul matricei

$$A = [\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \ \ \mathbf{a}_3 \ \ \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{bmatrix} \text{ şi parametrul } \lambda \text{ pentru care } b(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

este exprimabil liniar în vectorii familiei $\mathcal{A}$ (sau ai unei subfamilii a acesteia) şi să se determine o astfel de expresie.

E.2 Matrici pătratice: proprietățile produsului pe spațiul $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, inversa unei matrici şi unicitatea acesteia. Determinanți şi proprietățile lor.

Aplicație. Să se determine inversa matricei $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

şi să se rezolve acuația matriceală $AX = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

E.3 Dată fiind FBL simetrică $f(X,Y) = X^{\mathrm{T}}[\varepsilon]\,Y$ cu

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ şi subspațiul } U = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2),\ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

să se determine $\mathrm{Ker} f$ and $U^{\perp_f}$. Să se verifice rezultatul pentru $U^{\perp_f}$. Să se scrie expresia analitică a formei biliniare şi apoi cea a formei pătratice asociate, $\varphi(X)$.

E.4 Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dat prin

. $$LX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} X.$$

Să se stabilească dacă L este diagonalizabil

Algebra liniară - I Subiecte pentru teză (proba scrisă) F

F.1 Să se verifice că familiile de vectori A şi B de mai jos sunt baze în spaţiul $\mathbf{R}^3$:

$$A : \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$B : \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Să se determine apoi coordonatele vectorului $X = 3\,\mathbf{a}_1 - 2\,\mathbf{a}_2 + 2\,\mathbf{a}_3$ în baza B. Să se verifice rezultatul după găsirea matricei de transformare T de la A la B.

F.2 Forme bilineare $f : U \times V \to \mathbf{R}$: definiţie, matrcea $F_{A,B}$ într-o pereche de baze (A,B) şi schimbarea ei la schimabrea bazelor : $A \to \overline{A}$ cu matricea S şi $B \to \overline{B}$ cu matricea T.

Aplicație : Forma biliniară f : $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este definită prin

$$f(X,Y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 4x_3y_1 + 6x_3y_2.$$

Să se scrie matricea F_{E_3,E_2} în perechea de baze standard (E_3,E_2) şi de asemena matricea $F_{A,B}$ în bazele (A,B) unde A este baza ce intervine în subiectul $\boxed{\mathbf{F.1}}$ de mai sus iar

$$B : \mathbf{b}_1 = [1 \;\; -1]^{\mathrm{T}}, \mathbf{b}_2 = [-3 \;\; 4]^{\mathrm{T}}.$$

Să se găsească valoarea $f(X,Y)$ pentru $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ utilizând şi bazele A , B..

F.3 Matrici ortogonale şi proprietăţile lor. Diagonalizarea formelor pătratice prin utilizarea transformărilor ortogonale. (EVVs).

Aplicație : Să se diagonalizeze forma pătratică φ : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\varphi(X) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

F.4 Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dat prin

$$.LX = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} X..$$

Să se stabilească dacă L este diagonalizabil (cu ecuaţia $MS = S\lceil \lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_3 \rfloor$).

Algebra liniară - I | Subiecte pentru teză (proba scrisă) | G

G.1 Subspații ale unui spațiu liniar: definiții echivalente, $\dim W$ pentru $W \subseteq_{\text{subsp}} V$, sume de subspații. Caracterizarea posibilității descompunerii unice $x = x_1 + x_2$ unde $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$. Teorema dimensiunilor (Grassmann) pentru două subspații W_1, W_2 ale spațiului liniar V.

Aplicație : Subspațiile U şi W ale spaţiului $\mathbf{R}^3$ sunt respectiv generate de familiile de vectori

$$A:\ \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}2\\3\\11\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\ \text{şi}\ B:\ \mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_3=\begin{bmatrix}5\\2\\6\end{bmatrix}.$$

Dacă este cazul, să se reducă A şi B la câte o bază, apoi să se determine o bază pentru fiecare din subspațiile $U + W$ şi $U \cap W$.

G.2 Să se determine valorile parametrului λ pentru care forma biliniară $f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dată prin matricea sa în baza canonica

$$F_E = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & \lambda & \lambda\end{bmatrix}.\ \text{ia valoarea}\ f(X,Y) = 8\ \text{unde}\ X = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\ \&\ Y = \begin{bmatrix}3\\1\\\lambda\end{bmatrix}.$$

Să se determine matricea formei f în baza $B = [b_1\ \ b_2\ \ b_3] = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}$

G.3 Utilizând două metode, să se determine câte o expresie diagonală şi signatura Q-formei (definită pe $\mathbf{R}^3$)

$$\varphi(X) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4cx_1x_3 - 8x_2x_3.$$ Este $\varphi(X)$ pozitiv / negativ definită ?

G.4 Endomorfisme: determinarea valorilor proprii şi a vectorilor proprii (polinom caracteristic, cazuri posibile în factorizarea acestuia, determinarea vectorilor proprii ca soluții ale unor sisteme omogene). Condiții necesare sau/şi suficiente pentru diagonalizarea unui endomorfism.

Aplicație : Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dat prin

$$.LX = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}X.$$ Este L diagonalizabil ?

Algebra liniară - I	Subiecte pentru teză (proba scrisă)	H

H.1 Noțiunea de rang a unei matrici $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, metode de determinare a rangului (metoda bordării, metoda transformărilor care păstrează rangul – cu aducere la forma quasi-triunghiulară); legătura între rang şi subspațiile generate de liniile / coloanele unei matrici, notate COLSP_A şi ROWSP_A , respectiv.

Aplicație : Să se determine rang A pentru

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 4 & 8 & 18 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$$

Să se determine o relație de liniară dependență între coloanele lui A, o bază B pentru COLSP_A şi să se exprime coloanele din afara bazei B în această bază.

H.2 Forme liniare : definiție, liniaritatea extinsă, coeficienții într-o bază A şi expresia lui $f(x)$. în această bază. Ker f. Schimbarea coeficienților la schimbarea bazei (cu matricea T).

Aplicație. Forma liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$. Să se calculeze $f(X)$ pentru $X = [-4 \quad 7 \quad 2]$. Apoi să se determine coeficienții $[\beta]$ ai lui f în baza

$$B = [\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2 \ \ \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

coordonatele X_B şi să se regăsească valoarea $f(X)$ găsită în baza canonică.

H.3 Utilizând două metode, să se determine câte o expresie diagonală şi signatura Q-formei (definită pe $\mathbf{R}^3$)

$\varphi(X) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 6x_2x_3 + 4x_3^2$. Este $\varphi\,(X)$ pozitiv / negativ definită ?

H.4 Morfisme liniare $f : U \to V$: definiție, nucleul şi imaginea unui morfism f ca subspații ; morfisme injective, surjective şi bijective, morfismul compus $g \circ f$ şi matricea sa; inversul f^{-1} al unui morfism f.

Aplicație : Morfismele $f : U \to V$ şi $g : V \to U$ sunt definite prin matricea $F_{A,B}$ în perechea de baze (A,B) :

$$F_{A,B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \text{ respectiv prin } \begin{cases} g(\mathbf{b}_1) &= \ \ 3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \\ g(\mathbf{b}_2) &= -2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3. \end{cases} .$$

Să se scrie expresia lui $f(-2\,\mathbf{a}_1 + 3\,\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)$ în baza B; să se arate că f este surjectiv iar g este injectiv. Să se scrie matricea H_A. pentru $h = g \circ f$.
