Test semestrial II la Algebră liniară - I ___ **Ianuarie 2009** **A**

Nume - prenume : ____________________ **Grupa** : _______

A.1 Să se scrie matricea (în baza canonică E) şi să se determine rangul pentru FBL $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(X,Y) = 2x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_2y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 - x_3y_1 + 5x_1y_4 - \\ - 2x_3y_4 + 5x_4y_1 - 2x_4y_3 + 7x_4y_4.$$

A.2 Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului dat prin matricea sa (într-o bază A)

$$L_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Să se verifice forma sa diagonală.

Test semestrial II la Algebră liniară - I ___ Ianuarie 2009 $\boxed{\textbf{B}}$

Nume - prenume : _________________ ___ **Grupa** : _______

$\boxed{\textbf{B.1}}$ Utilizând metoda lui Jacobi, să se determine o expresie diagonală şi signatura Q-formei (definită pe $\mathbb{R}^3$)

$$\varphi(X) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Este $\varphi(X)$ pozitiv / negativ definită ?

$\boxed{\textbf{B.2}}$ Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat prin matricea sa (în baza canonică E).

$$L_E = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}.$$ Este endomorfismul diagonalizabil ?

Sugestie : La dezvoltarea determinantului - polinom caracteristic se pot face doua transformari asupra liniilor care conduc la factorizarea rapida a acestuia.

Test semestrial II la Algebră liniară - I ___ Ianuarie 2009 $\boxed{\text{C}}$

Nume - prenume : _________________ ___ **Grupa** : _______

$\boxed{\textbf{C.1}}$ Să se diagonalizeze (cu **metoda transformărilor ortogonale - EVV**) forma pătratică $\varphi(X) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

$\boxed{\textbf{C.2}}$ Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat prin matricea sa (în baza canonică E)

$$L_E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Test semestrial II la Algebră liniară - I ___ **Ianuarie 2009** $\boxed{\text{D}}$

Nume - prenume : ________________ ___ **Grupa** : ______

$\boxed{\textbf{D.1}}$ Să se determine o relație de dependență / independență liniară între formele liniare

$$\begin{cases} f_1(X) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4, \\ f_2(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4, \\ f_3(X) = 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 3x_4. \end{cases}.$$

Să se determine şi nucleul lor comun (prin rezolvarea sistemului omogen respectiv).

$\boxed{\textbf{D.2}}$ Să determine valorile proprii şi un vector propriu (real) pentru endomorfismul $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat prin matricea sa (în baza canonică E)

$$L_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Este L diagonalizabil ?

Test semestrial II la Algebră liniară - I ___ **Ianuarie 2009** $\boxed{\text{E}}$

Nume - prenume : ________________ ___ **Grupa** : ______

$\boxed{\textbf{E.1}}$ Să se determine valorile parametrului λ pentru care forma biliniară $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată prin matricea sa în baza canonica

$$F_E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & \lambda \end{bmatrix}. \text{ia valoarea } f(X,Y) = 8 \text{ unde } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ \& \ Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Să se determine matricea formei f în baza $B = [b_1 \ \ b_2 \ \ b_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$

$\boxed{\textbf{E.2}}$ Să determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat prin matricea sa (în baza canonică E)

$$L_E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Test semestrial II la Algebră liniară - I ___ Ianuarie 2009 $\boxed{\mathbf{F}}$

Nume - prenume : ________________ ___ **Grupa** : ______

$\boxed{\mathbf{F.1}}$ Forma biliniară simetrică $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este definită, în baza canonică E a spațiului $\mathbb{R}^3$, prin matricea sa

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Să se scrie expresia analitică a formei pătratice asociate $\varphi(X)$ şi să se determine $\operatorname{Ker} f$ şi $U^{\perp_f}$ unde U este subspațiul generat de vectorii

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{F.2}}$ Endomorfismul $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este dat prin

$$LX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} X.$$

Să se scrie matricea sa L_E în baza canonică E a spațiului $\mathbb{R}^3$, să se determine (câte o bază în) subspațiile $\operatorname{Ker} L$ şi $\operatorname{Im} L$ precum şi contraimaginea $L_{-1}([-2 \quad 0 \quad 3]^T)$.

Test semestrial II la Algebră liniară - I ___ Ianuarie 2009 $\boxed{\text{G}}$

Nume - prenume : _________________ ___ **Grupa** : _______

$\boxed{\textbf{G.1}}$ Forma biliniară $f : V \times V \to \mathbb{R}$ este dată, în baza A a spațiului V, prin matricea coeficienților săi

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Să se determine matricea $[\beta]$ a lui f în baza B care se obține din A prin transformarea

$$B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} A^{\mathrm{T}}.$$

Să se determine $f(x, y)$ pentru $x = 3a_1 - 2a_2 + a_3$, $y = 2a_1 - a_2$ utilizând atât baza A cât şi baza B (adică matricea $[\beta]$ şi coordonatele X_B, Y_B ale vectorilor x, y în baza B, care trebuie găsite).

$\boxed{\textbf{G.2}}$ Morfismul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ este dat prin matricea sa în perechea de baze canonice (E_3, E_2)

$$F_{E_3,E_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$ Să se determine matricea $F_{A,B}$ a morfismului în bazele

$$A : \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad B : \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
