Elipsa

Definiţie

Fie $c > 0$ şi F', F două puncte fixate din plan astfel încât

$$F'F = 2c.$$

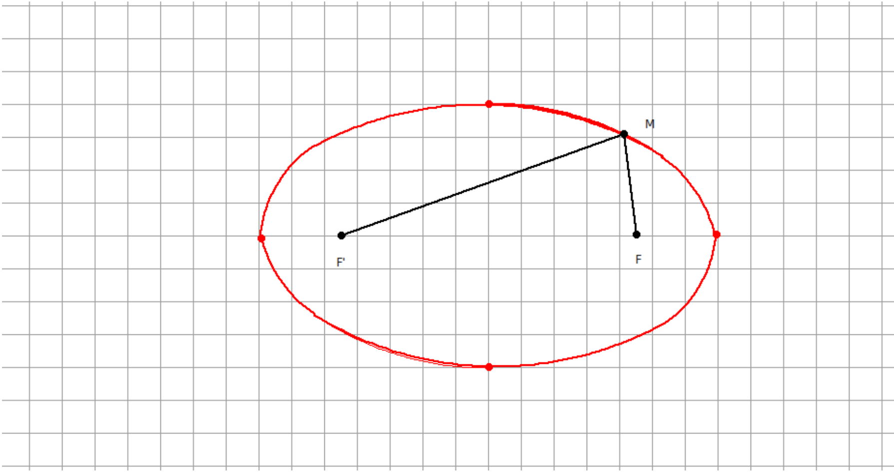
Definiţie

Fie $a > c$. Mulţimea punctelor M din plan cu proprietatea

$$MF' + MF = 2a \tag{1}$$

se numeşte **elipsă**.

Observaţie. Dacă $c = 0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a.


M
F'
F

Definiţie

F' şi F se numesc focarele elipsei.

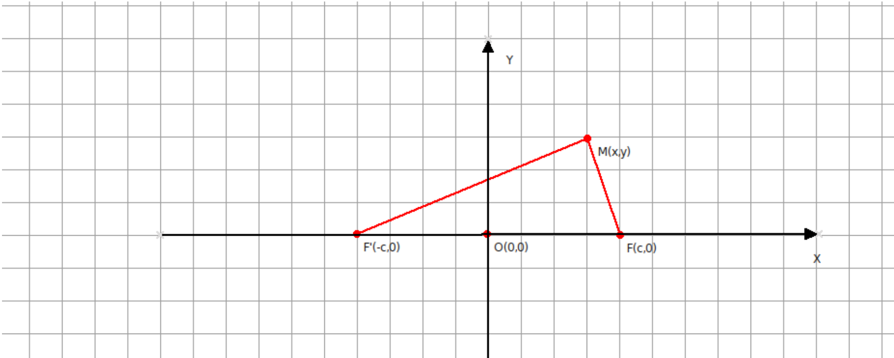
Dreapta $F'F$ se numeşte axa focală.

Distanţa $dist(F', F) = 2c$ se numeşte distanţa focală.

Ecuaţia elipsei

- Ox: axa focală $F'F$
- Oy: mediatoarea segmentului $[F'F]$
- originea reperului O: mijlocul segmentului $[F'F]$

Focarele: $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$



Ecuaţia elipsei

$$MF' + MF = 2a \tag{2}$$

$M(x, y) \in \Gamma$ dacă şi numai dacă

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \tag{4}$$

$$x^2 + c^2 + 2xc + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 + c^2 - 2xc + y^2 \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{6}$$

Ecuaţia elipsei

$$a^2\left(x^2+c^2-2xc+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2 \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right). \tag{8}$$

Notăm $b^2=a^2-c^2$.

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \tag{9}$$

Ecuaţia carteziană implicită a elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{10}$$

Observaţie.
Elipsa este *o curbă algebrică de gradul al doilea*.

Simetrii

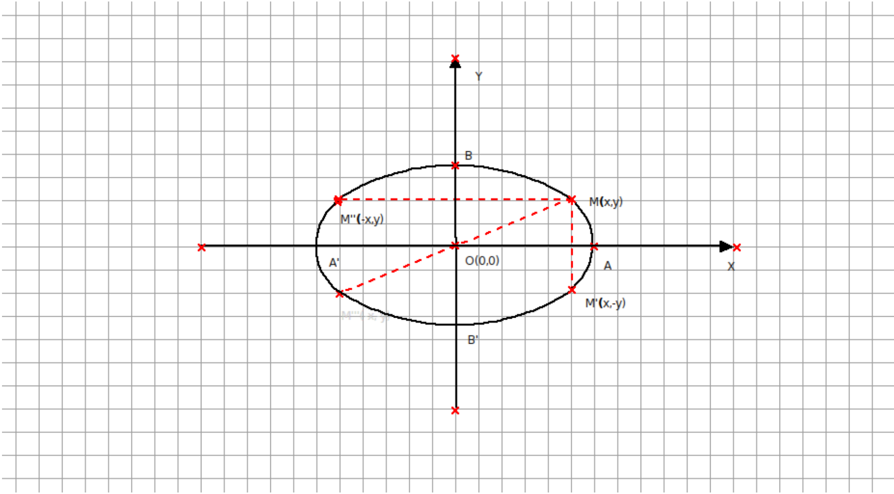
Observaţii:
Fie $M\,(x,y)\in\Gamma$, adică x, y satisfac ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{11}$$

1) Punctul $M'\,(x,-y)$, simetricul lui M faţă de Ox, se află pe elipsă, adică *elipsa este simetrică faţă de Ox.*

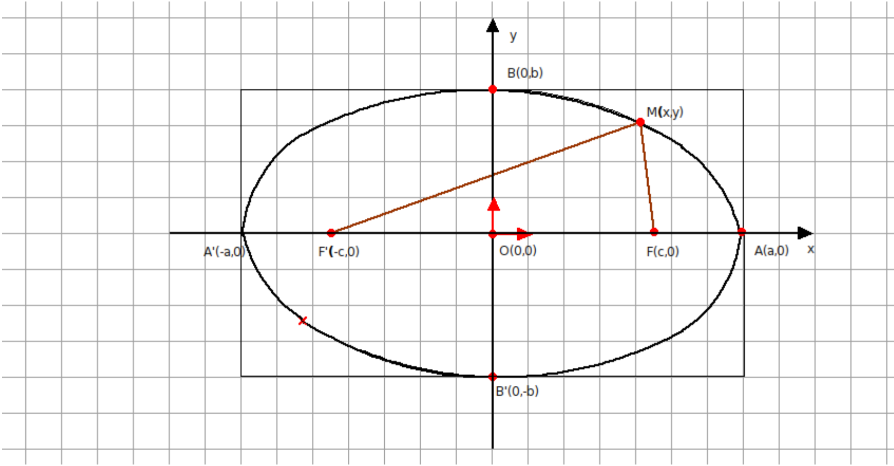
2) Punctul $M''\,(-x,y)$, simetricul lui M faţă de Oy, se află pe elipsă, adică *elipsa este simetrică faţă de Oy.*

3) Punctul $M'''\,(-x,-y)$, simetricul lui M faţă de origine, se află pe elipsă, adică originea O este *centru de simetrie al elipsei.*



Y
B
M(x,y)
M''(-x,y)
A'
O(0,0)
A
X
M'(x,-y)
B'

Reprezentarea grafică a elipsei



Punctele $A\,(a, 0)$, $A'\,(-a, 0)$, $B\,(0, b)$, $B'\,(0, -b)$ se numesc **vârfurile elipsei**.

Numerele pozitive a şi b se numesc **semiaxa mare**şi **semiaxa mică** ale elipsei.

Ecuaţiile parametrice ale elipsei

Ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{12}$$

este echivalentă cu ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi), \tag{13}$$

numite **ecuaţiile parametrice ale elipsei**.

Excentricitatea elipsei

Definiţie. Se numeşte **excentricitatea elipsei** raportul

$$e = \frac{c}{a}. \tag{14}$$

Cum $c < a$ rezultă $e < 1$.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2, \tag{15}$$

de unde

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ sau } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}. \tag{16}$$

Excentricitatea elipsei

Excentricitatea caracterizează forma elipsei.

Cu cât excentricitatea e se apropie de 1, cu atât mărimea $1 - e^2$ se micşorează, deci raportul $\dfrac{b}{a}$ se micşorează.

În consecinţă, cu cât excentricitatea e este mai mare, cu atât elipsa este **mai alungită**.

Cu cât excentricitatea e se apropie de 0, cu atât mai mult elipsa seamănă cu cercul.

În cazul cercului $b = a$ şi $e = 0$.

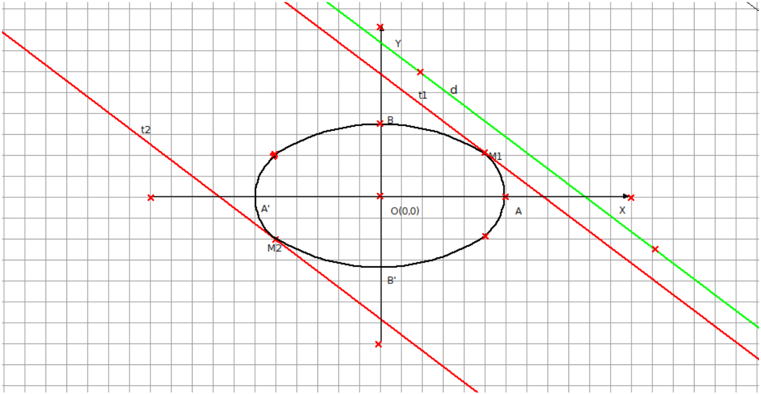
Intersecţia unei elipse cu o dreaptă

Pentru a determina intersecţia unei drepte cu o elipsă rezolvăm sistemul format din ecuaţia elipsei şi ecuaţia dreptei.

Dreapta este *secantă* elipsei dacă acest sistem are două soluţii distincte, *tangentă* elipsei dacă dacă sistemul are o singură soluţie şi *exterioară* elipsei dacă sistemul nu are soluţii reale.

a) **Tangente la elipsă paralele cu o dreaptă dată**

Fie o dreaptă dată de pantă *m*.



Ecuaţia tangentei la elipsă va avea forma

$$y = mx + n, \tag{17}$$

unde n trebuie determinat.

Considerăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = mx + n \end{cases} \tag{18}$$

$$\left(a^2m^2+b^2\right)x^2+2a^2mnx+a^2\left(n^2-b^2\right)=0. \tag{19}$$

Punem condiţia: $\Delta = 0.$

Avem

$$\Delta = a^2b^2\left(a^2m^2+b^2-n^2\right)=0 \tag{20}$$

şi obţinem:

$$n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}. \tag{21}$$

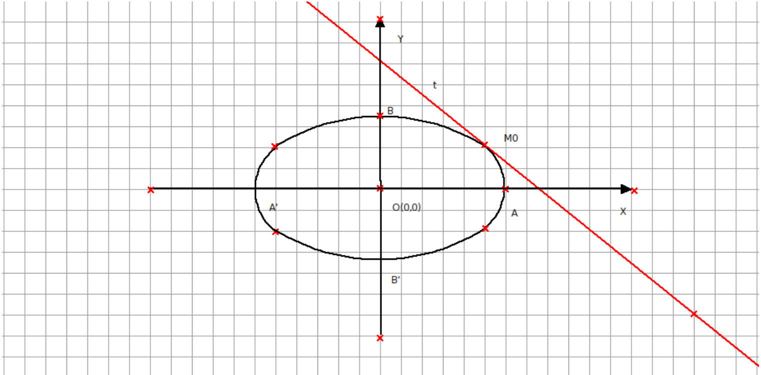
Ecuaţiile tangentelor vor fi:

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}. \tag{22}$$

b. **Tangenta într-un punct de pe elipsă**

Fie $M_0\,(x_0, y_0)$ un punct situat pe elipsă, deci

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{23}$$



Panta tangentei într-un punct oarecare la elipsa

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{24}$$

este derivata funcţiei $y(x)$ în raport cu x, unde x şi y satisfac relaţia precedentă.

Tangente la elipsă

Deoarece y este funcţie implicită de x, avem:

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \tag{25}$$

Rezultă că panta tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este:

$$m = y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

iar ecuaţia tangentei în punctul M_0 este:

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) \tag{26}$$

care se mai scrie sub forma

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = 0. \tag{27}$$

Ecuaţia tangentei în M_0 :

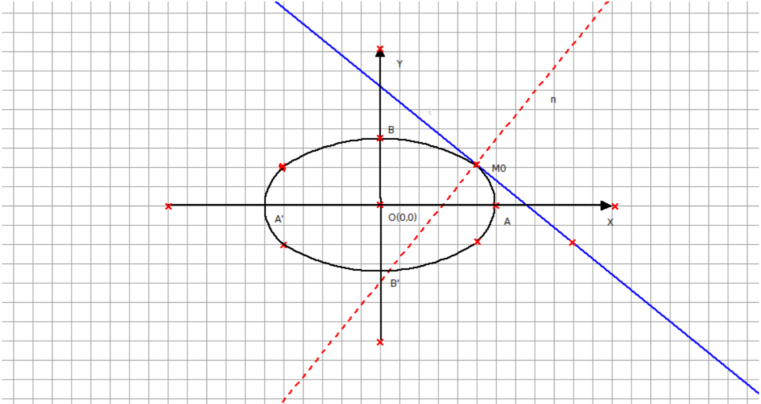
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{28}$$

Observaţie. Formal, ecuaţia tangentei la elipsă dusă printr-un punct $M_0\,(x_0, y_0)$ de pe elipsă se obţine din ecuaţia acesteia prin dedublare.

$$\begin{array}{lcl} x^2 & \to & xx_0 \\ y^2 & \to & yy_0 \end{array}$$

c. Ecuaţia normalei într-un punct de pe elipsă

Definiţie. **Normala** într-un punct de pe elipsă este perpendiculara pe tangenta în acel punct.



Panta tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$: $m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

$m \cdot \mu = -1$

Panta normalei în $M_0(x_0, y_0)$ este:

$$\mu = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}, \tag{29}$$

iar ecuaţia normalei în punctul M_0 este:

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0). \tag{30}$$