ALGEBRĂ LINIARĂ

Dorel Fetcu

Acest curs este un fragment din manualul

• D. Fetcu, **Elemente de algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială**, Casa Editorială Demiurg, Iaşi 2009, 340 pp.

Cuprins

CAPITOLUL 1

CAPITOL INTRODUCTIV

În acest prim capitol vom reaminti pe scurt unele noţiuni şi rezultate referitoare la calculul matricial şi la sistemele de ecuaţii liniare. Toate acestea sunt tratate pe larg în manualele de algebră pentru clasele a XI-a şi a XII-a (în special cele pentru profilul M1) şi, din acest motiv, vom demonstra aici doar unele dintre rezultatele prezentate.

1. Elemente de calcul matricial

DEFINIŢIA 1.1. Fie mulţimile de numere naturale $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ şi $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Se numeşte *matrice* cu m linii şi n coloane o aplicaţie $A : I \times J \to K$, unde $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ. În acest caz $A(i, j) = a_{ij}$, $i \in I$, $j \in J$, se numesc elementele matricei A iar matricea se scrie sub forma unui tablou dreptunghiular cu m linii şi n coloane astfel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n}}} .$$

Mulţimea matricilor cu m linii şi n coloane cu elemente din corpul K se notează $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Dacă $m = n$ atunci o matrice A cu m linii şi n coloane, cu elemente dintr-un corp K, se numeşte *matrice pătratică* de ordin n (sau m). Mulţimea acestor matrici se notează $\mathcal{M}_n(K)$. Pentru o matrice pătratică $A = (a_{ij})_{i,\, j = \overline{1, n}}$ definim *urma* matricei A prin $\operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.[1]

DEFINIŢIA 1.2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$ o matrice pătratică de ordin n cu elemente din corpul K. Se numeşte *determinantul* matricei A elementul din K

$$\det A = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} (-1)^{\operatorname{sign}(P)} \cdot a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n},$$

[1] În limba engleză *trace*=*urmă*.

unde $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_n$ este o permutare a numerelor naturale $1, \dots n$. Determinantul matricei A se notează

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definiţia 1.3. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ pentru care $\det A \neq 0$ se numeşte *matrice nesingulară* iar mulţimea acestor matrici se notează $GL(n, K)$. Dacă $\det A = 0$, unde $0 \in K$ este elementul neutru la operaţia de adunare din K, matricea A se numeşte *matrice singulară*.

Definiţia 1.4. Fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Se numeşte *minor* de ordin $k \leq \min\{m, n\}$ al matricei A un determinant de forma

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix},$$

unde $i_l \in \{1, 2, \dots, m\}$ şi $j_l \in \{1, 2, \dots, n\}$ pentru orice $l \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Definiţia 1.5. Fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Spunem că matricea A are *rangul* $r \leq \min\{m, n\}$ şi scriem $\operatorname{rang} A = r$ dacă aceasta are un minor $\Delta_r \neq 0$ şi orice minor de ordin mai mare decât r este egal cu 0.

Definiţia 1.6. Două matrici A şi B care au acelaşi rang se numesc *echivalente* şi se notează $A \sim B$.

Definiţia 1.7. Se numesc *transformări elementare* asupra liniilor unei matrici următoarele operaţii: înmulţirea unei linii cu un scalar (element din corpul K), schimbarea a două linii între ele, adunarea la elementele unei linii a elementelor unei alte linii înmulţite cu un scalar.

Propoziţia 1.1. *Prin efectuarea de transformări elementare asupra unei matrici rangul acesteia nu se schimbă.*

Exemplul 1.1. Vom prezenta în continuare un exemplu de calcul al rangului unei matrici cu ajutorul transformărilor elementare.

Să se determine rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Avem

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 41 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_3-4L_1 \\ L_4-10L_1 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_3+5L_2 \\ L_4+13L_2 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix},$$

unde am notat cu L_i, $i=\overline{1,4}$ linia i a matricei A. Acum obţinem cu uşurinţă $\operatorname{rang} A = 2$.

Operaţii cu matrici

Adunarea matricilor

Fie $(K,+,\cdot)$ un corp comutativ. Definim adunarea a două matrici cu m linii şi n coloane cu elemente din corpul K

$$+ : \mathcal{M}_{m,n}(K) \times \mathcal{M}_{m,n}(K) \to \mathcal{M}_{m,n}(K),$$

prin $(A,B) \to A+B = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ şi $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Înmulţirea matricilor cu scalari

Definim înmulţirea unei matrici cu m linii şi n coloane cu elemente din corpul K cu un element din corpul K (numit scalar)

$$\cdot : \mathcal{M}_{m,n}(K) \times \mathcal{M}_{m,n}(K) \to \mathcal{M}_{m,n}(K),$$

prin $(\alpha, A) \to \alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ unde $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ şi $\alpha \in K$.

Înmulţirea matricilor

Definiţia 1.8. Două matrici A şi B se numesc *înlănţuite* dacă $A \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$ şi $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, adică numărul de coloane din prima matrice este egal cu numărul de linii din a doua matrice.

Definim înmulţirea a două matrici înlănţuite

$$\times : \mathcal{M}_{m,p}(K) \times \mathcal{M}_{p,n}(K) \to \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

prin $(A,B) \to A \times B = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ unde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj},$$

cu $A = (a_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}$ şi $B = (b_{kj})_{\substack{k=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Transpunerea unei matrici

Definiţia 1.9. Fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Se numeşte *transpusa* matricei A matricea $A^t = (a_{ji})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$.

Propoziţia 1.2. (Proprietăţi ale operaţiei de transpunere)

(1) $(A^t)^t = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.
(2) $(A+B)^t = A^t + B^t$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.
(3) $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$, $\forall \alpha \in K$ *şi* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.
(4) $(A \times B)^t = B^t \times A^t$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$ *şi* $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$.

PROPOZIŢIA 1.3. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. *Atunci*
(1) $\det A = \det A^t$.
(2) $\det(A \times B) = \det A \cdot \det B$.

DEFINIŢIA 1.10. Fie matricea pătratică $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Dacă $A = A^t$ atunci matricea A se numeşte *matrice simetrică*. Mulţimea matricilor simetrice cu n linii şi n coloane cu elemente din K se notează cu $\mathcal{S}_n(K)$.

PROPOZIŢIA 1.4. (Proprietăţi ale matricilor simetrice)
Fie $A, B \in \mathcal{S}_n(K)$ *şi* $\alpha \in K$. *Atunci*
(1) $A + B \in \mathcal{S}_n(K)$;
(2) $\alpha \cdot A \in \mathcal{S}_n(K)$.

DEFINIŢIA 1.11. Fie matricea pătratică $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Dacă $A = -A^t$ atunci matricea A se numeşte *matrice antisimetrică*. Mulţimea matricilor antisimetrice cu n linii şi n coloane cu elemente din K se notează cu $\mathcal{AS}_n(K)$.

PROPOZIŢIA 1.5. (Proprietăţi ale matricilor antisimetrice)
Fie $A, B \in \mathcal{AS}_n(K)$ *şi* $\alpha \in K$. *Atunci*
(1) $A + B \in \mathcal{AS}_n(K)$;
(2) $\alpha \cdot A \in \mathcal{AS}_n(K)$.
(3) *Dacă* $n = \text{impar}$ *şi* $A \in \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ *atunci* $\det A = 0$.

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra doar proprietatea (3). Este evident, din definiţia determinantului unei matrici pătratice, că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$.
Acum considerăm matricea antisimetrică $A \in \mathcal{AS}_n(K)$ cu $n = \text{impar}$. Urmează $\det A = \det(-A^t) = (-1)^n \cdot \det A^t = -\det A$. În concluzie $\det A = 0$ în acest caz. $\square$

1.1. Matrici inversabile.

DEFINIŢIA 1.12. O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de ordin n, cu elemente din corpul $(K, +, \cdot)$, se numeşte *matrice inversabilă* dacă există matricea notată $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$, unde

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea unitate de ordin n. Matricea A^{-1} se numeşte *matricea inversă* a matricei A.

PROPOZIŢIA 1.6. *Inversa unei matrici, dacă există, este unică.*

Propoziţia 1.7. *O matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este inversabilă dacă şi numai dacă este nesingulară, adică* $\det A \neq 0$.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Fie matricea inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Rezultă că există $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $A \times A^{-1} = I_n$ şi, prin urmare $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \times A^{-1}) = \det I_n = 1$. Astfel obţinem $\det A \neq 0$.

"$\Leftarrow$" Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $\det A \neq 0$. Definim matricea $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ prin

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*,$$

unde $A^* \in \mathcal{M}_n(K)$ este *matricea adjunctă* a matricei A, $A^* = (A_{ji})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}}$, unde

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Se verifică, prin calcul direct, că $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Propoziţia 1.8. (Proprietăţi ale matricilor inversabile)
Fie matricile inversabile $A, B \in GL(n, K)$. Atunci

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
(2) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
(3) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$;
(4) $I_n^{-1} = I_n$;
(5) $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

Exemplul 1.2. Vom prezenta un mod de calcul al inversei unei matrici cu ajutorul transformărilor elementare.

Să se arate că matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este inversabilă şi să se determine matricea inversă.

Avem $\det A = 2 \neq 0$, deci matricea A este inversabilă.

În continuare construim o matrice cu trei linii şi şase coloane astfel: primele trei coloane sunt cele ale matricei A iar celelalte trei coloane sunt cele ale matricei unitate de ordinul 3. Obţinem matricea

$$B = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vom efectua transformări elementare asupra liniilor matricei B astfel încât, în final, primele trei coloane să fie cele ale matricei unitate. Atunci ultimele trei coloane vor fi cele ale matricei A^{-1}.

$$B = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 - 2L_1 \\ L_4 - L_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_2 \to -L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_3 + 2L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_3 \to -\frac{1}{2}L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_2 + 2L_3 \\ L_1 + L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Prin urmare $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

În continuare reamintim un rezultat care va fi folosit pe parcursul acestui curs.

Propoziţia 1.9. *Fie matricile $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ şi $A' \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Dacă există matricile $P \in GL(m,K)$ şi $Q \in GL(n,K)$ astfel încât $A' = P \times A \times Q$, atunci* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A'$.

O clasă importantă de matrici inversabile o reprezintă matricile ortogonale, cu care ne vom reîntâlni mai ales în capitolele de geometrie analitică.

Definiţia 1.13. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ se numeşte *matrice ortogonală* dacă $A^t \times A = I_n$. Mulţimea matricilor ortogonale de ordin n se notează $GO(n,K)$.

Exemplul 1.3. Evident matricea unitate de ordin n este o matrice ortogonală ($I_n \in GO(n,K)$).

Exemplul 1.4. Un alt exemplu uzual de matrice ortogonală îl reprezintă matricea rotaţiei cu un unghi α în plan, adică $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Avem

$$\begin{aligned} A^t \times A &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Prin urmare $A \in GO(2, \mathbb{R})$.

PROPOZIŢIA 1.10. (Proprietăţi ale matricilor ortogonale)

(1) *Dacă A este o matrice ortogonală atunci A este inversabilă cu $A^{-1} = A^t$.*
(2) *Dacă A este o matrice ortogonală de ordinul n atunci $A \times A^t = I_n$.*
(3) *Transpusa unei matrici ortogonale este o matrice ortogonală.*
(4) *Produsul a două matrici ortogonale este o matrice ortogonală*

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra doar proprietatea (4). Considerăm matricile ortogonale $A, B \in GO(n, K)$. Avem

$$(A \times B)^t \times (A \times B) = B^t \times (A^t \times A) \times B = B^t \times I_n \times B = B^t \times B = I_n.$$

În concluzie $A \times B \in GO(n, \mathbb{R})$. □

2. Sisteme de ecuaţii liniare

DEFINIŢIA 1.14. Se numeşte *sistem de ecuaţii liniare* cu m ecuaţii şi n necunoscute cu coeficienţi din corpul $(K, +, \cdot)$ un sistem de ecuaţii algebrice de forma

$$(1.1) \qquad \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \qquad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{cases},$$

unde $a_{ij} \in K$, $i = \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}$ se numesc *coeficienţii* sistemului iar $b_i \in K$, $i = \overline{1,m}$, se numesc *termeni liberi*.

DEFINIŢIA 1.15. Sistemele pentru care $b_i = 0$ pentru orice $i \in \overline{1,m}$, unde 0 este elementul neutru la adunare în corpul K, se numesc *sisteme de ecuaţii liniare omogene* iar sistemele pentru care există măcar un termen liber diferit de 0 se numesc *sisteme de ecuaţii liniare neomogene*.

Sistemului de ecuaţii liniare (1.1) i se asociază matricea coeficienţilor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K),$$

şi matricea extinsă

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n+1}(K).$$

În continuare notăm cu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ matricea coloană a necunoscutelor şi cu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ matricea coloană a termenilor liberi.

Folosind aceste notaţii, sistemul (1.1) se scrie în forma matricială

$$A \times X = B. \tag{1.2}$$

Definiţia 1.16. Se numeşte *soluţie* a sistemului (1.1) un n-uplu $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ de elemente din K care transformă ecuaţiile sistemului în identităţi.

Definiţia 1.17. Un sistem de ecuaţii liniare se numeşte *incompatibil* dacă nu admite nici o soluţie.

Definiţia 1.18. Un sistem de ecuaţii liniare se numeşte *compatibil determinat* dacă admite soluţie unică şi *compatibil nedeterminat* dacă admite mai mult de o soluţie.

De acum şi până la sfârşitul acestui capitol vom lucra doar cu sisteme de ecuaţii liniare cu coeficienţi reali, adică vom considera $K = \mathbb{R}$.

2.1. Sisteme de tip Cramer.

Definiţia 1.19. Un sistem de ecuaţii liniare pentru care numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute se numeşte *sistem pătratic.*

Teorema 1.11. (Teorema lui Cramer)
Fie sistemul pătratic de ecuaţii liniare cu coeficienţi reali

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n & = & b_n \end{cases}, \tag{1.3}$$

*cu matricea asociată A nesingulară, adică $\Delta = \det A \neq 0$ (un astfel de sistem se numeşte **sistem de tip Cramer**). Atunci sistemul* (1.3) *este compatibil* *determinat şi soluţia unică este dată de* $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = \overline{1,n}$, *unde*

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemplul 1.5. Să se rezolve următorul sistem de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + x_4 = 2 \\ -2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - x_4 = 2 \\ 3\cdot x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cu $\Delta = \det A = 4 \neq 0$. Prin urmare sistemul este de tip Cramer. Avem

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

Conform teoremei lui Cramer soluţia sistemului este

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -3, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 4.$$

2.2. Sisteme de ecuaţii liniare neomogene. Fie sistemul de ecuaţii liniare cu coeficienţi reali

$$(1.4) \qquad \begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases},$$

astfel încât măcar unul din termenii liberi este diferit de 0, cu matricea asociată $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi matricea extinsă $\bar{A} \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$.

Teorema 1.12. (Teorema Kronecker-Capelli)
Sistemul (1.4) *este compatibil dacă şi numai dacă* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$.

În continuare presupunem că rangul matricei asociate sistemului (1.4) este $\operatorname{rang} A = r \leq \min\{m, n\}$ şi

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \dots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ecuaţiile $i_1, i_2, \dots, i_r$ se numesc *ecuaţii principale* ale sistemului, celelalte fiind numite *ecuaţii secundare*. Necunoscutele $j_1, j_2, \dots, j_r$ se numesc *necunoscute principale* iar celelalte *necunoscute secundare*.
Considerăm în continuare determinanţii

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_r} & b_{i_1} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_r} & b_{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \dots & a_{i_rj_r} & b_{i_r} \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_r} & b_{i_k} \end{vmatrix}, \qquad k = \overline{r+1, m},$$

(numiţi *minori caracteristici* ai sistemului (1.4)). Avem următoarea teoremă.

Teorema 1.13. (Teorema Rouché-Fröbenius)
Sistemul (1.4) *este compatibil dacă şi numai dacă minorii săi caracteristici sunt nuli.*

Observaţia 1.1. Teoremele 1.12 şi 1.13 sunt echivalente.

Observaţia 1.2. Dacă sistemul (1.4) este compatibil şi rangul matricei sale asociate este $\operatorname{rang} A = r < n$ atunci este compatibil nedeterminat iar dacă $\operatorname{rang} A = n$ atunci este compatibil determinat.

Exemplul 1.6. Să se rezolve următorul sistem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2\cdot x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3\cdot x_5 = 5 \\ x_1 - 4\cdot x_2 + 5\cdot x_3 + 4\cdot x_4 = -2 \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 + L_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se obţine $\operatorname{rang} A = 2$. Matricea extinsă a sistemului este

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Astfel $\operatorname{rang} \bar{A} = \operatorname{rang} A = 2$, deci sistemul este compatibil (nedeterminat), conform teoremei lui Kronecker-Capelli, două necunoscute sunt principale, iar celelalte trei secundare (arbitrare).

Putem alege ca determinant principal $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Astfel x_1, x_2 sunt necunoscutele principale iar, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, sunt necunoscutele secundare. Primele două ecuaţii ale sistemului sunt ecuaţii principale, iar ecuaţia a treia este ecuaţie secundară. Subsistemul principal (format din cele două ecuaţii principale) devine

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 2\cdot\alpha - \beta - \gamma \\ 2\cdot x_1 + x_2 = 5 - \alpha + \beta - 3\cdot\gamma \end{cases}.$$

Acesta este un sistem de tip Cramer şi are ca determinant pe Δ. Soluţia sistemului este $x_1 = 2 - \alpha - \frac{4}{3}\gamma, x_2 = 1 + 3\cdot\alpha + \beta - \frac{1}{3}\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Soluţia se poate scrie şi în forma matricială

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Sisteme de ecuaţii liniare omogene. Fie sistemul de ecuaţii liniare cu coeficienţi reali

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = 0 \end{cases}, \tag{1.5}$$

cu matricea asociată $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Propoziţia 1.14. (Proprietăţi ale sistemelor de ecuaţii liniare omogene)

(1) *Sistemul* (1.5) *admite soluţia banală* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
(2) *Sistemul* (1.5) *admite soluţii nebanale dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este strict mai mic decât numărul de necunoscute, adică* $\operatorname{rang} A = r < n$.
(3) *Dacă* $m \geq n$ *şi* $\operatorname{rang} A = n$ *atunci acesta admite doar soluţia banală.*
(4) *Dacă* $m = n$ *atunci condiţia necesară şi suficientă ca sistemul* (1.5) *să admită soluţii nebanale este ca matricea asociată* A *să fie singulară, adică* $\det A = 0$.
(5) *Fie* $s' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ *şi* $s'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ *două soluţii ale sistemului* (1.5). *Atunci* $s = s' + s'' = (x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', \ldots, x_n' + x_n'')$ *este o soluţie a sistemului.*

(6) *Fie* $s = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *o soluţie a sistemului* (1.5) *şi* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Atunci* $\alpha \cdot s = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$ *este o soluţie a sistemului.*

DEFINIŢIA 1.20. Dacă matricea asociată sistemului (1.5) are rangul r şi dacă $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}\}$, $s_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$, $k = \overline{1, n-r}$, sunt soluţii ale sistemului astfel încât matricea

$$S = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-r} & x_2^{n-r} & \ldots & x_n^{n-r} \end{pmatrix}$$

are rangul $n-r$, atunci spunem că $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}\}$ este un *sistem fundamental de soluţii* pentru sistemul (1.5).

EXEMPLUL 1.7. Să se rezolve următorul sistem de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3 \cdot x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3 - 11 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = 0 \\ 2 \cdot x_2 + x_3 - 4 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 = 0 \end{cases}.$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -11 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 + 3L_2 \\ L_4 + L_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Am obţinut rang $A = 2 < 5$. Astfel sistemul admite şi soluţii nebanale. Alegem drept determinant principal $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$. Necunoscutele principale sunt x_1, x_2 iar necunoscutele secundare $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Subsistemul principal devine

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \cdot \alpha + \beta - \gamma \\ x_1 - x_2 = -\alpha - 3 \cdot \beta + \gamma \end{cases}.$$

Acesta este un sistem de tip Cramer, cu soluţia

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \cdot \alpha - \beta \\ \\ x_2 = -\frac{1}{2} \cdot \alpha + 2 \cdot \beta - \gamma \end{cases}.$$

Prin urmare mulţimea soluţiilor sistemului iniţial este

$$S = \left\{ s = \left(-\frac{3}{2} \cdot \alpha - \beta, -\frac{1}{2} \cdot \alpha + 2 \cdot \beta - \gamma, \alpha, \beta, \gamma \right) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soluţia generală se poate scrie sub forma matricială

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru

- $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ avem soluţia particulară $s_1 = \Big(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0, 0\Big)$;
- $\beta = 1$, $\alpha = \gamma = 0$ avem soluţia particulară $s_2 = (-1, 2, 0, 1, 0)$;
- $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = 0$ avem soluţia particulară $s_3 = (0, -1, 0, 0, 1)$.

Vom arăta că mulţimea $\{s_1, s_2, s_3\}$ este un sistem fundamental de soluţii. Într-adevăr matricea având liniile formate din elementele celor trei soluţii particulare este

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este clar că $\operatorname{rang} S \leq 3$ şi că avem minorul de ordin trei $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Prin urmare $\operatorname{rang} S = 3$ şi $\{s_1, s_2, s_3\}$ este un sistem fundamental de soluţii.

CAPITOLUL 2

SPAŢII LINIARE

1. Definiţii. Proprietăţi. Exemple

Vom începe acest capitol prin a reaminti unele chestiuni studiate în liceu, cum ar fi: legi de compoziţie, grupuri, inele sau corpuri, care vor fi folosite ulterior pentru introducerea noţiunii de spaţiu liniar.

1.1. Legi de compoziţie. Monoizi. Grupuri. Inele. Corpuri.

Definiţia 2.1. Fie A şi B două mulţimi nevide. Se numeşte *lege de compoziţie internă* în A o aplicaţie $f : A \times A \to A$ care asociază fiecărei perechi (x, y) de elemente din A un element $f(x, y)$ din A. Se numeşte *lege de compoziţie externă* în A peste B o aplicaţie $g : B \times A \to A$ care asociază fiecărei perechi $(\alpha, x) \in B \times A$ un element $g(\alpha, x) \in A$.

Notaţii. În general o lege de compoziţie internă o vom nota prin "$+$", "$\cdot$", "$*$" sau "$\circ$", iar o lege de compoziţie externă prin "$\cdot$". O lege de compoziţie internă notată "$+$" o vom numi generic *adunare* iar o lege de compoziţie internă notată "$\cdot$" o vom numi *înmulţire*.

Definiţia 2.2. Fie G o mulţime nevidă şi $* : G \times G \to G$ o lege de compoziţie internă în G. Spunem că $(G, *)$ este un *grup* dacă sunt îndeplinite simultan următoarele condiţii:

(G1) Legea de compoziţie internă "$*$" este *asociativă*, adică

$$\forall x, y, z \in G \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z);$$

(G2) Există *element neutru* în G în raport cu legea de compoziţie "$*$", adică

$$\exists\ \theta \in G \quad \text{astfel încât} \quad \forall x \in G \Rightarrow x * \theta = \theta * x = x;$$

(G3) Orice element din G este *simetrizabil* în raport cu legea de compoziţie "$*$", adică

$$\forall x \in G \quad \exists\ x' \in G \quad \text{astfel încât} \quad x * x' = x' * x = \theta.$$

Dacă, în plus,

(G4) Legea de compoziţie "$*$" este *comutativă*, adică

$$\forall x, y \in G \Rightarrow x * y = y * x,$$

spunem că $(G, *)$ este un *grup abelian* (sau comutativ).

OBSERVAŢIA 2.1. Reamintim că o mulţime nevidă G împreună cu o lege de compoziţie internă " $*$ " asociativă, $(G,*)$, se numeşte *monoid*. Dacă, în plus, legea " $*$ " este comutativă atunci $(G,*)$ se numeşte *monoid comutativ.*

EXEMPLUL 2.1. Mulţimea matricilor cu m linii şi n coloane cu elemente numere reale împreună cu operaţia de adunare a matricilor $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),+)$ este un grup abelian.

EXEMPLUL 2.2. Mulţimea matricilor inversabile de ordin n împreună cu operaţia de înmulţire a matricilor $(GL(n,\mathbb{R}),\times)$ este un grup necomutativ.

EXEMPLUL 2.3. Mulţimea matricilor ortogonale de ordin n împreună cu operaţia de înmulţire a matricilor $(GO(n,\mathbb{R}),\times)$ este un grup necomutativ.

OBSERVAŢIA 2.2. Mulţimile matricilor inversabile şi a matricilor ortogonale împreună cu adunarea matricilor sunt doar monoizi comutativi şi nu grupuri deoarece elementul neutru la adunarea matricilor în mulţimile de matrici pătratice de acelaşi ordin, matricea nulă, nu este o matrice inversabilă deci nu avem element neutru în raport cu adunarea în $GL(n,\mathbb{R})$ şi în $GO(n,\mathbb{R})$.

DEFINIŢIA 2.3. Fie mulţimea nevidă I şi fie legile de compoziţie internă $*: I\times I\to I$ şi $\circ: I\times I\to I$. Atunci $(I,*,\circ)$ se numeşte *inel* dacă:

(1) $(I,*)$ este grup abelian;
(2) $(I,\circ)$ este monoid;
(3) Legea " $\circ$" este *distributivă* la stânga şi la dreapta faţă de legea " $*$", adică
$$\forall x,y,z\in G\Rightarrow x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z);$$
şi, respectiv,
$$\forall x,y,z\in G\Rightarrow (x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z).$$

Dacă monoidul $(I,\circ)$ este comutativ atunci $(I,*,\circ)$ se numeşte *inel comutativ.* Dacă există element neutru în I în raport cu legea " $\circ$" atunci acest element se va numi *unitatea* inelului $(I,*,\circ)$ care la rândul lui se numeşte *inel cu unitate.*

DEFINIŢIA 2.4. Fie inelul $(K,*,\circ)$. Dacă $(K\setminus\{0\},\circ)$, unde 0 este elementul neutru în raport cu legea " $*$" în K, este grup atunci $(K,*,\circ)$ se numeşte *corp*. Dacă, în plus, $(K\setminus\{0\},\circ)$ este grup comutativ atunci $(K,*,\circ)$ se numeşte *corp comutativ.*

EXEMPLUL 2.4. Fie mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Operaţiile de adunare şi de înmulţire a numerelor reale sunt legi de compoziţie internă în $\mathbb{R}$. Se verifică uşor că $(\mathbb{R},+,\cdot)$ este un corp comutativ numit *corpul comutativ al numerelor reale.*

EXEMPLUL 2.5. Fie mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$. Operaţiile de adunare şi de înmulţire a numerelor complexe sunt legi de compoziţie internă în $\mathbb{C}$. Se verifică uşor că $(\mathbb{C},+,\cdot)$ este un corp comutativ numit *corpul comutativ al numerelor complexe.*

1.2. Spaţii liniare.

Definiţia 2.5. Fie $(V, +)$ un grup abelian şi fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ, al cărui element neutru în raport cu operaţia "$\cdot$" îl vom nota cu 1. Considerăm legea de compoziţie externă în V peste K notată $\cdot : K \times V \to V$. Atunci $(V, \cdot)$ se numeşte *modul stâng* peste corpul K dacă:

(M1) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$;
(M2) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in K$ şi $\forall x \in V$;
(M3) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, $\forall \alpha \in K$ şi $\forall x, y \in V$;
(M4) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in K$ şi $\forall x \in V$.

Propoziţia 2.1. *Fie $(V, +)$ un grup abelian, corpul comutativ $(K, +, \cdot)$ şi legea de compoziţie externă $\cdot : K \times V \to V$ în V peste K astfel încât $(V, \cdot)$ este modul stâng peste corpul K. Atunci, dacă 0 este elementul neutru la adunare în corpul K iar θ este elementul neutru la adunare în V, avem*

(1) *$0 \cdot x = \theta$, $\forall x \in V$;*
(2) *$\alpha \cdot \theta = \theta$, $\forall \alpha \in K$;*
(3) *Dacă $\alpha \cdot x = \theta$, $\alpha \in K$, $x \in V$, atunci $\alpha = 0$ sau $x = \theta$;*
(4) *$(-1) \cdot x = -x$, $\forall x \in V$, unde $-1 \in K$ este simetricul lui 1 în raport cu operaţia de adunare în corpul K iar $-x \in V$ este simetricul lui x în raport cu operaţia de adunare în V.*

Demonstraţie. Folosind proprietatea (M4), cu $\alpha = \beta = 0$, avem

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x, \quad \forall x \in V$$

de unde rezultă $0 \cdot x = \theta$.

În continuare fie $\alpha \in K$ şi $x \in V$. Notăm cu $-x$ simetricul lui x în raport cu operaţia de adunare în V. Avem, folosind proprietăţile (M4) şi (M1),

$$\alpha \cdot \theta = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot x + (-(\alpha \cdot x)) = \theta.$$

Acum, pentru a demonstra (3), să presupunem că $\alpha \cdot x = \theta$ şi $\alpha \neq 0$. Atunci elementul α este simetrizabil în corpul K în raport cu operaţia de înmulţire, adică există $\alpha' \in K$ astfel încât $\alpha' \cdot \alpha = 1$. Astfel, din proprietăţile (M1), (M2) şi (2), obţinem

$$x = 1 \cdot x = (\alpha' \cdot \alpha) \cdot x = \alpha' \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha' \cdot \theta = \theta.$$

În final, din (1) şi din proprietăţile (M3) şi (M1) rezultă

$$\theta = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x.$$

Deoarece simetricul unui element din V în raport cu operaţia de adunare este unic, urmează că $(-1) \cdot x = -x$. □

Definiţia 2.6. Fie mulţimea nevidă V, corpul comutativ $(K, +, \cdot)$, legea de compoziţie internă $+ : V \times V \to V$ şi legea de compoziţie externă $\cdot : K \times V \to V$ în V peste K. Atunci $(V, +, \cdot)$ se numeşte *spaţiu liniar* (sau vectorial) peste corpul K dacă:

(1) $(V, +)$ este grup abelian;
(2) $(V, \cdot)$ este modul stâng peste corpul K.

Elementele mulţimii V se numesc *vectori* iar cele din corpul K se numesc *scalari*. Dacă $K = \mathbb{R}$ atunci $(V, +, \cdot)$ se numeşte *spaţiu liniar real* iar dacă $K = \mathbb{C}$ atunci $(V, +, \cdot)$ se numeşte *spaţiu liniar complex*.

Definiţia 2.7. Elementul neutru în raport cu adunarea într-un spaţiu liniar se numeşte *vectorul nul* din acest spaţiu.

Observaţia 2.3. După cum am văzut, pentru mai multe tipuri de adunări sau de înmulţiri (în corpul $(K, +, \cdot)$ sau în spaţiul liniar $(V, +, \cdot)$) folosim, din raţiuni evidente de estetică şi logică a scrierii formulelor matematice, aceleaşi simboluri. Este clar că trebuie evitate confuziile între operaţiile notate la fel.

Observaţia 2.4. Cu scopul de a nu complica enunţurile definiţiilor, propoziţiilor sau teoremelor prezentate în acest curs, atunci când nu va exista vreun pericol de confuzie, nu vom preciza operaţiile din spaţiul liniar cu care lucrăm sau pe cele din corpul de scalari, notând simplu spaţiile liniare sau corpurile în acelaşi fel ca mulţimea pe care sunt definite aceste operaţii. De exemplu, atunci când nu este posibilă nici o confuzie, vom nota un spaţiu liniar $(V, +, \cdot)$ peste un corp $(K, +, \cdot)$ doar cu V, iar corpul de scalari doar prin K.

Exemplul 2.6. Fie corpul comutativ $(K, +, \cdot)$. Considerăm produsul carte-zian al mulţimii K cu ea însăşi de m ori, definit prin

$$K^m = K \times K \times \ldots \times K = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) | x_i \in K, i = \overline{1, m}\}.$$

Definim operaţia de adunare în K^m, $+ : K^m \times K^m \to K^m$ prin

$$x+y = (x_1, x_2, \ldots, x_m)+(y_1, y_2, \ldots, y_m) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_m+y_m) \in K^m,$$

oricare ar fi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K^m$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in K^m$.
Definim legea de compoziţie externă în K^m peste K (înmulţirea la stânga cu scalari), $\cdot : K \times K^m \to K^m$, prin

$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_m) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_m) \in K^m,$$

oricare ar fi $\alpha \in K$ şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K^m$.

Vom demonstra că $(K^m, +, \cdot)$ este un spaţiu liniar peste corpul K. Tehnica de lucru în astfel de cazuri constă în a reduce studiul operaţiilor definite pe spaţiul liniar la cel al operaţiilor din corpul de scalari ale căror proprietăţi le cunoaştem.
Mai întâi arătăm că $(K^m, +)$ este un grup abelian.

(G1) Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K^m$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in K^m$ şi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in K^m$. Avem, conform definiţiei adunării în K^m,

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, \ldots, x_m) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_m + z_m) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_m + (y_m + z_m)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \ldots, (x_m + y_m) + z_m) \\ &= (x + y) + z, \end{aligned}$$

unde am folosit faptul că adunarea în corpul K este asociativă. Am obţinut astfel că şi adunarea din K^m este la rândul ei asociativă.

(G2) Considerăm elementul $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ din K^m, unde 0 este elementul neutru la adunare în K, şi fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K^m$. Atunci

$$x + \theta = (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_m + 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Analog se obţine $\theta + x = x$. Prin urmare θ este elementul neutru la adunare în K^m.

(G3) Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un element oarecare din K^m. Considerăm $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_m) \in K^m$, unde $-x_i \in K$ este simetricul lui $x_i \in K$ în raport cu adunarea în K, pentru orice $i = \overline{1, m}$. Din definiţia operaţiei de adunare în K^m rezultă

$$x + (-x) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \ldots, x_m + (-x_m)) = (0, 0, \ldots, 0) = \theta.$$

Analog se arată $(-x) + x = \theta$ şi, astfel, că orice element x din K^m este simetrizabil.

(G4) Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K^m$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in K^m$. Atunci

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, \ldots, x_m) + (y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_m + x_m) \\ &= y + x, \end{aligned}$$

unde am folosit faptul că adunarea în corpul K este comutativă. Am obţinut astfel că şi adunarea din K^m este la rândul ei comutativă.

În continuare demonstrăm că $(K^m, \cdot)$ este modul stâng peste corpul K.

(M1) Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K^m$ şi 1 elementul neutru la înmulţire în K. Avem

$$1 \cdot x = 1 \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_m) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \ldots, 1 \cdot x_m) = (x_1, x_2, \ldots, x_m) = x.$$

(M2) Fie $\alpha, \beta \in K$ şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K^m$. Atunci

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot x) &= \alpha \cdot (\beta \cdot x_1, \beta \cdot x_2, \ldots, \beta \cdot x_m) \\ &= (\alpha \cdot (\beta \cdot x_1), \alpha \cdot (\beta \cdot x_2), \ldots, \alpha \cdot (\beta \cdot x_m)) \\ &= ((\alpha \cdot \beta) \cdot x_1, (\alpha \cdot \beta) \cdot x_2, \ldots, (\alpha \cdot \beta) \cdot x_m) \\ &= (\alpha \cdot \beta) \cdot x, \end{aligned}$$

unde am folosit asociativitatea înmulţirii în corpul K.

(M3) Fie $\alpha \in K$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K^m$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in K^m$. Datorită distributivităţii înmulţirii faţă de adunare în corpul K, obţinem

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (x + y) &= (\alpha \cdot (x_1 + y_1), \alpha \cdot (x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_m + y_m)) \\ &= (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot x_2 + \alpha \cdot y_2, \ldots, \alpha \cdot x_m + \alpha \cdot y_m) \\ &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_m) + (\alpha \cdot y_1, \alpha \cdot y_2, \ldots, \alpha \cdot y_m) \\ &= \alpha \cdot x + \alpha \cdot y. \end{aligned}$$

(M4) Ca şi în demonstraţia proprietăţii (M3), vom folosi distributivităţii înmulţirii faţă de adunare în corpul K. Fie $\alpha, \beta \in K$ şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K^m$. Atunci

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot x &= (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= ((\alpha + \beta) \cdot x_1, (\alpha + \beta) \cdot x_2, \ldots, (\alpha + \beta) \cdot x_m) \\ &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_m) + (\beta \cdot x_1, \beta \cdot x_2, \ldots, \beta \cdot x_m) \\ &= \alpha \cdot x + \beta x. \end{aligned}$$

În concluzie $(K^m, +, \cdot)$ este un spaţiu liniar peste corpul K. În cazul în care $K = \mathbb{R}$ obţinem spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$, cel în care vom lucra cel mai des pe parcursul acestui curs.

Prezentăm în continuare alte două exemple de spaţii liniare (pe care le vom da fără demonstraţii deoarece acestea sunt foarte asemănătoare cu demonstraţia din exemplul precedent).

EXEMPLUL 2.7. Fie mulţimea matricilor cu m linii şi n coloane, cu elemente dintr-un corp comutativ $(K, +, \cdot)$, $\mathcal{M}_{m,n}(K)$, împreună cu operaţiile de adunare a matricilor şi de înmulţire cu scalari definite în capitolul precedent şi notate tot prin "$+$" şi, respectiv "$\cdot$". Atunci $(\mathcal{M}_{m,n}(K), +, \cdot)$ este un spaţiu liniar peste corpul K.

EXEMPLUL 2.8. Fie un corp comutativ $(K, +, \cdot)$ şi fie mulţimea polinoamelor de grad mai mic sau egal cu $n \in \mathbb{N}$ cu coeficienţi din K

$$\mathcal{P}_n[K] = \{p = p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 | a_i \in K, i = \overline{0,n}\}$$

Definim adunarea polinoamelor $+ : \mathcal{P}_n[K] \times \mathcal{P}_n[K] \to \mathcal{P}_n[K]$ astfel: fie

$$p = p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \in \mathcal{P}_n[K]$$

şi

$$q = q(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0 \in \mathcal{P}_n[K],$$

atunci, prin definiţie, avem

$$p+q = (a_n+b_n) \cdot x^n + (a_{n-1}+b_{n-1}) \cdot x^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1) \cdot x + a_0 + b_0 \in \mathcal{P}_n[K].$$

Definim înmulţirea polinoamelor cu scalari astfel: dacă $\alpha \in K$ şi

$$p = p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \in \mathcal{P}_n[K],$$

atunci

$$\alpha \cdot p = (\alpha \cdot a_n) \cdot x^n + (\alpha \cdot a_{n-1}) \cdot x^{n-1} + \ldots + (\alpha \cdot a_1) \cdot x + \alpha \cdot a_0 \in \mathcal{P}_n[K].$$

Se demonstrează uşor că $(\mathcal{P}_n[K], +, \cdot)$ este un spaţiu liniar peste corpul K.

DEFINIŢIA 2.8. Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste corpul $(K, +, \cdot)$ şi fie $V_0 \subseteq V$ o submulţime a lui V. Spunem că $(V_0, +, \cdot)$ este un *subspaţiu liniar* al spaţiului liniar $(V, +, \cdot)$ şi notăm $V_0 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ dacă $(V_0, +, \cdot)$ este spaţiu liniar peste corpul K.

OBSERVAŢIA 2.5. Din definiţia de mai sus rezultă imediat că vectorul nul dintr-un spaţiu liniar aparţine oricărui subspaţiu liniar al acestuia.

PROPOZIŢIA 2.2. *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste corpul $(K, +, \cdot)$ şi fie $V_0 \subseteq V$ o submulţime a lui V. Atunci V_0 este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar V dacă şi numai dacă*

(1) $\forall x, y \in V_0 \Rightarrow x + y \in V_0$;
(2) $\forall \alpha \in K$ şi $\forall x \in V_0 \Rightarrow \alpha \cdot x \in V_0$.

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" Presupunem $V_0 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$. Atunci $(V_0, +, \cdot)$ este spaţiu liniar peste corpul K, prin urmare $(V_0, +)$ este subgrup al grupului $(V, +)$ de unde rezultă (1). Deoarece $(V_0, \cdot)$ este modul stâng peste corpul K, din proprietăţile (M1) şi (M2) obţinem (2).

"$\Leftarrow$" Din (1) rezultă că $(V_0, +)$ este subgrup al grupului $(V, +)$ deci $(V_0, +)$ este grup abelian. Faptul că $(V_0, \cdot)$ este modul stâng peste corpul K rezultă din (1) şi (2) ţinând cont că $(V, \cdot)$ este modul stâng peste K. □

Evident, această propoziţie poate fi reformulată după cum urmează.

PROPOZIŢIA 2.3. *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste corpul $(K, +, \cdot)$ şi fie $V_0 \subseteq V$ o submulţime a lui V. Atunci V_0 este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar V dacă şi numai dacă*

$$\forall \alpha, \beta \in K \quad \text{şi} \quad \forall x, y \in V_0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V_0.$$

COROLARUL 2.4. *Intersecţia $V_1 \cap V_2$ a două subspaţii liniare $V_1 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ şi $V_2 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar V.*

OBSERVAŢIA 2.6. Dacă notăm cu θ vectorul nul din spaţiul liniar V şi considerăm mulţimea $V_0 = \{\theta\}$ atunci $(V_0, +, \cdot)$ este un subpaţiu liniar al lui V. Deasemeni, este clar că $V \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$. Aceste subspaţii liniare, V_0 şi V, sunt numite *subspaţii liniare triviale* ale lui V.

EXEMPLUL 2.9. Considerăm spaţiul liniar $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$ al matricilor pătratice de ordin n peste corpul $(K, +, \cdot)$, mulţimea matricilor simetrice de ordin n cu elemente din K, $\mathcal{S}_n(K)$ şi mulţimea matricilor antisimetrice de ordin n cu elemente din K, $\mathcal{AS}_n(K)$. Acum, folosind proprietăţile matricilor simetrice şi antisimetrice şi propoziţia 2.2, de caracterizare a unui subspaţiu liniar, obţinem $\mathcal{S}_n(K) \underset{s.s.l.}{\subseteq} \mathcal{M}_n(K)$ şi, respectiv, $\mathcal{AS}_n(K) \underset{s.s.l.}{\subseteq} \mathcal{M}_n(K)$.

2. Baze în spaţii liniare finit dimensionale

În acest paragraf vom lucra într-un spaţiu liniar $(V, +, \cdot)$ peste corpul comutativ $(K, +, \cdot)$.

DEFINIŢIA 2.9. Fie sistemul (mulţimea) de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ din spaţiul liniar V. Spunem că un vector $x \in V$ este o *combinaţie liniară* de vectori din S dacă există scalarii $\alpha_i \in K$, $i = \overline{1, p}$, astfel încât

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot v_i.$$

Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de vectori din S se numeşte *acoperirea liniară* a lui S şi se notează $L[S]$.

Observaţia 2.7. În definiţia precedentă scalarii α_i nu sunt în mod necesar nenuli. Ca o consecinţă, vectorul nul din spaţiul liniar S se găseşte în acoperirea liniară a oricărui sistem de vectori din V.

Propoziţia 2.5. *Fie $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ un sistem de vectori din V. Atunci acoperirea liniară $L[S]$ a lui S este un subspaţiu liniar al lui V. Mai mult, $L[S]$ este intersecţia tuturor subspaţiilor liniare ale lui V care conţin sistemul de vectori S.*

Demonstraţie. Fie vectorii $x, y \in L[S]$. Atunci există scalarii $\alpha_i \in K$ şi $\beta_i \in K$, $i = \overline{1,p}$, astfel încât

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot v_i,$$

şi

$$y = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \ldots + \beta_p \cdot v_p = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \cdot v_i.$$

Acum fie scalarii oarecare $\alpha, \beta \in K$. Avem

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= (\alpha \cdot \alpha_1 + \beta \cdot \beta_1) \cdot v_1 + (\alpha \cdot \alpha_2 + \beta \cdot \beta_2) \cdot v_2 + \ldots \\ &\quad + (\alpha \cdot \alpha_p + \beta \cdot \beta_p) \cdot v_p \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} (\alpha \cdot \alpha_i + \beta \cdot \beta_i) \cdot v_i. \end{aligned}$$

Prin urmare, am obţinut $\alpha x + \beta y \in L[S]$ şi, conform propoziţiei de caracterizare a subspaţiilor liniare, urmează că $L[S] \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$.

În continuare, este evident că $S \in L[S]$, deci $\bigcap\limits_{\substack{V_k \subseteq V \\ s.s.l. \\ S \subseteq V_k}} V_k \subseteq L[S]$. Fie $V_k \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ astfel încât $S \subset V_k$. Conform propoziţiei de caracterizare a subspaţiilor liniare rezultă că orice combinaţie liniară de vectori din S aparţine subspaţiului liniar V_k, ceea ce înseamnă că $L[S] \subseteq V_k$ şi, prin urmare, $L[S] \subseteq \bigcap\limits_{\substack{V_k \subseteq V \\ s.s.l. \\ S \subseteq V_k}} V_k$.

În concluzie, $L[S]$ este intersecţia tuturor subspaţiilor liniare ale lui V care conţin sistemul de vectori S. $\square$

Observaţia 2.8. Subspaţiul liniar $L[S]$ mai este numit şi *subspaţiul liniar generat* de sistemul de vectori S.

Definiţia 2.10. Sistemul de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ se numeşte *liniar dependent* dacă există scalarii $\alpha_i \in K$, $i = \overline{1,p}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p = \theta,$$

unde θ este vectorul nul din spaţiul liniar V.

Definiţia 2.11. Sistemul de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ se numeşte *liniar independent* dacă din

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p = \theta,$$

unde θ este vectorul nul din spaţiul liniar V şi $\alpha_i \in K$, $i = \overline{1,p}$, sunt scalari, rezultă

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0,$$

unde 0 este elementul nul în raport cu adunarea în corpul K.

Următoarea teoremă este un rezultat de caracterizare a sistemelor de vectori liniar dependente.

Teorema 2.6. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un sistem de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ dintr-un spaţiu liniar V să fie liniar dependent este ca măcar unul dintre vectorii din sistemul S să se scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori din S.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Presupunem că sistemul de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este liniar dependent. Rezultă că există scalarii $\alpha_i \in K$, $i = \overline{1,p}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p = \theta. \tag{2.1}$$

În continuare presupunem că $\alpha_k \neq 0$ şi astfel rezultă că scalarul α_k este simetrizabil în raport cu înmulţirea în corpul K. Adică există $\alpha_k^{-1} \in K$ astfel încât $\alpha_k \cdot \alpha_k^{-1} = 1$, unde 1 este unitatea din corpul K. Acum, înmulţim relaţia (2.1) cu α_k^{-1} şi obţinem

$$(\alpha_1 \cdot \alpha_k^{-1}) \cdot v_1 + (\alpha_2 \cdot \alpha_k^{-1}) \cdot v_2 + \ldots + v_k + \ldots + (\alpha_p \cdot \alpha_k^{-1}) \cdot v_p = \theta,$$

de unde

$$\begin{aligned} v_k &= (-\alpha_1 \cdot \alpha_k^{-1}) \cdot v_1 + (-\alpha_2 \cdot \alpha_k^{-1}) \cdot v_2 + \ldots + (-\alpha_{k-1} \cdot \alpha_k^{-1}) \cdot v_{k-1} \\ &\quad + (-\alpha_{k+1} \cdot \alpha_k^{-1}) \cdot v_{k+1} + \ldots + (-\alpha_p \cdot \alpha_k^{-1}) \cdot v_p \\ &= \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \ldots + \beta_{k-1} \cdot v_{k-1} + \beta_{k+1} \cdot v_{k+1} + \ldots + \beta_p \cdot v_p, \end{aligned}$$

unde $\beta_i = -\alpha_i \cdot \alpha_k^{-1} \in K$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\} \setminus \{k\}$, sunt elementele simetrice în raport cu operaţia de adunare în corpul K ale scalarilor $\alpha_i \cdot \alpha_k^{-1} \in K$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\} \setminus \{k\}$. Astfel vectorul v_k este o combinaţie liniară a celorlalţi vectori din S.

"$\Leftarrow$" Să presupunem că vectorul $v_k \in S$, se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori din S, adică există scalarii $\beta_i \in K$ astfel încât

$$v_k = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \ldots + \beta_{k-1} \cdot v_{k-1} + \beta_{k+1} \cdot v_{k+1} + \ldots + \beta_p \cdot v_p.$$

Urmează că

$$\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \ldots + \beta_{k-1} \cdot v_{k-1} + (-1) \cdot v_k + \beta_{k+1} \cdot v_{k+1} + \ldots + \beta_p \cdot v_p = \theta,$$

adică sistemul de vectori S este liniar dependent. $\square$

EXEMPLUL 2.10. Fie sistemul de vectori $S = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$, unde $v_1 = (1, 2, -4)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (-3, 2, -6)$. Să se arate că S este un sistem de vectori liniar dependent.

Considerăm scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 = \theta$, unde $\theta = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ este vectorul nul. Această relaţie este echivalentă cu sistemul de ecuaţii liniare

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2 \cdot \alpha_2 & - & 3 \cdot \alpha_3 & = & 0 \\ 2 \cdot \alpha_1 & & & + & 2 \cdot \alpha_3 & = & 0 \\ -4 \cdot \alpha_1 & + & \alpha_2 & - & 6 \cdot \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Matricea acestui sistem este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, cu $\det A = 0$. Prin urmare, rangul matricei A este mai mic decât 3 şi sistemul admite soluţii nebanale, adică α_i, $i = \overline{1, 3}$, nu sunt toţi egali cu 0. Rezultă că sistemul de vectori S este liniar dependent.

Demonstraţiile următoarelor trei propoziţii sunt imediate şi, din acest motiv, vom prezenta aici doar enunţurile acestora.

PROPOZIŢIA 2.7. *Un sistem de vectori dintr-un spaţiu liniar format dintr-un singur vector nenul este liniar independent.*

PROPOZIŢIA 2.8. *Un sistem de vectori dintr-un spaţiu liniar care conţine vectorul nul este un sistem liniar dependent.*

PROPOZIŢIA 2.9. *Un sistem de vectori dintr-un spaţiu liniar care conţine un subsistem de vectori liniar dependent este la rândul său liniar dependent.*

DEFINIŢIA 2.12. Un sistem de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ din spaţiul liniar V se numeşte *sistem de generatori* pentru V dacă orice vector din V se scrie ca o combinaţie liniară de elemente din S, adică

$$\forall x \in V \quad \exists \alpha_i \in K,\ i = \overline{1, p}, \quad \text{astfel încât} \quad x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot v_i.$$

OBSERVAŢIA 2.9. Se observă cu uşurinţă că un sistem de vectori din spaţiul liniar V este un sistem de generatori pentru V dacă şi numai dacă V este acoperirea liniară a lui S, adică $V = L[S]$.

DEFINIŢIA 2.13. Spunem că un spaţiu liniar V este *infinit dimensional* dacă există un sistem de vectori din V cu un număr infinit de elemente care este liniar independent. În caz contrar spunem că spaţiul liniar V este *finit dimensional*.

DEFINIŢIA 2.14. Fie V un spaţiu liniar finit dimensional. Spunem că V are *dimensiunea* n şi scriem $\dim V = n$ dacă numărul maxim de vectori liniar independenţi din V este n.

PROPOZIŢIA 2.10. *Dacă în spaţiul liniar V există un sistem de generatori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ liniar independent atunci* $\dim V = n$.

Demonstraţie. Vom demonstra că orice sistem de vectori din V format din $n+1$ elemente este liniar dependent.

Fie $S' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}\}$ un sistem de vectori din V. Deoarece S este un sistem de generatori pentru spaţiul liniar V, rezultă că există scalarii $\alpha_{ij} \in K$, $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{1, n}$, astfel încât vectorii din S' se pot scrie

$$w_i = \alpha_{i1} \cdot v_1 + \alpha_{i2} \cdot v_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot v_j, \quad \forall i = \overline{1, n+1}. \tag{2.2}$$

Acum, considerăm scalarii $\beta_i \in K$, $i = \overline{1, n+1}$, astfel încât

$$\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 + \ldots + \beta_{n+1} \cdot w_{n+1} = \theta, \tag{2.3}$$

unde θ este vectorul nul din V. Din (2.2) şi (2.3) obţinem

$$\beta_1 \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \cdot v_j\Big) + \beta_2 \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} \cdot v_j\Big) + \ldots + \beta_{n+1} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n+1j} \cdot v_j\Big) = \theta,$$

de unde

$$\begin{aligned} & (\beta_1 \cdot \alpha_{11} + \beta_2 \cdot \alpha_{21} + \ldots + \beta_n \cdot \alpha_{n1} + \beta_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,1}) \cdot v_1 \\ + \; & (\beta_1 \cdot \alpha_{12} + \beta_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \beta_n \cdot \alpha_{n2} + \beta_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,2}) \cdot v_2 \\ & \ldots\ldots\ldots \\ + \; & (\beta_1 \cdot \alpha_{1n} + \beta_2 \cdot \alpha_{2n} + \ldots + \beta_n \cdot \alpha_{nn} + \beta_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,n}) \cdot v_n \\ = \; & \theta. \end{aligned}$$

Dar sistemul de vectori S este liniar independent, de unde, conform definiţiei independenţei liniare, rezultă sistemul de ecuaţii liniare cu necunoscutele β_i, $i = \overline{1, n+1}$,

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot \beta_1 + \alpha_{21} \cdot \beta_2 + \ldots + \alpha_{n1} \cdot \beta_n + \alpha_{n+1,1} \cdot \beta_{n+1} & = 0 \\ \alpha_{12} \cdot \beta_1 + \alpha_{22} \cdot \beta_2 + \ldots + \alpha_{n2} \cdot \beta_n + \alpha_{n+1,2} \cdot \beta_{n+1} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n} \cdot \beta_1 + \alpha_{2n} \cdot \beta_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot \beta_n + \alpha_{n+1,n} \cdot \beta_{n+1} & = 0 \end{cases}.$$

Matricea asociată acestui sistem este

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} & \alpha_{n+1,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} & \alpha_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} & \alpha_{n+1,n} \end{pmatrix},$$

cu rang $A \leq n < n+1$. Prin urmare sistemul admite şi soluţii nebanale, adică există β_i, $i = \overline{1, n+1}$, nu toţi nuli, care transformă ecuaţiile sistemului în

identităţi. Ţinând cont de relaţia (2.3) rezultă că sistemul de vectori S' este liniar dependent.
În concluzie, numărul maxim de vectori liniar independenţi din V este n şi, astfel, $\dim V = n$. □

DEFINIŢIA 2.15. Un sistem de vectori liniar independent din spaţiul liniar V cu un număr de elemente egal cu dimensiunea spaţiului se numeşte *bază* în V.

TEOREMA 2.11. (Teorema de reprezentare a unui vector într-o bază)
Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în spaţiul liniar V. Atunci orice vector $x \in V$ se reprezintă în mod unic ca o combinaţie liniară de vectori din $\mathcal{B}$, adică

$$\forall x \in V \quad \exists! \alpha_i \in K, i = \overline{1,n}, \quad \text{astfel încât} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i.$$

Scalarii $\alpha_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, se numesc coordonatele vectorului x în baza $\mathcal{B}$ şi notăm $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$.

DEMONSTRAŢIE. **Existenţa.** Fie $x \in V$ un vector oarecare din spaţiul liniar V. Considerăm sistemul de vectori $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, x\}$ din V. Deoarece $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază în V, conform definiţiei, rezultă că $\dim V = n$ şi, mai departe, că S este un sistem de vectori liniar dependent. Deci există scalarii β_i, $i = \overline{0,n}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\beta_0 \cdot x + \beta_1 \cdot e_1 + \ldots + \beta_n \cdot e_n = \theta, \tag{2.4}$$

unde θ este vectorul nul din V. Presupunem, prin reducere la absurd, că $\beta_0 = 0$. Atunci

$$\beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \ldots + \beta_n \cdot e_n = \theta,$$

unde β_i, $i = \overline{1,n}$, nu sunt toţi nuli. Aceasta este o contradicţie, pentru că sistemul de vectori $\mathcal{B}$ este o bază, adică este liniar independent.
Am obţinut $\beta_0 \neq 0$, de unde rezultă că β_0 este simetrizabil în raport cu operaţia de înmulţire în corpul K. Prin urmare, există $\beta_0^{-1} \in K$ astfel încât $\beta_0 \cdot \beta_0^{-1} = \beta_0^{-1} \cdot \beta_0 = 1$, unde 1 este unitatea din K.
Înmulţind ecuaţia (2.4) cu β_0^{-1} rezultă

$$x + (\beta_0^{-1} \cdot \beta_1) \cdot e_1 + \ldots + (\beta_0^{-1} \cdot \beta_n) \cdot e_n = \theta,$$

adică

$$x = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n,$$

unde am folosit notaţiile $\alpha_i = -\beta_0^{-1} \cdot \beta_i \in K$, $i = \overline{1,n}$.

Unicitatea. Presupunem, prin reducere la absurd, că un vector oarecare $x \in V$ se poate scrie ca o combinaţie liniară de elemente din $\mathcal{B}$ în două moduri distincte, adică există $\alpha_i \in K$, $\alpha_i' \in K$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât

$$x = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n = \alpha_1' \cdot e_1 + \alpha_2' \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n' \cdot e_n.$$

Rezultă

$$(\alpha_1 + (-\alpha_1')) \cdot e_1 + (\alpha_2 + (-\alpha_2')) \cdot e_2 + \ldots + (\alpha_n + (-\alpha_n')) \cdot e_n = \theta$$

unde $-\alpha_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, sunt elementele simetrice ale α_i în raport cu operaţia de adunare în corpul K. Cum $\mathcal{B}$ este un sistem de vectori liniar independent, urmează $\alpha_i + (-\alpha_i') = 0$, $i = \overline{1,n}$, de unde $\alpha_i = \alpha_i'$, $\forall i = \overline{1,n}$, ceea ce înseamnă că scrierea unui vector din V ca o combinaţie liniară de vectori din $\mathcal{B}$ este unică. □

Observaţia 2.10. Doi vectori x şi y din spaţiul liniar V, unde $\dim V = n$, exprimaţi în aceeaşi bază $\mathcal{B}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$, sunt egali dacă $x_i = y_i$, pentru orice $i = \overline{1,n}$.

Ca o consecinţă putem enunţa următorul rezultat.

Teorema 2.12. *Un sistem de vectori dintr-un spaţiu liniar este o bază în acest spaţiu dacă şi numai dacă este un sistem de generatori liniar independent pentru spaţiul liniar considerat.*

Exemplul 2.11. Fie spaţiul liniar $(K^n, +, \cdot)$ peste corpul $(K, +, \cdot)$, definit in exemplul 2.6. Considerăm vectorii

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$$

din K^n. Atunci $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază în K^n numită *baza canonică* din spaţiul liniar $(K^n, +, \cdot)$. Ca o consecinţă, obţinem $\dim K^n = n$.

Într-adevăr, dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ sunt scalari astfel încât $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \theta$, unde θ este vectorul nul din K^n, rezultă imediat $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, deci $\mathcal{B}$ este un sistem liniar independent. În continuare, fie $x = (x_1, ..., x_n) \in K^n$. Se obţine imediat $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$. Prin urmare, $\mathcal{B}$ este un sistem de generatori pentru K^n. În concluzie, $\mathcal{B}$ este o bază în spaţiul liniar K^n.

În cadrul aplicaţiilor, dacă lucrăm cu vectori exprimaţi în baza canonică din spaţiul ambient, nu vom mai preciza baza atunci când scriem coordonatele acestor vectori (dacă nu este posibilă nici o confuzie).

Exemplul 2.12. În spaţiul liniar $(\mathcal{M}_{m,n}(K), +, \cdot)$ peste corpul $(K, +, \cdot)$, definit în exemplul 2.7, considerăm următoarele $m \cdot n$ matrici, numite matrici unitare,

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$E_{1n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$E_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_{m1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Se verifică uşor că sistemul de vectori

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{m1}, \dots, E_{mn}\}$$

este un sistem de generatori liniar independent în spaţiul liniar $(\mathcal{M}_{m,n}(K), +, \cdot)$, deci o bază. Această bază este numită *baza canonică* din acest spaţiu liniar. De aici rezultă şi că $\dim \mathcal{M}_{m,n}(K) = m \cdot n$.

Aşa cum am văzut în exemplul 2.9, în spaţiul liniar $\mathcal{M}_n(K)$ al matricilor pătratice de ordin n cu elemente din corpul K avem două subspaţii liniare remarcabile: cel al matricilor simetrice $\mathcal{S}_n(K)$ şi cel al matricilor antisimetrice $\mathcal{AS}_n(K)$.
Se verifică imediat că o bază în $\mathcal{S}_n(K)$ este

$$\mathcal{B}_1 = \{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} | i, j = \overline{1, n}, i \neq j\}$$

şi astfel $\dim \mathcal{S}_n(K) = \frac{n(n+1)}{2}$.
O bază în $\mathcal{AS}_n(K)$ este

$$\mathcal{B}_2 = \{E_{ij} - E_{ji} | i, j = \overline{1, n}, i \neq j\}$$

şi $\dim \mathcal{AS}_n(K) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Se observă că $\dim \mathcal{M}_n(K) = \dim \mathcal{S}_n(K) + \dim \mathcal{AS}_n(K) = n^2$, ceea ce era de aşteptat pentru că orice matrice pătratică se poate scrie ca suma dintre o matrice simetrică şi una antisimetrică astfel: dacă $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este o matrice pătratică şi definim $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^t) \in \mathcal{S}_n(K)$ şi $A_2 = \frac{1}{2}(A - A^t) \in \mathcal{AS}_n(K)$ atunci $A = A_1 + A_2$.

Exemplul 2.13. Fie spaţiul liniar $(\mathcal{P}_n(K), +, \cdot)$ al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n cu coeficienţi din corpul K, definit în exemplul 2.8. În acest spaţiu considerăm sistemul de vectori

$$\mathcal{B} = \{p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2, \dots, p_n = x^n\}$$

care, aşa cum se verifică imediat, este un sistem de generatori liniar independent pentru $\mathcal{P}_n[K]$, adică o bază în acest spaţiu, numită *baza canonică*. De aici rezultă şi $\dim \mathcal{P}_n[K] = n + 1$.

2.1. Operaţii cu vectori exprimaţi într-o bază. Fie spaţiul liniar $(V, +, \cdot)$ peste corpul $(K, +, \cdot)$, cu $\dim V = n$, şi baza $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ în acest spaţiu. Considerăm vectorii

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n \in V$$

şi

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)_{\mathcal{B}} = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \dots + y_n \cdot v_n \in V.$$

Avem

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1) \cdot v_1 + (x_2 + y_2) \cdot v_2 + \dots + (x_n + y_n) \cdot v_n \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)_{\mathcal{B}} \in V \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\alpha \cdot x &= (\alpha \cdot x_1) \cdot v_1 + (\alpha \cdot x_2) \cdot v_2 + \ldots + (\alpha \cdot x_n) \cdot v_n \\ &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)_{\mathcal{B}} \in V, \quad \forall \alpha \in K.\end{aligned}$$

2.2. Transformarea coordonatelor unui vector la o schimbare de bază. Fie spaţiul liniar $(V, +\cdot)$ peste corpul $(K, +, \cdot)$, cu $\dim V = n$, şi bazele $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şi $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ în acest spaţiu. Deoarece $\mathcal{B}_1$ este un sistem de generatori pentru V vectorii din $\mathcal{B}_2$ se pot scrie ca fiind combinaţii liniare de vectori din $\mathcal{B}_1$ astfel: $w_i = \alpha_{i1} \cdot v_1 + \alpha_{i2} \cdot v_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot v_n$ $= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot v_j$, $\forall i = \overline{1, n}$, sau, pe larg,

$$\begin{cases} w_1 &= \alpha_{11} \cdot v_1 + \alpha_{12} \cdot v_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot v_n \\ w_2 &= \alpha_{21} \cdot v_1 + \alpha_{22} \cdot v_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot v_n \\ \ldots & \ldots \ldots \\ w_n &= \alpha_{n1} \cdot v_1 + \alpha_{n2} \cdot v_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot v_n \end{cases}.$$

Matricea $C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ a acestui sistem se numeşte *matricea schimbării de bază*. Această schimbare de bază se notează $\mathcal{B}_1 \xrightarrow{C} \mathcal{B}_2$. Deoarece $\mathcal{B}_2$ este un sistem de vectori liniar independent rezultă că $\operatorname{rang} C = n$, adică matricea C este nesingulară ($\det C \neq 0$).

Considerăm vectorul $x = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{\mathcal{B}_1} = (x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)_{\mathcal{B}_2} \in V$ şi avem

$$\begin{aligned} x &= x'_1 \cdot v_1 + x'_2 \cdot v_2 + \ldots + x'_n \cdot v_n \\ &= x''_1 \cdot w_1 + x''_2 \cdot w_2 + \ldots + x''_n \cdot w_n \\ &= x''_1 \cdot (\alpha_{11} \cdot v_1 + \alpha_{12} \cdot v_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot v_n) \\ &\quad + x''_2 \cdot (\alpha_{21} \cdot v_1 + \alpha_{22} \cdot v_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot v_n) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \\ &\quad + x''_n \cdot (\alpha_{n1} \cdot v_1 + \alpha_{n2} \cdot v_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot v_n) \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} \cdot x''_i) \cdot v_1 + (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} \cdot x''_i) \cdot v_2 + \ldots \\ &\quad + (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} \cdot x''_i) \cdot v_n, \end{aligned}$$

de unde rezultă coordonatele lui x în baza $\mathcal{B}_1$ în funcţie de coordonatele sale în baza $\mathcal{B}_2$

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha_{11} \cdot x''_1 + \alpha_{21} \cdot x''_2 + \ldots + \alpha_{n1} \cdot x''_n \\ x'_2 = \alpha_{12} \cdot x''_1 + \alpha_{22} \cdot x''_2 + \ldots + \alpha_{n2} \cdot x''_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ x'_n = \alpha_{1n} \cdot x''_1 + \alpha_{2n} \cdot x''_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot x''_n \end{cases}.$$

Matricea acestui sistem este C^t, transpusa matricei schimbării de bază. Dacă notăm cu $X_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ şi cu $X_2 = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ \vdots \\ x''_n \end{pmatrix}$, atunci sistemul de mai sus se scrie matricial

$$X_1 = C^t \times X_2,$$

şi, cum C^t este inversabilă, înmulţind această relaţie la stânga cu matricea inversă $(C^t)^{-1}$, obţinem formula matricială

$$X_2 = (C^t)^{-1} \times X_1,$$

de transformare a coordonatelor vectorului $x \in V$ la schimbarea de bază $\mathcal{B}_1 \xrightarrow{C} \mathcal{B}_2$.

Exemplul 2.14. Să se arate că sistemul de vectori $\mathcal{B}' = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 0)\}$ este o bază în spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ şi apoi să se determine coordonatele vectorului $x = (1, 2, 3)$ în această bază, unde toţi vectorii sunt exprimaţi în baza canonică $\mathcal{B}$ din $\mathbb{R}^3$.

Vom arăta mai întâi că $\mathcal{B}'$ este un sistem de vectori liniar independent. Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 = \theta,$$

unde $\theta = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ este vectorul nul din $\mathbb{R}^3$. Înlocuind v_1, v_2 şi v_3 în relaţia de mai sus obţinem următorul sistem de ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi reali

$$\begin{cases} \phantom{\alpha_1 +{}} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 \phantom{{}+\alpha_2} + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \phantom{{}+\alpha_3} = 0 \end{cases},$$

a cărui matrice este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cu $\det A = 2 \neq 0$. Prin urmare sistemul admite doar soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ şi, astfel, $\mathcal{B}'$ este un sistem de vectori liniar independent.

Acum, deoarece $\operatorname{card} \mathcal{B}' = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, rezultă, conform definiţiei bazei într-un spaţiu liniar, că $\mathcal{B}'$ este o bază în $\mathbb{R}^3$.

Matricea schimbării de bază de la baza canonică $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, iar inversa matricei sale transpuse este

$$(C^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Notăm cu $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ matricea coloană a coordonatelor vectorului $x = (1, 2, 3)$ în baza canonică şi cu $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ matricea coloană a coordonatelor lui x în baza $\mathcal{B}'$. Conform formulei de transformare a coordonatelor unui vector la o schimbare de bază avem

$$X' = (C^t)^{-1} \times X \quad \text{adică} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă $x'_1 = 2$, $x'_2 = 1$, $x'_3 = 0$. În concluzie $x = (2, 1, 0)_{\mathcal{B}'}$.

CAPITOLUL 3

APLICAŢII LINIARE ÎNTRE SPAŢII LINIARE FINIT DIMENSIONALE

1. Definiţia aplicaţiilor liniare. Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare. Matricea asociată unei aplicaţii liniare

DEFINIŢIA 3.1. Fie spaţiile liniare $(V, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ peste acelaşi corp comutativ $(K, +, \cdot)$. O aplicaţie $f : V \to W$ se numeşte *aplicaţie liniară* dacă

(1) aplicaţia f este aditivă, adică

$$\forall x, y \in V \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y);$$

(2) aplicaţia f este omogenă, adică

$$\forall \alpha \in K \quad \text{şi} \quad \forall x \in V \Rightarrow f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$$

Mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare între spaţiile liniare V şi W se notează $\mathcal{L}(V, W)$.

De acum, în această secţiune, vom folosi spaţiile liniare $(V, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ peste acelaşi corp comutativ $(K, +, \cdot)$, cu $\dim V = n$ şi $\dim W = m$.

PROPOZIŢIA 3.1. *O aplicaţie $f : V \to W$ este aplicaţie liniară dacă şi numai dacă*

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) \tag{3.1}$$

pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi orice $x, y \in V$.

DEMONSTRAŢIE. ”$\Rightarrow$” Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară şi fie $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y \in V$. Deoarece aplicaţia f este aditivă şi omogenă rezultă

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = f(\alpha \cdot x) + f(\beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y).$$

”$\Leftarrow$” Fie $f : V \to W$ o aplicaţie cu proprietatea (3.1). Alegem $\alpha = \beta = 1$, unde 1 este unitatea din corpul K. Din (3.1) obţinem

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$$

adică f este aditivă. Acum alegem $\alpha \in K$ şi $\beta = 0$. Din nou folosind (3.1) rezultă

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x), \quad \forall x \in V,$$

adică f este omogenă.
În concluzie, f este o aplicaţie liniară. $\square$

Se verifică direct, cu ajutorul propoziţiei 3.1, că dacă $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci aplicaţia $h : V \to W$ definită prin $h(x) = f(x) + g(x)$, pentru orice $x \in V$, este o aplicaţie liniară, şi că dacă $\alpha \in K$ atunci aplicaţia $i : V \to W$ definită prin $\alpha \cdot f = \alpha \cdot f(x)$, pentru orice $x \in V$, este, de asemeni, o aplicaţie liniară. Prin urmare, adunarea aplicaţiilor liniare este o lege de compoziţie internă în $\mathcal{L}(V, W)$

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W),$$

$$(f, g) \to f + g, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in V,$$

iar înmulţirea aplicaţiilor liniare cu scalari este o lege de compoziţie externă în $\mathcal{L}(V, W)$ peste K

$$\cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W),$$

$$(\alpha, f) \to \alpha \cdot f, \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

Cu ajutorul definiţiei spaţiului liniar obţinem uşor următorul rezultat.

Propoziţia 3.2. *$(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ este un spaţiu liniar peste corpul K.*

Două proprietăţi importante ale aplicaţiilor liniare sunt date de următoarea propoziţie.

Propoziţia 3.3. (1) *Fie $f \in \mathcal{L}(V, U)$ şi $g \in \mathcal{L}(U, W)$ două aplicaţii liniare, unde $(V, +, \cdot)$, $(U, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ sunt spaţii liniare peste acelaşi corp $(K, +, \cdot)$. Atunci aplicaţia obţinută prin compunerea lor este o aplicaţie liniară, adică $g \circ f \in \mathcal{L}(V, W)$.*

(2) *Fie $h \in \mathcal{L}(V, W)$ o aplicaţie liniară bijectivă. Atunci aplicaţia h este inversabilă şi aplicaţia inversă este o aplicaţie liniară, adică $h^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.*

Demonstraţie. (1) Fie $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y \in V$. Acum considerăm $f \in \mathcal{L}(V, U)$ şi $g \in \mathcal{L}(U, W)$. Atunci, conform propoziţiei 3.1 aplicată pe rând pentru f şi apoi pentru g, avem

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) &= g(f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)) = g(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)) \\ &= \alpha \cdot g(f(x)) + \beta \cdot g(f(y)) \\ &= \alpha \cdot (g \circ f)(x) + \beta \cdot (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

Prin urmare, din propoziţia 3.1, am obţinut $g \circ f \in \mathcal{L}(V, W)$.

(2) În continuare, fie aplicaţia liniară bijectivă $h \in \mathcal{L}(V, W)$. Urmează că h este inversabilă, adică există $h^{-1} : W \to V$ astfel încât $h \circ h_{-1} = \mathrm{id}_W$ şi $h^{-1} \circ h = \mathrm{id}_V$, unde $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(x) = x$, pentru orice $x \in V$ şi $\mathrm{id}_W : W \to W$, $\mathrm{id}_W(y) = y$, pentru orice $y \in W$, sunt aplicaţiile identitate pe V şi respectiv pe W.

Acum, fie $\alpha, \beta \in K$ şi $y_1, y_2 \in W$. Deoarece h este o aplicaţie surjectivă rezultă că există $x_1, x_2 \in V$ astfel încât $y_1 = h(x_1)$ şi $y_2 = h(x_2)$ sau, altfel spus, $x_1 = h^{-1}(y_1)$ şi $x_2 = h^{-1}(y_2)$. Avem, folosind propoziţia 3.1 pentru aplicaţia liniară h,

$$\begin{aligned} h^{-1}(\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2) &= h^{-1}(\alpha \cdot h(x_1) + \beta \cdot h(x_2)) \\ &= h^{-1}(h(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2)) \\ &= h^{-1}(h(\alpha \cdot h^{-1}(y_1) + \beta \cdot h^{-1}(y_2))) \\ &= \alpha \cdot h^{-1}(y_1) + \beta \cdot h^{-1}(y_2), \end{aligned}$$

adică $h^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$, conform, din nou, propoziţiei 3.1. □

1.1. Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare.

DEFINIŢIA 3.2. Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară. Se numeşte *nucleul* lui f şi se notează $\operatorname{Ker} f$ mulţimea

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in V | f(x) = \theta_W\} \subset V,$$

unde θ_W este vectorul nul din spaţiul liniar W.[1]

PROPOZIŢIA 3.4. *Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci $\theta_V \in \operatorname{Ker} f$, unde θ_V este vectorul nul din spaţiul liniar V.*

DEMONSTRAŢIE. Fie vectorul oarecare $x \in V$. Deoarece f este o aplicaţie liniară, avem

$$f(x) = f(x + \theta_V) = f(x) + f(\theta_V),$$

de unde rezultă $f(\theta_V) = \theta_W$, adică $\theta_V \in \operatorname{Ker} f$. □

PROPOZIŢIA 3.5. *Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci nucleul lui f este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar V.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y \in \operatorname{Ker} f$. Atunci, deoarece f este o aplicaţie liniară, avem

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) = \theta_W,$$

unde am folosit $f(x) = f(y) = \theta_W$. Am obţinut $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \operatorname{Ker} V$ şi, conform propoziţiei de caracterizare a subspaţiilor liniare ale unui spaţiu liniar, $\operatorname{Ker} f \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$. □

DEFINIŢIA 3.3. Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Dimensiunea spaţiului liniar $\operatorname{Ker} f$ se numeşte *defectul* aplicaţiei liniare f şi se notează $\operatorname{def} f = \dim(\operatorname{Ker} f)$.

DEFINIŢIA 3.4. O aplicaţie liniară injectivă se numeşte *monomorfism* de spaţii liniare.

PROPOZIŢIA 3.6. *Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci f este un monomorfism de spaţii liniare dacă şi numai dacă* $\operatorname{Ker} f = \{\theta_V\}$.

---

[1] În limba engleză *kernel=nucleu*.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Fie $f \in \mathcal{L}(V, W)$ un monomorfism de spaţii liniare şi fie $x \in V$ un vector nenul. Deoarece f este o aplicaţie injectivă rezultă $f(x) \neq f(\theta_V) = \theta_W$, adică $x \notin \operatorname{Ker} f$ şi, prin urmare, $\operatorname{Ker} f = \{\theta_V\}$.

"$\Leftarrow$" Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$ cu $\operatorname{Ker} f = \{\theta_V\}$. În continuare, fie $x_1, x_2 \in V$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci, deoarece f este o aplicaţie liniară, rezultă $f(x_1 + (-x_2)) = \theta_W$, unde $-x_2$ este simetricul lui x_2 în raport cu operaţia de adunare în corpul K. Urmează că $x_1 + (-x_2) \in \operatorname{Ker} f$ şi, din ipoteză, $x_1 + (-x_2) = \theta_V$. În concluzie, $x_1 = x_2$ şi, astfel, f este o aplicaţie injectivă, adică un monomorfism de spaţii liniare. □

Definiţia 3.5. Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară. Se numeşte *imaginea* lui f şi se notează $\operatorname{Im} f$ mulţimea

$$\operatorname{Im} f = \{y \in W |\ \exists\, x \in V \text{ astfel încât } y = f(x)\} = \{f(x) |\ x \in V\} \subset W.$$

Propoziţia 3.7. *Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci imaginea lui f este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar W.*

Demonstraţie. Fie $\alpha, \beta \in K$ şi fie $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$. Atunci există $x_1, x_2 \in V$ astfel încât $f(x_1) = y_1$ şi $f(x_2) = y_2$. Atunci

$$\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 = \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) = f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2),$$

deoarece f este o aplicaţie liniară. Am arătat că $\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 \in \operatorname{Im} f$ şi, astfel, că $\operatorname{Im} f \underset{s.s.l.}{\subseteq} W$. □

Definiţia 3.6. Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Dimensiunea spaţiului liniar $\operatorname{Im} f$ se numeşte *rangul* aplicaţiei liniare f şi notăm $\operatorname{rang} f = \dim(\operatorname{Im} f)$.

Definiţia 3.7. O aplicaţie liniară surjectivă se numeşte *epimorfism* de spaţii liniare.

Observaţia 3.1. Este evident, conform definiţiei surjectivităţii, că o aplicaţie liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$ este epimorfism de spaţii liniare dacă şi numai dacă $\operatorname{Im} f = W$.

Propoziţia 3.8. *Fie $f \in \mathcal{L}(V, W)$ o aplicaţie liniară şi fie $V_0 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ un subspaţiu liniar al spaţiului liniar V. Atunci*

$$f(V_0) = \{y \in W |\ \exists x \in V_0 \text{ astfel încât } y = f(x)\} \subseteq W$$

este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar W.

Demonstraţie. Fie scalarii $\alpha, \beta \in K$ şi vectorii $y_1, y_2 \in f(V_0)$. Rezultă că există vectorii $x_1, x_2 \in V_0$ astfel încât $f(x_1) = y_1$ şi $f(x_2) = y_2$. Atunci, deoarece f este o aplicaţie liniară şi $V_0 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$, avem

$$\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 = \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) = f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \in f(V_0),$$

ceea ce înseamnă că $f(V_0) \underset{s.s.l.}{\subseteq} W$, conform propoziţiei de caracterizare a subspaţiilor liniare. □

Propoziţia 3.9. *Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci, imaginea prin f unui sistem de vectori liniar dependent din spaţiul liniar V este un sistem de vectori liniar dependent în spaţiul liniar W.*

Demonstraţie. Fie sistemul de vectori liniar dependent $S = \{v_1, v_2, \ldots v_p\} \subset V$. Imaginea prin f a acestui sistem de vectori este $S' = f(S) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)\}$. Acum, deoarece S este liniar dependent urmează că există scalarii α_i, $i = \overline{1,p}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p = \theta_V,$$

unde θ_V este vectorul nul din spaţiul liniar V.
Atunci $f(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p) = f(\theta_V) = \theta_W$, unde θ_W este vectorul nul din spaţiul liniar W. Deoarece f este o aplicaţie liniară, am obţinut

$$\alpha_1 \cdot f(v_1) + \alpha_2 \cdot f(v_2) + \ldots + \alpha_p \cdot f(v_p) = \theta_W,$$

adică sistemul de vectori $S' = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)\}$ este liniar dependent. □

În ceea ce priveşte imaginea printr-o aplicaţie liniară a unui sistem de vectori liniar independent putem enunţa următoarea propoziţie.

Propoziţia 3.10. *Fie monomorfismul de spaţii liniare $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci, imaginea prin f a unui sistem de vectori liniar independent din spaţiul liniar V este un sistem de vectori liniar independent în spaţiul liniar W.*

Demonstraţie. Fie sistemul de vectori liniar independent $S = \{v_1, v_2, \ldots v_p\} \subset V$. Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in K$ astfel încât

$$\alpha_1 \cdot f(v_1) + \alpha_2 \cdot f(v_2) + \ldots + \alpha_p \cdot f(v_p) = \theta_W.$$

Deoarece f este o aplicaţie liniară rezultă

$$f(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p) = \theta_W$$

şi, cum $\operatorname{Ker} f = \{\theta_V\}$ (deoarece aplicaţia f este injectivă), avem

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p = \theta_V.$$

Dar, din ipoteză, ştim că sistemul de vectori S este liniar independent şi prin urmare $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$, unde 0 este elementul neutru la adunare în corpul K.

Am obţinut astfel că sistemul de vectori $f(S) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)\}$ este liniar independent. □

Propoziţia 3.11. *Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$ şi fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în spaţiul liniar V. Atunci imaginea bazei $\mathcal{B}$ prin aplicaţia f, $f(\mathcal{B}) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$, este un sistem de generatori pentru spaţiul liniar $\operatorname{Im} f$.*

Demonstraţie. Fie un vector oarecare $y \in \operatorname{Im} f$. Atunci există vectorul $x \in V$ cu proprietatea $y = f(x)$. În continuare, deoarece $\mathcal{B}$ este o bază în V, rezultă că există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Avem

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n) \\ &= \alpha_1 \cdot f(v_1) + \alpha_2 \cdot f(v_2) + \ldots + \alpha_n \cdot f(v_n), \end{aligned}$$

adică sistemul de vectori $f(S)$ este un sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} f$. $\square$

Din propoziţiile 3.10 şi 3.11 obţinem următorul rezultat.

TEOREMA 3.12. *Fie monomorfismul de spaţii liniare $f \in \mathcal{L}(V, W)$ şi fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în spaţiul liniar V. Atunci imaginea mulţimii $\mathcal{B}$ prin aplicaţia f, $f(\mathcal{B}) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$, este o bază în spaţiul liniar $\operatorname{Im} f$.*

Următorul rezultat pune în evidenţă legătura dintre rangul şi defectul unei aplicaţii liniare.

PROPOZIŢIA 3.13. *Dacă $f \in \mathcal{L}(V, W)$ este o aplicaţie liniară atunci*

$$\operatorname{rang} f + \operatorname{def} f = \dim V.$$

DEMONSTRAŢIE. Începem prin a nota $\operatorname{def} f = d$ şi considerăm baza $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ în $\operatorname{Ker} f$.

În continuare, fie baza $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_n\}$ în spaţiul liniar V, unde $\dim V = n$. Urmează, conform propoziţiei 3.10, că $f(\mathcal{B}) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ este un sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} f$. Rezultă că pentru orice vector $y \in \operatorname{Im} f$ există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât

$$y = \alpha_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \alpha_d \cdot f(v_d) + \alpha_{d+1} \cdot f(v_{d+1}) + \ldots + \alpha_n \cdot f(v_n).$$

Dar $v_1, v_2, \ldots, v_d \in \operatorname{Ker} f$, adică $f(v_1) = f(v_2) = \ldots = f(v_d) = \theta_V$, unde θ_V este vectorul nul din spaţiul liniar V. Astfel

$$y = \alpha_{d+1} \cdot f(v_{d+1}) + \ldots + \alpha_n \cdot f(v_n),$$

şi prin urmare $\mathcal{B}'' = \{v_{d+1}, v_{d+2}, \ldots, v_n\}$ este un sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} f$.

Vom demonstra că $\mathcal{B}''$ este un sistem de vectori liniar independent şi astfel o bază în $\operatorname{Im} f$.

Într-adevăr, considerând scalarii $\beta_{d+1}, \beta_{d+2}, \ldots, \beta_n \in K$ astfel încât

$$\beta_{d+1} \cdot f(v_{d+1}) + \beta_{d+2} \cdot f(v_{d+2}) + \ldots + \beta_n \cdot f(v_n) = \theta_W,$$

unde θ_W este vectorul nul din spaţiul liniar W, obţinem

$$f(\beta_{d+1} \cdot v_{d+1} + \beta_{d+2} \cdot v_{d+2} + \ldots + \beta_n \cdot v_n) = \theta_W,$$

deoarece f este o aplicaţie liniară, adică

$$\beta_{d+1} \cdot v_{d+1} + \beta_{d+2} \cdot v_{d+2} + \ldots + \beta_n \cdot v_n \in \operatorname{Ker} f.$$

Dar cum $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ este o bază în $\operatorname{Ker} f$, rezultă că există scalarii $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d \in K$ astfel încât

$$\beta_{d+1} \cdot v_{d+1} + \beta_{d+2} \cdot v_{d+2} + \ldots + \beta_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \ldots + \beta_d \cdot v_d.$$

Am obţinut

$$(-\beta_1) \cdot v_1 + \ldots + (-\beta_d) \cdot v_d + \beta_{d+1} \cdot v_{d+1} + \ldots + \beta_n \cdot v_n = \theta_V,$$

unde scalarii $-\beta_i \in K$, $i = \overline{1,d}$, sunt elementele simetrice ale scalarilor β_i în raport cu operaţia de adunare în corpul K. Deoarece $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_n\}$ este o bază în V urmează că $\beta_1 = \cdots = \beta_d = \beta_{d+1} = \ldots = \beta_n = 0$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{B}''$ este un sistem de vectori liniar independent şi, astfel, o bază în $\operatorname{Im} f$.

Am arătat că dacă $\operatorname{def} f = \dim(\operatorname{Ker} f) = d$ atunci $\operatorname{rang} f = \dim(\operatorname{Im} f) = n - d$, adică $\operatorname{rang} f + \operatorname{def} f = n = \dim V$. $\square$

Folosind această propoziţie se obţine imediat următorul corolar.

COROLARUL 3.14. *Fie aplicaţia liniară* $f \in \mathcal{L}(V, W)$, *unde* $\dim V = \dim W = n$. *Atunci avem*

(1) *Dacă f este o aplicaţie injectivă atunci f este o aplicaţie bijectivă.*
(2) *Dacă f este o aplicaţie surjectivă atunci f este o aplicaţie bijectivă.*

DEMONSTRAŢIE. (1) Aplicaţia liniară f este injectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} f = \{\theta_V\}$, adică $\operatorname{def} f = \dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ şi, conform propoziţiei anterioare, $\operatorname{rang} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V - \operatorname{def} f = n = \dim W$. Dar cum $\operatorname{Im} f \underset{s.s.l.}{\subseteq} W$ rezultă că $\operatorname{Im} f = W$. Prin urmare f este şi surjectivă, deci bijectivă.

(2) Aplicaţia liniară f este surjectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Im} f = W$, adică $\operatorname{rang} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim W = n$ şi $\operatorname{def} f = \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim V - \operatorname{rang} f = 0$. Rezultă $\operatorname{Ker} f = \{\theta_V\}$. Prin urmare f este şi injectivă, deci bijectivă. $\square$

EXEMPLUL 3.1. Să se arate că aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - 2 \cdot x_2, x_2)$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ este o aplicaţie liniară şi să se determine $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{def} f$ şi $\operatorname{rang} f$.

Dacă $\alpha, \beta \in K$ şi $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ atunci $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1, \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2) \in \mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) &= (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2, \\ &\quad \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 - 2\alpha \cdot x_2 - 2\beta \cdot y_2, \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2) \\ &= \alpha \cdot (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_2) + \beta \cdot (y_1 + y_2, y_1 - 2y_2, y_2) \\ &= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y), \end{aligned}$$

adică f este o aplicaţie liniară, conform propoziţiei 3.1.

În continuare vom determina nucleul aplicaţiei liniare f, $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) = \theta_3\}$, unde $\theta_3 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ este vectorul nul din $\mathbb{R}^3$. Ecuaţia $f(x) = \theta_3$, $x = (x_1, x_2)$, este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi reali

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & 2 \cdot x_2 & = & 0 \\ & & x_2 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

care, evident, admite doar soluţia $x_1 = x_2 = 0$. Am obţinut astfel $\operatorname{Ker} f = \{\theta_2\}$, unde $\theta_2 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ este vectorul nul din $\mathbb{R}^2$. Deci aplicaţia liniară f este injectivă şi $\operatorname{def} f = 0$.

Imaginea aplicaţiei liniare f este mulţimea $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R}^3 | \ \exists\ x \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $y = f(x)\}$. Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Atunci există $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(x) = y$, adică

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & y_1 \\ x_1 & - & 2 \cdot x_2 & = & y_2 \\ & & x_2 & = & y_3 \end{array}\right. .$$

Matricea asociată acestui sistem este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\operatorname{rang} A = 2$. Conform Teoremei Kronecker-Capelli, condiţia ca sistemul să fie compatibil, şi implicit ca $y \in \operatorname{Im} f$, este ca rangul matricei extinse a sistemului

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & -2 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \end{pmatrix}$$

să fie egal cu rangul matricei asociate, adică $\operatorname{rang} \bar{A} = 2$. Rezultă

$$\det \bar{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & -2 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = y_1 - y_2 - 3y_3 = 0.$$

Dacă notăm $y_2 = \alpha \in \mathbb{R}$ şi $y_3 = \beta \in \mathbb{R}$ obţinem $y_1 = \alpha + 3 \cdot \beta$ şi, astfel

$$\operatorname{Im} f = \{y = (\alpha + 3 \cdot \beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Acum fie $y = (\alpha + 3 \cdot \beta, \alpha, \beta) \in \operatorname{Im} f$ un vector oarecare din imaginea aplicaţiei f. Acesta se poate scrie $y = \alpha \cdot (1,1,0) + \beta \cdot (3,0,1) = \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2$, unde $v_1 = (1,1,0)$ şi $v_2 = (3,0,1)$. Urmează că $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ este un sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} f$. Se verifică uşor că $\mathcal{B}$ este liniar independent şi, prin urmare, o bază în $\operatorname{Im} f$. Am obţinut astfel şi $\operatorname{rang} f = 2$.

Deoarece f este o aplicaţie injectivă, o altă metodă de a obţine o bază în $\operatorname{Im} f$ este şi considerarea imaginii prin f a unei baze din $\mathbb{R}^2$. Această imagine este o bază în $\operatorname{Im} f$ conform teoremei 3.12. Astfel, imaginea bazei canonice din $\mathbb{R}^2$, formată din vectorii $u_1 = (1,0)$ şi $u_2 = (0,1)$, este baza $\mathcal{B}' = \{f(u_1) = (1,1,0), f(u_2) = (1,-2,1)\}$ în $\operatorname{Im} f$.

Se observă că este verificată relaţia dintre rangul şi defectul unei aplicaţii liniare $\operatorname{rang} f + \operatorname{def} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

Aplicaţia 3.1. Vom prezenta în cele ce urmează o aplicaţie interesantă a propoziţiei 3.13 care are şi o importanţă teoretică evidentă.

Fie sistemul de ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi reali

$$(3.2)\qquad \begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n &= 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n &= 0 \\ \vdots & \vdots\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n &= 0 \end{cases}$$

cu rangul matricei asociate A egal cu $r \leq \min\{m,n\}$ şi fie $\mathcal{B}_s = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}\}$, $s_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$, $k = \overline{1, n-r}$, un sistem fundamental de soluţii (reamintim că acest lucru înseamnă că matricea

$$S = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-r} & x_2^{n-r} & \ldots & x_n^{n-r} \end{pmatrix}$$

are rangul $n-r$).

Atunci mulţimea $\mathcal{S}$ a soluţiilor sistemului (3.2) este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. În plus sistemul fundamental de soluţii $\mathcal{B}_s$ este o bază în $\mathcal{S}$ şi $\dim \mathcal{S} = n - r$.

Din proprietăţile soluţiilor unui sistem liniar omogen, prezentate în primul capitol al acestui curs, şi, din propoziţia de caracterizare a unui subspaţiu liniar al unui spaţiu liniar, rezultă imediat că $\mathcal{S} \underset{s.s.l.}{\subseteq} \mathbb{R}^n$.

În continuare vom demonstra că $\mathcal{B}_s = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha_1 \cdot s_1 + \alpha_2 \cdot s_2 + \ldots + \alpha_{n-r} \cdot s_{n-r} = \theta_n,$$

unde $\theta_n \in \mathbb{R}^n$ este vectorul nul din $\mathbb{R}^n$. Obţinem următorul sistem cu necunoscutele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$

$$\begin{cases} x_1^1 \cdot \alpha_1 + x_1^2 \cdot \alpha_2 + \ldots + x_1^{n-r} \cdot \alpha_{n-r} &= 0 \\ x_2^1 \cdot \alpha_1 + x_2^2 \cdot \alpha_2 + \ldots + x_2^{n-r} \cdot \alpha_{n-r} &= 0 \\ \vdots & \vdots\ \vdots \\ x_n^1 \cdot \alpha_1 + x_n^2 \cdot \alpha_2 + \ldots + x_n^{n-r} \cdot \alpha_{n-r} &= 0 \end{cases},$$

cu matricea asociată S cu $\operatorname{rang} S = n - r$. Astfel singura soluţie a sistemului este $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0$, deci $\mathcal{B}_s$ este un sistem de vectori liniar independent in $\mathcal{S}$ şi $\dim \mathcal{S} \geq n - r$.

Definim aplicaţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ prin

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_{11}\cdot x_1 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n, a_{21}\cdot x_1 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n, \\ &\quad \ldots, a_{m1}\cdot x_1 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n). \end{aligned}$$

Se verifică imediat că f este o aplicaţie liniară şi $\operatorname{Ker} f = \mathcal{S}$. Rezultă că $\operatorname{def} f = \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathcal{S} \geq n-r$. Folosind propoziţia 3.13 obţinem $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R} - \operatorname{def} f \leq n - (n-r) = r$.

Acum, ştim că $\operatorname{rang} A = r$, deci există

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \dots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$. Considerăm vectorii

$$f(e_{j_k}) = (a_{1j_k}, a_{2j_k}, \dots, a_{nj_k}) \in \operatorname{Im} f, \quad k = \overline{1,r}$$

şi scalarii $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\beta_1 \cdot f(e_{j_1}) + \beta_2 \cdot f(e_{j_2}) + \ldots + \beta_r \cdot f(e_{j_r}) = \theta_n.$$

Obţinem următorul sistem cu necunoscutele β_i, $i = \overline{1,r}$,

$$\begin{cases} a_{1j_1} \cdot \beta_1 + a_{1j_2} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{1j_r} \cdot \beta_r & = & 0 \\ a_{2j_1} \cdot \beta_1 + a_{2j_2} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{2j_r} \cdot \beta_r & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nj_1} \cdot \beta_1 + a_{nj_2} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{nj_r} \cdot \beta_r & = & 0 \end{cases},$$

a cărui matrice asociată are, evident, rangul egal cu r. Prin urmare singura soluţie a sistemului este $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 0$, adică vectorii $f(e_{j_k}) \in \operatorname{Im} f$, $k = \overline{1,r}$, formează un sistem de vectori liniar independent. Am obţinut astfel $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f \geq r$. Ţinând cont că avem şi $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f \leq r$ rezultă $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = r$ şi $\operatorname{def} f = \dim \operatorname{Ker} f = n - r$.

În concluzie $\mathcal{B}_s$ este un sistem de $n-r$ vectori liniar independent în spaţiul liniar $\mathcal{S}$ cu $\dim \mathcal{S} = n - r$, deci $\mathcal{B}_s$ este o bază în $\mathcal{S}$.

Definiţia 3.8. O aplicaţie liniară bijectivă $f \in \mathcal{L}(V, W)$ se numeşte *izomorfism* de spaţii liniare. Spunem că spaţiile liniare V şi W sunt izomorfe şi notăm $V \simeq W$.

Teorema 3.15. *Două spaţii liniare finit dimensionale peste acelaşi corp sunt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune.*

Demonstraţie. Fie spaţiile liniare finit dimensionale $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ peste corpul $(K, +, \cdot)$.

"$\Rightarrow$" Mai întâi să presupunem că spaţiile liniare V şi W sunt izomorfe. Rezultă că există aplicaţia liniară bijectivă $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază în V, unde am presupus $\dim V = n$. Deoarece f este o aplicaţie liniară injectivă urmează, conform teoremei 3.12, că sistemul de vectori $\mathcal{B}' = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ este o bază în $\operatorname{Im} f$. Pe de altă parte, f fiind şi surjectivă, avem $\operatorname{Im} f = W$. Am obţinut că $\mathcal{B}'$ este o bază în spaţiul liniar W, ceea ce înseamnă $\dim W = n = \dim V$.

"$\Leftarrow$" Acum, presupunem că $\dim V = \dim W = n$. Fie $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în V şi $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ o bază în W. Fie vectorul oarecare $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}_1} \in V$, adică

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Definim aplicaţia $f : V \to W$ prin $f(x) = y$, unde

$$y = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}_2} = \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \ldots + \alpha_n \cdot w_n.$$

Evident, f este o aplicaţie bine definită, adică f îi asociază fiecărui vector $x \in V$ un unic vector $y \in W$.
Vom demonstra că f este o aplicaţie liniară bijectivă.
Fie scalarii $\alpha, \beta \in K$ şi vectorii $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}_1} \in V$, $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_{\mathcal{B}_1} \in V$. Atunci

$$\begin{aligned}
f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) &= (\alpha \cdot \alpha_1 + \beta \cdot \beta_1) \cdot w_1 + \ldots + (\alpha \cdot \alpha_n + \beta \cdot \beta_n) \cdot w_n \\
&= \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \ldots \alpha_n \cdot w_n) \\
&\quad + \beta \cdot (\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 + \ldots \beta_n \cdot w_n) \\
&= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y),
\end{aligned}$$

de unde rezultă că f este o aplicaţie liniară.
În continuare fie $v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}_1} \in V$ şi $v_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_{\mathcal{B}_1} \in V$ astfel încât $f(v_1) = f(v_2)$. Rezultă imediat $v_1 = v_2$ şi, prin urmare, f este injectivă şi, mai mult, bijectivă, conform corolarului 3.14. Astfel f este un izomorfism, adică $V \simeq W$. $\square$

Următoarele trei corolare sunt consecinţe imediate ale teoremei anterioare.

COROLARUL 3.16. *Dacă V şi W sunt două spaţii liniare finit dimensionale cu dimensiuni diferite atunci V şi W nu sunt izomorfe.*

COROLARUL 3.17. *Fie V un spaţiu liniar peste corpul K cu $\dim V = n < \infty$. Atunci V este izomorf cu spaţiul liniar K^n (definit în exemplul 2.6).*

COROLARUL 3.18. *Dacă aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$ este un izomorfism de spaţii liniare şi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este o bază în spaţiul liniar V atunci $f(\mathcal{B}) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ este o bază în spaţiul liniar W.*

1.2. Matricea unei aplicaţii liniare. În acest paragraf vom vedea cum, folosind noţiunea de spaţii liniare izomorfe, fiecărei aplicaţii liniare îi poate fi asociată o matrice şi apoi cum multe dintre proprietăţile aplicaţiei liniare pot fi studiate cu ajutorul acestei matrici.

Pentru început să reamintim că mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(K)$, a matricilor cu m linii şi n coloane cu elemente dintr-un corp K, împreună cu adunarea matricilor şi cu înmulţirea matricilor cu scalari formează un spaţiu liniar peste corpul K (vezi exemplul 2.7), şi că baza canonică în acest spaţiu a fost pusă în evidenţă în exemplul 2.12 obţinându-se totodată şi $\dim \mathcal{M}_{m,n} = m \cdot n$.

Acum putem enunţa rezultatul principal al paragrafului.

TEOREMA 3.19. *Fie $(V, +, \cdot)$ şi $(W, +, \cdot)$ două spaţii liniare finit dimensionale peste acelaşi corp $(K, +, \cdot)$ cu $\dim V = n$ şi $\dim W = m$. Atunci*

$(\mathcal{L}(V,W),+,\cdot)$, spaţiul liniar al aplicaţiilor liniare între V şi W, este izomorf cu spaţiul liniar $(\mathcal{M}_{m,n},+,\cdot)$ şi $\dim \mathcal{L}(V,W) = m \cdot n$.

Demonstraţie. Fie $f \in \mathcal{L}(V,W)$ o aplicaţie liniară oarecare şi fie $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şi $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$.

Acum, pentru un vector oarecare $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}_1} = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_n \cdot v_n \in V$, avem

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_n \cdot v_n) \\ &= x_1 \cdot f(v_1) + x_2 \cdot f(v_2) + \ldots + x_n \cdot f(v_n). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pe de altă parte, deoarece $f(v_j) \in W$, $j = \overline{1,n}$, şi $\mathcal{B}_2$ este o bază în W, există scalarii $a_{ij} \in K$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, astfel încât

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} f(v_1) & = & a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + \ldots + a_{m1} \cdot w_m & = & \sum_{i=1}^m a_{i1} \cdot w_i \\ f(v_2) & = & a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 + \ldots + a_{m2} \cdot w_m & = & \sum_{i=1}^m a_{i2} \cdot w_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_n) & = & a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + \ldots + a_{mn} \cdot w_m & = & \sum_{i=1}^m a_{in} \cdot w_i \end{array} \right. . \tag{3.4}$$

Din ecuaţiile (3.3) şi (3.4) rezultă

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 \cdot \textstyle\sum_{i=1}^m a_{i1} \cdot w_i + x_2 \cdot \sum_{i=1}^m a_{i2} \cdot w_i + \ldots + x_n \cdot \sum_{i=1}^m a_{in} \cdot w_i \\ &= (x_1 \cdot a_{11} + x_2 \cdot a_{12} + \ldots + x_n \cdot a_{1n}) \cdot w_1 \\ &\quad +(x_1 \cdot a_{21} + x_2 \cdot a_{22} + \ldots + x_n \cdot a_{2n}) \cdot w_2 \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \\ &\quad +(x_1 \cdot a_{m1} + x_2 \cdot a_{m2} + \ldots + x_n \cdot a_{mn}) \cdot w_m. \end{aligned}$$

Deoarece $f(x) \in W$ există scalarii $y_i \in K$, $i = \overline{1,m}$, astfel încât $f(x) = y_1 \cdot w_1 + y_2 \cdot w_2 + \ldots + y_n \cdot w_n$. Avem $y_i = x_1 \cdot a_{i1} + x_2 \cdot a_{i2} + \ldots + x_n \cdot a_{in}$ pentru orice $i = \overline{1,m}$. Aceste ecuaţii se numesc *ecuaţiile scalare* ale aplicaţiei liniare f în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

În continuare notăm cu $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(K)$ şi definim matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K).$$

Folosind aceste notaţii putem scrie *ecuaţia matricială* a aplicaţiei liniare f în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$

$$Y = A \times X.$$

Matricea A se numeşte matricea aplicaţiei f în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Definim aplicaţia $\phi : \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{M}_{m,n}(K)$ prin $\phi(f) = A$. Vom demonstra că ϕ este o aplicaţie liniară bijectivă, adică un izomorfism de spaţii liniare.

Fie scalarii $\alpha, \beta \in K$ şi aplicaţiile liniare $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ cu matricile $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ şi respectiv $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Se obţine imediat, folosind ecuaţiile matriciale ale aplicaţiilor liniare implicate, că matricea aplicaţiei liniare $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ este $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$. Atunci

$$\phi(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B = \alpha \cdot \phi(f) + \beta \cdot \phi(f),$$

adică aplicaţia ϕ este o aplicaţie liniară.

Din nou considerăm aplicaţiile liniare $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ cu matricile $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ şi respectiv $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ astfel încât $\phi(f) = \phi(g)$. Rezultă $A = B$ adică $a_{ij} = b_{ij}$, pentru orice $i = \overline{1,m}$ şi orice $j = \overline{1,n}$. Din ecuaţiile scalare ale aplicaţiilor f şi g urmează că $f(x) = g(x)$ oricare ar fi $x \in V$, adică $f = g$ deci ϕ este o aplicaţie injectivă.

În final, fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ şi considerăm aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$ cu ecuaţia matricială $Y = A \times X$. Evident $\phi(f) = A$ deci ϕ este o aplicaţie surjectivă.

În concluzie, ϕ este o aplicaţie liniară bijectivă, adică un izomorfism de spaţii liniare şi $\mathcal{L}(V, W) \simeq \mathcal{M}_{m,n}(K)$, ceea ce arată şi că $\dim \mathcal{L}(V, W) = m \cdot n$. $\square$

Observaţia 3.2. Se observă că elementele de pe coloana j, $j = \overline{1,n}$, a matricei aplicaţiei liniare f în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ sunt componentele vectorului $f(v_j)$, unde $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Corolarul 3.20. *Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$ şi fie $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ două baze în spaţiile liniare V şi respectiv W. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, unde $\dim V = n$, $\dim W = m$, este matricea aplicaţiei f în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ atunci $\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} A$.*

Demonstraţie. Ştim că $\operatorname{def} f = \dim \operatorname{Ker} f = n - r$, unde $\operatorname{rang} f = r$. Acum fie vectorul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}_1} \in \operatorname{Ker} f$, adică $f(x) = \theta_W$, unde θ_W este vectorul nul din W. Atunci coordonatele lui x verifică sistemul

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = & 0 \end{array}\right. . \tag{3.5}$$

Matricea acestui sistem este chiar matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ a aplicaţiei liniare f. Astfel, dacă $\operatorname{rang} A = r'$, rezultă că un sistem fundamental de soluţii ale sistemului (3.5) va fi format din $n - r'$ vectori. Dar am văzut (aplicaţia 3.1) că un sistem fundamental de soluţii este o bază în spaţiul soluţiilor sistemului (3.5) şi că acest spaţiu coincide cu nucleul aplicaţiei f. Prin urmare avem $\dim \operatorname{Ker} f = n - r'$, adică $n - r = n - r'$ ceea ce implică $\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} A = r$. □

Deoarece rangul unei aplicaţii liniare nu depinde de bazele considerate în domeniul şi în codomeniul său, o consecinţă importantă a acestui corolar este următorul rezultat.

PROPOZIŢIA 3.21. *Rangul matricei unei aplicaţii liniare $f \in \mathcal{L}(V, W)$ este invariabil la schimbările de bază din spaţiile liniare V şi W.*

PROPOZIŢIA 3.22. *Fie V, U şi W trei spaţii liniare peste corpul K cu $\dim V = n$, $\dim U = p$, $\dim W = m$ şi fie $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ şi respectiv $\mathcal{B}_3$ trei baze în aceste spaţii. Fie aplicaţiile liniare $f \in \mathcal{L}(V, U)$ şi $g \in \mathcal{L}(U, W)$ cu matricile $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ şi respectiv $B \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$ în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Atunci matricea aplicaţiei liniare $g \circ f \in \mathcal{L}(V, W)$ în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ este $B \times A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie vectorii $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}_1} \in V$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)_{\mathcal{B}_2} \in U$ şi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)_{\mathcal{B}_3} \in W$ astfel încât $f(x) = y$ şi $g(y) = z$, adică $(g \circ f)(x) = z$. Dacă notăm $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(K)$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(K)$ şi $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(K)$ atunci ecuaţiile matriciale ale lui f şi respectiv g sunt

$$Y = A \times X, \quad Z = B \times Y.$$

Rezultă că ecuaţia scalară a aplicaţiei $g \circ f$ se obţine astfel:

$$Z = B \times Y = B \times A \times X = (B \times A) \times X,$$

adică matricea aplicaţiei $g \circ f$ este $B \times A$. □

PROPOZIŢIA 3.23. *Fie izomorfismul $f \in \mathcal{L}(V, W)$, unde V şi W sunt spaţii liniare reale, cu $\dim V = \dim W = n$, cu matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci inversa aplicaţiei f este un izomorfism $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$ şi matricea sa este $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

DEMONSTRAŢIE. Prima parte a propoziţiei este evidentă, ştiind că f^{-1} este o aplicaţie liniară şi, evident, bijectivă.

Mai departe, deoarece f este un izomorfism, atunci, în particular, f este o aplicaţie surjectivă şi $\mathrm{Im}\, f = W$. Urmează că $\mathrm{rang}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f = \dim W = n$ şi astfel avem şi $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\, f = n$. În concluzie, $\det A \neq 0$, deci matricea A este inversabilă.

Acum, dacă înmulţim ecuaţia matricială $Y = A \times X$, a lui f, la stânga cu A^{-1} rezultă ecuaţia $X = A^{-1} \times Y$, care, ţinând cont din nou că f este bijectivă, este chiar ecuaţia matricială a aplicaţiei inverse f^{-1}. $\square$

Prin următoarea teoremă punem în evidenţă modul de transformare a matricei unei aplicaţii liniare la schimbările de bază în domeniul şi codomeniul acestei aplicaţii.

Pentru început, fie spaţiile liniare V şi W peste corpul K cu $\dim V = n$ şi $\dim W = m$. Considerăm bazele $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}'_1$ în spaţiul liniar V cu matricea schimbării de la $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}'_1$ notată cu C, şi bazele $\mathcal{B}_2$ şi $\mathcal{B}'_2$ în spaţiul liniar V cu matricea schimbării de la $\mathcal{B}_2$ la $\mathcal{B}'_2$ notată cu D.

Acum putem enunţa ultimul rezultat al paragrafului.

TEOREMA 3.24. *Considerăm aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, W)$ cu matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ şi cu matricea $A' \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ în perechea de baze $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)$. Atunci*

$$A' = (D^t)^{-1} \times A \times C^t.$$

DEMONSTRAŢIE. Vom folosi ecuaţia matricială a aplicaţiei liniare f. Pentru aceasta, fie vectorii $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}_1} = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{\mathcal{B}'_1} \in V$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)_{\mathcal{B}_2} = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)_{\mathcal{B}'_2} \in W$ astfel încât $f(x) = y$.

Notăm $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(K)$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(K)$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(K)$ şi $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(K)$. Atunci, aplicând legea de transformare a coordonatelor unui vector la o schimbare de bază avem

$$X = C^t \times X' \quad \text{şi} \quad Y = D^t \times Y'.$$

Înlocuind X şi Y în ecuaţia matricială a aplicaţiei liniare f în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, $Y = A \times X$ obţinem

$$D^t \times Y' = A \times C^t \times X' \Rightarrow Y' = (D^t)^{-1} \times A \times C^t \times X'.$$

Comparând ultima ecuaţie cu ecuaţia matricială a aplicaţiei f în perechea de baze $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)$, $Y' = A' \times X'$, obţinem concluzia teoremei. $\square$

OBSERVAŢIA 3.3. Un caz particular important este cel al aplicaţiilor liniare pentru care domeniul de definiţie şi codomeniul coincid, adică al aplicaţiilor liniare $f : V \to V$, $\dim V = n$. Este clar că matricea unei astfel de aplicaţii într-o bază $\mathcal{B}$ din spaţiul liniar V este o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(K)$, iar legea de transformare a acesteia la o schimbare de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ este

$$A' = (C^t)^{-1} \times A \times C^t,$$

unde $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ este matricea aplicaţiei liniare f în raport cu baza $\mathcal{B}'$ din V.

Exemplul 3.2. Să se scrie matricea aplicaţiei liniare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - 2 \cdot x_2)_{\mathcal{B}_2}$, pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}_1}$, unde bazele $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ sunt bazele canonice în spaţiile liniare $\mathbb{R}^3$ şi respectiv $\mathbb{R}^2$. Care este matricea aplicaţiei f în perechea de baze $(\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2')$ unde $\mathcal{B}_1' = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)\}$ şi $\mathcal{B}_2' = \{w_1 = (1,2), w_2 = (0,1)\}$?

Matricea aplicaţiei f în perechea de baze canonice este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reamintim că baza canonică $\mathcal{B}_1$ este formată din vectorii $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ şi $e_3 = (0,0,1)$. Avem $f(e_1) = (1,1)$, $f(e_2) = (1,-2)$ şi $f(e_3) = (1,0)$, adică se verifică faptul că elementele de pe coloanele matricei A sunt respectiv componentele vectorilor $f(e_1)$, $f(e_2)$ şi $f(e_3)$.

Acum, deoarece $\operatorname{rang} A = 2$, rezultă $\operatorname{rang} f = 2$ şi, cum $\operatorname{rang} f + \operatorname{def} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, urmează $\operatorname{def} f = 1$. Ca o consecinţă, f este o aplicaţie surjectivă, pentru că $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, adică $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, şi f nu este injectivă deoarece $\operatorname{def} f \neq 0$.

În continuare, deoarece vectorii care formează bazele $\mathcal{B}_1'$ şi $\mathcal{B}_2'$ sunt daţi în bazele canonice din $\mathbb{R}^3$ şi respectiv $\mathbb{R}^2$, rezultă că matricea C a schimbării de bază de la $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}_1'$ este $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar matricea D a schimbării de bază de la $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}_1'$ este $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $(D^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Obţinem matricea A' a aplicaţiei liniare f în perechea de baze $(\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2')$

$$\begin{aligned} A' &= (D^t)^{-1} \times A \times C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

adică expresia aplicaţiei în această pereche de baze este

$$f(x) = (3 \cdot x_1' + 2 \cdot x_2' + x_3', -3 \cdot x_1' - x_2' - x_3')_{\mathcal{B}_2'}, \quad \forall x = (x_1', x_2', x_3')_{\mathcal{B}_1'} \in \mathbb{R}^3.$$

2. Valori şi vectori proprii ai unui operator liniar

O problemă esenţială în studiul aplicaţiilor liniare al căror codomeniu coincide cu domeniul său de definiţie este găsirea expresiei sale canonice (dacă există), sau echivalent a diagonalizării matricei sale, precum şi determinarea bazei în care se obţine această expresie. Vom vedea că rezolvarea acestei probleme constă în determinarea valorilor şi vectorilor proprii ai aplicaţiei liniare considerate.

De acum înainte în această secţiune, vom lucra în spaţiul liniar $(V, +, \cdot)$ peste corpul $(K, +, \cdot)$ (unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), cu dimensiunea finită $\dim V = n < \infty$.

Definiţia 3.9. Fie aplicaţia liniară $f \in \mathcal{L}(V, V) = \mathcal{L}(V)$. Atunci f se numeşte *operator liniar*. În cazul în care f este un izomorfism de spaţii liniare aplicaţia liniară se numeşte *automorfism* al spaţiului liniar V.

Definiţia 3.10. Fie operatorul liniar $f \in \mathcal{L}(V)$. Un vector $x_0 \in V$ diferit de vectorul nul din V se numeşte *vector propriu* al operatorului liniar f dacă există un scalar $\lambda_0 \in K$ astfel încât $f(x_0) = \lambda_0 \cdot x_0$. Scalarul λ_0 se numeşte *valoare proprie* a operatorului liniar f, iar mulţimea valorilor proprii ale lui f se numeşte *spectrul* operatorului liniar.

Propoziţia 3.25. *Dacă $x_0 \in V \setminus \{\theta_V\}$, unde θ_V este vectorul nul din V, este un vector propriu al operatorului liniar $f \in \mathcal{L}(V)$ atunci orice vector din V coliniar cu x_0 (adică orice vector din V pentru care există un scalar $\beta \in K$, $\beta \neq 0$, astfel încât $x = \beta \cdot x_0$) este un vector propriu al lui f corespunzător aceleiaşi valori proprii ca şi vectorul x_0.*

Demonstraţie. Fie scalarul $\lambda_0 \in K$ astfel încât $f(x_0) = \lambda_0 \cdot x_0$ şi fie vectorul $x \in V$ astfel încât $x = \beta \cdot x_0$, $\beta \in K$.
Atunci, deoarece f este o aplicaţie liniară, avem

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\beta \cdot x_0) = \beta \cdot f(x_0) = \beta \cdot \lambda_0 \cdot f(x_0) \\ &= \lambda_0 \cdot (\beta \cdot f(x_0)) = \lambda_0 \cdot f(\beta \cdot x_0) \\ &= \lambda_0 \cdot f(x), \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că $x \in V$ este un vector propriu al operatorului liniar f corespunzător valorii proprii λ_0. □

Propoziţia 3.26. *Fie valoarea proprie $\lambda_0 \in K$ a operatorului liniar $f \in \mathcal{L}(V)$. Atunci mulţimea tuturor vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ_0 la care se adaugă vectorul nul din V , notată*

$$V(\lambda_0) = \{x \in V \setminus \{\theta_V\} |\ f(x) = \lambda_0 \cdot x\} \cup \{\theta_V\},$$

este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar V şi se numeşte subspaţiul propriu al operatorului liniar f corespunzător lui λ_0.

Demonstraţie. Fie vectorii proprii $x \in V \setminus \{\theta_V\}$ şi $y \in V \setminus \{\theta_V\}$ ai lui f corespunzători valorii proprii $\lambda_0 \in K$. Atunci

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_0 \cdot x + \lambda_0 \cdot y = \lambda_0 \cdot (x + y),$$

adică vectorul $v = x + y$ este un vector propriu al lui f corespunzător valorii proprii λ_0.

Dacă $x_0 \in V \setminus \{\theta_V\}$ este un vector propriu al lui f corespunzător lui λ_0 şi $\beta \in K$ un scalar, atunci, aşa cum am văzut în propoziţia anterioară, $\beta \cdot x_0 \in V(\lambda_0)$.

În concluzie, conform propoziţiei de caracterizare a subspaţiilor liniare, $V(\lambda_0) \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$. □

Propoziţia 3.27. *Un subspaţiu propriu $V(\lambda_0) \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ al unui operator liniar $f \in \mathcal{L}(V)$ este un subspaţiu invariant prin f, adică $f(V(\lambda_0)) \subseteq V(\lambda_0)$.*

Demonstraţie. Fie $x \in V(\lambda_0)$ un vector propriu al operatorului liniar f, corespunzător valorii proprii λ_0. Avem $f(x) = \lambda_0 \cdot x$ şi atunci $f(f(x)) = \lambda_0 \cdot f(x)$, adică $f(x) \in V(\lambda_0)$. Vectorul $x \in V(\lambda_0)$ fiind ales arbitrar, rezultă că $f(V(\lambda_0)) \subseteq V(\lambda_0)$, deci $V(\lambda_0)$ este un subspaţiu invariant prin f. □

Observaţia 3.4. Dacă $\lambda_0 \in K$ este o valoare proprie a operatorului liniar $f \in \mathcal{L}(V)$, atunci subspaţiul propriu $V(\lambda_0)$ corespunzător este

$$V(\lambda_0) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_0 \cdot \mathrm{id}_V),$$

unde $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(x) = x$, $\forall x \in V$, este aplicaţia (liniară) identitate a lui V.

Propoziţia 3.28. *Vectorii proprii ai unui operator liniar corespunzători unor valori proprii distincte formează un sistem de vectori liniar independent.*

Demonstraţie. Vom demonstra propoziţia prin metoda inducţiei matematice.

Fie operatorul liniar $f \in \mathcal{L}(V)$, cu $\dim V = n$.

Pasul 1. Fie $v \in V \setminus \{\theta_V\}$ un vector propriu al lui f. Deoarece $v \neq \theta_V$ atunci $\{v\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

Pasul 2. Considerăm vectorii proprii $v_1, v_2 \in V \setminus \{\theta_V\}$ corepunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ cu $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Fie scalarii $\beta_1, \beta_2 \in K$ astfel încât $\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 = \theta_V$. Rezultă că

$$\begin{aligned} 0 = f(\theta_V) &= f(\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2) = \beta_1 \cdot f(v_1) + \beta_2 \cdot f(v_2) \\ &= \beta_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot \lambda_2 \cdot v_2 = \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot (-(\beta_1 \cdot v_1)) \\ &= \beta_1 \cdot (\lambda_1 + (-\lambda_2)) \cdot v_1, \end{aligned}$$

de unde, deoarece $v_1 \neq \theta_V$ şi $\lambda_1 + (-\lambda_2) \neq 0$, obţinem $\beta_1 = 0$. Urmează, conform ipotezei, $\beta_2 \cdot v_2 = \theta_V$ şi, mai departe, $\beta_2 = 0$, deoarece $v_2 \neq \theta_V$.

Am obţinut $\beta_1 = \beta_2 = 0$, adică $\{v_1, v_2\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

Pasul p. Presupunem că avem valorile proprii $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_{p-1} \neq \lambda_p$ şi că sistemul de vectori $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ format din vectorii proprii corespunzători primelor $p-1$ valori proprii este liniar independent.

Vom demonstra că sistemul de vectori $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}, v_p\}$ este liniar independent.
Fie scalarii $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p \in K$ astfel încât

$$\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \ldots + \beta_{p-1} \cdot v_{p-1} + \beta_p \cdot v_p = \theta_V.$$

Atunci

$$f(\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \ldots + \beta_{p-1} \cdot v_{p-1} + \beta_p \cdot v_p) = f(\theta_V) = \theta_V,$$

de unde $\sum_{i=1}^{p} \beta_i \cdot f(v_i) = \theta_V$, adică

$$\sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \cdot \lambda_i \cdot v_i + \beta_p \cdot \lambda_p \cdot v_p = \theta_V.$$

Dar, din ipoteză, avem $\beta_p \cdot v_p = \sum_{i=1}^{p-1} (-\beta_i) \cdot v_i$. Rezultă

$$\sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \cdot \lambda_i \cdot v_i + \lambda_p \sum_{i=1}^{p-1} (-\beta_i) \cdot v_i = \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \cdot (\lambda_i - \lambda_p) \cdot v_i = \theta_V.$$

Cum $\lambda_i \neq \lambda_p$, $i = \overline{1, p-1}$, şi $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ este un sistem de vectori liniar independenţi, obţinem $\beta_i = 0$, $i = \overline{1, p-1}$ şi $\beta_p \cdot v_p = \theta_V$, de unde avem şi $\beta_p = 0$.
Am arătat că sistemul de vectori $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}, v_p\}$ este liniar independent, ceea ce încheie demonstraţia. □

Prima problemă care va fi studiată în drumul spre determinarea valorilor şi vectorilor proprii ai unui operator liniar este cea a găsirii valorilor proprii. Această chestiune va fi rezolvată în continuare.

Mai întâi definim noţiunea de polinom caracteristic al unei matrici pătratice.

Definiţia 3.11. Fie matricea pătratică $A \in \mathcal{M}_n(K)$ cu elemente din corpul K. Se numeşte *polinomul caracteristic* al matricei A polinomul cu coeficienţi din corpul K în variabila λ

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n).$$

Dacă A este matricea unui operator liniar $f \in \mathcal{L}(V)$ atunci polinomul caracteristic al matricei A este de asemeni numit polinomul caracteristic al lui f.

Propoziţia 3.29. *Polinomul caracteristic al unui operator liniar este invariant la o schimbare de bază.*

Demonstraţie. Considerăm operatorul liniar $f \in \mathcal{L}(V)$ cu matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ în baza $\mathcal{B}$ şi matricea $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ în baza $\mathcal{B}'$. Fie C matricea schimbării de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$. Atunci legătura dintre matricile A şi A' este

$A' = (C^t)^{-1} \times A \times C^t$ şi polinomul caracteristic al matricei A' este

$$\begin{aligned}
p'(\lambda) &= \det(A' - \lambda \cdot I_n) = \det((C^t)^{-1} \times A \times C^t - \lambda \cdot (C^t)^{-1} \times I_n \times C^t) \\
&= \det((C^t)^{-1} \times (A - \lambda \cdot I_n) \times C^t) \\
&= \det(C^t)^{-1} \cdot \det(A - \lambda \cdot I_n) \cdot \det C^t \\
&= \det(C^t)^{-1} \cdot \det C^t \cdot p(\lambda) = \det((C^t)^{-1} \times C^t) \cdot p(\lambda) = \det I_n \cdot p(\lambda) \\
&= p(\lambda),
\end{aligned}$$

unde $p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$ este polinomul caracteristic al matricei A. Am obţinut astfel că polinomul caracteristic al operatorului liniar f nu se modifică la o schimbare de bază. □

TEOREMA 3.30. *Fie operatorul liniar $f \in \mathcal{L}(V)$ cu matricea pătratică $A = (a_{ij})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}} \in \mathcal{M}_n(K)$. Atunci valorile proprii ale lui f sunt rădăcinile polinomului caracteristic al matricei A care aparţin corpului K, adică rădăcinile din K ale ecuaţiei caracteristice $p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$ un vector propriu al operatorului liniar f corespunzător valorii proprii $\lambda \in K$. Avem $f(x) = \lambda \cdot x$ şi, notând $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, din ecuaţia matricială a lui f, rezultă $A \times X = \lambda \cdot X$, adică $(A - \lambda \cdot I_n) \times X = O_{n,1}$, unde $O_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ este matricea coloană nulă.

Această ecuaţie matricială este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi din corpul K

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc}
(a_{11} - \lambda) \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \ldots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & 0 \\
a_{21} \cdot x_1 & + & (a_{22} - \lambda) \cdot x_2 & + & \ldots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \ldots & + & (a_{nn} - \lambda) \cdot x_n & = & 0
\end{array} \right. ,$$

a cărui matrice asociată este $B = A - \lambda \cdot I_n$. Deoarece $x \in V$ este un vector propriu al lui f atunci, conform definiţiei, este diferit de vectorul nul din V. Prin urmare sistemul admite şi soluţii nebanale, deci $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$, adică λ este o soluţie a ecuaţiei $p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$. □

Următorul corolar este o consecinţă imediată a teoremei de mai sus şi a propoziţiei 3.29.

COROLARUL 3.31. *Valorile şi vectorii proprii ai unui operator liniar nu depind de baza considerată în spaţiul liniar pe care este definit acest operator.*

OBSERVAŢIA 3.5. Este clar, din demonstraţia teoremei anterioare, că o rădăcină a polinomului caracteristic al unui operator liniar, aparţinând corpului de scalari al spaţiului vectorial în care lucrăm, este o valoare proprie a operatorului liniar respectiv.

OBSERVAŢIA 3.6. Conform teoremei lui D'Alembert orice polinom cu coeficienţi complecşi admite cel puţin o rădăcină. În consecinţă, orice operator liniar definit pe un spaţiu liniar complex admite cel puţin o valoare proprie.

PROPOZIŢIA 3.32. *Fie automorfismul $f \in \mathcal{L}(V)$. Atunci valorile proprii ale automorfismului invers $f^{-1} \in \mathcal{L}(V)$ sunt elementele simetrice (inverse) valorilor proprii ale lui f în raport cu operaţia de înmulţire în corpul K şi vectorii proprii ai lui f^{-1} sunt vectorii proprii ai lui f.*

DEMONSTRAŢIE. Fie vectorul propriu $x \in V$ al lui f corespunzător valorii proprii $\lambda \in K$. Avem $f(x) = \lambda \cdot x$. Compunând la stânga această relaţie cu f^{-1}, obţinem $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(\lambda \cdot x)$, de unde $x = \lambda \cdot f^{-1}(x)$. Rezultă $f^{-1} = \lambda^{-1} \cdot x$, unde $\lambda^{-1} \in K$ este simetricul lui λ în raport cu operaţia de înmulţire în corpul K, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

TEOREMA 3.33. *Dimensiunea unui subspaţiu propriu al unui operator liniar este mai mică sau egală cu multiplicitatea valorii proprii corespunzătoare (privită ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice a operatorului liniar).*

DEMONSTRAŢIE. Considerăm operatorul liniar $f \in \mathcal{L}(V)$ având valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K$ cu multiplicităţile respective $m_1, m_2, \ldots, m_p \in \mathbb{N}^*$. Vom demonstra teorema pentru valoarea proprie λ_1, ceea ce, evident, va fi suficient.

Deoarece λ_1 este o rădăcină multiplă de ordin m_1 a polinomului caracteristic al operatorului liniar f, atunci acest polinom are forma

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot q(\lambda), \tag{3.6}$$

unde $q(\lambda)$ este un polinom de grad $n - m_1$ cu $q(\lambda_1) \neq 0$.
Acum, fie $V(\lambda_1)$ subspaţiul propriu al lui f corespunzător valorii proprii λ_1 şi fie $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ o bază în $V(\lambda_1)$. Completăm această bază până la o bază $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ în spaţiul liniar V. Pentru a scrie matricea operatorului liniar f în această bază să ne reamintim mai întâi că această matrice va avea pe fiecare coloană coordonatele vectorilor $f(v_i)$, $i = \overline{1,n}$, în baza $\mathcal{B}$. Conform construcţiei acestei baze avem

$$f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1,\ f(v_2) = \lambda_1 \cdot v_2, \ldots,\ f(v_k) = \lambda_1 \cdot v_k$$

şi

$$f(v_j) = a_{1j} \cdot v_1 + a_{2j} \cdot v_2 + \ldots + a_{nj} \cdot v_n, \quad a_{ij} \in K, \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{k+1,n}.$$

Astfel matricea operatorului liniar f în baza $\mathcal{B}$ este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & a_{2k+1} & \dots & a_2 n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & a_{kk+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, deoarece polinomul caracteristic nu depinde de baza aleasă, avem

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = (\lambda - \lambda_1)^k \cdot q'(\lambda),$$

unde $q'(\lambda)$ este un polinom de grad $n - k$. Comparând această expresie a polinomului caracteristic cu expresia (3.6) rezultă $k \leq m_1$. $\square$

Definiţia 3.12. Spunem că un operator liniar $f \in \mathcal{L}(V)$ este *de structură simplă* dacă există o bază în spaţiul liniar V astfel încât matricea lui f în această bază să fie o *matrice diagonală*, adică de forma

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

Expresia operatorului liniar în această bază se numeşte *expresia canonică* a lui f.

Teorema 3.34. *Un operator liniar $f \in \mathcal{L}(V)$ este de structură simplă dacă şi numai dacă*

(1) *rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ale polinomului caracteristic al lui f aparţin corpului de scalari K al spaţiului liniar V, şi*
(2) *dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu $V(\lambda_i)$, $i = \overline{1,p}$, al lui f este egală cu multiplicitatea m_i a valorii proprii corespunzătoare, λ_i.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Să presupunem că $f \in \mathcal{L}(V)$ este un operator liniar de structură simplă. Conform definiţiei există o bază în spaţiul liniar V în care matricea lui f este o matrice diagonală

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p \dots, \lambda_p) \in \mathcal{M}_n(K),$$

unde fiecare λ_i, $i = \overline{1,p}$, apare de $m_i \in \mathbb{N}^*$ ori, $\sum_{i=1}^p m_i = n$, şi $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_p \neq \lambda_1$. Atunci polinomul caracteristic al lui f este

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda_p - \lambda)^{m_p}.$$

Rezultă că valorile proprii ale lui f sunt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ cu multiplicităţile respective $m_1, m_2, \dots, m_p$.

Acum fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza în spaţiul liniar V în care f are matricea A. Avem

$$\begin{cases} f(v_{k_1}) = \lambda_1 \cdot v_{k_1}, & \forall k_1 = \overline{1, m_1} \\ f(v_{k_2}) = \lambda_2 \cdot v_{k_2}, & \forall k_2 = \overline{1, m_2} \\ \vdots \\ f(v_{k_p}) = \lambda_p \cdot v_{k_p}, & \forall k_p = \overline{1, m_p} \end{cases}$$

Prin urmare, fiecare subspaţiu propriu $V(\lambda_i)$ al lui f conţine câte un sistem de vectori liniar independent

$$\mathcal{B}_i = \{v_{m_1+m_2+\ldots+m_{i-1}+1}, v_{m_1+m_2+\ldots+m_{i-1}+2}, \ldots, v_{m_1+m_2+\ldots+m_{i-1}+m_i}\}$$

format din m_i vectori, ceea ce înseamnă că $\dim V(\lambda_i) \geq m_i$ pentru orice $i = \overline{1, p}$. Dar, din teorema 3.33, ştim că $\dim V(\lambda_i) \leq m_i$ pentru orice $i = \overline{1, p}$. Am obţinut astfel că $\dim(\lambda_i) = m_i$ pentru orice $i = \overline{1, p}$.

"$\Leftarrow$" Presupunem că sunt verificate condiţiile (1) şi (2) şi, cum $\dim V(\lambda_i) = m_i$, $i = \overline{1, p}$, putem considera în fiecare subspaţiu propriu $V(\lambda_i)$ al operatorului liniar f câte o bază de forma

$$\mathcal{B}_i = \{v_{m_1+m_2+\ldots+m_{i-1}+1}, v_{m_1+m_2+\ldots+m_{i-1}+2}, \ldots, v_{m_1+m_2+\ldots+m_{i-1}+m_i}\},$$

formată, evident, din vectori proprii ai lui f. Acum, deoarece vectorii proprii ai unui operator liniar corespunzători unor valori proprii distincte formează un sistem liniar independent (vezi propoziţia 3.28), rezultă imediat că sistemul de vectori

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p \subset V$$

este liniar independent. Dar acest sistem este format din $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = \dim V = n$ vectori, ceea ce înseamnă că $\mathcal{B}$ este o bază în V formată din vectori proprii ai lui V. Ţinând cont că elementele coloanelor matricei lui f în baza $\mathcal{B}$ sunt coordonatele vectorilor $f(v_k)$, $k = \overline{1, n}$, în această bază, rezultă că f are în baza $\mathcal{B}$ matricea

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \ldots, \lambda_p) \in \mathcal{M}_n(K),$$

unde fiecare λ_i, $i = \overline{1, p}$, apare de $m_i \in \mathbb{N}^*$ ori şi $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$. $\square$

Observaţia 3.7. Din demonstraţia teoremei anterioare vedem că pentru un operator de structură simplă $f \in \mathcal{L}(V)$ există o bază formată din vectori proprii ai acestuia în care matricea sa are forma diagonală având ca elemente valorile proprii ale lui f, iar această bază se obţine prin reunirea bazelor din subspaţiile proprii ale lui f.

Exemplul 3.3. Să se determine valorile şi vectorii proprii ai operatorului liniar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a cărui matrice în baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se precizeze dacă f este un operator liniar de structură simplă.

Mai întâi trebuie să remarcăm că expresia operatorului liniar f în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este

$$f(x) = (x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3, -x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3, 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Vom folosi această expresie după determinarea valorilor proprii ale lui f pentru găsirea vectorilor proprii corespunzători.

În continuare obţinem ecuaţia caracteristică a matricei A

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (\lambda - 4) \cdot (\lambda + 2) = 0.$$

Astfel, valorile proprii ale lui f sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ şi $\lambda_3 = -2$, toate cu multiplicităţile egale cu 1.

În continuare vom determina subspaţiile proprii ale lui f corespunzătoare fiecărei valori proprii.

$\underline{\boldsymbol{\lambda_1 = 0}}$.

Ecuaţia $f(x) = \lambda_1 \cdot x \Leftrightarrow f(x) = \theta$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \end{cases},$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Se obţine imediat că matricea acestui sistem are rangul 2 şi putem alege minorul principal $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, necunoscutele principale x_2 şi x_3 şi necunoscuta secundară $x_1 = \alpha \in \mathbb{R}$. Ecuaţiile principale vor fi a doua şi a treia ale sistemului.

Rezultă soluţia generală $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 0$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem subspaţiul propriu al lui f corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 0$

$$V(\lambda_1) = \{x = (\alpha, \alpha, 0) = \alpha \cdot (1, 1, 0) | \alpha \in \mathbb{R}\} = L[v_1],$$

unde $v_1 = (1, 1, 0)$. O bază în acest spaţiu este $\mathcal{B}_1 = \{v_1\}$, deci dimensiunea sa este $\dim V(\lambda_1) = 1$, egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_1.

$\underline{\boldsymbol{\lambda_2 = 4}}$.

Ecuaţia $f(x) = \lambda_2 \cdot x \Leftrightarrow f(x) = 4 \cdot x$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ -x_1 - 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 0 \end{cases},$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Se arată uşor că matricea sistemului are rangul 2. Alegem ca minor principal $\Delta_p = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, necunoscute principale x_1 şi x_2 şi necunoscuta secundară $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$. Ecuaţiile principale vor fi prima şi a doua.

Se obţine soluţia $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Rezultă că subspaţiul propriu al lui f corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 4$ este

$$V(\lambda_2) = \{x = (\alpha, -\alpha, \alpha) = \alpha \cdot (1, -1, 1) | \alpha \in \mathbb{R}\} = L[v_2],$$

unde $v_2 = (1, -1, 1)$. O bază în acest spaţiu este $\mathcal{B}_2 = \{v_2\}$, deci dimensiunea sa este $\dim V(\lambda_2) = 1$, egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_2.
$\underline{\boldsymbol{\lambda_3 = -2}}$.
Ecuaţia $f(x) = \lambda_3 \cdot x$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3 \cdot x_2 & - & 2 \cdot x_3 & = & 0 \\ 2 \cdot x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & 0 \end{cases},$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Se arată că matricea sistemului are rangul 2. Alegem ca minor principal $\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, necunoscute principale x_1 şi x_2 şi ca necunoscută secundară $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$. Se obţine soluţia sistemului $x_1 = -\frac{1}{2} \cdot \alpha$, $x_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha$, $x_3 = \alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecuaţiile principale sunt prima şi a doua.
Obţinem subspaţiul propriu al lui f corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = -2$

$$V(\lambda_3) = \Big\{x = \Big(-\frac{1}{2} \cdot \alpha, \frac{1}{2} \cdot \alpha, \alpha\Big) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (1, -1, -2) | \alpha \in \mathbb{R}\Big\} = L[v_3],$$

unde $v_3 = (1, -1, -2)$. O bază în acest spaţiu este $\mathcal{B}_3 = \{v_3\}$ şi dimensiunea sa este $\dim V(\lambda_3) = 1$, egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_3.

Deoarece valorile proprii ale operatorului sunt reale şi dimensiunile subspaţiilor proprii corespunzătoare fiecăreia dintre ele sunt egale cu ordinele de multiplicitate ale acestora, rezultă, conform teoremei 3.34, că operatorul liniar f este de structură simplă, adică există baza

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$$

în $\mathbb{R}^3$, în care matricea operatorului este diagonală

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.1. Teorema Cayley-Hamilton. Încheiem acest capitol cu următorul rezultat care evidenţiază o proprietate importantă a matricilor pătratice.

TEOREMA 3.35. (Teorema Cayley-Hamilton) *Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$ o matrice pătratică de ordin n cu elemente dintr-un corp $(K, +, \cdot)$, al cărei polinom caracteristic este*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = \alpha_n \cdot \lambda^n + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0, \ \alpha_i \in K, \ i = \overline{0, n}.$$

Definim matricea

$$p(A) = \alpha_n \cdot A^n + \alpha_{n-1} \cdot A^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \cdot I_n \in \mathcal{M}_n(K).$$

Atunci $p(A) = O_n$, unde O_n este matricea pătratică nulă de ordin n.

DEMONSTRAŢIE. Fie matricea pătratică $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ şi fie $(A - \lambda \cdot I_n)^* = (A_{ji})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ adjuncta matricei $A - \lambda \cdot I_n$. Ţinând cont de modul de calcul al elementelor matricei adjuncte (vezi Capitolul 1), se observă cu uşurinţă că acestea sunt de fapt polinoame în variabila λ având coeficienţi din corpul K şi de grad mai mic sau egal cu $n-1$. Prin urmare putem scrie

$$(A - \lambda \cdot In)^* = \lambda^{n-1} \cdot B_{n-1} + \lambda^{n-2} \cdot B_{n-2} + \ldots + B_0,$$

unde $B_i \in \mathcal{M}_n(K)$, $i = \overline{0, n-1}$, sunt matrici pătratice ale căror elemente nu depind de λ.

Acum, ţinem cont de faptul că $(A-\lambda \cdot I_n) \times (A-\lambda \cdot I_n)^* = \det(A-\lambda \cdot I_n) \cdot I_n$ şi obţinem

$$(A - \lambda \cdot I_n) \times (\lambda^{n-1} \cdot B_{n-1} + \lambda^{n-2} \cdot B_{n-2} + \ldots + B_0) = p(\lambda) \cdot I_n. \tag{3.7}$$

Calculăm termenul din stânga al ecuaţiei şi avem

$$(A - \lambda \cdot I_n) \times (\lambda^{n-1} \cdot B_{n-1} + \lambda^{n-2} \cdot B_{n-2} + \ldots + B_0)$$
$$= -\lambda^n \cdot B_{n-1} + \lambda^{n-1} \cdot (A \times B_{n-1} - B_{n-2}) + \ldots + \lambda \cdot (A \times B_1 - B_0) + A \times B_0.$$

Înlocuim expresia polinomului caracteristic $p(\lambda)$ al matricei A în termenul din dreapta al ecuaţiei (3.7). Rezultă

$$p(\lambda) \cdot I_n = (\alpha_n \cdot \lambda^n + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0) \cdot I_n.$$

Acum, din ecuaţia (3.7), egalând coeficienţii lui $\lambda^n, \lambda^{n-1}, \ldots, \lambda$ şi termenii liberi din stânga cu cei din dreapta , obţinem următoarele $n+1$ egalităţi

$$-B_{n-1} = \alpha_n \cdot I_n,\ A \times B_{n-1} - B_{n-2} = \alpha_{n-1} \cdot I_n, \ldots$$
$$A \times B_1 - B_0 = \alpha_1 \cdot I_n,\ A \times B_0 = \alpha_0 \cdot I_n.$$

Înmulţind prima egalitate la stânga cu A^n, a doua cu A^{n-1}, şi aşa mai departe, obţinem

$$-A^n \times B_{n-1} = \alpha_n \cdot A^n,\ A^n \times B_{n-1} - A^{n-1} \times B_{n-2} = \alpha_{n-1} \cdot A^{n-1}, \ldots$$
$$A^2 \times B_1 - A \times B_0 = \alpha_1 \cdot A,\ A \times B_0 = \alpha_0 \cdot I_n.$$

Sumând cele $n+1$ egalităţi rezultate, avem

$$-A^n \times B_{n-1} + (A^n \times B_{n-1} - A^{n-1} \times B_{n-2}) + \ldots + (A^2 \times B_1 - A \times B_0) + A \times B_0$$
$$= \alpha_n \cdot A^n + \alpha_{n-1} \cdot A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot A + \alpha_0 \cdot I_n,$$

adică

$$O_n = p(A),$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

EXEMPLUL 3.4. Vom prezenta un tip de exerciţiu în rezolvarea căruia poate fi folosită teorema Cayley-Hamilton.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se calculeze A^n şi, dacă există, A^{-1}.

Polinomul caracteristic al matricei A este

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Conform Teoremei Cayley-Hamilton rezultă

$$P(A) = A^2 - 2 \cdot A + I_2 = O_2.$$

Urmează că $A \times (2 \cdot I_2 - A) = I_2$ şi, deoarece $\det A = 1 \neq 0$, matricea A este nesingulară şi

$$A^{-1} = 2 \cdot I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

În continuare, din $p(A) = O_2$ rezultă că $A^2 = 2 \cdot A - I_2$. Calculăm $A^3 = 2 \cdot A^2 - A = 3 \cdot A - 2 \cdot I_2$.

Vom demonstra prin inducţie matematică relaţia

$$A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I_2,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Primii doi paşi au fost demonstraţi. Presupunem adevărată relaţia $A^k = k \cdot A - (k-1) \cdot I_2$ şi vom demonstra $A^{k+1} = (k+1) \cdot A - k \cdot I_2$. Avem $A^{k+1} = A^k \times A = (k \cdot A - (k-1) \cdot I_2) \times A = k \cdot A^2 - (k-1) \cdot A = (k+1) \cdot A - k \cdot I_2$.

În concluzie

$$A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLUL 4

FUNCŢIONALE LINIARE, BILINIARE ŞI PĂTRATICE PE SPAŢII LINIARE FINIT DIMENSIONALE

În acest capitol vom lucra, în general, într-un spaţiu liniar n-dimensional $(V,+,\cdot)$ al cărui corp de scalari, în lipsa altor precizări, va fi corpul comutativ $(K,+,\cdot)$.

1. Funcţionale liniare

Definiţia 4.1. O aplicaţie $f: V \to K$ se numeşte *funcţională liniară* dacă pentru orice scalari $\alpha,\beta \in K$ şi orice vectori $x,y \in V$ are loc următoarea relaţie

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y).$$

Folosind definiţia funcţionalei liniare obţinem prin verificare directă următoarele două rezultate.

Propoziţia 4.1. *Dacă $f: V \to K$ este o funcţională liniară atunci pentru orice scalari $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in K$ şi orice vectori $v_1,v_2,\ldots,v_n \in V$ avem*

$$f(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \cdot f(v_1) + \alpha_2 \cdot f(v_2) + \ldots + \alpha_n \cdot f(v_n).$$

În continuare considerăm $V^* = \mathcal{L}(V,K)$ mulţimea funcţionalelor liniare $f: V \to K$ cu acelaşi domeniu de definiţie V şi definim adunarea funcţionalelor liniare, $+ : V^* \times V^* \to K$, şi înmulţirea la stânga cu un scalar a unei funcţionale liniare, $\cdot : K \times V^* \to K$, la fel ca operaţiile omonime din cazul aplicaţiilor liniare. Avem următorul rezultat.

Propoziţia 4.2. *$(V^*,+,\cdot)$ este un spaţiu liniar peste corpul K, numit spaţiul dual al spaţiului liniar V.*

Definiţia 4.2. Dualul $(V^*)^*$ al spaţiului dual V^* al unui spaţiu liniar V se numeşte spaţiul bidual al lui V.

Propoziţia 4.3. *Spaţiul dual V^* al spaţiului liniar V este izomorf cu spaţiul liniar $\mathcal{M}_{1,n}(K)$ al matricilor linie cu n coloane şi elemente din corpul K.*

Demonstraţie. Dacă în exemplul 2.6 considerăm cazul particular $m = 1$ vedem că putem gândi $(K,+,\cdot)$ ca un spaţiu liniar peste el însuşi. Din această perspectivă, funcţionala liniară $f: V \to K$ este o aplicaţie liniară şi atunci rezultă că spaţiul dual este izomorf cu $\mathcal{M}_{1,n}(K)$, conform teoremei 3.19. $\square$

Din propoziţia anterioară şi din teorema 3.15 rezultă următorul corolar.

COROLARUL 4.4. *Dimensiunea spaţiului dual* V^* *al unui spaţiu liniar* V *este egală cu dimensiunea lui* V*, adică* $\dim V^* = \dim V = n$.

TEOREMA 4.5. (Expresia analitică a unei funcţionale liniare)

Fie aplicaţia $f : V \to K$*, unde* $\dim V = n$*. Atunci* f *este o funcţională liniară dacă şi numai dacă există scalarii* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ *astfel încât*

$$f(x) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i, \tag{4.1}$$

pentru orice vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V$*, unde* $\mathcal{B}$ *este o bază în spaţiul liniar* V*. Expresia* (4.1) *se numeşte* ***expresia analitică a funcţionalei liniare*** f *în baza* $\mathcal{B}$*.*

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" Presupunem că $f : V \to K$ este o funcţională liniară, adică $f \in V^*$. Deoarece $V^* \simeq \mathcal{M}_{1,n}(K)$, adică există izomorfismul de spaţii liniare $\phi : V^* \to \mathcal{M}_{1,n}(K)$, rezultă că lui f îi corespunde prin acest izomorfism o matrice linie $A = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$ astfel încât ecuaţia matricială a lui f este $y = A \times X$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, adică $f(x) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n$, pentru orice vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$.

"$\Leftarrow$" Presupunem că f are proprietatea (4.1) şi fie scalarii $\alpha, \beta \in K$ şi vectorii $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$. Avem

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) &= a_1 \cdot (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1) + a_2 \cdot (\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2) + \ldots \\ &\quad + a_n \cdot (\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n) \\ &= \alpha \cdot (a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n) + \beta \cdot (a_1 \cdot y_1 + \ldots + a_n \cdot y_n) \\ &= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y), \end{aligned}$$

adică f este o funcţională liniară. □

TEOREMA 4.6. *Fie funcţionala liniară* $f : V \to K$ *şi fie bazele* $\mathcal{B}$ *şi* $\mathcal{B}'$ *în spaţiul liniar* V *cu matricea schimbării de la* $\mathcal{B}$ *la* $\mathcal{B}'$ *notată* C*. Dacă* $A \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$ *şi* $A' \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$ *sunt matricile lui* f *în bazele* $\mathcal{B}$ *şi respectiv* $\mathcal{B}'$ *atunci legătura dintre cele două matrici este*

$$A' = A \times C^t.$$

DEMONSTRAŢIE. Din nou privim $(K, +, \cdot)$ ca fiind un spaţiu liniar peste el însuşi şi astfel gândim f ca fiind o aplicaţie liniară între spaţiile liniare V şi K. Baza canonică în K este $\mathcal{B}_0 = \{1\}$ unde 1 este elementul neutru la înmulţire în K.

Acum să reamintim că legea de transformare a matricei lui $f : V \to K$ (ca aplicaţie liniară) la o schimbare de bază este

$$A' = (D^t)^{-1} \times A \times C^t,$$

unde C este matricea schimbării de bază în V şi D matricea schimbării de bază în K. Dacă lăsăm baza din K neschimbată avem, evident, $D = 1$. Înlocuind în expresia de mai sus, concluzionăm $A' = A \times C^t$. □

Observaţia 4.1. Dacă notăm $a = A^t \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ şi $a' = (A')^t \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ atunci

$$(A')^t = (A \times C^t)^t \Rightarrow a' = C \times a,$$

adică matricea schimbării de bază în spaţiul liniar V este şi matricea cu care se schimbă matricea coloană a coeficienţilor funcţionalei liniare.

2. Funcţionale biliniare

Definiţia 4.3. O aplicaţie $g : V \times V \to K$ se numeşte *funcţională* (sau *formă*) *biliniară* dacă este liniară în ambele argumente, adică pentru orice scalari $\alpha, \beta \in K$ şi orice vectori $v_1, v_2, w_1, w_2, v, w \in V$ avem

(1) $g(\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2, w) = \alpha \cdot g(v_1, w) + \beta \cdot g(v_2, w)$;
(2) $g(v, \alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2) = \alpha \cdot g(v, w_1) + \beta \cdot g(v, w_2)$.

Mulţimea funcţionalelor biliniare $g : V \times V \to K$ se notează $\mathcal{L}_2(V, K)$.

Teorema 4.7. (Expresia analitică a unei funcţionale biliniare)
O aplicaţie $g : V \times V \to K$, unde $\dim V = n$, este o funcţională biliniară dacă şi numai dacă există scalarii $a_{ij} \in K$, $i, j \in \overline{1, n}$, astfel încât

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j, \tag{4.2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V$ şi orice $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}} \in V$, unde $\mathcal{B}$ este o bază în spaţiul liniar V. Expresia (4.2) *se numeşte* ***expresia analitică a funcţionalei biliniare*** *f în baza $\mathcal{B}$.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Fie funcţionala biliniară $g : V \times V \to K$ şi fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în spaţiul liniar V. Considerăm vectorii

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \in V$$

şi

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j \in V.$$

Acum, folosind pe rând liniaritatea lui g în fiecare din cele două argumente, obţinem

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= g(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot g(e_i, e_j)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j,
\end{aligned}$$

unde $a_{ij} = g(e_i, e_j) \in K$, $i = \overline{1,n}$.

"$\Leftarrow$" Presupunem că aplicaţia $g : V \times V \to K$ are proprietatea (4.2). Se verifică direct, cu ajutorul definiţiei, că g este o aplicaţie liniară în ambele argumente, adică g este o funcţională biliniară, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Definiţia 4.4. Fie funcţionala biliniară $g : V \times V \to K$ definită prin $g(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$, pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V$ şi orice $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}} \in V$, unde $\mathcal{B}$ este o bază în spaţiul liniar V. Matricea $A = (a_{ij})_{i,\,j\,=\,\overline{1,\,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ se numeşte *matricea funcţionalei biliniare* în baza $\mathcal{B}$.

Observaţia 4.2. Fie funcţionala biliniară $g : V \times V \to K$ cu matricea $A = (a_{ij})_{i,\,j\,=\,\overline{1,\,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ în baza $\mathcal{B}$ din spaţiul liniar V şi fie vectorii $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}} \in V$. Dacă notăm tot cu $x = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$ şi cu $y = (y_1\ y_2\ \ldots\ y_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$ matricile linii ale căror elemente sunt coordonatele celor doi vectori, putem scrie *ecuaţia matricială* a funcţionalei biliniare g în baza $\mathcal{B}$

$$g(x,y) = x \times A \times y^t.$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned}
x \times A \times y^t &= (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j = g(x,y).
\end{aligned}$$

În continuare considerăm următoarele legi de compoziţie:

• Adunarea a două funcţionale biliniare

$$+ : \mathcal{L}_2(V,K) \times \mathcal{L}_2(V,K) \to \mathcal{L}_2(V,K)$$

definită prin

$$(g,h) \in \mathcal{L}_2(V,K) \times \mathcal{L}_2(V,K) \to g + h \in \mathcal{L}_2(V,K),$$

unde $(g+h)(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$, pentru orice $x, y \in V$.

• Înmulţirea la stânga cu un scalar a unei funcţionale biliniare

$$\cdot : K \times \mathcal{L}_2(V,K) \to \mathcal{L}_2(V,K)$$

definită prin

$$(\alpha, g) \in K \times \mathcal{L}_2(V,K) \to \alpha \cdot g \in \mathcal{L}_2(V,K),$$

unde $(\alpha \cdot g)(x) = \alpha \cdot g(x)$, pentru orice $x \in V$.

Se verifică imediat că aceste două operaţii au codomeniul precizat corect, adică adunarea este o lege de compoziţie internă în $\mathcal{L}_2(V,K)$, iar înmulţirea la stânga cu scalari o lege de compoziţie externă în $\mathcal{L}_2(V,K)$ peste corpul K.

PROPOZIŢIA 4.8. $(\mathcal{L}_2(V,K),+,\cdot)$ *este un spaţiu liniar peste corpul* K. *Mai mult,* $\mathcal{L}_2(V,K)$ *este izomorf cu spaţiul liniar* $\mathcal{M}_n(K)$ *al matricilor pătratice de ordin* n *cu elemente din* K.

Prima parte a acestei propoziţii se demonstrează prin verificare directă, în timp ce a doua parte se demonstrează verificând că aplicaţia $\phi : \mathcal{L}_2(V,K) \to \mathcal{M}_n(K)$ definită de $\phi(g) = A$, unde $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este matricea funcţionalei biliniare g, este un izomorfism de spaţii liniare. Deoarece aceste verificări sunt perfect asemănătoare cu cele făcute în cazul rezultatelor similare din capitolul dedicat aplicaţiilor liniare, le vom lăsa în sarcina cititorului.

Din teorema anterioară şi teorema 3.15 avem următorul corolar.

COROLARUL 4.9. *Dimensiunea spaţiului liniar* $(\mathcal{L}_2(V,K),+,\cdot)$ *este egală cu dimensiunea spaţiului liniar* $\mathcal{M}_n(K)$*, adică* $\dim \mathcal{L}_2(V,K) = \dim \mathcal{M}_n(K) = n^2$.

TEOREMA 4.10. *Fie funcţionala biliniară* $g : V \to K$ *şi fie bazele* $\mathcal{B}$ *şi* $\mathcal{B}'$ *în spaţiul liniar* V *cu matricea schimbării de la* $\mathcal{B}$ *la* $\mathcal{B}'$ *notată* C. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *şi* $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ *sunt matricile lui* g *în bazele* $\mathcal{B}$ *şi respectiv* $\mathcal{B}'$ *atunci legătura dintre acestea este*

$$A' = C \times A \times C^t.$$

DEMONSTRAŢIE. Considerăm vectorii

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} = (x_1', x_2', \dots, x_n')_{\mathcal{B}'} \in V$$

şi

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)_{\mathcal{B}} = (y_1', y_2', \dots, y_n')_{\mathcal{B}'} \in V.$$

Atunci ecuaţia matricială în baza $\mathcal{B}$ a funcţionalei biliniare g este

$$g(x,y) = x \times A \times y^t$$

şi cea în baza $\mathcal{B}'$ este

$$g(x,y) = x' \times A' \times (y')^t,$$

unde, la fel cum am procedat şi în observaţia 4.2, am notat tot cu x şi y matricile linie care au drept componente coordonatele celor doi vectori în baza $\mathcal{B}$ şi cu x' şi y' matricile linie care au drept componente coordonatele vectorilor în baza $\mathcal{B}'$. Legăturile dintre matricile x şi x' şi dintre y şi y' sunt

$$(x')^t = (C^t)^{-1} \times x^t \Rightarrow x' = x \times C^{-1} \quad \text{şi respectiv} \quad (y')^t = (C^t)^{-1} \times y^t.$$

În concluzie, avem

$$g(x,y) = x' \times A' \times (y')^t = x \times C^{-1} \times A' \times (C^t)^{-1} \times y^t$$

şi, comparând cu ecuaţia matricială a lui g în baza $\mathcal{B}$, obţinem

$$A = C^{-1} \times A' \times (C^t)^{-1} \Rightarrow A' = C \times A \times C^t.$$

□

Definiţia 4.5. Se numeşte rangul unei funcţionale biliniare rangul matricei sale.

Din teorema precedentă rezultă că matricile unei funcţionale biliniare în două baze diferite sunt echivalente, adică au acelaşi rang. Astfel, putem enunţa următoarea propoziţie.

Propoziţia 4.11. *Rangul unei funcţionale biliniare este invariabil la o schimbare de bază.*

Definiţia 4.6. O funcţională biliniară $g : V \times V \to K$ se numeşte *nedegenerată* dacă $\operatorname{rang} g = \dim V = n$ şi *degenerată* dacă $\operatorname{rang} g < \dim V = n$.

Observaţia 4.3. O funcţională biliniară $g : V \times V \to K$ este nedegenerată dacă şi numai dacă matricea sa $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este nesingulară, adică $\det A \neq 0$.

Definiţia 4.7. O funcţională biliniară $g : V \times V \to K$ se numeşte funcţională biliniară *simetrică* dacă $g(x, y) = g(y, x)$, pentru orice $x, y \in V$. Mulţimea funcţionalelor biliniare simetrice se notează $\mathcal{SL}_2(V, K)$.

Definiţia 4.8. O funcţională biliniară $g : V \times V \to K$ se numeşte funcţională biliniară *antisimetrică* dacă $g(x, y) = -g(y, x)$, pentru orice $x, y \in V$. Mulţimea funcţionalelor biliniare antisimetrice se notează $\mathcal{ASL}_2(V, K)$.

Propoziţia 4.12. *O funcţională biliniară $g : V \times V \to K$ este antisimetrică dacă şi numai dacă $g(x, x) = 0$, pentru orice vector $x \in V$.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Presupunem că $g : V \times V \to K$ este o funcţională biliniară antisimetrică. Atunci, conform definiţiei, pentru orice vector $x \in V$ avem $g(x, x) = -g(x, x)$, adică $g(x, x) = 0$.

"$\Leftarrow$" Fie $g : V \times V \to K$ o funcţională biliniară cu proprietatea $g(x, x) = 0$, oricare ar fi $x \in V$.

Acum, fie scalarul nenul $\lambda \in K$ şi vectorii $x, y \in V$. Atunci $g(x + \lambda \cdot y, x + \lambda \cdot y) = 0$, ceea ce devine, dacă ţinem cont că g este o funcţională biliniară,

$$g(x, x) + \lambda^2 \cdot g(y, y) + \lambda \cdot (g(x, y) + g(y, x)) = 0.$$

Dar $g(x, x) = g(y, y) = 0$ şi, cum $\lambda \neq 0$, rezultă

$$g(x, y) + g(y, x) = 0,$$

adică g este o funcţională biliniară antisimetrică. $\square$

Propoziţia 4.13. *Matricea unei funcţionale biliniare simetrice este o matrice simetrică, iar matricea unei funcţionale biliniare antisimetrice este o matrice antisimetrică.*

Demonstraţie. Aşa cum am văzut anterior, matricea unei funcţionale biliniare $g : V \times V \to K$, $\dim V = n$, într-o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ din spaţiul liniar V, este o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(K)$ cu elementele $a_{ij} = g(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Acum, dacă g este simetrică, avem $a_{ij} = g(e_i, e_j) = g(e_j, e_i) = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, deci $A = A^t$, adică A este o matrice simetrică. Dacă g este antisimetrică, atunci $a_{ij} = g(e_i, e_j) = -g(e_j, e_i) = -a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$. Prin urmare, $A = -A^t$, adică A este o matrice antisimetrică. $\square$

PROPOZIŢIA 4.14. *Mulţimile* $\mathcal{SL}_2(V,K) \subset \mathcal{L}_2(V,K)$ *şi* $\mathcal{ASL}_2(V,K) \subset \mathcal{L}_2(V,K)$ *împreună cu operaţiile de adunare a funcţionalelor biliniare şi de înmulţire a unei funcţionale biliniare cu un scalar sunt subspaţii liniare ale spaţiului liniar* $(\mathcal{L}_2(V,K),+,\cdot)$. *Mai mult spaţiul liniar* $\mathcal{SL}_2(V,K)$ *este izomorf cu spaţiul liniar* $\mathcal{S}_n(K)$ *al matricilor simetrice de ordin* n, *iar spaţiul liniar* $\mathcal{ASL}_2(V,K)$ *este izomorf cu spaţiul liniar* $\mathcal{AS}_n(K)$ *al matricilor antisimetrice de ordin* n.

DEMONSTRAŢIE. Prima parte a propoziţiei se obţine imediat verificând direct, cu ajutorul definiţiei funcţionalelor biliniare, că suma a două funcţionale biliniare simetrice (antisimetrice) este o funcţională biliniară simetrică (antisimetrică) şi că înmulţind o funcţională biliniară simetrică (antisimetrică) cu un scalar se obţine tot o funcţională biliniară simetrică (antisimetrică).

Definim aplicaţiile

$$\phi_1 : \mathcal{SL}_2(V,K) \to \mathcal{S}_n(K) \quad \text{şi} \quad \phi_2 : \mathcal{ASL}_2(V,K) \to \mathcal{AS}_n(K)$$

prin $\phi_1(g) = G$ pentru orice funcţională biliniară simetrică g şi respectiv prin $\phi_2(h) = H$ pentru orice funcţională biliniară antisimetrică h, unde G este matricea lui g şi H matricea lui h. Se obţine cu uşurinţă (în acelaşi mod ca în cazul rezultatului similar ce priveşte aplicaţiile liniare) că ϕ_1 şi ϕ_2 sunt izomorfisme de spaţii liniare. □

Cum era de aşteptat (datorită rezultatului similar din cazul matricilor), avem urmă toarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 4.15. *Orice funcţională biliniară se poate scrie ca suma dintre o funcţională biliniară simetrică şi una antisimetrică.*

DEMONSTRAŢIE. Fie funcţionala liniară $g : V \times V \to K$ şi definim $g_{1,2} : V \times V \to K$ prin $g_1(x,y) = \frac{1}{2}(g(x,y) + g(y,x))$ şi $g_2(x,y) = \frac{1}{2}(g(x,y) - g(y,x))$. Se verifică uşor că g_1 este o funcţională biliniară simetrică şi că g_2 este o funcţională biliniară antisimetrică. Cum $g = g_1 + g_2$ propoziţia este demonstrată. □

3. Funcţionale pătratice

DEFINIŢIA 4.9. O aplicaţie $h : V \to K$ se numeşte *funcţională* (sau *formă*) *pătratică* dacă există o funcţională biliniară simetrică $g : V \times V \to K$, numită *funcţionala biliniară polară* a lui h, astfel încât $h(x) = g(x,x)$, pentru orice $x \in V$. Prin definiţie *matricea funcţionalei pătratice* h într-o bază din spaţiul liniar V este matricea funcţionalei biliniare polare g în acea bază.

În continuare vom vedea cum se determină funţionala biliniară polară a unei forme pătratice cunoscute.

PROPOZIŢIA 4.16. *Dacă* $h : V \to K$ *este o funcţională pătratică atunci funcţionala biliniară polară corespunzătoare* $g : V \times V \to K$ *este dată de*

$$g(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (h(x+y) - h(x) - h(y)), \quad \forall x,y \in V.$$

DEMONSTRAŢIE. Dacă $h : V \to K$ este o funcţională pătratică, iar $g : V \times V \to K$ funcţionala sa biliniară polară atunci, conform definiţiei, avem

$$h(x+y) = g(x+y, x+y) = g(x,x) + 2 \cdot g(x,y) + g(y,y) = h(x) + 2g(x,y) + h(y),$$

de unde rezultă expresia lui g. □

TEOREMA 4.17. (Expresia analitică a unei funcţionale pătratice)
Fie $h : V \to K$ o funcţională pătratică, unde $\dim V = n$. Atunci există scalarii $a_{ij} \in K$, cu $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1,n}$, astfel încât

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \tag{4.3}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$, unde $\mathcal{B}$ este o bază în spaţiul liniar V. Expresia (4.3) *se numeşte* ***expresia analitică a funcţionalei pătratice*** *f în baza $\mathcal{B}$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $g : V \times V \to K$ funcţionala biliniară polară a lui h, cu expresia analitică în baza $\mathcal{B}$

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j, \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}} \in V.$$

Deoarece g este o funcţională biliniară simetrică, rezultă că $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1,n}$.

Mai departe, din definiţie, obţinem

$$h(x) = g(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j,$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V$. □

DEFINIŢIA 4.10. Se numeşte *rangul* unei funcţionale pătratice rangul matricei sale asociate. O funcţională pătratică se numeşte *nedegenerată* dacă rangul său este egal cu dimensiunea spaţiului liniar pe care este definită şi *degenerată* dacă rangul este mai mic decât dimensiunea spaţiului.

EXEMPLUL 4.1. Să se determine funcţionala biliniară polară a formei pătratice

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ în baza canonică din $\mathbb{R}^3$, şi să se scrie matricea lui h.

Funcţionala biliniară polară $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este dată de

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \tfrac{1}{2} \cdot (h(x+y) - h(x) - h(y)) \\ &= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 - \tfrac{1}{2} \cdot x_1 \cdot y_2 - \tfrac{1}{2} \cdot x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2, \end{aligned}$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^3$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^3$.

Matricea lui h este, prin definiţie, aceeaşi cu matricea lui g, adică

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\operatorname{rang} A = 3$ rezultă că $\operatorname{rang} h = \operatorname{rang} g = \operatorname{rang} A = 3$, adică h este nedegenerată.

Definiţia 4.11. Se numeşte *expresie canonică* a unei funcţionale pătratice expresia acesteia într-o bază în care matricea sa este o matrice diagonală. O astfel de bază se numeşte *baza canonică* corespunzătoare funcţionalei pătratice.

Vom da aici, fără demonstraţie, următorul rezultat (pentru demonstraţie vezi [**16**]).

Propoziţia 4.18. *Orice matrice simetrică este diagonalizabilă.*

Deoarece matricea oricărei funcţionale pătratice este simetrică, din această propoziţie obţinem imediat următorul rezultat.

Propoziţia 4.19. *Pentru orice funcţională pătratică există o expresie canonică.*

Observaţia 4.4. Fie $h : V \to K$ o funcţională pătratică cu $\operatorname{rang} h = r \leq n = \dim V$. Atunci matricea acestei funcţionale în baza canonică $\mathcal{B}'$ corespunzătoare este de forma

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_r & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

adică expresia canonică a lui h este

$$h(x) = a_1 \cdot x_1^2 + a_2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot x_r^2 = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot x_i^2,$$

pentru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}'} \in V$.

Definiţia 4.12. O funcţională pătratică $h : V \to \mathbb{R}$, unde V este un spaţiu liniar real cu $\dim V = n$, se numeşte

(1) pozitiv definită, dacă $h(x) > 0$, pentru orice $x \in V \setminus \{\theta\}$;
(2) negativ definită, dacă $h(x) < 0$, pentru orice $x \in V \setminus \{\theta\}$;
(3) semipozitiv definită, dacă $h(x) \geq 0$, pentru orice $x \in V \setminus \{\theta\}$;
(4) seminegativ definită, dacă $h(x) \leq 0$, pentru orice $x \in V \setminus \{\theta\}$;
(5) nedefinită, dacă există vectorii $x \in V$ şi $y \in V$ astfel încât $h(x) < 0$ şi $h(y) > 0$,

unde θ este vectorul nul din V.

DEFINIŢIA 4.13. Numărul p al coeficienţilor pozitivi dintr-o expresie canonică a unei funcţionale pătratice se numeşte *indice pozitiv de inerţie* al funcţionalei pătratice iar numărul q de coeficienţi negativi se numeşte *indice negativ de inerţie.*

TEOREMA 4.20. (Teorema lui Sylvester)
Indicii pozitiv şi negativ de inerţie ai unei funcţionale pătratice sunt invarianţi la o schimbare de bază.

DEMONSTRAŢIE. Fie funcţionala pătratică $h : V \to \mathbb{R}$ cu $\operatorname{rang} h = r$. Presupunem prin reducere la absurd că există bazele $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ în care h are expresiile canonice

$$h(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

şi respectiv

$$h(x) = (x_1')^2 + (x_2')^2 + \ldots + (x_{p'}')^2 - (x_{p'+1}')^2 - \ldots - (x_r')^2$$

cu $p > p'$ unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)_{\mathcal{B}} = (x_1', x_2', \ldots, x_r')_{\mathcal{B}'} \in V$.

Considerăm sistemele de vectori $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ şi $S_2 = \{w_{p'+1}, w_{p'+2}, \ldots, w_n\}$. Dimensiunile acoperirilor liniare ale acestor sisteme sunt

$$\dim L[S_1] = p \quad \text{şi respectiv} \quad \dim L[S_2] = n - p',$$

adică $\dim L[S_1] + \dim L[S_2] = n + p - p' > n$ ceea ce implică faptul că există un vector nenul $u \in L[S_1] \cap L[S_2]$.

În continuare vom demonstra această afirmaţie.

Fie două subspaţii liniare $V_1, V_2 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ ale spaţiului liniar V astfel încât $\dim V_1 = n_1$, $\dim V_2 = n_2$, $\dim V_1 + \dim V_2 = n_1 + n_2 > \dim V = n$, şi fie $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n_1}\}$ o bază în V_1 şi $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_{n_2}\}$ o bază în V_2. Deoarece $n_1 + n_2 > n$ rezultă că sistemul de vectori $S = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \subset V$ nu poate fi liniar independent în spaţiul liniar V. Prin urmare, măcar unul din vectorii din S se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori din S. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că acest vector este $e_1 \in \mathcal{B}_1$. Atunci există scalarii $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1} \in K$ şi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_2} \in K$ astfel încât

$$e_1 = \sum_{i=2}^{n_1} \alpha_i \cdot e_i + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_i \cdot f_i.$$

Acum să observăm că scalarii $\beta_i \in K$, $i = \overline{1, n_1}$, nu pot fi toţi nuli pentru că în acest caz, sistemul de vectori $\mathcal{B}_1$ ar fi liniar dependent, ceea ce reprezintă o contradicţie, $\mathcal{B}_1$ fiind o bază în V_1. Rezultă că vectorul

$$u = e_1 + \sum_{i=2}^{n_1} (-\alpha_i) \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n_2} \beta_i \cdot f_i$$

este nenul şi că $u \in V_1 \cap V_2$.

Revenind la demonstraţia teoremei, deoarece $u \in L[S_1]$, rezultă că $h(u) > 0$. Dar $u \in L[S_2]$ implică $h(u) < 0$, ceea ce este o contradicţie. Am obţinut astfel rezultatul dorit. $\square$

Folosind această teoremă obţinem imediat următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 4.21. *Fie* $h : V \to \mathbb{R}$ *o funcţională pătratică cu* $\dim V = n$ *şi* $\operatorname{rang} h = r$*. Dacă indicele pozitiv de inerţie al lui* h *este* p *iar indicele negativ de inerţie este* q *atunci funcţionala pătratică este*

(1) *pozitiv definită, dacă şi numai dacă* $p = r = n$*;*
(2) *semipozitiv definită, dacă şi numai dacă* $p = r < n$*;*
(3) *negativ definită, dacă şi numai dacă* $q = r = n$*;*
(4) *seminegativ definită, dacă şi numai dacă* $q = r < n$*;*
(5) *nedefinită, dacă şi numai dacă* $p \neq 0$ *şi* $q \neq 0$*.*

3.1. Reducerea expresiei unei funcţionale pătratice la o expresie canonică. Problema legată de funcţionalele pătratice asupra căreia ne vom apleca cu mai multă atenţie în acest curs este modul de determinare a unei expresii canonice pentru o funcţională (formă) pătratică definită pe un spaţiu liniar real finit dimensional. Vom descrie trei metode care servesc acestui scop.

Metoda I. Metoda lui Gauss

TEOREMA 4.22. (Teorema lui Gauss)
Pentru orice funcţională (formă) pătratică definită pe un spaţiu liniar real finit dimensional există o expresie canonică.

DEMONSTRAŢIE. Fie funcţionala pătratică $h : V \to \mathbb{R}$, unde V este un spaţiu liniar real cu $\dim V = n$, cu expresia

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

într-o bază $\mathcal{B}$, unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V$, şi $\operatorname{rang} h = r$.

Mai întâi să presupunem că toţi coeficienţii a_{ii}, $i = \overline{1, n}$, sunt nuli. Rezultă că există măcar un coeficient $a_{ij} \neq 0$, $i \neq j$. Facem o schimbare de bază în spaţiul liniar V astfel încât în noua bază coordonatele unui vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$ să fie

$$x_1'' = x_1, \ldots, x_{i-1}'' = x_{i-1}, x_i'' = \frac{1}{2}(x_i + x_j), x_{i+1}'' = x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}'' = x_{j-1}$$

$$x_j'' = \frac{1}{2}(x_i - x_j), x_{j+1}'' = x_{j+1}, \ldots, x_n'' = x_n,$$

unde am presupus, fără a restrânge generalitatea, că $i < j$. Trebuie observat că această transformare de coordonate corespunde într-adevăr unei schimbări de bază pentru că matricea sistemului de mai sus este nesingulară.

Expresia funcţionalei pătratice h devine

$$h(x) = 2 \cdot a_{ij} \cdot (x_i'')^2 - 2 \cdot a_{ij} \cdot (x_j'')^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j}}^{n} a_{kl} \cdot x_k'' \cdot x_l''.$$

Aceasta arată că putem presupune fără a restrânge generalitatea că există măcar un coeficient $a_{ii} \neq 0$. Pentru simplificarea scrierii vom presupune chiar

$a_{11} \neq 0$. În acest caz putem scrie

$$h(x) = \frac{1}{a_{11}} \cdot \Big(a_{11} \cdot x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j\Big)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j,$$

unde, aşa cum se verifică uşor, $h_1 : V \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$, este o formă pătratică cu $\operatorname{rang} h_1 = r - 1$.
La fel ca mai sus, putem presupune $\alpha_{22} \neq 0$ şi atunci expresia lui h devine

$$\begin{aligned} h(x) &= \tfrac{1}{a_{11}} \cdot \Big(a_{11} \cdot x_1 + \textstyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j\Big)^2 \\ &+ \tfrac{1}{\alpha_{22}} \cdot \Big(\alpha_{22} \cdot x_2 + \textstyle\sum_{j=3}^{n} \alpha_{2j} \cdot x_j\Big)^2 + \textstyle\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} \beta_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \end{aligned}$$

unde $h_2 : V \to \mathbb{R}$, $h_2(x) = \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ este o formă pătratică cu $\operatorname{rang} h_2 = r - 2$.
Continuăm în acelaşi fel şi, în final, obţinem expresia funcţionalei pătratice ca o sumă algebrică de r pătrate.

Acum, pentru un vector oarecare $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V$ notăm

$$\begin{cases} x_1' = a_{11} \cdot x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j \\ x_2' = \alpha_{22} \cdot x_2 + \sum_{j=3}^{n} \alpha_{2j} \cdot x_j \\ \ldots \\ x_r' = x_r, x_{r+1}' = x_{r+1}, \ldots, x_n' = x_n \end{cases}.$$

Matricea acestui sistem de ecuaţii liniare este

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \alpha_{1r+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2r} & \alpha_{2r+1} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

cu $\det D = a_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \ldots \cdot 1 \neq 0$, adică o matrice nesingulară. Prin urmare putem considera schimbarea de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ în spaţiul liniar V, astfel încât $D = (C^t)^{-1}$. În baza $\mathcal{B}'$ expresia funcţionalei pătratice va fi

$$h(x) = b_1 \cdot x_1^2 + b_2 \cdot x_2^2 + \ldots + b_r \cdot x_r^2,$$

unde am notat $b_1 = \frac{1}{a_{11}}$, $b_2 = \frac{1}{\alpha_{22}}$, etc., adică o expresie canonică. □

Aşa cum vom vedea în următoarele exemple, modul în care se demonstrează teorema lui Gauss ne furnizează şi o metodă practică de a determina o expresie canonică a unei funcţionale pătratice.

Exemplul 4.2. Să se determine o expresie canonică şi baza în care se obţine aceasta pentru funcţionala pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, care în baza canonică $\mathcal{B}$ din $\mathbb{R}^3$ este dată de

$$h(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Urmând paşii din demonstraţia teoremei lui Gauss avem

$$\begin{aligned} h(x) &= (x_1^2 - x_1 \cdot x_2) + x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &= \left(x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot x_2 + \tfrac{1}{4} \cdot x_2^2\right) - \tfrac{1}{4} \cdot x_2^2 + x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &= \left(x_1 + \tfrac{1}{2} \cdot x_2\right)^2 + \tfrac{3}{4} \cdot \left(x_2^2 + \tfrac{8}{3} \cdot x_2 \cdot x_3\right) \\ &= \left(x_1 + \tfrac{1}{2} \cdot x_2\right)^2 + \tfrac{3}{4} \cdot \left(x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot \tfrac{4}{3} \cdot x_3 + \tfrac{16}{9} \cdot x_3^2\right) - \tfrac{4}{3} \cdot x_3^2 \\ &= \left(x_1 + \tfrac{1}{2} \cdot x_2\right)^2 + \tfrac{3}{4} \cdot \left(x_2 + \tfrac{4}{3} \cdot x_3\right)^2 - \tfrac{4}{3} \cdot x_3^2 \end{aligned}$$

Acum considerăm schimbarea de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$, $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$, astfel încât coordonatele unui vector oarecare

$$x = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}} = (x_1', x_2', x_3')_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^3$$

să se transforme după formulele

$$x_1' = x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2, \quad x_2' = x_2 + \frac{4}{3} \cdot x_3, \quad x_3' = x_3.$$

În baza $\mathcal{B}'$ obţinem o expresie canonică a funcţionalei pătratice:

$$h(x) = (x_1')^2 + \frac{3}{4} \cdot (x_2')^2 - \frac{4}{3} \cdot (x_3')^2, \quad x = (x_1', x_2', x_3')_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^3.$$

Indicele pozitiv de inerţie al lui h este $p = 2 \neq 0$ şi indicele negativ de inerţie este $q = 1 \neq 0$, adică h este nedefinită.

Acum, pentru determinarea vectorilor din baza $\mathcal{B}'$, exprimăm coordonatele iniţiale ale unui vector în funcţie de cele ale aceluiaşi vector scris în baza $\mathcal{B}'$. Obţinem uşor

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + \frac{1}{2} \cdot x_2' - \frac{2}{3} \cdot x_3' \\ x_2 = x_2' - \frac{4}{3} \cdot x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}.$$

Matricea acestui sistem este transpusa matricei schimbării de bază $\mathcal{C} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$. Avem astfel matricea $C^t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ale cărei coloane, conform modului de obţinere a matricei schimbării de bază, au drept elemente coordonatele vectorilor din $\mathcal{B}'$ exprimaţi în baza iniţială. Rezultă că aceşti vectori sunt

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = \Big(\frac{1}{2}, 1, 0\Big), \quad v_3 = \Big(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 1\Big).$$

Exemplul 4.3. Să se determine o expresie canonică şi baza în care aceasta se obţine pentru funcţionala pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ care în baza canonică $\mathcal{B}$ din spaţiul liniar $\mathbb{R}^3$ este dată prin

$$h(x) = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Mai întâi facem o schimbare de bază în $\mathbb{R}^3$, trecând de la baza canonică la baza $\mathcal{B}''$, astfel încât transformarea coordonatelor unui vector oarecare să fie dată de

$$x_1 = x_1'' + x_2'', \quad x_2 = x_1'' - x_2'', \quad x_3 = x_3''.$$

Obţinem noua expresie a lui h

$$\begin{aligned} h(x) &= (x_1'' + x_2'') \cdot (x_1'' - x_2'') + 2 \cdot (x_1'' + x_2'') \cdot x_3'' + 2 \cdot (x_1'' - x_2'') \cdot x_3'' \\ &= (x_1'')^2 - (x_2'')^2 + 4 \cdot x_1'' \cdot x_3' \\ &= ((x_1'')^2 + 2 \cdot x_1'' \cdot 2 \cdot x_3'' + 4 \cdot (x_3'')^2) - 4 \cdot (x_3'')^2 - (x_2'')^2 \\ &= (x_1'' + 2 \cdot x_3'')^2 - (x_2'')^2 + 4 \cdot (x_3'')^2. \end{aligned}$$

Considerăm baza $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ în $\mathbb{R}^3$ în care coordonatele unui vector oarecare să fie date de

$$x_1' = x_1'' + 2 \cdot x_3'', \quad x_2' = x_2'', \quad x_3' = x_3''.$$

Atunci, în baza $\mathcal{B}'$ funcţionala pătratică are o expresie canonică:

$$h(x) = (x_1')^2 - (x_2')^2 + 4 \cdot (x_3')^2, \quad x = (x_1', x_2', x_3')_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^3.$$

Indicele pozitiv de inerţie al lui h este $p = 2 \neq 0$, iar indicele negativ de inerţie este $q = 1 \neq 0$, deci h este o funcţională pătratică nedefinită.

Pentru a găsi vectorii bazei $\mathcal{B}'$ trebuie să punem în evidenţă, mai întâi, legea de transformare a coordonatelor unui vector la schimbarea de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$. Din legile de transformare a coordonatelor unui vector la trecerea de la $\mathcal{B}''$ la $\mathcal{B}'$ obţinem

$$x_1'' = x_1' - 2 \cdot x_3', \quad x_2'' = x_2', \quad x_3'' = x_3'.$$

Înlocuind în ecuaţiile primei schimbări de coordonate avem

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' - 2 \cdot x_3' \\ x_2 = x_1' - x_2' - 2 \cdot x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}.$$

Ştim că matricea acestui sistem este $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, transpusa matricei C a schimbării de bază. Coloanele din C^t au drept elemente coordonatele vectorilor din $\mathcal{B}'$ exprimaţi în baza iniţială. Rezultă

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (1, -1, 0), \quad v_3 = (-2, -2, 1).$$

Metoda a II-a. Metoda lui Jacobi

Fie matricea pătratică $A = (a_{ij})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi minorii săi

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Deoarece unei funcţionale pătratice nedegenerate îi corespunde o matrice nesingulară avem următorul rezultat evident.

Propoziţia 4.23. *Fie funcţionala pătratică nedegenerată $h : V \to \mathbb{R}$, unde V este un spaţiu liniar real cu $\dim V = n$. Atunci există o bază în V astfel încât toţi minorii $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ai matricei A a funcţionalei pătratice în această bază să fie nenuli.*

Teorema 4.24. (Teorema lui Jacobi)

Fie funcţionala pătratică nedegenerată $h : V \to \mathbb{R}$, unde V este un spaţiu liniar real cu $\dim V = n$, având expresia

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V,$$

în baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Atunci există o bază în V în care obţinem o expresie canonică a lui h:

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \cdot (x_i')^2, \quad x = (x_1', x_2', \dots, x_n')_{\mathcal{B}'} \in V$$

cu $\Delta_0 = 1$, $\Delta_k = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix}$, $k = \overline{1, n}$, *unde* $D = (d_{ij})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este matricea lui h într-o bază din V astfel încât $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$.*

Demonstraţie. Funcţionala pătratică h este nedegenerată şi atunci, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că minorii Δ_k, $k = \overline{1, n}$, ai matricei $A = (a_{ij})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a lui h în baza canonică sunt toţi nenuli.

În continuare considerăm vectorii

$$\begin{cases} v_1 = c_{11} \cdot e_1 \\ v_2 = c_{21} \cdot e_1 + c_{22} \cdot e_2 \\ \dots \\ v_n = c_{n1} \cdot e_1 + c_{n2} \cdot e_2 + \dots + c_{nn} \cdot e_{nn} \end{cases},$$

unde $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, n}$, astfel încât $g(v_1, e_1) = 1$ şi

$$\begin{cases} g(v_k, e_i) = 0 \\ g(v_k, e_k) = 1 \end{cases}, \quad \forall i = \overline{1, k-1}, \forall k = \overline{2, n},$$

unde $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este funcţionala biliniară polară a lui h. Pe larg, pentru un k fixat, aceste condiţii sunt

$$\begin{cases} c_{k1} \cdot g(e_1, e_1) + c_{k2} \cdot g(e_1, e_2) + \ldots + c_{kk} \cdot g(e_1, e_k) = 0 \\ c_{k1} \cdot g(e_2, e_1) + c_{k2} \cdot g(e_2, e_2) + \ldots + c_{kk} \cdot g(e_2, e_k) = 0 \\ \ldots \\ c_{k1} \cdot g(e_{k-1}, e_1) + c_{k2} \cdot g(e_{k-1}, e_2) + \ldots + c_{kk} \cdot g(e_{k-1}, e_k) = 0 \\ c_{k1} \cdot g(e_k, e_1) + c_{k2} \cdot g(e_k, e_2) + \ldots + c_{kk} \cdot g(e_k, e_k) = 1 \end{cases},$$

adică, ţinând cont de faptul că $a_{ij} = g(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, pentru fiecare $k = \overline{1, n}$ avem sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} a_{11} \cdot c_{k1} + a_{12} \cdot c_{k2} + \ldots + a_{1k} \cdot c_{kk} = 0 \\ a_{21} \cdot c_{k1} + a_{22} \cdot c_{k2} + \ldots + a_{2k} \cdot c_{kk} = 0 \\ \ldots \\ a_{k-1,1} \cdot c_{k1} + a_{k-1,2} \cdot c_{k2} + \ldots + a_{k-1,k} \cdot c_{kk} = 0 \\ a_{k1} \cdot c_{k1} + a_{k2} \cdot c_{k2} + \ldots + a_{kk} \cdot c_{kk} = 1 \end{cases},$$

cu necunoscutele c_{kj}, $j = \overline{1, k}$. Matricea unui astfel de sistem are determinantul $\Delta_k \neq 0$. Rezultă că toate aceste sisteme sunt de tip Cramer şi astfel obţinem $c_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$, $i = \overline{1, n}$, unde $\Delta_0 = 1$.

Folosind $c_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, se arată uşor că $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este un sistem de vectori liniar independent, deci o bază în spaţiul liniar V. Urmează că elementele matricei $A' = (a'_{ij})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}}$, a funcţionalei pătratice în această bază, sunt

$$a'_{ij} = g(v_i, v_j) = g\Big(v_i, \sum_{l=1}^{j} c_{jl} \cdot e_l\Big) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad i \neq j \\ c_{ii}, & \text{dacă} \quad i = j \end{cases}, \text{ pentru } i \geq j.$$

Dar g este o funcţională biliniară simetrică şi, prin urmare, şi matricea sa, în orice bază, este simetrică, deci

$$A' = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}.$$

În concluzie, în baza $\mathcal{B}'$ funcţionala pătratică are expresia canonică

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \cdot (x_i')^2, \quad x = (x_1', x_2', \ldots, x_n')_{\mathcal{B}'} \in V.$$

□

Din teorema lui Sylvester şi teorema lui Jacobi obţinem imediat

TEOREMA 4.25. *Fie $h : V \to \mathbb{R}$ o funcţională pătratică nedegenerată definită pe spaţiul liniar real n-dimensional V. Atunci*

(1) *h este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$;*
(2) *h este negativ definită dacă şi numai dacă $\Delta_i < 0$, dacă $i = \text{impar}$, şi $\Delta_i > 0$, dacă $i = \text{par}$, $i = \overline{1,n}$,*

unde determinanţii Δ_i, $i = \overline{1,n}$, sunt cei definiţi în teorema lui Jacobi.

EXEMPLUL 4.4. Să se determine o expresie canonică şi baza în care se obţine aceasta pentru funcţionala pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$h(x) = x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

în baza canonică din spaţiul liniar real $\mathbb{R}^3$.

Matricea funcţionalei pătratice în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ cu $\det A = -\frac{3}{2} \neq 0$. Prin urmare matricea A este nesingulară, deci $\operatorname{rang} h = \operatorname{rang} A = 3$, adică h este o funcţională pătratică nedegenerată. De aici rezultă că în cazul lui h se poate aplica metoda lui Jacobi de determinare a unei expresii canonice.

Avem $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0$ şi $\Delta_3 = \det A = -\frac{3}{2} \neq 0$. Atunci, conform teoremei lui Jacobi, există o bază $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ în $\mathbb{R}^3$ în care h are următoarea expresie canonică

$$h(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot (x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdot (x_2')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \cdot (x_3')^2 = (x_1')^2 - 4 \cdot (x_2')^2 + \frac{1}{6} \cdot (x_3')^2,$$

unde $x = (x_1', x_2', \ldots, x_n')_{\mathcal{B}'} \in V$. Se observă că indicele pozitiv de inerţie al lui h este $p = 2 \neq 0$, iar indicele negativ de inerţie este $q = 1 \neq 0$, adică funcţionala pătratică este nedefinită.

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Acum, căutăm vectorii bazei $\mathcal{B}'$ de forma

$$\begin{cases} v_1 = c_{11} \cdot e_1 \\ v_2 = c_{21} \cdot e_1 + c_{22} \cdot e_2 \\ v_3 = c_{31} \cdot e_1 + c_{32} \cdot e_2 + c_{33} \cdot e_3 \end{cases},$$

astfel încât

$$1)\ g(v_1, e_1) = 1, \quad 2) \begin{cases} g(v_2, e_1) = 0 \\ g(v_2, e_2) = 1 \end{cases}, \quad 3) \begin{cases} g(v_3, e_1) = 0 \\ g(v_3, e_2) = 0 \\ g(v_3, e_3) = 1 \end{cases},$$

unde $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este funcţionala biliniară simetrică polară a lui h.

Ecuaţia $g(v_1, e_1) = 1$ devine

$$g(c_{11} \cdot e_1, e_1) = 1 \Rightarrow c_{11} \cdot g(e_1, e_1) = 1.$$

Dar matricea A a lui h în baza canonică este aceeaşi cu matricea lui g în baza canonică, adică elementele lui A sunt $a_{ij} = g(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, 3}$. Atunci ecuaţia anterioară se scrie

$$a_{11} \cdot c_{11} = 1 \Rightarrow c_{11} = 1.$$

Prin urmare $v_1 = c_{11} \cdot e_1 = e_1 = (1, 0, 0)$.
În continuare rezolvăm sistemul 2). Avem

$$\begin{cases} g(v_2, e_1) = 0 \\ g(v_2, e_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(c_{21} \cdot e_1 + c_{22} \cdot e_2, e_1) = 0 \\ g(c_{21} \cdot e_1 + c_{22} \cdot e_2, e_2) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{21} \cdot g(e_1, e_1) + c_{22} \cdot g(e_2, e_1) = 0 \\ c_{21} \cdot g(e_1, e_2) + c_{22} \cdot g(e_2, e_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \cdot c_{21} + a_{21} \cdot c_{22} = 0 \\ a_{12} \cdot c_{21} + a_{22} \cdot c_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{21} + \frac{1}{2} \cdot c_{22} & = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot c_{21} & = 1 \end{cases}.$$

Soluţia acestui sistem se obţine imediat şi este $c_{21} = 2$, $c_{22} = -4$. Rezultă $v_2 = c_{21} \cdot e_1 + c_{22} \cdot e_2 = 2 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2 = (2, -4, 0)$.

În final rezolvăm sistemul 3). Obţinem

$$\begin{cases} g(v_3, e_1) = 0 \\ g(v_3, e_2) = 0 \\ g(v_3, e_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(c_{31} \cdot e_1 + c_{32} \cdot e_2 + c_{33} \cdot e_3, e_1) = 0 \\ g(c_{31} \cdot e_1 + c_{32} \cdot e_2 + c_{33} \cdot e_3, e_2) = 0 \\ g(c_{31} \cdot e_1 + c_{32} \cdot e_2 + c_{33} \cdot e_3, e_3) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{31} \cdot g(e_1, e_1) + c_{32} \cdot g(e_2, e_1) + c_{33} \cdot g(e_3, e_1) = 0 \\ c_{31} \cdot g(e_1, e_2) + c_{32} \cdot g(e_2, e_2) + c_{33} \cdot g(e_3, e_2) = 0 \\ c_{31} \cdot g(e_1, e_3) + c_{32} \cdot g(e_2, e_3) + c_{33} \cdot g(e_3, e_3) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} \cdot c_{31} + a_{21} \cdot c_{32} + a_{31} \cdot c_{33} = 0 \\ a_{12} \cdot c_{31} + a_{22} \cdot c_{32} + a_{32} \cdot c_{33} = 0 \\ a_{13} \cdot c_{31} + a_{23} \cdot c_{32} + a_{33} \cdot c_{33} = 1 \end{cases}.$$

Matricea acestui sistem este chiar matricea A a lui h cu $\det A = -\frac{3}{2}$, adică sistemul este de tip Cramer cu soluţia $c_{31} = -\frac{1}{3}$, $c_{32} = \frac{2}{3}$, $c_{33} = \frac{1}{6}$. Rezultă $v_3 = c_{31} \cdot e_1 + c_{32} \cdot e_2 + c_{33} \cdot e_3 = -\frac{1}{3} \cdot e_1 + \frac{2}{3} \cdot e_2 + \frac{1}{6} \cdot e_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$.

Metoda a III-a. Metoda valorilor şi vectorilor proprii

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a unei funcţionale pătratice $h : V \to \mathbb{R}$, unde V este un spaţiu liniar real cu $\dim V = n$, este o matrice simetrică.

Considerăm operatorul liniar $f : V \to V$ a cărui matrice în baza canonică este A. Polinomul caracteristic al acestui operator are doar rădăcini reale singulare şi, prin urmare, subspaţiile sale proprii au dimensiunile egale cu 1, aşa cum am văzut în capitolul anterior. În concluzie, matricea A poate fi diagonalizată, adică există baza $\mathcal{B}'$ în spaţiul liniar V, formată din vectori proprii ai lui f, în care operatorului liniar îi corespunde matricea diagonală $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n \neq \lambda_1$ sunt valorile proprii ale matricei A. Atunci în baza $\mathcal{B}'$ funcţionala pătratică h are o expresie canonică:

$$h(x) = \lambda_1 \cdot (x'_1)^2 + \lambda_2 \cdot (x'_2)^2 + \ldots + \lambda_n \cdot (x'_n)^2, \quad x = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{\mathcal{B}'} \in V.$$

Exemplul 4.5. Să se determine o expresie canonică şi baza în care se obţine aceasta pentru funcţionala pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$h(x) = x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2 \cdot x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

în baza canonică din spaţiul liniar real $\mathbb{R}^3$.

Matricea lui h în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic al lui A este

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 6 \cdot \lambda,$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ şi $\lambda_3 = 3$.

Prin urmare există baza $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ în $\mathbb{R}^3$ în care funcţionala pătratică h are expresia canonică

$$h(x) = \lambda_1 \cdot (x'_1)^2 + \lambda_2 \cdot (x'_2)^2 + \lambda_3 \cdot (x'_3)^2 = -2 \cdot (x'_2)^2 + 3 \cdot (x'_3)^2,$$

pentru orice $x = (x'_1, x'_2, x'_3)_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^3$. Indicele pozitiv de inerţie al lui h este $p = 1 \neq 0$, iar indicele negativ de inerţie este $q = 1 \neq 0$, adică h este o funcţională pătratică nedefinită.

În continuare, pentru a determina vectorii bazei $\mathcal{B}'$, să considerăm operatorul liniar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cu matricea A în baza canonică din spaţiul liniar $\mathbb{R}^3$. Aşa cum am văzut valorile proprii ale lui f sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ şi $\lambda_3 = 3$, iar vectorii v_1, v_2 şi v_3 din baza $\mathcal{B}'$ sunt vectori proprii ai lui f, corespunzători celor trei valori proprii. În continuare vom determina aceşti vectori.

$\underline{\lambda_1 = 0}$. Ecuaţia $f(x) = \lambda_1 \cdot x$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, se scrie $f(x) = (-x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 - x_3, 2 \cdot x_1 - x_2) = (0, 0, 0)$ şi este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 = 0 \end{cases},$$

a cărui soluţie generală este $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2 \cdot \alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, adică subspaţiul propriu al lui f corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 0$ este

$$V(\lambda_1) = \{x = (\alpha, 2 \cdot \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\},$$

iar o bază în acest subspaţiu este $\mathcal{B}_1 = \{v_1 = (1, 2, 1)\}$.

$\underline{\lambda_2 = -2}$. Ecuaţia $f(x) = \lambda_2 \cdot x$ devine $(-x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3, 2 \cdot x_1 - x_2) = (-2 \cdot x_1, -2 \cdot x_2, -2 \cdot x_3)$ adică

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \end{cases}.$$

Soluţia generală a acestui sistem este $x_1 = -\alpha$, $x_2 = 0$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspaţiul propriu al lui f corespunzător lui λ_2 este

$$V(\lambda_2) = \{x = (-\alpha, 0, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O bază în $V(\lambda_2)$ este $\mathcal{B}_2 = \{v_2 = (-1, 0, 1)\}$.
$\underline{\lambda_3 = 3}$. Ecuaţia $f(x) = \lambda_3 \cdot x$ este $(-x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3, 2 \cdot x_1 - x_2) = (3 \cdot x_1, 3 \cdot x_2, 3 \cdot x_3)$ şi este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 - 3 \cdot x_3 = 0 \end{cases},$$

cu soluţia generală $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspaţiul propriu al lui f corespunzător lui λ_3 este

$$V(\lambda_3) = \{x = (\alpha, -\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O bază în $V(\lambda_3)$ este $\mathcal{B}_3 = \{v_3 = (1, -1, 1)\}$.

În concluzie, baza din $\mathbb{R}^3$ în care am obţinut expresia canonică a funcţionalei pătratice h este

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \{v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (1, -1, 1)\}.$$

CAPITOLUL 5

SPAŢII EUCLIDIENE

În acest capitol vom introduce o nouă operaţie definită într-un spaţiu liniar real $(V,+,\cdot)$, numită produs scalar, şi vom studia proprietăţile spaţiului V atunci când este dotat cu o astfel de operaţie.

1. Definiţii. Proprietăţi. Exemple

DEFINIŢIA 5.1. Fie spaţiul liniar real $(V,+,\cdot)$ cu $\dim V = n < \infty$. O aplicaţie $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte *produs scalar* în spaţiul liniar V dacă are următoarele proprietăţi:

(PS1) $\langle x,x\rangle \geq 0$ pentru orice vector $x \in V$. În plus $\langle x,x\rangle = 0$ dacă şi numai dacă $x=\theta$, unde θ este vectorul nul din spaţiul liniar V;
(PS2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ pentru orice vectori $x,y \in V$;
(PS3) $\langle \lambda\cdot x,y\rangle = \lambda\cdot\langle x,y\rangle$ pentru orice scalar $\lambda\in\mathbb{R}$ şi orice vectori $x,y\in V$;
(PS4) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ pentru orice vectori $x,y,z\in V$.

Spaţiul liniar V dotat cu produsul scalar $\langle , \rangle$ se numeşte *spaţiu euclidian* şi se notează $(V,\langle , \rangle)$.

OBSERVAŢIA 5.1. Un produs scalar este o funcţională biliniară simetrică pentru care funcţionala pătratică corespunzătoare este pozitiv definită.

PROPOZIŢIA 5.1. *Fie $(V,\langle , \rangle)$ un spaţiu euclidian şi fie θ vectorul nul din V. Atunci $\langle x,\theta\rangle = 0$ pentru orice vector $x\in V$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie vectorii $x,y\in V$ şi fie vectorul $-y\in V$ simetricul lui y în raport cu adunarea în V. Atunci, folosind pe rând proprietăţile (PS3) şi (PS2), avem

$$\langle x,\theta\rangle = \langle x, y+(-y)\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,(-1)\cdot y\rangle = \langle x,y\rangle - \langle x,y\rangle = 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

TEOREMA 5.2. (Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz)
Într-un spaţiu euclidian $(V,\langle , \rangle)$ are loc inegalitatea

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle},$$

pentru orice vectori $x,y\in V$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x=\theta$ sau $y=\theta$ atunci inegalitatea se reduce la identitatea $0=0$. În continuare presupunem $y\neq\theta$, considerăm scalarul $\lambda\in\mathbb{R}$ şi avem, folosind proprietăţile produsului scalar,

$$0 \leq \langle x+\lambda\cdot y, x+\lambda\cdot y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\cdot\lambda\cdot\langle x,y\rangle + \lambda^2\cdot\langle y,y\rangle.$$

Această inegalitate are loc pentru orice scalar λ dacă şi numai dacă

$$\Delta = 4 \cdot \langle x, y\rangle^2 - 4 \cdot \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \leq 0,$$

de unde rezultă inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz. $\square$

EXEMPLUL 5.1. Fie spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ şi fie aplicaţia

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\langle x, y\rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ în baza canonică din spaţiul liniar $\mathbb{R}^n$.

Vom verifica direct că această aplicaţie este un produs scalar, numit produsul scalar uzual în $\mathbb{R}^n$, şi, astfel, că $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ este un spaţiu euclidian.

(PS1) Avem $\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$ pentru orice vector $x \in \mathbb{R}^n$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, adică $x = \theta$ este vectorul nul din $\mathbb{R}^n$.

(PS2) Pentru orice doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^n$ rezultă

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i = \langle y, x\rangle.$$

(PS3) Pentru un număr real λ şi doi vectori $x, y \in V$ avem

$$\langle \lambda \cdot x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot x_i) \cdot y_i = \lambda \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \Big) = \lambda \cdot \langle x, y\rangle.$$

(PS4) În final, pentru vectorii $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ obţinem

$$\langle x + y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot z_i = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,$$

unde $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

În ceea ce priveşte inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, în acest caz se obţine

$$(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2),$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, adică o variantă a inegalităţii cunoscută şi folosită în aplicaţii încă din clasele liceale.

EXEMPLUL 5.2. Considerăm spaţiul liniar $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ al matricilor cu m linii şi n coloane cu elemente numere reale. Se demonstrează prin verificare directă că aplicaţia $\langle , \rangle : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A^t \times B)$$

este un produs scalar pe acest spaţiu liniar (produsul scalar uzual). Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ atunci expresia produsului scalar devine

$$\langle A, B\rangle = \text{trace}(A^t \times B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot b_{ij}.$$

Definiţia 5.2. Fie spaţiul liniar real $(V, +, \cdot)$. O aplicaţie $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ se numeşte *normă* pe V dacă are următoarele proprietăţi:

(N1) $\|x\| \geq 0$ pentru orice vector $x \in V$. Mai mult, $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = \theta$, unde θ este vectorul nul din V;
(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pentru orice scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ şi orice vector $x \in V$;
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice vectori $x, y \in V$.

Spaţiul liniar V dotat cu o normă $\|\cdot\|$ se numeşte *spaţiu liniar normat* şi se notează $(V, \|\cdot\|)$, iar $\|x\|$ se numeşte norma sau lungimea vectorului x.

Din definiţiile produsului scalar şi normei obţinem propoziţia următoare.

Propoziţia 5.3. *Dacă $(V, \langle,\rangle)$ este un spaţiu euclidian atunci aplicaţia $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definită prin $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pentru orice vector $x \in V$, este o normă pe spaţiul V, numită norma euclidiană.*

Demonstraţie. Mai întâi să observăm că aplicaţia dată în propoziţie este bine definită, adică, datorită proprităţii (PS1) a produsului scalar, există $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pentru orice vector $x \in V$. Acum, proprietăţile (N1)-(N3) se verifică direct:
(N1) Avem, evident, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$ pentru orice $x \in V$. Mai mult, dacă $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$ atunci, ţinând cont de (PS1), rezultă $x = \theta$.
(N2) Pentru un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ şi un vector $x \in V$ avem, folosind (PS3),

$$\|\lambda \cdot x\| = \langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x\rangle = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

(N3) Considerăm vectorii $x, y \in V$. Folosind (PS4), (PS2) şi inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz obţinem

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2 \cdot \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot \langle x, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

Exemplul 5.3. Cel mai simplu exemplu de normă pe un spaţiu liniar este funcţia modul $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, unde $\mathbb{R}$ este gândit ca un spaţiu liniar real, ca un caz particular al exemplului 2.6. Se verifică uşor că funcţia modul este o normă pe $\mathbb{R}$ şi astfel $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ este un spaţiu normat.

Exemplul 5.4. O generalizare naturală a modulului se obţine considerând spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$, unde $\langle , \rangle$ este produsul scalar uzual pe $\mathbb{R}^n$ definit în exemplul 5.1, şi norma euclidiană pe acest spaţiu. Obţinem expresia explicită a acestei norme

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definiţia 5.3. Fie spaţiul euclidian $(V, \langle , \rangle)$ şi fie vectorii nenuli $x, y \in V$. Definim unghiul $\varphi = (\widehat{x, y}) \in [0, \pi]$ dintre vectorii x şi y prin

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|},$$

unde $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in V$, este norma euclidiană pe V.

Observaţia 5.2. Cosinusul unghiului dintre doi vectori nenuli este bine definit, deoarece din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz rezultă $|\cos\varphi| < 1$.

Definiţia 5.4. Doi vectori nenuli x şi y din spaţiul euclidian $(V, \langle , \rangle)$ se numesc ortogonali dacă $\langle x, y\rangle = 0$. Faptul că vectorii x şi y sunt ortogonali se notează $x \perp y$.

Teorema 5.4. (Teorema lui Pitagora)
Dacă $(V, \langle , \rangle)$ este un spaţiu euclidian şi $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ este norma euclidiană pe V atunci pentru orice doi vectori ortogonali $x, y \in V$ avem

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demonstraţie. Considerăm vectorii ortogonali $x, y \in V$ şi obţinem

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Observaţia 5.3. Este clar că doi vectori nenuli dintr-un spaţiu euclidian sunt ortogonali dacă şi numai dacă unghiul dintre ei este egal cu $\frac{\pi}{2}$.

Definiţia 5.5. O aplicaţie $d : V \times V \to \mathbb{R}$, unde $(V, +, \cdot)$ este un spaţiu liniar real finit dimensional, se numeşte *distanţă* sau *metrică* pe V dacă are următoarele proprietăţi:

(D1) $d(x, y) \geq 0$ pentru orice vectori $x, y \in V$. În plus $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;
(D2) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice vectori $x, y \in V$;
(D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pentru orice vectori $x, y, z \in V$.

Spaţiul liniar V dotat cu o metrică d se numeşte *spaţiu metric* şi se notează (V, d).

Din proprietăţile normei obţinem prin verificare directă următorul rezultat.

Propoziţia 5.5. *Fie spaţiul euclidian $(V, \langle, \rangle)$ şi fie aplicaţia $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definită prin $d(x, y) = \|x - y\|$ pentru orice $x, y \in V$, unde $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ este norma euclidiană. Atunci d este o metrică pe V.*

Exemplul 5.5. În spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ metrica obţinută folosind propoziţia anterioară este $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \end{aligned}$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

În continuare vom vedea cum, într-un spaţiu euclidian, independenţa sau dependenţa liniară a unui sistem de vectori poate fi determinată cu ajutorul unui determinant asociat acestui sistem de vectori, numit determinant Gram.

Definiţia 5.6. Fie spaţiul euclidian $(V, \langle, \rangle)$ şi sistemul de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ din acest spaţiu. Atunci determinantul

$$G_p = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \ldots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \ldots & \langle v_2, v_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \langle v_p, v_2 \rangle & \ldots & \langle v_p, v_p \rangle \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinant Gram* asociat sistemului de vectori S.

Propoziţia 5.6. *Determinantul Gram al oricărui sistem de vectori inclus într-un spaţiu euclidian este non-negativ şi este nul dacă şi numai dacă sistemul de vectori este liniar dependent.*

Demonstraţie. Fie spaţiul euclidian n-dimensional $(V, \langle, \rangle)$. Mai întâi să presupunem că sistemul de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este liniar independent. Considerăm baza $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ în V. Ştim că produsul scalar $\langle, \rangle$ este o funcţională biliniară simetrică cu funcţionala pătratică corespunzătoare pozitiv definită. Atunci produsele $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, $i, j = \overline{1, p}$, sunt coeficienţi ai acestei funcţionale biliniare şi conform teoremei 4.25 rezultă că determinantul Gram al sistemului de vectori S este strict pozitiv.

În continuare presupunem că sistemul de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este liniar dependent. Atunci unul din elementele sale se scrie ca o combinaţie liniară a celorlalte. Fără a restrânge generalitatea putem considera că acest element este vectorul v_p şi avem

$$v_p = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_{p-1} \cdot v_{p-1}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, p-1}$$

şi

$$\langle v_i, v_p \rangle = \left\langle v_i, \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_i \cdot v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_i \cdot \langle v_i, v_j \rangle,\ \forall i = \overline{1, p},$$

adică ultima coloană din determinantul Gram asociat sistemului de vectori S este o combinaţie liniară a celorlalte coloane, de unde rezultă că determinantul este egal cu 0 în acest caz. □

2. Baze ortonormate într-un spaţiu euclidian

Definiţia 5.7. Un sistem de vectori $S_p = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ dintr-un spaţiu euclidian $(V, \langle , \rangle)$ se numeşte *ortogonal* dacă vectorii v_i, $i = \overline{1, p}$, sunt ortogonali doi câte doi şi *ortonormat* dacă este ortogonal şi, în plus, toţi vectorii au norma egală cu 1.

Observaţia 5.4. Dacă un sistem de vectori $S_p = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, dintr-un spaţiu euclidian $(V, \langle , \rangle)$, este ortonormat atunci

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq j \\ 1 & \text{dacă } i = j \end{cases},$$

unde δ_{ij} se numesc simbolii lui Kronecker.

Propoziţia 5.7. *Un sistem de vectori ortogonali dintr-un spaţiu euclidian este liniar independent.*

Demonstraţie. Fie sistemul de vectori ortogonali $S_p = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ din spaţiul euclidian $(V, \langle , \rangle)$ şi fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p = \theta,$$

unde θ este vectorul nul din V. Înmulţind scalar această relaţie, pe rând, cu vectorii v_i, $i = \overline{1, p}$, obţinem

$$\alpha_1 \cdot \langle v_1, v_i \rangle + \alpha_2 \cdot \langle v_2, v_i \rangle + \ldots + \alpha_i \cdot \langle v_i, v_i \rangle + \ldots + \alpha_p \cdot \langle v_p, v_i \rangle = \langle \theta, v_i \rangle,$$

pentru orice $i = \overline{1, p}$. Sistemul de vectori S_p fiind ortogonal rezultă $\alpha_i \cdot \langle v_i, v_i \rangle = 0$, adică, $\alpha_i = 0$, oricare ar fi $i = \overline{1, p}$. În concluzie, S_p este liniar independent. $\square$

Ca o consecinţă a propoziţiei anterioare avem următorul rezultat.

Propoziţia 5.8. *Un sistem de n vectori ortogonali dintr-un spaţiu euclidian n-dimensional este o bază în acest spaţiu, numită bază ortogonală. Dacă în plus toţi vectorii din această bază au norma egală cu* 1 *atunci baza se numeşte ortonormată.*

Exemplul 5.6. Este evident că baza canonică din spaţiul euclidian $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$, unde $\langle , \rangle$ este produsul scalar uzual, este o bază ortonormată.

Acum putem enunţa şi demonstra rezultatul central al acestei secţiuni, care ne va oferi suportul teoretic şi practic în drumul spre obţinerea de baze ortonormate în spaţii euclidiene.

Teorema 5.9. (Teorema Gram-Schmidt)

Dacă $S_p = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este un sistem de vectori liniar independent într-un spaţiu euclidian $(V, \langle , \rangle)$ atunci există sistemul de vectori ortonormat $S'_p = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ în V astfel încât subspaţiul liniar al lui V generat de S'_p să coincidă cu subspaţiul liniar generat de S_p, adică $L[S'_p] = L[S_p]$.

Demonstraţie. Pentru început vom construi un sistem de vectori $S''_p = \{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ ortogonal, astfel încât $L[S''_p] = L[S_p]$. Considerăm vectorii

$$\begin{cases} f_1 = v_1 \\ f_2 = v_2 - \lambda_{21} \cdot f_1 \\ f_3 = v_3 - \lambda_{31} \cdot f_1 - \lambda_{32} \cdot f_2 \\ \ldots \\ f_i = v_i - \lambda_{i1} \cdot v_1 - \ldots - \lambda_{ii-1} \cdot f_{i-1} \\ \ldots \\ f_p = v_p - \lambda_{p1} \cdot v_1 - \ldots - \lambda_{pp-1} \cdot f_{p-1} \end{cases},$$

unde $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,p}$, $j \in \overline{1,p-1}$, $i \geq j$, şi impunem $f_i \perp f_j$ pentru orice $i \neq j$. Acum, din $f_1 \perp f_2$, avem

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle f_1, v_2 - \lambda_{21} \cdot f_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle f_1, v_2 \rangle - \lambda_{21} \cdot \langle f_1, f_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{21} = \frac{\langle f_1, v_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle}.$$

Am determinat astfel vectorul $f_2 = v_2 - \frac{\langle f_1, v_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \cdot f_1$.

În continuare, avem

$$\begin{cases} f_3 \perp f_1 \\ f_3 \perp f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle f_3, f_1 \rangle = 0 \\ \langle f_3, f_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle v_3 - \lambda_{31} \cdot f_1 - \lambda_{32} \cdot f_2, f_1 \rangle = 0 \\ \langle v_3 - \lambda_{31} \cdot f_1 - \lambda_{32} \cdot f_2, f_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle v_3, f_1 \rangle - \lambda_{31} \cdot \langle f_1, f_1 \rangle - \lambda_{32} \cdot \langle f_2, f_1 \rangle = 0 \\ \langle v_3, f_2 \rangle - \lambda_{31} \cdot \langle f_1, f_2 \rangle - \lambda_{32} \cdot \langle f_2, f_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{31} = \frac{\langle v_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \\ \lambda_{32} = \frac{\langle v_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \end{cases},$$

adică $f_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \cdot f_1 - \frac{\langle v_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \cdot f_2$.

În acelaşi mod se determină vectorii $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}$. Vom găsi ultimul vector f_p rezolvând sistemul

$$\begin{cases} f_p \perp f_1 \\ f_p \perp f_2 \\ \ldots \\ f_p \perp f_{p-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle f_p, f_1 \rangle & = 0 \\ \langle f_p, f_2 \rangle & = 0 \\ \ldots & \\ \langle f_p, f_{p-1} \rangle & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle v_p - \lambda_{p1} \cdot f_1 - \ldots - \lambda_{pp-1} \cdot f_{p-1}, f_1 \rangle & = 0 \\ \langle v_p - \lambda_{p1} \cdot f_1 - \ldots - \lambda_{pp-1} \cdot f_{p-1}, f_2 \rangle & = 0 \\ \ldots & \\ \langle v_p - \lambda_{p1} \cdot f_1 - \ldots - \lambda_{pp-1} \cdot f_{p-1}, f_{p-1} \rangle & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle v_p, f_1 \rangle - \lambda_{p1} \cdot \langle f_1, f_1 \rangle - \ldots - \lambda_{pp-1} \cdot \langle f_{p-1}, f_1 \rangle & = 0 \\ \langle v_p, f_2 \rangle - \lambda_{p1} \cdot \langle f_1, f_2 \rangle - \ldots - \lambda_{pp-1} \cdot \langle f_{p-1}, f_2 \rangle & = 0 \\ \ldots & \\ \langle v_p, f_{p-1} \rangle - \lambda_{p1} \cdot \langle f_1, f_{p-1} \rangle - \ldots - \lambda_{pp-1} \cdot \langle f_{p-1}, f_{p-1} \rangle & = 0 \end{cases}$$

Deoarece vectorii determinaţi deja verifică $f_i \perp f_j$, $i \neq j$, rezultă că sistemul de ecuaţii devine

$$\begin{cases} \langle v_p, f_1\rangle - \lambda_{p1}\cdot\langle f_1, f_1\rangle = 0 \\ \langle v_p, f_2\rangle - \lambda_{p2}\cdot\langle f_2, f_2\rangle = 0 \\ \dots \\ \langle v_p, f_{p-1}\rangle - \lambda_{pp-1}\cdot\langle f_{p-1}, f_{p-1}\rangle \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{p1} & = \frac{\langle v_p, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} \\ \lambda_{p2} & = \frac{\langle v_p, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} \\ \dots \\ \lambda_{pp-1} & = \frac{\langle v_p, f_{p-1}\rangle}{\langle f_{p-1}, f_{p-1}\rangle} \end{cases}.$$

Obţinem $f_p = v_p - \frac{\langle v_p, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle}\cdot f_1 - \frac{\langle v_p, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle}\cdot f_2 - \ldots - \frac{\langle v_p, f_{p-1}\rangle}{\langle f_{p-1}, f_{p-1}\rangle}\cdot f_{p-1}$.

Din construcţia vectorilor f_i, $i = \overline{1,p}$, urmează că aceştia aparţin subspaţiului liniar generat de sistemul de vectori S_p, adică $f_i \in L[S_p]$. Prin urmare avem $S''_p \subset L[S_p]$. Dar sistemul de vectori S''_p este ortogonal şi, astfel, liniar independent, deci o bază în $L[S_p]$, deoarece $\dim L[S_p] = p$. Concluzionăm $L[S''_p] = L[S_p]$.

În final considerăm vectorii $w_i = \frac{1}{\|f_i\|}\cdot f_i$, $i = \overline{1,p}$, unde norma care apare în formule este norma euclidiană pe $(V, \langle,\rangle)$. Rezultă

$$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i\rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{1}{\|f_i\|}\cdot f_i, \frac{1}{\|f_i\|}\cdot f_i\right\rangle} = \frac{1}{\|f_i\|}\cdot\sqrt{\langle f_i, f_i\rangle} = 1, \quad \forall i = \overline{1,p},$$

şi

$$\langle w_i, w_j\rangle = \left\langle \frac{1}{\|f_i\|}\cdot f_i, \frac{1}{\|f_j\|}\cdot f_j\right\rangle = \frac{1}{\|f_i\|}\cdot\frac{1}{\|f_j\|}\cdot\langle f_i, f_j\rangle = 0, \quad \forall i,j = \overline{1,p},\ i \neq j,$$

adică $\langle w_i, w_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad i = j \\ 0 & \text{dacă} \quad i \neq j \end{cases}$ pentru orice $i, j = \overline{1,p}$.

În concluzie sistemul de vectori $S'_p = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ este ortonormat şi, în plus, $L[S'_p] = L[S''_p] = L[S_p]$, aşa cum am văzut mai sus. $\square$

O consecinţă imediată a teoremei Gram-Scmidt este următorul rezultat.

PROPOZIŢIA 5.10. *În orice spaţiu euclidian există o bază ortonormată.*

EXEMPLUL 5.7. Vom studia în cele ce urmează un exemplu concret în care se aplică teorema Gram-Schmidt pentru găsirea unei baze ortonormate în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$. Vom vedea că metoda folosită este chiar cea prin care se demonstrează teorema.

Să se determine o bază ortonormată în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$, unde $\langle,\rangle$ este produsul scalar uzual, pornind de la baza $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,2,0), v_2 = (0,-1,2), v_3 = (1,1,1)\}$, folosind procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

Mai întâi calculăm

$$\langle v_1, v_1\rangle = 5,\ \langle v_1, v_2\rangle = -2,\ \langle v_1, v_3\rangle = 3,\ \langle v_2, v_2\rangle = 5,\ \langle v_2, v_3\rangle = 1,\ \langle v_3, v_3\rangle = 3$$

şi observăm că nu avem în $\mathcal{B}$ nici o pereche de vectori ortogonali.

Din teorema Gram-Schmidt ştim că există o bază ortogonală $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ în $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$, ale cărei elemente le căutăm de forma

$$f_1 = v_1 = (1,2,0), \quad f_2 = v_2 - \lambda_{21}\cdot f_1, \quad f_3 = v_3 - \lambda_{31}\cdot f_1 - \lambda_{32}\cdot f_2,$$

unde $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2\}$.

Din $f_2 \perp f_1$ rezultă

$$\langle f_2, f_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_2 - \lambda_{21} \cdot f_1, f_1 \rangle \Rightarrow \langle v_2, f_1 \rangle - \lambda_{21} \cdot \langle f_1, f_1 \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_{21} = \frac{\langle v_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} = -\frac{2}{5},$$

adică $f_2 = v_2 - \lambda_{21} \cdot f_1 = (0,-1,2) + \frac{2}{5} \cdot (1,2,0) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 2\right)$.

În continuare, din $\begin{cases} f_3 \perp f_1 \\ f_3 \perp f_2 \end{cases}$, avem

$$\begin{cases} \langle f_3, f_1 \rangle = 0 \\ \langle f_3, f_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle v_3 - \lambda_{31} \cdot f_1 - \lambda_{32} \cdot f_2, f_1 \rangle = 0 \\ \langle v_3 - \lambda_{31} \cdot f_1 - \lambda_{32} \cdot f_2, f_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle v_3, f_1 \rangle - \lambda_{31} \cdot \langle f_1, f_1 \rangle - \lambda_{32} \cdot \langle f_2, f_1 \rangle = 0 \\ \langle v_3, f_2 \rangle - \lambda_{31} \cdot \langle f_1, f_2 \rangle - \lambda_{32} \cdot \langle f_2, f_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{31} = \frac{\langle v_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} = \frac{3}{5} \\ \lambda_{32} = \frac{\langle v_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} = \frac{11}{21} \end{cases},$$

adică

$$\begin{aligned} f_3 &= v_3 - \tfrac{\langle v_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \cdot f_1 - \tfrac{\langle v_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \cdot f_2 = (1,1,1) - \tfrac{3}{5} \cdot (1,2,0) \\ &- \tfrac{11}{21} \cdot \left(\tfrac{2}{5}, -\tfrac{1}{5}, 2\right) = \left(\tfrac{4}{21}, -\tfrac{2}{21}, -\tfrac{1}{21}\right). \end{aligned}$$

Acum considerăm vectorii $w_i = \frac{1}{\|f_i\|}$, $i \in \{1,2,3\}$ şi obţinem

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{\|f_1\|} \cdot f_1 = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot (1,2,0) \\ w_2 = \frac{1}{\|f_2\|} \cdot f_2 = \sqrt{\frac{5}{21}} \cdot \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 2\right) \\ w_3 = \frac{1}{\|f_3\|} \cdot f_2 = \sqrt{21} \cdot \left(\frac{4}{21}, -\frac{2}{21}, -\frac{1}{21}\right) \end{cases},$$

şi astfel baza ortonormată $\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.

Exemplul 5.8. În acest exemplu vom determina, folosind acelaşi procedeu Gram-Schmidt, o bază ortonormată în spaţiul euclidian $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$, unde produsul scalar considerat este cel uzual, pornind de la baza $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, unde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ca şi în exemplul precedent, mai întâi calculăm

$$\begin{array}{lrlr} \langle A_1, A_1 \rangle = \mathrm{trace}(A_1^t \times A_1) = & 2, & \langle A_2, A_3 \rangle = \mathrm{trace}(A_2^t \times A_3) = & 0 \\ \langle A_1, A_2 \rangle = \mathrm{trace}(A_1^t \times A_2) = & -1, & \langle A_2, A_4 \rangle = \mathrm{trace}(A_2^t \times A_4) = & 0 \\ \langle A_1, A_3 \rangle = \mathrm{trace}(A_1^t \times A_3) = & 0, & \langle A_3, A_3 \rangle = \mathrm{trace}(A_3^t \times A_3) = & 2 \\ \langle A_1, A_4 \rangle = \mathrm{trace}(A_1^t \times A_4) = & 0, & \langle A_3, A_4 \rangle = \mathrm{trace}(A_3^t \times A_4) = & -1 \\ \langle A_2, A_2 \rangle = \mathrm{trace}(A_2^t \times A_2) = & 1, & \langle A_4, A_4 \rangle = \mathrm{trace}(A_4^t \times A_4) = & 1 \end{array}$$

şi obţinem $A_1 \perp A_3$, $A_1 \perp A_4$, $A_2 \perp A_3$ şi $A_2 \perp A_4$. Conform teoremei Gram-Schmidt există baza ortogonală $\mathcal{B}' = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Putem alege $F_1 = A_1$ şi $F_2 = A_3$ deoarece $A_1 \perp A_3$.

În continuare căutăm F_3 de forma $F_3 = A_2 - \lambda_{31} \cdot F_1 - \lambda_{32} \cdot F_2$ astfel încât $\begin{cases} F_3 \perp F_1 \\ F_3 \perp F_2 \end{cases}$. Rezultă

$$\begin{cases} \langle F_3, F_1 \rangle = 0 \\ \langle F_3, F_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle A_2 - \lambda_{31} \cdot F_1 - \lambda_{32} \cdot F_2, F_1 \rangle = 0 \\ \langle A_2 - \lambda_{31} \cdot F_1 - \lambda_{32} \cdot F_2, F_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle A_2, F_1 \rangle - \lambda_{31} \cdot \langle F_1, F_1 \rangle - \lambda_{32} \cdot \langle F_2, F_1 \rangle = 0 \\ \langle A_2, F_2 \rangle - \lambda_{31} \cdot \langle F_1, F_2 \rangle - \lambda_{32} \cdot \langle F_2, F_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{31} = \frac{\langle A_2, F_1 \rangle}{\langle F_1, F_1 \rangle} = & -\frac{1}{2} \\ \lambda_{32} = \frac{\langle A_2, F_2 \rangle}{\langle F_2, F_2 \rangle} = & 0 \end{cases},$$

adică

$$F_3 = A_2 - \lambda_{31} \cdot F_1 - \lambda_{32} \cdot F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mai departe, căutăm F_4 de forma $F_4 = A_4 - \lambda_{41} \cdot F_1 - \lambda_{42} \cdot F_2 - \lambda_{43} \cdot F_3$ astfel încât $\begin{cases} F_4 \perp F_1 \\ F_4 \perp F_2 \\ F_4 \perp F_3 \end{cases}$. Rezultă

$$\begin{cases} \langle F_4, F_1 \rangle = 0 \\ \langle F_4, F_2 \rangle = 0 \\ \langle F_4, F_3 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle A_4 - \lambda_{41} \cdot F_1 - \lambda_{42} \cdot F_2 - \lambda_{43} \cdot F_3, F_1 \rangle = 0 \\ \langle A_4 - \lambda_{41} \cdot F_1 - \lambda_{42} \cdot F_2 - \lambda_{43} \cdot F_3, F_2 \rangle = 0 \\ \langle A_4 - \lambda_{41} \cdot F_1 - \lambda_{42} \cdot F_2 - \lambda_{43} \cdot F_3, F_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle A_4, F_1 \rangle - \lambda_{41} \cdot \langle F_1, F_1 \rangle - \lambda_{42} \cdot \langle F_2, F_1 \rangle - \lambda_{43} \cdot \langle F_3, F_1 \rangle = 0 \\ \langle A_4, F_2 \rangle - \lambda_{41} \cdot \langle F_1, F_2 \rangle - \lambda_{42} \cdot \langle F_2, F_2 \rangle - \lambda_{43} \cdot \langle F_3, F_2 \rangle = 0 \\ \langle A_4, F_3 \rangle - \lambda_{41} \cdot \langle F_1, F_3 \rangle - \lambda_{42} \cdot \langle F_2, F_3 \rangle - \lambda_{43} \cdot \langle F_3, F_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{41} = \frac{\langle A_4, F_1 \rangle}{\langle F_1, F_1 \rangle} = & 0 \\ \lambda_{42} = \frac{\langle A_4, F_2 \rangle}{\langle F_2, F_2 \rangle} = & -\frac{1}{2} \\ \lambda_{43} = \frac{\langle A_4, F_3 \rangle}{\langle F_3, F_3 \rangle} = & 0 \end{cases},$$

şi, prin urmare,

$$\begin{aligned} F_4 &= A_4 - \lambda_{41} \cdot F_1 - \lambda_{42} \cdot F_2 - \lambda_{43} \cdot F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

În final obţinem baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, unde

$$E_1 = \frac{1}{\|F_1\|} \cdot F_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \frac{1}{\|F_2\|} \cdot F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \frac{1}{\|F_3\|} \cdot F_3 = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_4 = \frac{1}{\|F_4\|} \cdot F_4 = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

unde norma folosită mai sus este norma euclidiană pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Propoziţia 5.11. *Fie $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ două baze ortonormate în spaţiul euclidian n-dimensional $(V, \langle , \rangle)$. Atunci matricea schimbării de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ este o matrice ortogonală, adică $C^t \times C = I_n$.*

Demonstraţie. Fie bazele ortonormate $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ în $(V, \langle , \rangle)$. Matricea schimbării de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ este $C = (c_{ij})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}}$, unde

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot e_j, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Baza $\mathcal{B}$ fiind ortonormată obţinem, pentru orice $a, b = \overline{1, n}$,

$$\begin{aligned} \langle w_a, w_b \rangle &= \left\langle \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_{aj} \cdot e_j, \sum_{k=1}^{n} c_{bk} \cdot e_k \right\rangle = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{aj} \cdot c_{bk} \cdot \langle e_j, e_k \rangle \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{aj} \cdot c_{bk} \cdot \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} c_{aj} \cdot c_{bj}, \end{aligned}$$

unde δ_{jk}, $j, k \in \overline{1, n}$, sunt simbolii lui Kronecker. Dar şi baza $\mathcal{B}'$ este ortonormată, deci

$$\langle w_a, w_b \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_{aj} \cdot c_{bj} = \delta_{ab}, \quad \forall a, b = \overline{1, n},$$

ceea ce înseamnă că matricea C este ortogonală. □

2.1. Spaţiul euclidian raportat la o bază ortonormată. Fie spaţiul euclidian n-dimensional $(V, \langle , \rangle)$ şi baza ortonormată $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ în acest spaţiu. Considerăm vectorii

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \in V \text{ şi } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j \in V.$$

Atunci, expresia produsului scalar devine

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j \right\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i. \end{aligned}$$

Norma euclidiană este

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

iar distanţa corespunzătoare

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

În final, unghiul φ, făcut de vectorii x şi y, este dat de

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)\cdot\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)}.$$

Se observă că atunci când raportăm un spaţiu euclidian la o bază ortonormată expresiile produsului scalar, a normei euclidiene şi a distanţei au aceeaşi formă cu cele similare obţinute în cazul produsului scalar uzual din $\mathbb{R}^n$.

3. Subspaţii liniare ortogonale ale unui spaţiu euclidian

Definiţia 5.8. Fie subspaţiile liniare $V_1 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ şi $V_2 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ ale unui spaţiu euclidian $(V, \langle,\rangle)$. Spunem că V_1 şi V_2 sunt subspaţii ortogonale şi scriem $V_1 \perp V_2$ dacă orice vector din V_1 este ortogonal pe orice vector din V_2.

Exemplul 5.9. Fie baza ortonormată $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ într-un spaţiu euclidian $(V, \langle,\rangle)$. Considerăm subspaţiile liniare $V_1 = L[S_1] \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ şi $V_2 = L[S_2] \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$, unde $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ şi $S_2 = \{v_{p+1}, v_{p+2}, \ldots, v_n\}$ cu $p < n$.

Considerăm vectorii oarecare $x \in V_1$ şi $y \in V_2$. Rezultă că există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p$ şi $y = \alpha_{p+1} \cdot v_{p+1} + \alpha_{p+2} \cdot v_{p+2} + \ldots + \alpha_n \cdot v_n$. Atunci

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot v_i, \sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j \cdot v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n} \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \langle v_i, v_j\rangle = 0,$$

adică V_1 şi V_2 sunt subspaţii ortogonale.

Definiţia 5.9. Spunem că un vector v dintr-un spaţiu euclidian V este ortogonal pe un subspaţiu liniar $V_0 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ dacă v este perpendicular pe toţi vectorii din V_0. Notăm acest fapt prin $v \perp V_0$.

Propoziţia 5.12. *Două subspaţii liniare V_1 şi V_2 ale unui spaţiu euclidian $(V, \langle,\rangle)$ sunt ortogonale dacă şi numai dacă vectorii dintr-o bază din V_1 sunt ortogonali pe vectorii dintr-o bază din V_2.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Dacă subspaţiile liniare V_1 şi V_2 sunt ortogonale atunci fiecare vector din V_1 este ortogonal pe fiecare vector din V_2. Prin urmare această proprietate o au şi vectorii din orice două baze câte una din fiecare spaţiu.

"$\Leftarrow$" Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ o bază în subspaţiul liniar V_1 şi $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ o bază în subspaţiul liniar V_2 astfel încât $v_i \perp w_j$ pentru orice $i = \overline{1,p}$ şi orice $j = \overline{1,r}$. Considerăm vectorii $x = \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot v_i \in V_1$ şi $y = \sum_{j=1}^{r} y_j \cdot w_j \in V_2$. Atunci, avem

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^{r} y_j \cdot w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r} x_i \cdot y_j \cdot \langle v_i, w_j\rangle = 0,$$

adică $x \perp y$ pentru orice $x \in V_1$, $y \in V_2$, ceea ce înseamnă $V_1 \perp V_2$. $\square$

Avem următorul rezultat care se demonstrează prin verificare directă.

Propoziţia 5.13. *Fie subspaţiul liniar* $V_0 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ *al spaţiului euclidian* $(V, \langle , \rangle)$ *şi notăm* $V_0^{\perp} = \{x \in V \mid x \perp V_0\}$. *Atunci* $V_0^{\perp}$ *este un subspaţiu liniar al spaţiului euclidian* V*, numit complementul ortogonal al lui* V_0 *în* V *sau subspaţiul liniar normal al lui* V_0 *în* V.

Teorema 5.14. *Fie* $V_0 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ *un subspaţiu liniar al spaţiului euclidian n-dimensional* $(V, \langle , \rangle)$ *şi fie* $V_0^{\perp}$ *subspaţiul liniar normal al lui* V_0 *în* V. *Atunci* $\dim V_0 + \dim V_0^{\perp} = \dim V = n$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în spaţiul euclidian V astfel încât $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este o bază în V_0. Vom demonstra că $\mathcal{B}'' = \{v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ este o bază în $V_0^{\perp}$.

Dacă $x \in V$ este un vector nenul din subspaţiul liniar $V_0^{\perp}$ atunci $x \perp V_0$ şi, cum $\mathcal{B}$ este o bază în V, rezultă

$$x = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_p \cdot v_p + x_{p+1} \cdot v_{p+1} + \ldots + x_n \cdot v_n \perp y,\ \forall y \in V_0,$$

adică

$$x_1 \cdot \langle v_1, y\rangle + \ldots + x_p \cdot \langle v_p, y\rangle + x_{p+1} \cdot \langle v_{p+1}, y\rangle + \ldots + x_n \cdot \langle v_n, y\rangle = 0,\ \forall y \in V_0,$$

şi, din definiţia lui $V_0^{\perp}$, avem

$$x_{p+1} \cdot \langle v_{p+1}, y\rangle + \ldots + x_n \cdot \langle v_n, y\rangle = 0,\ \forall y \in V_0.$$

Luând pe rând $y = v_1,\ y = v_2, \ldots, y = v_p$ în relaţia de mai sus, rezultă $x_1 = \ldots = x_p = 0$. De aici obţinem $x = x_{p+1} \cdot v_{p+1} + \ldots + x_n \cdot v_n$, oricare ar fi vectorul $x \in V_0^{\perp}$. Prin urmare sistemul de vectori $\mathcal{B}'' = \{v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ este un sistem de generatori pentru $V_0^{\perp}$ şi, cum este şi liniar independent, urmează că $\mathcal{B}''$ este o bază în $V_0^{\perp}$. Astfel $\dim V_0^{\perp} = n - p$ şi $\dim V_0 + \dim V_0^{\perp} = p + n - p = n$. $\square$

În finalul acestui paragraf vom studia o problemă cu un pronunţat caracter geometric: proiecţia unui vector pe un subspaţiu liniar al unui spaţiu euclidian.

Mai întâi vom demonstra următoarea propoziţie.

Propoziţia 5.15. *Un vector dintr-un spaţiu euclidian este ortogonal pe un subspaţiu liniar al acestui spaţiu dacă şi numai dacă este ortogonal pe toţi vectorii unei baze din subspaţiul liniar.*

Demonstraţie. Fie spaţiul euclidian $(V, \langle , \rangle)$, subspaţiul său liniar p-dimensional V_0 şi fie baza $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.

"$\Rightarrow$" Este evident că un vector $y \perp V_0$, fiind ortogonal pe orice vector din V_0 va fi ortogonal şi pe vectorii din baza $\mathcal{B}$.

"$\Leftarrow$" Considerăm vectorul $y \in V$ astfel încât $y \perp v_i$, pentru orice $v_i \in \mathcal{B}$. Presupunând că în baza $\mathcal{B}$ un vector oarecare $x \in V_0$ se scrie $x = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_p \cdot v_p$, obţinem

$$\begin{aligned} \langle y, x\rangle &= \langle y, x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_p \cdot v_p\rangle \\ &= x_1 \cdot \langle y, v_1\rangle + x_2 \cdot \langle y, v_2\rangle + \ldots + x_p \cdot \langle y, v_p\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Astfel, rezultă că y este ortogonal pe orice vector $x \in V_0$ şi, prin urmare, y este ortogonal pe subspaţiul V_0. $\square$

DEFINIŢIA 5.10. Fie subspaţiul liniar V_0 al spaţiului euclidian $(V, \langle , \rangle)$ şi vectorul $y \in V$ astfel încât $y \notin V_0$. Atunci vectorul $y_0 \in V_0$ cu propritatea că $y - y_0$ este ortogonal pe V_0 se numeşte *proiecţia ortogonală* a vectorului y pe subspaţiul liniar V_0.

PROPOZIŢIA 5.16. *Proiecţia ortogonală a unui vector dintr-un spaţiu euclidian pe un subspaţiu liniar care nu conţine vectorul considerat există şi este unică.*

DEMONSTRAŢIE. Considerăm spaţiul euclidian $(V, \langle , \rangle)$, subspaţiul liniar $V_0 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ şi baza $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ în V_0. Deasemeni considerăm vectorul $y \in V$ astfel încât $y \notin V_0$.

Acum, căutăm vectorul $y_0 \in V_0$ cu $y - y_0 \perp V_0$. Aşa cum am văzut anterior, va fi suficient ca $y - y_0 \perp v_i$, $i = \overline{1,p}$. Deoarece $y_0 \in V_0$ urmează că vectorul y_0 se scrie

$$y_0 = y_0^1 \cdot v_1 + y_0^2 \cdot v_2 + \ldots + y_0^p \cdot v_p$$

în baza $\mathcal{B}$. Avem sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \langle y - y_0, v_1 \rangle = 0 \\ \langle y - y_0, v_2 \rangle = 0 \\ \ldots \\ \langle y - y_0, v_p \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle v_1, v_1 \rangle \cdot y_0^1 + \ldots + \langle v_p, v_1 \rangle \cdot y_0^p = \langle y, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle \cdot y_0^1 + \ldots + \langle v_p, v_2 \rangle \cdot y_0^p = \langle y, v_2 \rangle \\ \ldots \\ \langle v_1, v_p \rangle \cdot y_0^1 + \ldots + \langle v_p, v_p \rangle \cdot y_0^p = \langle y, v_p \rangle \end{cases}.$$

Matricea sistemului are determinantul

$$G_p = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_p, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \ldots & \langle v_p, v_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle v_1, v_p \rangle & \langle v_2, v_p \rangle & \ldots & \langle v_p, v_p \rangle \end{vmatrix},$$

care este determinantul Gram al bazei $\mathcal{B}$ şi, în consecinţă $G_p \neq 0$. Astfel, sistemul de mai sus este un sistem de tip Cramer, adică există şi este unică o soluţie a sa ale cărei componente sunt coordonatele vectorului y_0 în baza $\mathcal{B}$.

Mai mult, dacă $\mathcal{B}$ este o bază ortonormată, atunci rezultă imediat $y_0^i = \langle y, v_i \rangle$, $i = \overline{1,p}$, adică $y_0 = \sum_{i=1}^{p} \langle y, v_i \rangle \cdot v_i$. $\square$

PROPOZIŢIA 5.17. *Fie spaţiul euclidian $(V, \langle , \rangle)$ şi fie $d : V \times V \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$, metrica provenită din norma euclidiană pe V. Atunci proiecţia ortogonală y_0 a unui vector $y \in V$ pe un subspaţiu liniar $V_0 \underset{s.s.l.}{\subseteq} V$ realizează minimul distanţei de la y la orice vector $x \in V_0$, adică*

$$\|y - y_0\| \leq \|y - x\|, \quad \forall x \in V_0,$$

cu egalitate doar pentru $x = y_0$.

Demonstraţie. Dacă avem vectorul $x \in V_0$ atunci şi simetricul lui în raport cu adunarea este conţinut în acelaşi subspaţiu, adică $-x \in V_0$. Vectorul y_0 fiind proiecţia ortogonală a lui y pe subspaţiul V_0 rezultă că $y - y_0 \perp y_0 - x$. Atunci, din teorema lui Pitagora, obţinem

$$\|y - x\|^2 = \|y - y_0 + y_0 - x\|^2 = \|y - y_0\|^2 + \|y_0 - x\|^2$$

de unde rezultă $\|y - x\|^2 \geq \|y - y_0\|^2$ cu egalitate doar în cazul $x = y_0$. $\square$

Exemplul 5.10. Să se determine proiecţia ortogonală a vectorului $y = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ pe subspaţiul V_0 generat de vectorii $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, -1, 1)$.

Se verifică uşor că sistemul de vectori $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ este liniar independent şi, prin urmare, o bază în subspaţiul liniar V_0.

În continuare verificăm $y \notin V_0$. Presupunem că $y \in V_0$. Rezultă că există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$. În acest caz α_1, α_2 verifică sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \alpha_1 & + & 2 \cdot \alpha_2 & = & 1 \\ & & -\alpha_2 & = & -1 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 2 \end{cases}.$$

Se arată uşor că rangul matricei sistemului este 2 iar cel al matricei extinse este 3. Prin urmare sistemul este incompatibil şi astfel $y \notin V_0$.

Căutăm $y_0 = y_0^1 \cdot v_1 + y_0^2 \cdot v_2 \in V_0$ astfel încât $y - y_0 \perp V_0$. Rezultă

$$\begin{cases} y - y_0 \perp v_1 \\ y - y_0 \perp v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle y - y_0, v_1 \rangle = 0 \\ \langle y - y_0, v_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0^1 \cdot \langle v_1, v_1 \rangle & + & y_0^2 \cdot \langle v_2, v_1 \rangle & = & \langle v, v_1 \rangle \\ y_0^1 \cdot \langle v_1, v_2 \rangle & + & y_0^2 \cdot \langle v_2, v_2 \rangle & = & \langle v, v_2 \rangle \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot y_0^1 & + & 3 \cdot y_0^2 & = & 3 \\ 3 \cdot y_0^1 & + & 6 \cdot y_0^2 & = & 5 \end{cases}.$$

Determinantul matricei sistemului este $G = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Astfel sistemul este de tip Cramer şi are soluţia unică $y_0^1 = 1, y_0^2 = \frac{1}{3}$. În sfârşit, $y_0 = v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Exemplul 5.11. În spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ considerăm subspaţiile liniare

$$V_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_3, x_2 = 0\}$$

şi

$$V_2 = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{-1}\right\}.$$

Vom determina subspaţiul liniar $V_3 \underset{s.s.l.}{\subseteq} \mathbb{R}^3$, ortogonal pe V_1 şi pe V_2, astfel încât $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \mathbb{R}^3$ şi $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, 3}$.

Avem $V_1 = \{x = (\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ şi $V_2 = \{x = (\beta, 3 \cdot \beta, -\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$ sunt subspaţii de dimensiune 1 în $\mathbb{R}^3$ (sunt drepte în spaţiul euclidian geometric). O bază în V_1 este $\mathcal{B}_1 = \{v_1 = (1, 0, 1)\}$, iar în V_2 este $\mathcal{B}_2 = \{v_2 = (1, 3, -1)\}$.

Căutăm vectorii $y = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} y \perp v_1 \\ y \perp v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle y, v_1 \rangle = 0 \\ \langle y, v_2 \rangle = 0 \end{cases}.$$

Obţinem cu uşurinţă $y = (-3 \cdot \gamma, 2 \cdot \gamma, 3 \cdot \gamma)$, cu $\gamma \in \mathbb{R}$. Rezultă

$$V_3 = \{y = (-3 \cdot \gamma, 2 \cdot \gamma, 3 \cdot \gamma) | \gamma \in \mathbb{R}\} \underset{s.s.l.}{\subseteq} \mathbb{R}^3,$$

iar o bază în acest subspaţiu liniar este $\mathcal{B}_3 = \{v_3 = (-3, 2, 3)\}$ (subspaţiul liniar V_3 este tot o dreaptă, perpendiculară pe V_1 şi pe V_2).
Am obţinut în plus şi faptul că $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ este un sistem de vectori liniar independent şi, astfel, o bază în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ ceea ce înseamnă că $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \mathbb{R}^3$ şi $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, 3}$.

4. Aplicaţii liniare pe spaţii euclidiene

În această secţiune vom vedea ce proprietăţi suplimentare faţă de cele deja cunoscute pot avea aplicaţiile liniare atunci când domeniul şi codomeniul lor sunt spaţii euclidiene.

Vom folosi spaţiile euclidiene $(V, \langle , \rangle)$ şi $(W, \langle , \rangle)$, cu $\dim V = n < \infty$ şi $\dim W = m < \infty$. Evident cele două produse scalare folosite sunt diferite, dar, pentru simplificarea scrierii, le vom nota la fel, indiferent de spaţiul pe care sunt definite.

Definiţia 5.11. O aplicaţie liniară $f : V \to W$ între două spaţii euclidiene se numeşte *ortogonală* dacă

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Propoziţia 5.18. *O aplicaţie liniară $f : V \to W$ între două spaţii euclidiene este ortogonală dacă şi numai dacă*

$$\|f(x)\| = \|x\|, \quad \forall x \in V,$$

unde normele folosite sunt normele euclidiene pe spaţiile V şi respectiv W.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Dacă aplicaţia liniară este ortogonală atunci

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$$

pentru orice vector $x \in V$.

"$\Leftarrow$" Fie aplicaţia liniară $f : V \to W$ pentru care $\|f(x)\| = \|x\|$ pentru orice vector $x \in V$. Atunci, pentru doi vectori oarecare $x, y \in V$, avem

$$\|f(x + y)\| = \|x + y\| \Rightarrow \langle f(x + y), f(x + y) \rangle = \langle x + y, x + y \rangle,$$

adică

$$\langle f(x), f(x) \rangle + 2 \cdot \langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$
$$\Rightarrow \|f(x)\|^2 + 2 \cdot \langle f(x), f(y) \rangle + \|f(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

de unde

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Astfel f este o aplicaţie liniară ortogonală. $\square$

Din propoziţia anterioară obţinem imediat următorul rezultat.

PROPOZIŢIA 5.19. *O aplicaţie liniară ortogonală între două spaţii euclidiene păstrează unghiul a doi vectori.*

DEMONSTRAŢIE. Fie aplicaţia liniară ortogonală $f : V \to W$ şi vectorii nenuli $x, y \in V$. Atunci vectorii $f(x), f(y) \in W$ sunt nenuli şi avem

$$\cos(\widehat{f(x), f(y)}) = \frac{\langle f(x), f(y)\rangle}{\|f(x)\| \cdot \|f(y)\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos(\widehat{x, y}).$$

□

DEFINIŢIA 5.12. O aplicaţie liniară $f : V \to W$ între două spaţii euclidiene se numeşte *izometrie* dacă păstrează distanţa dintre doi vectori, adică,

$$d_W(f(x), f(y)) = d_V(x, y), \quad x, y \in V,$$

unde $d_V : V \times V \to \mathbb{R}$ şi $d_W : W \times W \to \mathbb{R}$ sunt două metrici pe spaţiile V şi respectiv W.

Dacă pe cele două spaţii euclidiene considerăm metricile provenite din normele euclidiene obţinem imediat următorul rezultat.

PROPOZIŢIA 5.20. *O aplicaţie liniară ortogonală este o izometrie.*

PROPOZIŢIA 5.21. *O aplicaţie liniară ortogonală $f : V \to W$ între două spaţii euclidiene este injectivă.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $f(x) = \theta_W$, unde θ_W este vectorul nul din spaţiul euclidian W, atunci, din $\|f(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in V$, rezultă $\|f(x)\| = \|x\| = 0$, adică $x = \theta_V$, unde θ_V este vectorul nul din spaţiul euclidian V. Am obţinut $\operatorname{Ker} f = \{\theta_V\}$ şi, astfel, f este o aplicaţie injectivă. □

PROPOZIŢIA 5.22. *O aplicaţie liniară $f : V \to V$, cu $\dim V = n$, este ortogonală dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază ortonormată este ortogonală.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază ortonormată în spaţiul euclidian V şi fie $A = (a_{ij})_{i,\,j\,=\,\overline{1,\,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea aplicaţiei liniare f în această bază.

"$\Rightarrow$" Dacă f este o aplicaţie liniară ortogonală atunci $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle$, $i, j = \overline{1, n}$, ceea ce implică faptul că $\mathcal{B}' = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ este o bază ortonormată în V. Pentru orice $i, j = \overline{1, n}$ avem

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle \textstyle\sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot v_k, \sum_{l=1}^n a_{lj} \cdot v_l\rangle \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} \cdot a_{lj} \cdot \langle v_k, v_l\rangle \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot a_{kj}, \end{aligned}$$

adică A este o matrice ortogonală.

"$\Leftarrow$" Presupunem că matricea A a aplicaţiei liniare f este o matrice ortogonală. În continuare avem $f(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot v_k$, $\forall i = \overline{1,n}$. Rezultă

$$\begin{aligned}
\langle f(v_i), f(v_j)\rangle &= \Big\langle \textstyle\sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot v_k, \sum_{l=1}^n a_{lj} \cdot v_l \Big\rangle \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} \cdot a_{lj} \cdot \langle v_k, v_l\rangle \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} \cdot a_{lj} \cdot \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} \cdot a_{kj} \\
&= \delta_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle
\end{aligned}$$

pentru orice $i, j = \overline{1,n}$. Acum fie vectorii oarecare $x = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_n \cdot v_n \in V$ şi $y = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \ldots + y_n \cdot v_n \in V$. Avem

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle &= \Big\langle f\Big(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i\Big), f\Big(\sum_{j=1}^n y_j \cdot v_j\Big)\Big\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot y_j \langle f(v_i), f(v_j)\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot y_j \langle v_i, v_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^n y_j \cdot v_j\rangle \\
&= \langle x, y\rangle,
\end{aligned}$$

adică aplicaţia liniară f este ortogonală. $\square$

Exemplul 5.12. Se verifică uşor că aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$f(x) = \Big(\frac{2}{3} \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 - \frac{1}{3} \cdot x_3, \frac{2}{3} \cdot x_1 - \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{2}{3} \cdot x_3, -\frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 + \frac{2}{3} \cdot x_3\Big).$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, iar produsul scalar considerat în $\mathbb{R}^3$ este cel uzual, este ortogonală. Matricea acestei aplicaţii este $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Se arată şi că $A \times A^t = I_3$, adică, $A \in GO(3, \mathbb{R})$.

O altă clasă importantă de aplicaţii liniare definite pe spaţii euclidiene o reprezintă clasa aplicaţiilor liniare autoadjuncte.

Definiţia 5.13. O aplicaţie liniară $f : V \to V$, unde $(V, \langle,\rangle)$ este un spaţiu euclidian finit dimensional, se numeşte *autoadjunctă* dacă

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Propoziţia 5.23. *O aplicaţie liniară $f : V \to V$ este autoadjunctă dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază ortonormată este simetrică.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază ortonormată în spaţiul euclidian n-dimensional $(V, \langle,\rangle)$ şi fie vectorii $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}} \in V$.

"$\Rightarrow$" Dacă $f : V \to V$ este o aplicaţie liniară autoadjunctă atunci

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \Leftrightarrow \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(v_i), \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot f(v_j) \Big\rangle,$$

adică,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot \langle f(v_i), v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot \langle v_i, f(v_j)\rangle. \tag{5.1}$$

Dacă matricea lui f este $A = (a_{ij})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci

$$f(v_k) = \sum_{l=1}^{n} a_{lk} \cdot v_l, \quad \forall k = \overline{1, n},$$

şi

$$\langle f(v_i), v_j\rangle = \sum_{l=1}^{n} a_{li} \cdot \langle v_l, v_j\rangle = \sum_{l=1}^{n} a_{li} \cdot \delta_{lj} = a_{ji},$$
$$\langle v_i, f(v_j)\rangle = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \cdot \langle v_i, v_l\rangle = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \cdot \delta_{il} = a_{ij},$$

pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$.
Înlocuind în (5.1), obţinem

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i \cdot y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j.$$

Cum această relaţie este adevărată pentru orice doi vectori $x, y \in V$ urmează că $a_{ij} = a_{ji}$ oricare ar fi $i, j = \overline{1, n}$. În concluzie matricea A a aplicaţiei liniare autoadjuncte f este simetrică.

"$\Leftarrow$" Fie aplicaţia liniară $f : V \to V$ a cărei matrice $A = (a_{ij})_{i,\, j\, =\, \overline{1,\, n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este simetrică. Atunci, la fel ca mai sus, avem

$$\begin{aligned} \langle f(x), y\rangle &= \Big\langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(v_i), \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j \Big\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot \langle f(v_i), v_j\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i \cdot y_j \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} \langle x, f(y)\rangle &= \Big\langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot f(v_j) \Big\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot \langle v_i, f(v_j)\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i \cdot y_j \\ &= \langle f(x), y\rangle, \end{aligned}$$

pentru orice vectori $x, y \in V$, adică f este o aplicaţie liniară autoadjunctă. $\square$

Propoziţia 5.24. *Fie λ_1 şi λ_2 două valori proprii distincte ale unui operator liniar autoadjunct $f : V \to V$ definit pe un spaţiu euclidian n-dimensional. Atunci orice vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este ortogonal pe orice vector propriu corespunzător lui λ_2.*

Demonstraţie. Fie vectorii proprii ai operatorului liniar f astfel încât $f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$ şi $f(v_2) = \lambda_2 \cdot v_2$. Deoarece f este autoadjunct avem

$$\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle \Rightarrow \langle \lambda_1 \cdot v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 \cdot v_2 \rangle,$$

adică,

$$\lambda_1 \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \cdot \langle v_1, v_2 \rangle$$

de unde, deoarece $\lambda_1 \neq \lambda_2$, rezultă $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, ceea ce înseamnă că v_1 şi v_2 sunt ortogonali. $\square$

Tinând cont de faptul că valorile proprii ale unei matrici simetrice sunt toate de multiplicitate egală cu 1 şi de propoziţia precedentă obţinem ultimul rezultat al acestui paragraf.

Propoziţia 5.25. *În orice spaţiu euclidian există o bază ortonormată formată din vectori proprii ai unui operator liniar autoadjunct definit pe acest spaţiu.*

Exemplul 5.13. Aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, unde pe spaţiul liniar $\mathbb{R}^3$ considerăm produsul scalar uzual, definită prin

$$f(x) = (x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3, 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3, x_1 + x_2), \ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

este autoadjunctă, deoarece matricea sa $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ este, evident, simetrică.

Glosar

Bibliografie

[1] M. Anastasiei şi M. Crâşmăreanu. *Lecţii de geometrie (Curbe şi suprafeţe)*. Editura TehnoPress. Iaşi, 2005.

[2] A. Cărăuşu. *Vector algebra, analytic and differential geometry*. Editura PIM. Iaşi, 2003.

[3] V. Cruceanu. *Elemente de algebră liniară şi geometrie*. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, 1973.

[4] M. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Pretince Hall. 1976.

[5] A. Gray. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press. Boca Raton, Florida, 1999.

[6] R. Miron. *Geometrie analitică*. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, 1976.

[7] S. Montiel şi A. Ros. *Curves and Surfaces*. American Mathematical Society. Real Sociedad Matemática Española. Graduate Studies in Mathematics. Volume 69. Providence, Rhode Island, 2005.

[8] V. Murgescu. *Curs de analiză matematică şi matematici speciale*. Volumul 2. Rotaprint I.P. Iaşi. Iaşi, 1980.

[9] V. Murgescu. *Algebră liniară şi geometrie analitică*. Partea I. Rotaprint I.P. Iaşi. Iaşi, 1980.

[10] A. Neagu. *Geometrie*. Rotaprint Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" din Iaşi. Iaşi, 1996.

[11] C. Niţescu. *Algebre lineaire*. Geometry Balkan Press. Bucureşti, 2000.

[12] C. Oniciuc. *Lecţii de geometria diferenţială a curbelor şi suprafeţelor* (versiune electronică). `www.math.uaic.ro/ oniciucc/dfcs1.pdf`

[13] V. Oproiu. *Geometrie diferenţială*. Editura Universităţii "Al.I. Cuza" Iaşi. Iaşi, 2002.

[14] N. Papaghiuc şi C. Călin. *Algebră liniară şi geometrie*. Editura Performantica. Iaşi, 2003.

[15] D. Papuc. *Geometrie diferenţială*. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, 1982.

[16] A.L. Pletea, A. Corduneanu şi M. Lupan. *Lecţii de algebră liniară*. Editura Politehnium. Iaşi, 2005.

[17] I. Pop şi Gh. Neagu. *Algebră liniară şi geometrie analitică în plan şi în spaţiu*. Editura Plumb. Bacău, 1996.

[18] C. Popovici. *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială. Utilizare MATLAB*. Editura Politehnium. Iaşi, 2008.

[19] A. Precupanu. *Bazele analizei matematice*. Editura Canova. Iaşi, 1995.

[20] G. Teodoru. *Algebră liniară şi geometrie analitică*. Partea a II-a. Rotaprint I.P. Iaşi. Iaşi, 1980.

[21] G. Teodoru şi D. Fetcu. *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială. Culegere de probleme*. Rotaprint Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi. Iaşi, 2004.

[22] C. Udrişte. *Algebră liniară. Geometrie analitică*. Geometry Balkan Press. Bucureşti, 1996.