ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ

Dorel Fetcu

Acest curs este un fragment din manualul

• D. Fetcu, **Elemente de algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială**, Casa Editorială Demiurg, Iaşi 2009, 340 pp.

Cuprins

CAPITOLUL 1

SPAŢIUL LINIAR AL VECTORILOR LIBERI

În acest capitol vom vedea cum multe noţiuni şi rezultate geometrice pot fi reformulate şi studiate în cadrul şi cu metodele specifice algebrei liniare. Vom face astfel trecerea de la capitolele dedicate algebrei liniare la cele rezervate geometriei analitice.

De acum înainte vom nota cu $\mathbb{E}^3$ spaţiul fizic al geometriei elementare şi cu A, B, etc., punctele din acest spaţiu.

1. Segmente orientate. Vectori liberi

Definiţia 1.1. O pereche ordonată de puncte $(A, B) \in \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$ se numeşte *segment orientat* şi se notează $\overrightarrow{AB}$. Punctul A se numeşte *originea* segmentului orientat, iar punctul B *vârful* său. Segmentul $\overrightarrow{AA}$ se numeşte *segmentul orientat nul*.

Observaţia 1.1. Un segment AB poate avea două sensuri diferite, de la A spre B şi respectiv de la B spre A. Notăm acest lucru prin $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Vectorul nul are sensul nedeterminat.

Definiţia 1.2. *Direcţia* unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$ este direcţia dreptei sale suport, iar *lungimea* sa este distanţa dintre punctele A şi B şi se notează cu $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Observaţia 1.2. Segmentul orientat nul are direcţia nedeterminată şi lungime egală cu 0.

Definiţia 1.3. Spunem că două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au acelaşi sens dacă au aceeaşi direcţie şi punctele B şi D se găsesc de aceeaşi parte a dreptei (AC).

Definiţia 1.4. Două segmente orientate se numesc *echipolente* dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime. Faptul că două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt echipolente se notează $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Propoziţia 1.1. *Relaţia de echipolenţă a segmentelor orientate este o relaţie de echivalenţă.*

Demonstraţie. Vom demonstra că relaţia de echipolenţă are proprietăţile care definesc o relaţie de echivalenţă, adică este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.
Reflexivitatea. Este clar că orice segment orientat este echipolent cu el însuşi, ceea ce înseamnă că relaţia de echipolenţă este reflexivă.

Simetria. Dacă avem $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ atunci, evident, avem şi $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, adică relaţia de echipolenţă este simetrică.
Tranzitivitatea. Fie segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{EF}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. Atunci cei trei vectori au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime. Prin urmare $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ şi relaţia de echipolenţă este tranzitivă. □

Definiţia 1.5. Clasa de echivalenţă a unui segment orientat în raport cu relaţia de echipolenţă se numeşte *vector liber*. Mulţimea tuturor vectorilor liberi se notează $\mathbb{V}^3$.

Observaţia 1.3. Vectorii liberi vor fi notaţi $\bar{a}$, $\bar{b}$, etc. Astfel pentru un segment orientat nenul $\overrightarrow{AB}$ avem

$$\bar{a} = \mathcal{C}_{\overrightarrow{AB}} = \{\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}.$$

Clasa de echivalenţă a segmentului orientat nul se numeşte vectorul nul şi se notează

$$\bar{0} = \mathcal{C}_{\overrightarrow{AA}} = \{\overrightarrow{BB} \mid B \in \mathbb{E}^3\}.$$

Observaţia 1.4. Deoarece un vector liber este o clasă de echivalenţă el poate fi reprezentat (inclusiv grafic) prin orice segment orientat din această clasă de echivalenţă.

Definiţia 1.6. Prin direcţia, sensul şi lungimea unui vector liber $\bar{v}$ înţelegem direcţia, sensul şi respectiv lungimea comune tuturor segmentelor orientate care îi apaţin lui $\bar{v}$.

Observaţia 1.5. Lungimea unui vector liber $\bar{a}$ se notează $\|\bar{a}\|$. Lungimea vectorului nul $\bar{0}$ este $\|\bar{0}\| = 0$.

Definiţia 1.7. Doi vectori liberi sunt egali dacă au aceeaşi direcţie, sens şi lungime.

Propoziţia 1.2. *Dacă $\bar{v}$ este un vector liber nenul şi $A \in \mathbb{E}^3$ un punct oarecare atunci există şi este unic punctul $B \in \mathbb{E}^3$ astfel încât segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ să aparţină lui $\bar{v}$. Spunem că vectorul liber $\bar{v}$ se aplică în punctul A.*

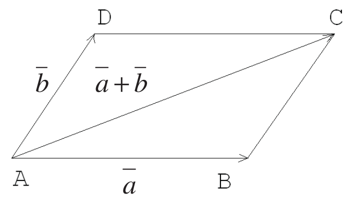
Demonstraţie. Considerăm o dreaptă (d) care este paralelă cu direcţia vectorului liber $\bar{v}$ şi astfel încât $A \in (d)$. Pe dreapta (d) alegem punctul B astfel încât segmentul $\overrightarrow{AB}$ să aibă acelaşi sens şi aceeaşi lungime cu $\bar{v}$. Este evident, din aceste condiţii, că punctul B există şi este unic. □

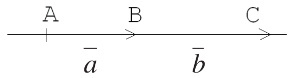
Definiţia 1.8. Doi vectori liberi se numesc *coliniari* dacă au aceeaşi direcţie. În caz contrar se numesc *necoliniari*. Trei vectori liberi se numesc *coplanari* dacă direcţiile lor sunt paralele cu un acelaşi plan. În caz contrar se numesc *necoplanari*.

Observaţia 1.6. Faptul că doi vectori liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt coliniari se notează $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Definiţia 1.9. (Regula paralelogramului de adunare a doi vectori liberi)

Considerăm vectorii liberi necoliniari $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V}^3$ cu reprezentanţii $\overrightarrow{AB}$ şi respectiv $\overrightarrow{AD}$, şi construim paralelogramul $ABCD$. Atunci suma celor doi vectori liberi, notată $\bar{a}+\bar{b}$, este vectorul liber al cărui reprezentat este segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$. Dacă $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt doi vectori liberi coliniari cu reprezentanţii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ atunci suma lor este vectorul liber al cărui reprezentant este segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$.

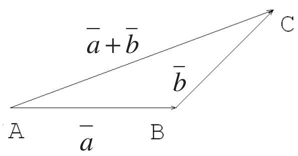




Este evident că regula anterioară este echivalentă cu următoarea.

Definiţia 1.10. (Regula triunghiului de adunare a doi vectori liberi)

Considerăm vectorii liberi $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V}^3$, cu reprezentanţii $\overrightarrow{AB}$ şi respectiv $\overrightarrow{BC}$. Atunci suma celor doi vectori liberi este vectorul liber al cărui reprezentat este segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$.



Observaţia 1.7. Din cele două reguli de adunare echivalente rezultă că dacă vectorii liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt coliniari atunci, dacă au acelaşi sens avem $\|\bar{a}+\bar{b}\| = \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$, iar dacă au sensuri opuse avem $\|\bar{a}+\bar{b}\| = |\|\bar{a}\| - \|\bar{b}\||$.

Definiţia 1.11. (Înmulţirea unui vector liber cu un scalar)

Fie vectorul liber $\bar{v}$ şi scalarul real $\alpha \in \mathbb{R}$. Definim vectorul liber $\bar{w} = \alpha \cdot \bar{v}$ astfel:

- *direcţia* lui $\bar{w}$ este aceeaşi cu direcţia lui $\bar{v}$ dacă $\alpha \neq 0$ şi $\bar{v} \neq \bar{0}$, şi nedeterminată dacă $\alpha = 0$ sau $\bar{v} = \bar{0}$;
- *sensul* lui $\bar{w}$ este acelaşi cu sensul lui $\bar{v}$ dacă $\alpha > 0$ şi $\bar{v} \neq \bar{0}$, opus sensului lui $\bar{v}$ dacă $\alpha < 0$ şi $\bar{v} \neq \bar{0}$ şi nedeterminat dacă $\alpha = 0$ sau $\bar{v} = \bar{0}$;
- *lungimea* lui $\bar{w}$ este $\|\bar{w}\| = \|\alpha \cdot \bar{v}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$.

Folosind una din cele două reguli de adunare a vectorilor liberi şi definiţia înmulţirii unui vector liber cu un scalar obţinem imediat următorul rezultat, a cărui demonstraţie o lăsăm cititorului.

TEOREMA 1.3. $(\mathbb{V}^3, +, \cdot)$ *este un spaţiu liniar real, numit* ***spaţiul liniar al vectorilor liberi****.*

Pentru a determina dimensiunea acestui spaţiu liniar vom demonstra mai întâi următoarea teoremă.

TEOREMA 1.4. *În spaţiul liniar al vectorilor liberi avem:*

(1) *Doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi.*
(2) *Trei vectori liberi sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi.*
(3) *Patru vectori liberi sunt liniar depedenţi.*

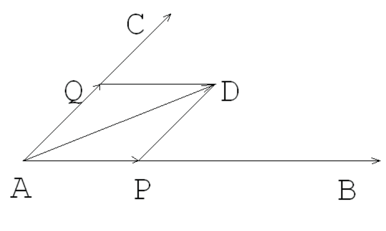
DEMONSTRAŢIE. (1) "$\Rightarrow$" Fie vectorii liberi coliniari $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Dacă unul din cei doi vectori este vectorul nul atunci concluzia este evidentă, aşa că vom presupune că ambii vectori sunt nenuli. Considerăm $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\|\bar{a}\|}{\|\bar{b}\|}, & \text{dacă} \quad \bar{a} \text{ şi } \bar{b} \text{ au acelaşi sens} \\ -\frac{\|\bar{a}\|}{\|\bar{b}\|}, & \text{dacă} \quad \bar{a} \text{ şi } \bar{b} \text{ au sensuri opuse} \end{cases}.$$

Este clar că vectorii liberi $\bar{a}$ şi $\alpha \cdot \bar{b}$ au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime, adică sunt egali. De aici rezultă $\bar{a} + (-\alpha) \cdot \bar{b} = \bar{0}$, adică vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt liniar dependenţi.

"$\Leftarrow$" Fie vectorii liberi liniar dependenţi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Dacă unul dintre ei este vectorul nul atunci este clar că vectorii sunt coliniari. Presupunem că ambii vectori sunt nenuli. Atunci, rezultă că există scalarii reali nenuli α şi β astfel încât $\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} = \bar{0}$, adică $\bar{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \bar{b}$. Prin urmare vectorii liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt coliniari.

(2) "$\Rightarrow$" Fie vectorii liberi coplanari $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$. Dacă unul din ei este vectorul nul atunci cei trei vectori vor fi, evident, liniar dependenţi. Presupunem că toţi vectorii liberi consideraţi sunt nenuli. Aplicăm vectorii în acelaşi punct $A \in \mathbb{E}^3$ şi avem $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$, $\bar{b} = \overrightarrow{AC}$ şi $\bar{c} = \overrightarrow{AD}$. Urmează că punctele A, B, C şi D sunt coplanare. Considerăm segmentele orientate $\overrightarrow{AP}$ coliniar cu $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AQ}$ coliniar cu $\overrightarrow{AC}$ astfel încât $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD}$.



Deoarece segmentele orientate $\overrightarrow{AP}$ şi $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniare şi diferite de segmentul orientat nul rezultă că există scalarul real nenul α astfel încât $\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$. Analog rezultă $\overrightarrow{AQ} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, cu $\beta \in \mathbb{R}^*$. Am obţinut

$$\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD},$$

adică,

$$\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + (-1) \cdot \bar{c} = \bar{0}.$$

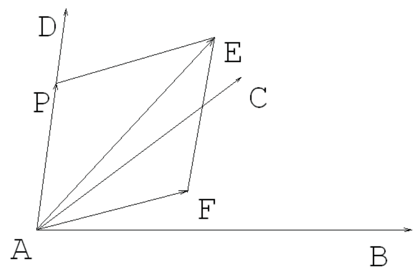
Prin urmare, vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ sunt liniar dependenţi.

"$\Leftarrow$" Fie vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ liniar dependenţi. Dacă unul dintre ei este vectorul nul atunci rezultă că vectorii sunt coplanari. Considerăm că toţi vectorii sunt nenuli. Avem

$$\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} = \bar{0},$$

unde α, β şi γ sunt scalari reali nu toţi nuli. Să presupunem că $\gamma \neq 0$. Atunci $\bar{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \bar{a} + (-\frac{\beta}{\gamma}) \cdot \bar{b}$ şi, conform regulii paralelogramului de adunare a vectorilor liberi, rezultă că $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ sunt coplanari.

(3) Fie vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ şi $\bar{d}$. Dacă unul din acesşti vectori este vectorul nul atunci ei sunt liniar dependenţi deci, în continuare presupunem că toţi sunt nenuli. Dacă trei dintre vectori sunt coplanari atunci, aşa cum am văzut la (2), vectorii sunt liniar dependenţi. Vom presupune că nu avem trei vectori coplanari. Aplicăm vectorii în acelaşi punct $A \in \mathbb{E}^3$ şi vom avea $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$, $\bar{b} = \overrightarrow{AC}$, $\bar{c} = \overrightarrow{AD}$ şi $\bar{d} = \overrightarrow{AE}$. Considerăm vectorul liber $\overrightarrow{AF}$, coplanar cu $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$, astfel încât $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AD}$ şi vectorul liber $\overrightarrow{AP}$ coliniar cu $\overrightarrow{AD}$ astfel încât $\overrightarrow{PE} \parallel \overrightarrow{AF}$. Rezultă $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$.



Avem, conform (2), $\overrightarrow{AF} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi, conform (1), $\overrightarrow{AP} = \gamma \cdot \overrightarrow{AD}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Obţinem

$$\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} + \gamma \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}.$$

Prin urmare cei patru vectori sunt liniar dependenţi. □

Din propoziţia anterioară obţinem imediat următorul rezultat.

TEOREMA 1.5. *Orice trei vectori liberi necoplanari formează o bază în spaţiul liniar al vectorilor liberi.*

COROLARUL 1.6. *Dimensiunea spaţiului liniar* $\mathbb{V}^3$ *al vectorilor liberi este egală cu* 3.

Încheiem această secţiune arătând cum se efectuează cele două operaţii definite până acum în $\mathbb{V}^3$ dacă vectorii liberi sunt exprimaţi într-o bază din $\mathbb{V}^3$.

Fie $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ o bază în $\mathbb{V}^3$ şi vectorii $\bar{a} = a_x \cdot \bar{v}_1 + a_y \cdot \bar{v}_2 + a_z \cdot \bar{v}_3 \in \mathbb{V}^3$ şi $\bar{b} = b_x \cdot \bar{v}_1 + b_y \cdot \bar{v}_2 + b_z \cdot \bar{v}_3 \in \mathbb{V}^3$, unde $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z \in \mathbb{R}$. Atunci avem

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x) \cdot \bar{v}_1 + (a_y + b_y) \cdot \bar{v}_2 + (a_z + b_z) \cdot \bar{v}_3$$

şi

$$\alpha \cdot \bar{a} = (\alpha \cdot a_x) \cdot \bar{v}_1 + (\alpha \cdot a_y) \cdot \bar{v}_2 + (\alpha \cdot a_z) \cdot \bar{v}_3,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplul 1.1. Fie punctele distincte A şi B în spaţiul fizic geometric $\mathbb{E}^3$ şi fie O un punct în spaţiu, pe care îl vom numi *pol de poziţie*. Notăm $\overrightarrow{OA} = \bar{r}_1$ şi $\overrightarrow{OB} = \bar{r}_2$. Considerăm punctul oarecare M din spaţiu.
Atunci punctele A, B şi M sunt coliniare dacă şi numai dacă există numerele reale α şi β, astfel încât $\alpha+\beta = 1$ şi $\bar{r} = \alpha\cdot\bar{r}_1+\beta\cdot\bar{r}_2$, unde $\overrightarrow{OM} = \bar{r}$. Segmentele orientate $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OM}$ se numesc *vectorii de poziţie ai punctelor A, B şi* respectiv M.

Presupunem că $M \in (AB)$. Rezultă că $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ sunt liniar dependenţi, adică există $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ cu $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, astfel încât

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{AM} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AB} = \bar{0}.$$

Deoarece

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \bar{r} - \bar{r}_1$$

şi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1,$$

urmează că

$$\lambda_1 \cdot (\bar{r} - \bar{r}_1) + \lambda_2 \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \bar{r} = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{r}_1 - \lambda_2 \cdot \bar{r}_2.$$

Presupunem prin reducere la absurd că $\lambda_1 = 0$. Rezultă $\lambda_2 \cdot \overrightarrow{AB} = \bar{0}$, deci $A = B$, ceea ce contrazice ipoteza. Astfel $\lambda_1 \neq 0$ şi $\bar{r} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \bar{r}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \bar{r}_2$. Considerăm $\alpha = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1}$ şi $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Avem $\bar{r} = \alpha \cdot \bar{r}_1 + \beta \cdot \bar{r}_2$ şi $\alpha + \beta = 1$.

Reciproc, presupunem că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha + \beta = 1$ şi $\bar{r} = \alpha \cdot \bar{r}_1 + \beta \cdot \bar{r}_2$. Rezultă că $\alpha = 1 - \beta$ şi

$$\bar{r} = (1 - \beta) \cdot \bar{r}_1 + \beta \cdot \bar{r}_2,$$

adică $\overrightarrow{AM} - \beta \cdot \overrightarrow{AB} = \bar{0}$. Rezultă că segmentele orientate $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AB}$ sunt liniar dependente. Astfel punctele A, B şi M sunt coliniare.

Exemplul 1.2. La fel ca în exemplul precedent obţinem următorul rezultat. Fie punctele necoliniare A, B şi C în spaţiu şi considerăm polul de poziţie O. Notăm $\overrightarrow{OA} = \bar{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \bar{r}_2$ şi $\overrightarrow{OC} = \bar{r}_3$. Fie M un punct oarecare din spaţiu.
Atunci punctul M aparţine planului determinat de punctele A, B şi C dacă şi numai dacă există numerele reale α, β şi γ, astfel încât $\alpha + \beta + \gamma = 1$ şi $\bar{r} = \alpha \cdot \bar{r}_1 + \beta \cdot \bar{r}_2 + \gamma \cdot \bar{r}_3$, unde $\overrightarrow{OM} = \bar{r}$.

2. Produse de vectori în spaţiul liniar al vectorilor liberi

2.1. Produsul scalar.

Definiţia 1.12. Fie vectorii liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ cu reprezentanţii $\overrightarrow{AB}$ şi respectiv $\overrightarrow{AC}$. Atunci unghiul dintre cei doi vectori, notat $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$, este unghiul $\widehat{BAC} \in [0,\pi]$.

Propoziţia 1.7. *Aplicaţia* $\cdot : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}), \quad \bar{a},\bar{b}\in\mathbb{V}^3,$$

este un produs scalar în spaţiul liniar al vectorilor liberi, care astfel, împreună cu acest produs, este un spaţiu euclidian.

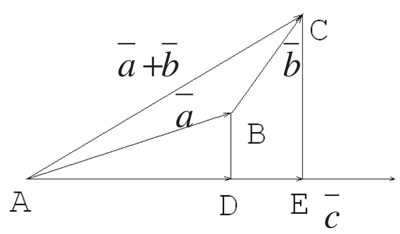
Demonstraţie. Vom verifica cele patru proprietăţi ale produsului scalar. Fie vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ şi scalarul $\lambda\in\mathbb{R}$.
(PS1) Evident $\bar{a}\cdot\bar{a} = \|\bar{a}\|^2 \geq 0$, cu egalitate doar dacă $\|\bar{a}\|^2 = 0$ adică $\bar{a} = \bar{0}$.
(PS2) Este clar că $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$.
(PS3) Avem $(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b} = \|\lambda\cdot\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\cos((\widehat{\lambda\cdot\bar{a}),\bar{b}})$. Dacă $\lambda = 0$ sau $\bar{a} = \bar{0}$ sau $\bar{b} = \bar{0}$ este evident că $(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b}) = 0$. Presupunem $\lambda\neq 0$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{b}\neq\bar{0}$, şi, deoarece $\lambda\cdot\bar{a}$ şi $\bar{a}$ sunt coliniari rezultă imediat

$$((\widehat{\lambda\cdot\bar{a}),\bar{b}}) = \begin{cases} (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) & \text{dacă } \lambda > 0 \\ \pi - (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) & \text{dacă } \lambda < 0 \end{cases} \Rightarrow |\lambda|\cdot\cos((\widehat{\lambda\cdot\bar{a}),\bar{b}}) = \lambda\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}).$$

Atunci

$$\begin{aligned}(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b} &= \|\lambda\cdot\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\cos((\widehat{\lambda\cdot\bar{a}),\bar{b}}) = |\lambda|\cdot\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\cos((\widehat{\lambda\cdot\bar{a}),\bar{b}}) \\ &= \lambda\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b}).\end{aligned}$$

(PS4) Avem $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = \|\bar{a}+\bar{b}\|\cdot\|\bar{c}\|\cdot\cos(\widehat{\bar{a}+\bar{b},\bar{c}})$. Dacă $\bar{c} = \bar{0}$ atunci $(\bar{a}+\bar{c})\cdot\bar{0} = \bar{a}\cdot\bar{0}+\bar{b}\cdot\bar{0} = \bar{0}$. În continuare presupunem $\bar{c}\neq\bar{0}$. Considerăm reprezentanţii $\overrightarrow{AB}$ al lui $\bar{a}$ şi $\overrightarrow{BC}$ al lui $\bar{b}$, aplicăm vectorul liber $\bar{c}$ şi construim triunghiurile dreptunghice $\triangle ABD$ şi $\triangle ACE$ astfel încât $D, E\in(d)$, unde (d) este dreapta suport a lui $\bar{c}$, şi $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = \frac{\pi}{2}$.



Atunci avem

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \|\bar{a}\|\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{c}}), \quad \|\overrightarrow{DE}\| = \|\bar{b}\|\cdot\cos(\widehat{\bar{b},\bar{c}}),\ \overrightarrow{AE} = \|\bar{a}+\bar{b}\|\cdot\cos(\widehat{\bar{a}+\bar{b},\bar{c}})$$

şi

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE},$$

adică

$$\|\bar{a} + \bar{b}\| \cdot \cos(\widehat{\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}}) = \|\bar{a}\| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{c}}) + \|\bar{b}\| \cdot \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{c}})$$

de unde rezultă

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}.$$

□

Observaţia 1.8. Valoarea normei euclidiene $\|\cdot\| : \mathbb{V}^3 \to \mathbb{R}$, $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$, pe spaţiul euclidian al vectorilor liberi este, pentru fiecare vector liber, chiar lungimea sa.

Observaţia 1.9. Ca în orice spaţiu euclidian şi în cazul spaţiului vectorilor liberi doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este egal cu 0, şi notăm $\bar{a} \perp \bar{b}$. Se observă că pentru doi vectori nenuli definiţia aceasta a ortogonalităţii coincide cu cea din geometria sintetică conform căreia două drepte sunt ortogonale (perpendiculare) dacă măsura unghiului dintre ele este egală cu $\frac{\pi}{2}$. În cazul nostru doi vectori nenuli $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{2}$. Ca şi în cazul general, avem $\bar{0} \cdot \bar{a} = 0$, $\forall \bar{a} \in \mathbb{V}^3$.

Deoarece spaţiul liniar al vectorilor liberi $\mathbb{V}^3$ poate fi gândit ca un spaţiu euclidian atunci în acest spaţiu putem considera baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, adică $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k} \perp \bar{i}$ şi $\|\bar{i}\| = \|\bar{j}\| = \|\bar{k}\| = 1$. De acum înainte vom folosi această bază pentru a studia diverse probleme în spaţiul $\mathbb{V}^3$. Dacă efectuăm toate produsele scalare între vectorii bazei $\mathcal{B}$ rezultatele pot fi sintetizate în următorul tabel

$\cdot$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

De aici se obţine uşor următoarea propoziţie.

Propoziţia 1.8. (Expresia analitică a produsului scalar)
Fie vectorii liberi $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ *şi* $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$. *Atunci avem*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Observaţia 1.10. Lungimea vectorului liber $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ este

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

iar cosinusul unghiului dintre vectorul $\bar{a}$ şi vectorul $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$ este

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

În continuare considerăm vectorul liber nenul $\bar{u} \in \mathbb{V}^3$. Aşa cum am văzut în capitolul dedicat studiului spaţiilor euclidiene avem următorul rezultat.

PROPOZIŢIA 1.9. *Mulţimea* $\bar{u}^\perp = \{\bar{v} \in \mathbb{V}^3 \mid \bar{v} \perp \bar{u}\}$ *este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar al vectorilor liberi.*

PROPOZIŢIA 1.10. *Orice vector liber* $\bar{v} \in \mathbb{V}^3$ *se poate scrie în mod unic*

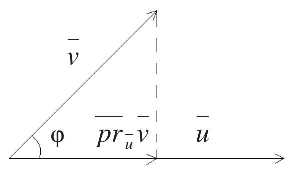
$$\bar{v} = \alpha \cdot \bar{u} + \bar{w}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ w \in \bar{u}^\perp.$$

DEMONSTRAŢIE. Deoarece vectorul liber $\bar{u}$ este nenul atunci există o bază ortogonală $\mathcal{B} = \{\bar{u}, \bar{w}_1, \bar{w}_2\}$ în $\mathbb{V}^3$. Evident, vectorii $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in \bar{u}^\perp$ formează o bază ortogonală în spaţiul $\bar{u}^\perp$. Considerăm vectorul liber oarecare $\bar{v} \in \mathbb{V}^3$ şi avem, din teorema de reprezentare a unui vector într-o bază,

$$\bar{v} = \alpha \cdot \bar{u} + \beta_1 \cdot \bar{w}_1 + \beta_2 \cdot \bar{w}_2 = \alpha \cdot \bar{u} + \bar{w}, \quad \alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},$$

unde $\bar{w} = \beta_1 \cdot \bar{w}_1 + \beta_2 \cdot \bar{w}_2 \in \bar{u}^\perp$. $\square$

DEFINIŢIA 1.13. Vectorul liber $\alpha \cdot \bar{u}$ din propoziţia anterioară se numeşte *proiecţia ortogonală* a vectorului $\bar{v}$ pe vectorul $\bar{u}$ şi se notează $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}$.



OBSERVAŢIA 1.11. Din definiţia proiecţiei ortogonale a vectorului liber $\bar{v}$ pe vectorul liber $\bar{u}$, rezultă $(\bar{v} - \overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}) \perp \bar{v}$, ceea ce înseamnă că $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}$ este proiecţia ortogonală a vectorului $\bar{v}$ pe subspaţiul liniar $L[\bar{u}]$ al spaţiului euclidian $\mathbb{V}^3$, generat de vectorul $\bar{u}$ (această proiecţie a fost definită în capitolul *Spaţii euclidiene*).

În continuare avem următorul rezultat evident.

PROPOZIŢIA 1.11. *Dacă notăm* $\varphi = (\widehat{\bar{v}, \bar{u}}) \in [0, \pi]$ *atunci* $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v} = \bar{u} \cdot \cos\varphi$.

OBSERVAŢIA 1.12. Produsul scalar a doi vectori liberi $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, cu $\bar{u}$ diferit de vectorul nul, se poate scrie

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos(\widehat{\bar{u}, \bar{v}}) = \|\bar{v}\| \cdot \|\,\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}\|.$$

PROPOZIŢIA 1.12. *Considerăm aplicaţia* $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}} : \mathbb{V}^3 \to L[\bar{u}]$ *care asociază unui vector liber* $\bar{v}$ *proiecţia sa ortogonală* $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}$ *pe vectorul liber* $\bar{u}$. *Atunci aplicaţia* $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}$ *este o aplicaţie liniară, oricare ar fi vectorul liber nenul* $\bar{u} \in \mathbb{V}^3$.

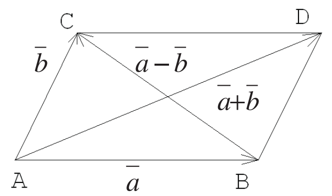
DEMONSTRAŢIE. Considerăm un vector liber nenul $\bar{u} \in \mathbb{V}^3$ şi vectorii liberi $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$. Aşa cum am văzut mai sus, aceşti vectori se scriu în mod unic

$$\bar{v}_1 = \alpha_1 \cdot \bar{u} + \bar{w}_1, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R},\ \bar{w}_1 \in \bar{u}^\perp$$

şi
$$\bar{v}_2 = \alpha_2 \cdot \bar{u} + \bar{w}_2, \quad \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \bar{w}_2 \in \bar{u}^{\perp}.$$
Atunci
$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \bar{u} + \bar{w}_1 + \bar{w}_2.$$
Prin urmare $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}_1 = \alpha_1 \cdot \bar{u}$, $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}_2 = \alpha_2 \cdot \bar{u}$ şi $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \bar{u}$, adică
$$\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}_1 + \overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}_2.$$
Mai departe, fie scalarul $\beta \in \mathbb{R}$ şi vectorul liber $\bar{v}$. Avem
$$\bar{v} = \alpha \cdot \bar{u} + \bar{w}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \bar{w} \in \bar{u}^{\perp}$$
şi, astfel,
$$\beta \cdot \bar{v} = (\beta \cdot \alpha) \cdot \bar{u} + \beta \cdot \bar{w}.$$
În concluzie
$$\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}(\beta \cdot \bar{v}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \bar{u} = \beta \cdot \overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}\, \bar{v}.$$
Am arătat că aplicaţia $\overline{\mathrm{pr}}_{\bar{u}}$ este aditivă şi omogenă, deci liniară. □

Exemplul 1.3. Să se demonstreze identitatea
$$(\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2 = 2(\bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b}),$$
unde $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-1) \cdot \bar{b}$, şi să se găsească interpretarea geometrică în paralelogramul construit pe vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Avem
$$(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2 = \bar{a}\cdot\bar{a}+2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{a}-2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{b} = 2\cdot(\bar{a}\cdot\bar{a}+\bar{b}\cdot\bar{b}).$$
Fie $ABCD$ paralelogramul construit pe cei doi vectori cu $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{b}$.



Din regula paralelogramului de adunare a vectorilor rezultă $\overrightarrow{AC} = \bar{a} + \bar{b}$ şi $\overrightarrow{BD} = \bar{b} - \bar{a}$. Rezultatul obţinut anterior poate fi formulat astfel: suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor sale.

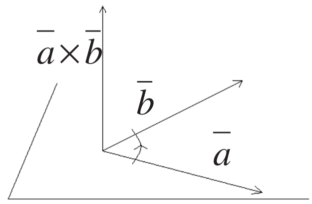
2.2. Produsul vectorial.

Definiţia 1.14. Definim *produsul vectorial* pe spaţiul liniar al vectorilor liberi ca fiind aplicaţia $\times : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$, care asociază perechii de vectori liberi $(\bar{a}, \bar{b})$ vectorul liber $\bar{a} \times \bar{b}$ obţinut astfel:

- direcţia sa este perpendiculară pe planul determinat de $\bar{a}$ şi $\bar{b}$;
- sensul este dat de "regula burghiului" (sau "regula mâinii stângi"), adică este sensul de înaintare al unui burghiu răsucit în aceeaşi direcţie ca şi vectorul $\bar{a}$ spre vectorul $\bar{b}$ pe drumul cel mai scurt;

- lungimea sa este

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}).$$



Propoziţia 1.13. (Proprietăţi ale produsului vectorial)

(1) $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V}^3$ *(produsul vectorial este anticomutativ).*
(2) $\lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \cdot \bar{b})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *şi* $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V}^3$.
(3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$, $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{V}^3$.
(4) $\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 \cdot \|\bar{b}\|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V}^3$ *(identitatea lui Lagrange).*
(5) *aria paralelogramului construit pe vectorii* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *este egală cu* $\|\bar{a} \times \bar{b}\|$.
(6) $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ *dacă şi numai dacă vectorii liberi* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *sunt coliniari.*

Demonstraţie. (1) Prin definiţie vectorii $\bar{a} \times \bar{b}$ şi $\bar{b} \times \bar{a}$ au aceeaşi direcţie şi aceeaşi lungime, iar sensurile le sunt opuse, adică $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$.

(2) Dacă $\lambda = 0$ sau unul dintre vectorii liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este vectorul nul, atunci egalitatea este evidentă. Vom presupune $\lambda \neq 0$ şi $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$. Vectorul $\lambda \cdot \bar{a}$ este coliniar cu $\bar{a}$ şi, prin urmare direcţia şi sensul vectorului $(\lambda \cdot \bar{a}) \times \bar{b}$ sunt aceleaşi cu cele ale vectorului $\lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$. În plus avem

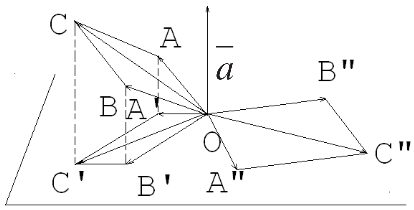
$$\begin{aligned}
\|(\lambda \cdot \bar{a}) \times \bar{b}\| &= \|\lambda \cdot \bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \sin(\widehat{(\lambda \cdot \bar{a}), \bar{b}}) = |\lambda| \cdot \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) \\
&= |\lambda| \cdot \|\bar{a} \times \bar{b}\| = \|\lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b})\|.
\end{aligned}$$

Astfel am obţinut $\lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a}) \times \bar{b}$. Cealaltă egalitate se demonstrează în acelaşi fel.

(3) Vom prezenta demonstraţia dată în [**10**]. Dacă $\bar{a} = \bar{0}$, atunci egalitatea este evidentă. În continuare presupunem $\bar{a} \neq \bar{0}$. Vectorii liberi $\bar{a} \times \bar{b}$, $\bar{a} \times \bar{c}$ şi $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c})$ sunt ortogonali pe vectorul $\bar{a}$, deci sunt coplanari. Mai întâi considerăm $\bar{a}$ un versor, adică un vector liber de lungime egală cu 1. Aplicăm vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a} \times \bar{b}$, $\bar{a} \times \bar{c}$ şi $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c})$ într-un punct O şi avem reprezentanţii $\bar{b} = \overrightarrow{OA}$, $\bar{c} = \overrightarrow{OB}$, $\bar{a} \times \bar{b} = \overrightarrow{OA''}$, $\bar{b} + \bar{c} = \overrightarrow{OC}$, $\bar{a} \times \bar{c} = \overrightarrow{OB''}$ şi $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \overrightarrow{OC''}$. Fie A', B', C' proiecţiile ortogonale ale punctelor A, B şi respectiv C pe planul determinat de segmentele orientate $\overrightarrow{OA''}$ şi $\overrightarrow{OB''}$. Obţinem paralelogramul $OA'C'B'$.

Atunci

$$\|\overrightarrow{OA'}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \cos(\widehat{AOA'}) = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \|\bar{b}\| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$



şi, analog, $\|\overrightarrow{OB'}\| = \|\bar{c}\| \cdot \sin(\widehat{\bar{a},\bar{c}})$, $\|\overrightarrow{OC'}\| = \|\bar{b}+\bar{c}\| \cdot \sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}+\bar{c}})$. Pe de altă parte,

$$\|\overrightarrow{OA''}\| = \|\bar{a}\times\bar{b}\| = \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \|\bar{b}\|\cdot\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$$

şi, analog, $\|\overrightarrow{OB''}\| = \|\bar{c}\| \cdot \sin(\widehat{\bar{a},\bar{c}})$, $\|\overrightarrow{OC''}\| = \|\bar{b}+\bar{c}\| \cdot \sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}+\bar{c}})$. Rezultă că patrulaterul $OA''C''B''$ se obţine în urma unei rotaţii în plan (vezi şi capitolul următor pentru detalii) cu un unghi $\varphi = \frac{\pi}{2}$, din paralelogramul $OA'C'B'$, adică $OA''C''B''$ este la rândul lui un paralelogram. În concluzie $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$, în acest caz.

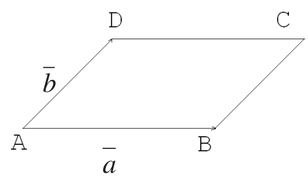
Dacă $\bar{a}$ nu este un versor atunci considerăm vectorul liber $\bar{v} = \frac{1}{\|a\|}\cdot\bar{a}$, adică $\bar{a} = \|\bar{a}\|\cdot\bar{v}$. Deoarece $\bar{v}$ este un versor avem, folosind şi proprietatea (2), avem

$$\begin{aligned}
\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) &= \|\bar{a}\|\cdot\bar{v}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \|\bar{a}\|\cdot(\bar{v}\times\bar{a}+\bar{v}\times\bar{b}) \\
&= (\|\bar{a}\|\cdot\bar{v})\times\bar{a} + (\|\bar{a}\|\cdot\bar{v})\times\bar{b} \\
&= \bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}.
\end{aligned}$$

(4) Se obţine imediat, din definiţiile produsului scalar şi produsului vectorial, astfel

$$\begin{aligned}
\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 &= \|\bar{a}\|^2\cdot\|\bar{b}\|^2\cdot\sin^2(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \|\bar{a}\|^2\cdot\|\bar{b}\|^2\cdot(1-\cos^2(\widehat{\bar{a},\bar{b}})) \\
&= \|\bar{a}\|^2\cdot\|\bar{b}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2.
\end{aligned}$$

(5) Construim paralelogramul $ABCD$ determinat de vectorii liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.



Una din formulele ariei paralelogramului, cunoscută din geometria sintetică, este

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ABCD} &= \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AD}\|\cdot\sin(\widehat{BAD}) = \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) \\
&= \|\bar{a}\times\bar{b}\|.
\end{aligned}$$

(6) Doi vectori liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă unghiul dintre ei este egal cu 0 sau π, adică dacă şi numai dacă $\|\bar{a} \times \bar{b}\| = 0$, ceea ce este echivalent cu $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$. □

În continuare, pentru a obţine expresia analitică a produsului vectorial, considerăm baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ în $\mathbb{V}^3$ astfel încât $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$. Spunem că baza $\mathcal{B}$ cu această proprietate este *orientată pozitiv.* Valorile produselor vectoriale între cei trei vectori ai bazei sunt prezentate în următorul tabel

$\times$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Folosind aceste rezultate obţinem expresia analitică a produsului vectorial.

Propoziţia 1.14. (Expresia analitică a produsului vectorial)
Fie vectorii liberi $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ şi $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$. Atunci avem

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k}.$$

Demonstraţie. Prin calcul direct obţinem

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}) \times (b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}) \\ &= a_x \cdot b_y \cdot \bar{k} - a_x \cdot b_z \cdot \bar{j} - a_y \cdot b_x \cdot \bar{k} + a_y \cdot b_z \cdot \bar{i} \\ &\quad + a_z \cdot b_x \cdot \bar{j} - a_z \cdot b_y \cdot \bar{i} \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \bar{i} - (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) \cdot \bar{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \bar{k} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k} \\ &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

Observaţia 1.13. Determinantul de ordinul 3 care apare în propoziţia de mai sus este unul ”simbolic” nu unul propriu-zis, în sensul că rolul său aici este doar de a arăta că produsul scalar se calculează în acelaşi fel ca un determinant.

Corolarul 1.15. *Doi vectori liberi $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ şi $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă au coordonatele proporţionale,* *adică*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

DEMONSTRAŢIE. Doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă produsul lor vectorial este egal cu vectorul nul. Avem $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ dacă şi numai dacă

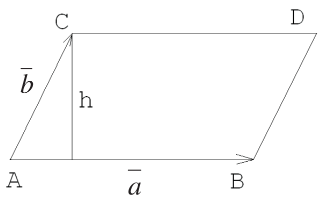
$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$$

şi, ţinând cont că un determinant de ordinul 2 este egal cu 0 dacă şi numai dacă cele două linii ale sale sunt proporţionale, rezultă

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

□

EXEMPLUL 1.4. Să se calculeze lungimea h a înălţimii corespunzătoare laturii $\bar{a}$ a paralelogramului construit pe vectorii liberi $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$ şi $\bar{b} = 2 \cdot \bar{i} + \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}$, unde vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt exprimaţi în baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.



Aria paralelogramului $ABCD$ este

$$\mathcal{A}_{ABCD} = h \cdot \|\bar{a}\| = \|\bar{a} \times \bar{b}\|,$$

de unde rezultă $h = \frac{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}$. Avem

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} \\ &= 6 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k} \end{aligned}$$

şi $\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3 \cdot \sqrt{5}$ şi $\|\bar{a}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$. Urmează $h = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

2.3. Produsul dublu vectorial.

DEFINIŢIA 1.15. Vectorul $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, unde $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{V}^3$ sunt vectori liberi arbitrari, se numeşte *produsul dublu vectorial* al celor trei vectori.

PROPOZIŢIA 1.16. *Produsul dublu vectorial are următoarea proprietate:*

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}, \quad \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{V}^3.$$

Demonstraţie. Considerăm vectorii $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$, $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$ şi $\bar{c} = c_x \cdot \bar{i} + c_y \cdot \bar{j} + c_z \cdot \bar{k}$. Obţinem, prin calcul direct,

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k}$$

şi

$$\begin{aligned} \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot b_x \cdot \bar{i} + (\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot b_y \cdot \bar{j} + (\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot b_z \cdot \bar{k} \\ &\quad -(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot c_x \cdot \bar{i} + (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot c_y \cdot \bar{j} + (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot c_z \cdot \bar{k} \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}. \end{aligned}$$

□

Propoziţia 1.17. (Identitatea lui Jacobi)
Pentru orice trei vectori liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ are loc identitatea lui Jacobi

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{0}.$$

Demonstraţie. Din propoziţia anterioară rezultă că

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c},$$

$$\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) = (\bar{b} \cdot \bar{a}) \cdot \bar{c} - (\bar{b} \cdot \bar{c}) \cdot \bar{a}$$

şi

$$\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{c} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{a} - (\bar{c} \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b}.$$

Adunând aceste relaţii se obţine identitatea lui Jacobi. □

2.4. Produsul mixt.

Definiţia 1.16. Operaţia $(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}), \quad \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{V}^3$$

se numeşte *produs mixt*.

Propoziţia 1.18. (Expresia analitică a produsului mixt)
Fie vectorii liberi $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$, $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$ şi $\bar{c} = c_x \cdot \bar{i} + c_y \cdot \bar{j} + c_z \cdot \bar{k}$, unde $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{V}^3$ orientată pozitiv. Atunci produsul mixt al celor trei vectori este dat de

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

DEMONSTRAŢIE. Avem

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k}$$

şi apoi

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) &= a_x \cdot \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \cdot \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \cdot \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

Folosind proprietăţile determinanţilor se obţin imediat următoarele proprietăţi ale produsului mixt.

PROPOZIŢIA 1.19. (Proprietăţi ale produsului mixt)

(1) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})$, *pentru orice* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{V}^3$.
(2) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$, *pentru orice* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{V}^3$.
(3) $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{c}, \bar{d}) + (\bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$, *pentru orice* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{V}^3$.
(4) $(\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \lambda \cdot (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, *pentru orice scalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi orice vectori liberi* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{V}^3$.

OBSERVAŢIA 1.14. Este evident, din proprietăţile (1), (3) şi (4), că produsul mixt este aditiv şi omogen în fiecare argument.

PROPOZIŢIA 1.20. (Interpretarea geometrică a produsului mixt)
Volumul paralelipipedului construit pe trei vectori liberi nenuli $\bar{a}$, $\bar{b}$ *şi* $\bar{c}$ *este*

$$V = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|.$$

Mai mult, cei trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt se anulează, adică $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$.

DEMONSTRAŢIE. Aplicăm vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ în acelaşi punct A astfel încât vectorii să fie reprezentaţi de segmentele orientate $\bar{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\bar{b} = \overrightarrow{AB}$, $\bar{c} = \overrightarrow{AD}$ şi construim paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ determinat de cei trei vectori. Fie A'' proiecţia punctului A' pe planul (ABD), determinat de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Vectorii $\overrightarrow{A'A''}$ şi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ vor fi astfel coliniari (nu neapărat cu acelaşi sens).

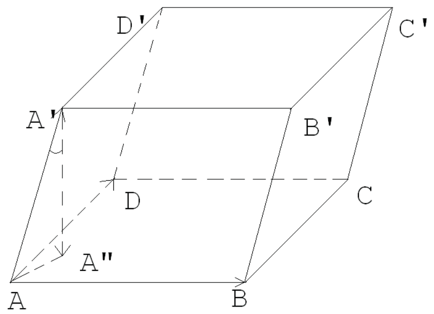
Atunci lungimea înălţimii din A' a paralelipipedului va fi $\|\overrightarrow{A'A''}\|$, iar volumul său

$$V = \|\overrightarrow{A'A''}\| \cdot \mathcal{A}_{ABCD} = \|\overrightarrow{A'A''}\| \cdot \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|.$$

În $\triangle AA'A''$ avem

$$\|\overrightarrow{A'A''}\| = \|\overrightarrow{A'A''}\| \cdot \cos(\widehat{AA'A''}) = \|\bar{a}\| \cdot |\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}})|,$$

unde modulul apare datorită faptului că vectorul $\bar{b} \times \bar{c}$ poate avea două sensuri diferite, în funcţie de alegerea acestor vectori. Acum, revenind la formula



volumului, avem

$$V = \|\overrightarrow{A'A''}\| \cdot \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b} \times \bar{c}\| \cdot |\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}})| = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|.$$

În final, vectorii sunt coplanari dacă şi numai dacă paralelipipedul determinat de ei este degenerat, adică volumul să este nul, ceea ce, conform celor arătate mai sus, înseamnă $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$. □

Observaţia 1.15. În acelaşi mod ca mai sus, rezultă că volumul tetraedrului construit pe trei vectori liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ este $V = \frac{1}{6} \cdot |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$.

Exemplul 1.5. Să se determine parametrul real λ astfel încât vectorii $\bar{a} = \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$, $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ şi $\bar{c} = \bar{j} + 3 \cdot \bar{k}$ să fie coplanari.

Aşa cum am văzut anterior cei trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $8 \cdot \lambda + 4 = 0$. Prin urmare, cei trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Exemplul 1.6. Să se calculeze produsul mixt $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ştiind că $\bar{v}_1 = -\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{v}_2 = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{v}_3 = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$, unde $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt trei vectori liberi necoplanari.

Deoarece vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ sunt necoplanari rezultă că ei formează o bază în $\mathbb{V}^3$. Cum această bază nu este ortonormată nu putem folosi aici expresia analitică a produsului mixt. Acesta trebuie calculat folosind definiţia şi proprietăţile produselor scalar, vectorial şi mixt, astfel:

$$\begin{aligned} (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) &= \bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) \\ &= (-\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot [(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) \times (\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})] \\ &= (-\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (2 \cdot \bar{a} \times \bar{b} - 2 \cdot \bar{a} \times \bar{c}) \\ &= 2 \cdot \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) - 2 \cdot \bar{b} \cdot (\bar{a} \times \bar{c}) = 2 \cdot [(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) - (\bar{b}, \bar{a}, \bar{c})] \\ &= 2 \cdot (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}). \end{aligned}$$

CAPITOLUL 2

REPERE

În acest capitol vom introduce noţiunea de reper pe dreaptă, în plan şi în spaţiu, vom studia diverse tipuri de repere şi legăturile dintre ele, iar în finalul capitolului vom prezenta formule de calcul pentru distanţe, arii şi volume obţinute cu ajutorul reperelor carteziene ortonormate.

1. Repere carteziene

1.1. Repere carteziene pe dreaptă. Fie dreapta (d) şi mulţimea

$$\mathbb{V}^1 = \{\bar{a} \in \mathbb{V}^3 \mid \bar{a} \parallel (d)\}$$

a tuturor vectorilor liberi care au direcţiile paralele cu dreapta (d). Avem

Propoziţia 2.1. $\mathbb{V}^1$ *este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar* $\mathbb{V}^3$ *de dimensiune* $\dim \mathbb{V}^1 = 1$.

Demonstraţie. Mai întâi considerăm scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi vectorii liberi coliniari $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V}^1$. Atunci vectorii $\alpha \cdot \bar{a}$ şi $\beta \cdot \bar{b}$ sunt coliniari cu vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, adică $\alpha \cdot \bar{a}, \beta \cdot \bar{b} \in \mathbb{V}^1$. Prin urmare, avem $\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} \in \mathbb{V}^1$ şi $\mathbb{V}^1 \underset{s.s.l.}{\subseteq} \mathbb{V}^3$.

În continuare, fie $\mathcal{B} = \{\bar{v}\}$, unde $\bar{v} \in \mathbb{V}^1$ este un vector nenul. Atunci $\mathcal{B}$ este un sistem de vectori liniar independent din subspaţiul liniar $\mathbb{V}^1$, de unde rezultă că $\dim \mathbb{V}^1 \geq 1$. Pe de altă parte, ştim că doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi. Astfel $\dim \mathbb{V}^1 < 2$, adică $\dim \mathbb{V}^1 = 1$. □

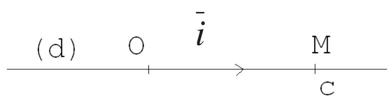
Definiţia 2.1. Se numeşte *reper cartezian* pe dreapta (d) perechea $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ formată din punctul $O \in (d)$, numit *originea* reperului cartezian, şi baza $\mathcal{B} = \{\bar{i}\}$ din $\mathbb{V}^1$. Vectorul $\bar{i}$ se numeşte *vector director* al dreptei (d).
Dacă baza $\mathcal{B}$ este ortonormată, adică $\|\bar{i}\| = 1$, atunci reperul $\mathcal{R}$ se numeşte reper cartezian *ortonormat*.
Fie punctul $M \in (d)$. Atunci segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *vectorul de poziţie* al punctului M.

Observaţia 2.1. Este clar că există două sensuri posibile pentru vectorii din $\mathbb{V}^1$. Alegem unul din aceste sensuri pe care îl vom numi *sensul pozitiv*. Acum, spunem că dreapta (d) este *orientată*. Baza $\mathcal{B} = \{\bar{i}\}$ din $\mathbb{V}^1$ se numeşte *pozitiv orientată* dacă sensul vectorului $\bar{i}$ este pozitiv. În acest caz reperul $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ se numeşte reper cartezian *orientat pozitiv*.

Propoziţia 2.2. *Fie dreapta* (d) *şi reperul ortonormat orientat pozitiv* $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}\})$ *pe* (d). *Atunci aplicaţia* $f : (d) \to \mathbb{R}$, *definită prin*

$$f(M) = \begin{cases} \|\overrightarrow{OM}\| & \text{dacă } \overrightarrow{OM} \text{ şi } \bar{i} \text{ au acelaşi sens} \\ -\|\overrightarrow{OM}\| & \text{dacă } \overrightarrow{OM} \text{ şi } \bar{i} \text{ au sensuri opuse} \end{cases}, \quad \forall M \in (d),$$

este bijectivă. Valoarea $f(M) = c \in \mathbb{R}$, $M \in (d)$, *se numeşte* ***coordonata*** *punctului* M *în reperul* $\mathcal{R}$ *şi notăm cu* $M(c)$ *faptul că punctul* M *are coordonata* c.



Cum demonstraţia acestei propoziţii este imediată, nu o vom prezenta aici.

Observaţia 2.2. Dacă punctul $M \in (d)$ are coordonata c în reperul $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ atunci $\overrightarrow{OM} = c \cdot \bar{i}$ şi reciproc.

Definiţia 2.2. O schimbare a reperului cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$ pe dreapta (d) se numeşte *translaţie* pe dreaptă.

Propoziţia 2.3. *Fie reperele carteziene ortonormate* $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ *şi* $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$ *pe dreapta* (d) *şi fie punctul* $M \in (d)$ *având coordonata* $x \in \mathbb{R}$ *în reperul* $\mathcal{R}$ *şi coordonata* $x' \in \mathbb{R}$ *în reperul* $\mathcal{R}'$. *Atunci*

$$x = x_0 + x',$$

unde $x_0 \in \mathbb{R}$ *este coordonata lui* O' *în reperul* $\mathcal{R}$.

Demonstraţie. Conform regulii triunghiului de adunare a vectorilor, rezultă

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Leftrightarrow x \cdot \bar{i} = x_0 \cdot \bar{i} + x' \cdot \bar{i},$$

adică $x = x_0 + x'$. □

1.2. Repere carteziene în plan. Fie planul (P) şi mulţimea

$$\mathbb{V}^2 = \{\bar{a} \in \mathbb{V}^3 \mid \bar{a} \parallel (P)\}$$

a vectorilor liberi care au direcţiile paralele cu planul (P).

Propoziţia 2.4. $\mathbb{V}^2$ *este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar* $\mathbb{V}^3$ *de dimensiune* $\dim \mathbb{V}^2 = 2$.

Demonstraţie. Fie scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi vectorii liberi coplanari $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V}^2$. Atunci vectorii $\alpha \cdot \bar{a}$ şi $\beta \cdot \bar{b}$ sunt coliniari cu $\bar{a}$ şi respectiv cu $\bar{b}$ de unde rezultă $\alpha \cdot \bar{a} \in \mathbb{V}^2$ şi $\beta \cdot \bar{b} \in \mathbb{V}^2$. Prin urmare, avem $\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} \in \mathbb{V}^2$ şi $\mathbb{V}^2 \underset{s.s.l.}{\subseteq} \mathbb{V}^3$.

În continuare, fie $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$, unde $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{V}^2$ sunt doi vectori necoliniari. Atunci $\mathcal{B}$ este un sistem de vectori liniar independent din $\mathbb{V}^2$, de unde rezultă că $\dim \mathbb{V}^2 \geq 2$. Pe de altă parte, trei vectori liberi sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi. Astfel $\dim \mathbb{V}^2 < 3$, adică $\dim \mathbb{V}^2 = 2$. □

DEFINIŢIA 2.3. Se numeşte *reper cartezian* în planul (P) perechea $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ formată din punctul $O \in (P)$, numit *originea* reperului cartezian, şi baza $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ din $\mathbb{V}^2$. Vectorii care formează baza $\mathcal{B}$ se numesc *vectori directori* ai planului (P). Dacă baza $\mathcal{B}$ este ortonormată, adică $\bar{i} \perp \bar{j}$ şi $\|\bar{i}\| = \|\bar{j}\| = 1$, atunci reperul $\mathcal{R}$ se numeşte reper cartezian *ortonormat*.

DEFINIŢIA 2.4. Fie punctul $M \in (P)$. Atunci segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *vectorul de poziţie* al punctului M.

OBSERVAŢIA 2.3. Dacă $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ şi $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ sunt două baze în $\mathbb{V}^2$ atunci, evident, $\bar{u}_1 \times \bar{u}_2$ şi $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ au aceeaşi direcţie (perpendiculară pe planul P). Dacă $\bar{u}_1 \times \bar{u}_2$ şi $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ au acelaşi sens spunem că bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ sunt orientate la fel. Este clar că există două orientări posibile a bazelor din $\mathbb{V}^2$. Alegem una dintre aceste orientări şi o numim orientarea pozitivă. Toate bazele care vor avea această orientare se vor numi baze orientate pozitiv. Dacă $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ este un reper cartezian în planul (P) cu baza $\mathcal{B}$ orientată pozitiv se numeşte reper cartezian *orientat pozitiv.*

Următorul rezultat se verifică uşor şi îl vom prezenta aici fără demonstraţie.

PROPOZIŢIA 2.5. *Aplicaţia $f : (P) \to \mathbb{R}^2$ definită prin*

$$f(M) = (x, y), \quad \forall M \in (P),$$

unde vectorul de poziţie al lui M în reperul $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ este $\overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$, este o aplicaţie bijectivă.

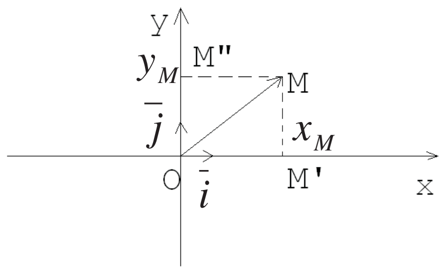
DEFINIŢIA 2.5. Cele două coordonate ale vectorului $\overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$ se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului M în reperul $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, x fiind numită *abscisa* lui M, iar y *ordonata* punctului M. Notăm acest lucru prin $M(x, y)$.

În continuare vom considera reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ în planul (P). Dreptele care trec prin originea O a reperului $\mathcal{R}$ şi având aceleaşi direcţii ca vectorii $\bar{i}$ şi respectiv $\bar{j}$ se numesc *axe de coordonate* şi se notează (Ox) şi respectiv (Oy). Axele de coordonate şi punctul O formează un *sistem de coordonate* în planul P. Dacă nu vor fi făcute alte precizări peste tot de acum înainte aceste notaţii vor desemna un astfel de reper.

Folosind regula paralelogramului avem următorul rezultat.

PROPOZIŢIA 2.6. *Fie punctul $M \in P$ şi fie M' şi M'' proiecţiile pe axele (Ox) şi respectiv (Oy). Atunci coordonatele punctului M în reperul $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ sunt*

$$(x_M, y_M) = \begin{cases} (\|\overrightarrow{OM'}\|, \|\overrightarrow{OM''}\|), & \text{dacă } (\widehat{\overrightarrow{OM'}, \bar{i}}) = 0,\ (\widehat{\overrightarrow{OM''}, \bar{j}}) = 0 \\ (-\|\overrightarrow{OM'}\|, \|\overrightarrow{OM''}\|), & \text{dacă } (\widehat{\overrightarrow{OM'}, \bar{i}}) = \pi,\ (\widehat{\overrightarrow{OM''}, \bar{j}}) = 0 \\ (-\|\overrightarrow{OM'}\|, -\|\overrightarrow{OM''}\|), & \text{dacă } (\widehat{\overrightarrow{OM'}, \bar{i}}) = \pi,\ (\widehat{\overrightarrow{OM''}, \bar{j}}) = \pi \\ (\|\overrightarrow{OM'}\|, -\|\overrightarrow{OM''}\|), & \text{dacă } (\widehat{\overrightarrow{OM'}, \bar{i}}) = 0,\ (\widehat{\overrightarrow{OM''}, \bar{j}}) = \pi \end{cases}.$$



DEFINIŢIA 2.6. O schimbare a reperului cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$ în planul (P) se numeşte *translaţie* în plan.

PROPOZIŢIA 2.7. *Fie reperele carteziene ortonormate $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ şi $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$ în planul (P) şi punctul oarecare $M \in (P)$ având coordonatele (x, y) în reperul $\mathcal{R}$ şi coordonatele (x', y') în reperul $\mathcal{R}'$. Atunci avem formulele translaţiei în plan*

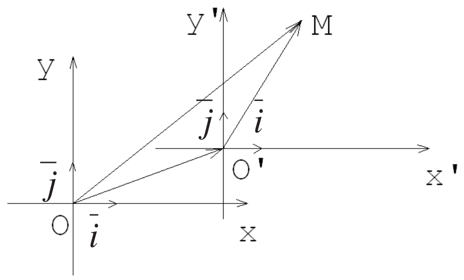
$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases},$$

unde (x_0, y_0) sunt coordonatele lui O' în reperul $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAŢIE. Conform regulii triunghiului de adunare a vectorilor rezultă

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Leftrightarrow x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} = x_0 \cdot \bar{i} + y_0 \cdot \bar{j} + x' \cdot \bar{i} + y' \cdot \bar{j},$$

adică $\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$.



□

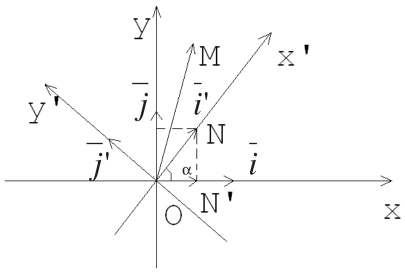
DEFINIŢIA 2.7. O schimbare a reperului cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}' = \{\bar{i}', \bar{j}'\})$ în planul (P), cu $(\widehat{\bar{i}, \bar{i}'}) = \alpha$, se numeşte *rotaţie* de unghi α în plan.

PROPOZIŢIA 2.8. *Fie reperele carteziene ortonormate $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ şi $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}' = \{\bar{i}', \bar{j}'\})$ în planul (P) cu $(\widehat{\bar{i}, \bar{i}'}) = \alpha$ şi punctul oarecare*

$M \in (P)$ având coordonatele (x, y) în reperul $\mathcal{R}$ şi coordonatele (x', y') în reperul $\mathcal{R}'$. Atunci avem formulele rotaţiei în plan

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha \\ y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha \end{cases}.$$

DEMONSTRAŢIE. Considerăm segmentul orientat $\overrightarrow{ON}$, reprezentant al vectorului liber $\bar{i}'$, şi proiectăm punctul N pe axa (Ox) în punctul N'. Presupunem că unghiul $\alpha = (\widehat{\bar{i}, \bar{i}'}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$.



În $\triangle NON'$ avem

$$\|\overrightarrow{ON'}\| = \|\overrightarrow{ON}\| \cdot \cos(\widehat{NON'}) = \|\bar{i}'\| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha,$$

de unde rezultă, ţinând cont că $\overrightarrow{OM'}$ şi $\bar{i}$ sunt coliniari şi au acelaşi sens, $\overrightarrow{ON'} = \cos\alpha \cdot \bar{i}$. Analog, obţinem $\overrightarrow{ON''} = \sin\alpha \cdot \bar{j}$. Conform regulii paralelogramului de adunare a vectorilor, avem

$$\bar{i}' = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}. \tag{2.1}$$

Unghiul făcut de vectorii $\bar{j}'$ şi $\bar{j}$ este $(\widehat{\bar{j}', \bar{j}}) = \alpha$. Obţinem, la fel ca mai sus,

$$\bar{j}' = -\sin\alpha \cdot \bar{i} + \cos\alpha \cdot \bar{j}. \tag{2.2}$$

Din (2.1) şi (2.2) rezultă că matricea schimbării de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ în $\mathbb{V}^2$, este $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Atunci, deoarece coordonatele lui $\overrightarrow{OM}$ în baza $\mathcal{B}$ sunt (x, y) şi în baza $\mathcal{B}'$ sunt (x', y'), avem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^t \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Am obţinut astfel formulele rotaţiei.

Dacă unghiul α are măsura mai mare decât $\frac{\pi}{2}$ se procedează la fel ca mai sus şi se obţine cu uşurinţă aceeaşi matrice a schimbării de bază în $\mathbb{V}^2$ şi, prin urmare, aceleaşi formule pentru rotaţia de unghi α. □

OBSERVAŢIA 2.4. Se verifică imediat că matricea C a schimbării de bază din demonstraţia precedentă este o matrice ortogonală, adică $C^t \times C = I_2$.

Rezultă că, matricial, coordonatele unui punct după rotaţie se determină din ecuaţia

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (C^t)^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

OBSERVAŢIA 2.5. Pentru a obţine formula de transformare a coordonatelor unui punct la o schimbare de reper constând dintr-o rotaţie urmată de o translaţie, considerăm reperele carteziene ortonormate în plan $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}')$ şi $\mathcal{R}'' = (O', \mathcal{B}')$, unde O' are coordonatele (x_0, y_0) în reperul $\mathcal{R}$ şi (x'_0, y'_0) în reperul $\mathcal{R}'$, iar matricea schimbării de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ este matricea ortogonală $C \in GO(2, \mathbb{R})$ (vezi capitolul *Spaţii euclidiene*) . Mai notăm cu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ şi $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ matricile coloană având ca elemente coordonatele unui punct oarecare M din plan în cele trei repere $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ şi respectiv $\mathcal{R}''$, şi $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $X'_0 = \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$. Reamintim că vectorul de poziţie al punctului M, în fiecare reper, are aceleaşi coordonate ca şi punctul. Atunci, conform formulei de transformare a coordonatelor unui vector la o schimbare de bază, avem $X' = (C^t)^{-1} \times X$, iar după translarea reperului $\mathcal{R}'$ în punctul O' avem $X' = X'_0 + X'' = (C^t)^{-1} \times X_0 + X''$, adică,

$$X = X_0 + C^t \times X''.$$

EXEMPLUL 2.1. Fie reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ în planul P. Să se determine ecuaţiile care arată cum se modifică coordonatele unui punct oarecare $M \in (P)$ după o rotaţie a reperului iniţial cu un unghi $\alpha \in (0, \pi)$ urmată de o translaţie cu noua origine în punctul $O'(x_0, y_0)$ şi să se precizeze ce devine ecuaţia

$$(\Gamma) : f(x, y) = 8 \cdot x^2 - 12 \cdot x \cdot y + 17 \cdot y^2 - 8 \cdot x - 44 \cdot y + 32 = 0$$

după o rotaţie a reperului iniţial cu un unghi $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, unde $\mathrm{tg}(2 \cdot \alpha) = \frac{4}{3}$, urmată de o translaţie cu noua origine în punctul $O'(2, 2)$. Să se interpreteze geometric rezultatul obţinut.

Fie (x, y) coordonatele punctului M în reperul iniţial, (x', y') coordonatele lui M în reperul obţinut după rotaţie şi (x'', y'') coordonatele punctului în reperul final. După rotaţie avem

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha \\ y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha \\ y' = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases}.$$

Astfel, coordonatele punctului O' în reperul obţinut după rotaţia de unghi α sunt date de

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{cases} x_0 = x'_0 \cdot \cos\alpha - y'_0 \cdot \sin\alpha \\ y_0 = x'_0 \cdot \sin\alpha + y'_0 \cdot \cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_0 = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \sin\alpha \\ y'_0 = -x_0 \cdot \sin\alpha + y_0 \cdot \cos\alpha \end{cases}.$$

Înlocuind (2.3) şi (2.4) în formulele translaţiei obţinem

$$\begin{cases} x' = x'_0 + x'' \\ y' = y'_0 + y'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -x'_0 + x' \\ y'' = -y'_0 + y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' &= -x_0 \cdot \cos\alpha - y_0 \cdot \sin\alpha + x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha \\ y'' &= \quad x_0 \cdot \sin\alpha - y_0 \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= x_0 + x'' \cdot \cos\alpha - y'' \cdot \sin\alpha \\ y &= y_0 + x'' \cdot \sin\alpha + y'' \cdot \cos\alpha \end{cases}.$$

Acum, pentru exemplul numeric, avem $\operatorname{tg}(2\cdot\alpha) = \frac{4}{3}$, adică $\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3}$, de unde rezultă $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Avem ecuaţiile $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$ şi $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, din care obţinem $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ şi $\cos\alpha = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$.

Acum, din formulele generale, ţinând cont că originea reperului obţinut după translaţie are coordonatele $x_0 = y_0 = 2$ în reperul iniţial, avem

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \cdot x'' - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot y'' \\ \\ y = 2 + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot x'' + \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \cdot y'' \end{cases}.$$

În final, înlocuind x şi y în forma iniţială a ecuaţiei, rezultă

$$\begin{aligned} (\Gamma) : f(x'', y'') &= 8 \cdot (2 + \tfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \cdot x'' - \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot y'')^2 \\ &\quad -12 \cdot (2 + \tfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \cdot x'' - \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot y'') \cdot (2 + \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot x'' + \tfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \cdot y'') \\ &\quad +17 \cdot (2 + \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot x'' + \tfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \cdot y'')^2 \\ &\quad -8 \cdot (2 + \tfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \cdot x'' - \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot y'') \\ &\quad -44 \cdot (2 + \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot x'' + \tfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \cdot y'') + 32 \\ &= 0. \end{aligned}$$

După efectuarea calculelor rezultă

$$(\Gamma) : f(x'', y'') = \frac{x''^2}{4} + y''^2 - 1 = 0.$$

Aceasta este ecuaţia unei elipse (Γ) cu semiaxele de lungimi egale cu 2 şi respectiv 1. Centrul de simetrie al elipsei este punctul O', originea noului reper, iar axele sale de simetrie sunt axele de coordonate ale acestui reper (pentru mai multe detalii vezi capitolul *Conice*).

1.3. Repere carteziene în spaţiu.

DEFINIŢIA 2.8. Se numeşte *reper cartezian* în spaţiu perechea $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ formată din punctul O din spaţiu, numit *originea* reperului cartezian, şi baza $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ din $\mathbb{V}^3$. Dacă baza $\mathcal{B}$ este ortonormată, adică $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2 \perp \bar{v}_3 \perp \bar{v}_1$ şi $\|\bar{v}_1\| = \|\bar{v}_2\| = \|\bar{v}_3\| = 1$, atunci reperul $\mathcal{R}$ se numeşte reper cartezian *ortonormat*. Dacă baza $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ este orientată pozitiv atunci reperul cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ se numeşte reper cartezian *orientat pozitiv.*

Definiţia 2.9. Fie punctul M din spaţiu. Atunci segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *vectorul de poziţie* al punctului M.

În continuare avem următorul rezultat a cărui verificare este imediată.

Propoziţia 2.9. *Aplicaţia* $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}^3$*, definită prin*

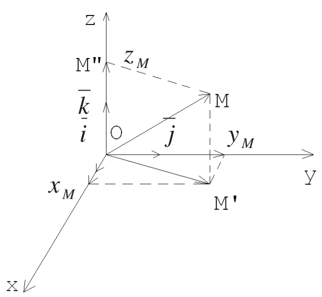
$$f(M) = (x, y, z), \quad \forall M \in \mathbb{E}^3,$$

unde vectorul de poziţie al punctului M *în reperul cartezian* $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_2\}$ *este* $\overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{v}_1 + y \cdot \bar{v}_2 + z \cdot \bar{v}_3$*, este o aplicaţie bijectivă.*

Definiţia 2.10. Coordonatele vectorului de poziţie $\overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{v}_1 + y \cdot \bar{v}_2 + z \cdot \bar{v}_3$ se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului M în reperul $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\})$. Notăm acest lucru prin $M(x, y, z)$.

Definiţia 2.11. Dreptele care trec prin originea O a reperului cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$, şi având aceleaşi direcţii ca vectorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi respectiv $\bar{k}$, se numesc *axe de coordonate* şi se notează (Ox), (Oy) şi respectiv Oz. Axele de coordonate şi punctul O formează un *sistem de coordonate carteziene* în spaţiu.

Coordonatele unui punct M din spaţiu, în reperul considerat în definiţia precedentă, se obţin în modul descris mai jos. Se proiectează punctul M pe planul (xOy) în punctul M'. Atunci coordonatele x_M şi y_M vor fi coordonatele x'_M şi respectiv y'_M ale punctului M' în reperul $\mathcal{R}_{(xOy)} = (O, \mathcal{B}_{(xOy)} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ din planul (xOy). Coordonata z_M este coordonata z''_M a punctului $M'' \in (Oz)$ în reperul $\mathcal{R}_{(Oz)} = (O, \mathcal{B}_{(Oz)} = \{\bar{k}\})$ de pe dreapta (Oz), unde M'' este proiecţia lui M pe dreapta (Oz).



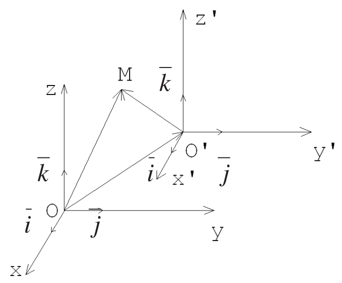
Într-adevăr, conform regulii paralelogramului de adunare a vectorilor, avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''} = x_{M'} \cdot \bar{i} + y_{M'} \cdot \bar{j} + z_{M''} \cdot \bar{k} \\ &= x_M \cdot \bar{i} + y_M \cdot \bar{j} + z_M \cdot \bar{k}.\end{aligned}$$

În continuare să presupunem că $\overrightarrow{OM}$ face unghiurile $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, \pi]$ şi $\gamma \in [0, \pi]$ cu vectorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi respectiv $\bar{k}$. Atunci avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \mathrm{pr}_{\bar{i}}\, \overrightarrow{OM} \cdot \bar{i} + \mathrm{pr}_{\bar{j}}\, \overrightarrow{OM} \cdot \bar{j} + \mathrm{pr}_{\bar{k}}\, \overrightarrow{OM} \cdot \bar{k} \\ &= \cos\alpha \cdot \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \bar{k}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Definiţia 2.12. O schimbare a reperului cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$ se numeşte *translaţie* în spaţiu.



Propoziţia 2.10. *Fie reperele carteziene ortonormate $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ şi $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$ în spaţiu şi punctul oarecare $M \in \mathbb{E}^3$ având coordonatele (x, y, z) în reperul $\mathcal{R}$ şi coordonatele (x', y', z') în reperul $\mathcal{R}'$. Atunci formulele translaţiei în spaţiu sunt*

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases},$$

unde (x_0, y_0, z_0) sunt coordonatele lui O' în reperul $\mathcal{R}$.

Demonstraţie. În conformitate cu regula triunghiului de adunare a vectorilor, avem

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Leftrightarrow x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} = x_0 \cdot \bar{i} + y_0 \cdot \bar{j} + z_0 \cdot \bar{k} + x' \cdot \bar{i} + y' \cdot \bar{j} + z' \cdot \bar{k},$$

de unde rezultă formulele translaţiei în spaţiu. □

Exemplul 2.2. Într-un reper cartezian ortonormat avem suprafaţa dată de ecuaţia

$$(\Sigma) : f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 8 \cdot x - 6 \cdot y + 4 \cdot z + 15 = 0.$$

Ce devine această ecuaţie după translaţia reperului iniţial cu noua origine în punctul $O'(4, -3, -2)$?

Folosind ecuaţiile translaţiei în spaţiu în cazul nostru, avem

$$\begin{cases} x = 4 + x' \\ y = -3 + y' \\ z = -2 + z' \end{cases}.$$

Înlocuim în ecuaţia suprafeţei (Σ) şi obţinem

$$\begin{aligned} (\Sigma) : f(x', y', z') &= (x' + 4)^2 - (y' - 3)^2 + (z' - 2)^2 - 8 \cdot (x' + 4) \\ &\quad -6 \cdot (y' - 3) + 4 \cdot (z' - 2) + 15 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Efectuând calculele rezultă ecuaţia suprafeţei în noul reper

$$(\Sigma) : x'^2 - y'^2 + z'^2 + 4 = 0.$$

Vom vedea (în capitolul *Cuadrice*) că (Σ) este un hiperboloid cu două pânze.

DEFINIŢIA 2.13. O schimbare a reperului cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$ cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}' = \{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\})$ se numeşte *rotaţie* în spaţiu.

PROPOZIŢIA 2.11. *Fie reperele carteziene ortonormate* $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$ *şi* $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}' = \{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\})$ *în spaţiu, cu*

$$\begin{array}{lll} \widehat{(\bar{i}', \bar{i})} = \alpha_1 & \widehat{(\bar{i}', \bar{j})} = \beta_1 & \widehat{(\bar{i}', \bar{k})} = \gamma_1 \\ \widehat{(\bar{j}', \bar{i})} = \alpha_2 & \widehat{(\bar{j}', \bar{j})} = \beta_2 & \widehat{(\bar{j}', \bar{k})} = \gamma_2 \\ \widehat{(\bar{k}', \bar{i})} = \alpha_3 & \widehat{(\bar{k}', \bar{j})} = \beta_3 & \widehat{(\bar{k}', \bar{k})} = \gamma_3 \end{array}$$

şi punctul oarecare M *având coordonatele* (x, y, z) *în reperul* $\mathcal{R}$ *şi coordonatele* (x', y', z') *în reperul* $\mathcal{R}'$. *Atunci formulele rotaţiei în spaţiu sunt*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

şi, în plus,

$$\cos\alpha_a \cdot \cos\alpha_b + \cos\beta_a \cdot \cos\beta_b + \cos\gamma_a \cdot \cos\gamma_b = \delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a = b \\ 0 & \text{dacă } a \neq b \end{cases},$$

pentru orice $a, b \in \{1, 2, 3\}$.

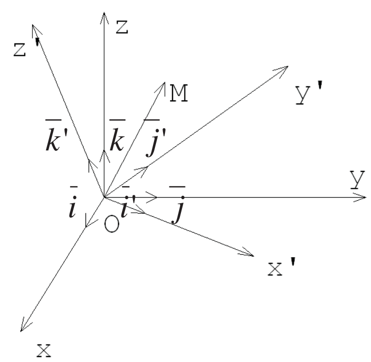
DEMONSTRAŢIE. Mai întâi să observăm că din (2.5), folosind şi faptul că reperele considerate sunt ortonormate, rezultă

$$\bar{i}' = \cos\alpha_1 \cdot \bar{i} + \cos\beta_1 \cdot \bar{j} + \cos\gamma_1 \cdot \bar{k}$$

$$\bar{j}' = \cos\alpha_2 \cdot \bar{i} + \cos\beta_2 \cdot \bar{j} + \cos\gamma_2 \cdot \bar{k}$$

şi

$$\bar{k}' = \cos\alpha_3 \cdot \bar{i} + \cos\beta_3 \cdot \bar{j} + \cos\gamma_3 \cdot \bar{k}.$$



Prin urmare, matricea schimbării de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ este

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, avem $\|\bar{i}'\| = 1$ ceea ce implică

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1.$$

Din $\bar{i}' \perp \bar{j}'$ rezultă $\bar{i}' \cdot \bar{j}' = 0$, adică

$$\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_3 = 0.$$

Folosind $\|\bar{j}'\| = \|\bar{k}'\| = 1$ şi $\bar{i}' \perp \bar{k}'$, $\bar{j}' \perp \bar{k}'$ şi, procedând analog, obţinem

$$\cos\alpha_a \cdot \cos\alpha_b + \cos\beta_a \cdot \cos\beta_b + \cos\gamma_a \cdot \cos\gamma_b = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a = b \\ 0 & \text{dacă } a \neq b \end{cases},$$

pentru orice $a, b \in \{1, 2, 3\}$.
Din aceste relaţii urmează $C^t \times C = I_3$, adică matricea C, a schimbării de bază, este ortogonală.

Acum, dacă un punct oarecare M are coordonatele (x, y, z) în reperul $\mathcal{R}$ şi coordonatele (x', y', z') în reperul $\mathcal{R}'$ atunci acestea vor fi şi coordonatelor vectorului său director $\overrightarrow{OM}$ şi, conform legii de transformare a coordonatelor la o schimbare de bază, avem

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = (C^t)^{-1} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

□

Observaţia 2.6. Ca şi în cazul plan, se arată că la o schimbare oarecare a reperului cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$ coordonatele unui punct oarecare din spaţiu M se transformă după formula

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + C^t \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

unde $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este matricea schimbării de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$, iar x_0, y_0 şi z_0 sunt coordonatele lui O' în reperul iniţial $\mathcal{R}$.

Exemplul 2.3. Să se determine coordonatele punctului $M(2, 1, 3)$ după o rotaţie a reperului iniţial dată de unghiurile $\alpha_1 = (\widehat{\bar{i}', \bar{i}}) = 0$, $\beta_2 = (\widehat{\bar{j}', \bar{j}}) = \frac{\pi}{6}$ şi $\gamma_3 = (\widehat{\bar{k}', \bar{k}}) = \frac{\pi}{6}$.

Folosind aceleaşi notaţii ca şi în propoziţia precedentă avem sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \\ \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1 \\ \cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1 \\ \cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2 = 0 \\ \cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_3 = 0 \\ \cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cdot\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cdot\cos\gamma_3 = 0 \end{cases},$$

care în cazul nostru devine

$$\begin{cases} 1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \\ \cos^2\alpha_2 + \frac{3}{4} + \cos^2\gamma_2 = 1 \\ \cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \frac{3}{4} = 1 \\ \cos\alpha_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2 = 0 \\ \cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\gamma_1 = 0 \\ \cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\beta_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\gamma_2 = 0 \end{cases},$$

cu soluţia

$$\cos\alpha_1 = 1, \cos\alpha_2 = 0, \cos\alpha_3 = 0, \cos\beta_1 = 0, \cos\beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\beta_3 = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\gamma_1 = 0, \cos\gamma_2 = \frac{1}{2}, \cos\gamma_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Matricea schimbării de bază este

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

iar noile coordonate ale punctului M se obţin astfel:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

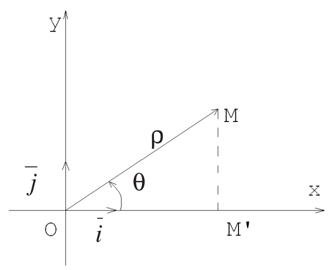
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Coordonate polare

2.1. Coordonate polare în plan. Considerăm reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ în planul (P).

Definiţia 2.14. Dacă M este un punct din planul (P), diferit de originea O a reperului $\mathcal{R}$, atunci $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| \in (0, \infty)$ şi $\theta = (\widehat{\bar{i}, \overrightarrow{OM}}) \in [0, 2\pi)$ se numesc *coordonatele polare* ale punctului M.

Observaţia 2.7. Unghiul θ se măsoară întotdeauna în sensul invers acelor de ceasornic şi dinspre $\bar{i}$ spre $\overrightarrow{OM}$.



Avem următorul rezultat imediat.

Propoziţia 2.12. *Aplicaţia* $f : (P) \setminus \{O\} \to (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ *care asociază fiecărui punct din plan, diferit de originea reperului, perechea formată din coordonatele sale polare, adică* $f(M) = (\rho, \theta)$, *este o aplicaţie bijectivă.*

Din triunghiul dreptunghic $\triangle OMM'$, unde M' este proiecţia punctului M pe axa (Ox) obţinem cu uşurinţă următoarea propoziţie.

Propoziţia 2.13. *Dacă un punct* M *din plan are coordonatele carteziene* (x, y) *şi coordonatele polare* (ρ, θ) *atunci avem*

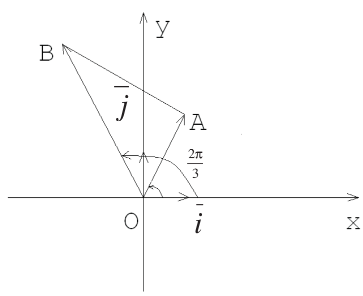
$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Exemplul 2.4. Considerăm punctele din plan date prin coordonatele lor polare $A(\frac{\pi}{3}, 2)$ şi $B(\frac{2\pi}{3}, 4)$. Să se reprezinte grafic aceste puncte şi să se calculeze $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Conform teoremei lui Pitagora generalizată, în $\triangle AOB$ avem

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\|^2 &= \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \cos(\widehat{AOB}) \\ &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos(\tfrac{2\pi}{3} - \tfrac{\pi}{3}) \\ &= 12, \end{aligned}$$

adică $\|\overrightarrow{AB}\| = 2 \cdot \sqrt{3}$.



2.2. Coordonate polare în spaţiu. În continuare considerăm reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$ în spaţiu.

DEFINIŢIA 2.15. Dacă M este un punct din spaţiu cu $M \notin (Oz)$ atunci $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| \in (0, \infty)$, $\theta = (\widehat{\bar{i}, \overrightarrow{OM'}}) \in [0, 2\pi)$ şi $\varphi = (\widehat{\bar{k}, \overrightarrow{OM}}) \in (0, \pi)$, unde M' este proiecţia punctului M pe planul de coordonate (xOy), se numesc *coordonatele polare* ale punctului M.

OBSERVAŢIA 2.8. Ca şi în cazul coordonatelor polare în plan, unghiul θ se măsoară în sensul invers acelor de ceasornic şi dinspre $\bar{i}$ spre $\overrightarrow{OM'}$, iar unghiul φ se măsoară în sensul acelor de ceasornic şi dinspre $\bar{k}$ spre $\overrightarrow{OM}$.

Se verifică uşor următoarea propoziţie.

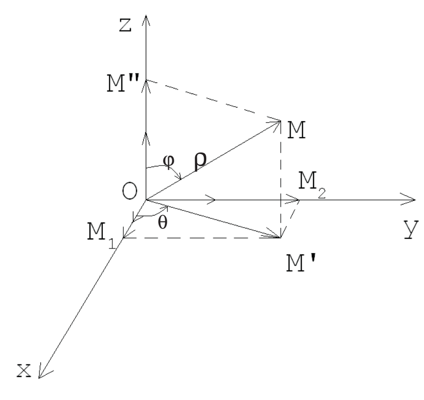
PROPOZIŢIA 2.14. *Aplicaţia* $f : \mathbb{E}^3 \setminus (Oz) \to (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ *care asociază fiecărui punct din spaţiu care nu aparţine axei de coordonate* (Oz)*, tripletul format din coordonatele sale polare, adică* $f(M) = (\rho, \theta, \varphi)$*, este o aplicaţie bijectivă.*

Legăturile dintre coordonatele carteziene şi cele polare ale unui punct din spaţiu sunt date de următorul rezultat.

PROPOZIŢIA 2.15. *Dacă un punct* M *din spaţiu cu* $M \notin (Oz)$ *are coordonatele carteziene* (x, y, z) *şi coordonatele polare* (ρ, θ, φ) *atunci avem*

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ \varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie M' proiecţia punctului M pe planul de coordonate (xOy) şi M'' proiecţia lui M pe axa (Oz). Mai considerăm proiecţiile M_1 şi M_2 ale lui M' pe axele (Ox) şi respectiv (Oy).



În continuare vom determina coordonatele carteziene (x, y, z) în funcţie de cele polare (ρ, θ, φ).

Din triunghiul dreptunghic $\triangle MOM''$ obţinem $\cos(\widehat{MOM''}) = \frac{\|\overrightarrow{OM''}\|}{\|\overrightarrow{OM}\|}$, adică $\cos\varphi = \frac{z}{\rho}$, dacă $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, şi $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi = -\frac{z}{\rho}$, dacă $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. În concluzie, $\cos\varphi = \frac{z}{\rho}$, adică $z = \rho\cos\varphi$.

În acelaşi mod, din triunghiul dreptunghic $\triangle MOM'$ obţinem $\|\overrightarrow{OM'}\| = \rho \cdot \sin\varphi$, iar în triunghiurile dreptunghice $\triangle M'OM_1$ şi $\triangle M'OM_2$ avem $x = \|\overrightarrow{OM'}\| \cdot \cos\theta$ şi $y = \|\overrightarrow{OM'}\| \cdot \sin\theta$. În final rezultă $x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi$ şi $y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$.

Acum, dacă ridicăm la pătrat expresiile lui x, y şi z şi le adunăm, obţinem $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Din expresia lui x şi cea a lui y rezultă $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$ şi din expresia lui z şi cea a lui ρ obţinem $\varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Avem astfel şi coordonatele polare ale punctului determinate în funcţie de cele carteziene, ceea ce încheie demonstraţia. □

3. Coordonate cilindrice

Fie reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\})$ în spaţiu.

Definiţia 2.16. Dacă M este un punct din spaţiu cu $M \notin (Oz)$ atunci $\rho = \|\overrightarrow{OM'}\| \in (0, \infty)$, $\theta = (\widehat{\bar{\imath}, \overrightarrow{OM'}}) \in [0, 2\pi)$ şi $t \in (-\infty, \infty)$, unde M' este proiecţia punctului M pe planul de coordonate (xOy), iar

$$t = \begin{cases} \|\overrightarrow{OM''}\|, & \text{dacă } (\widehat{\bar{k}, \overrightarrow{OM''}}) = 0 \\ -\|\overrightarrow{OM''}\|, & \text{dacă } (\widehat{\bar{k}, \overrightarrow{OM''}}) = \pi \end{cases},$$

unde M'' este proiecţia lui M pe axa (Oz), se numesc *coordonatele cilindrice* ale punctului M.

Observaţia 2.9. Unghiul θ se măsoară în sensul invers acelor de ceasornic şi dinspre $\bar{\imath}$ spre $\overrightarrow{OM'}$.

Avem următoarele două rezultate ale căror demonstraţii sunt imediate.

Propoziţia 2.16. *Aplicaţia $f : \mathbb{E}^3 \setminus (Oz) \to (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$ care asociază fiecărui punct din spaţiu care nu aparţine axei de coordonate (Oz), tripletul format din coordonatele sale cilindrice, adică $f(M) = (\rho, \theta, t)$, este o aplicaţie bijectivă.*

Propoziţia 2.17. *Dacă un punct M din spaţiu cu $M \notin (Oz)$ are coordonatele carteziene (x, y, z) şi coordonatele cilindrice (ρ, θ, t), atunci avem*

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ t = z \end{cases}.$$

4. Distanţe. Arii. Volume

În această secţiune vom prezenta câteva aplicaţii ale determinării punctelor din plan sau din spaţiu cu ajutorul coordonatelor carteziene.

Pe tot parcursul secţiunii vom folosi, în plan, reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ şi sistemul de axe de coordonate corespunzător (Ox), (Oy) şi, în spaţiu, reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$ şi axele de coordonate (Ox), (Oy) şi (Oz).

Propoziţia 2.18. (1) *Distanţa dintre două puncte din plan $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ este*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

(2) *Distanţa dintre două puncte din spaţiu $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$ este*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Demonstraţie. Este clar că distanţa dintre două puncte, din plan sau din spaţiu, este egală cu lungimea segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.

Acum, dacă A şi B sunt puncte din plan, avem

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j}$$

şi $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Dacă A şi B sunt două puncte din spaţiu, rezultă

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_2 - z_1) \cdot \bar{k}$$

şi $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. □

Propoziţia 2.19. *Fie punctele $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$ în spaţiu. Coordonatele unui punct M care împarte segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ într-un raport $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, adică $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, sunt*

$$x_M = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k}, \quad y_M = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k}, \quad z_M = \frac{z_1 + k \cdot z_2}{1 + k}.$$

Demonstraţie. Avem

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x_M - x_1) \cdot \bar{i} + (y_M - y_1) \cdot \bar{j} + (z_M - z_1) \cdot \bar{k}$$

şi

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = (x_2 - x_M) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_M) \cdot \bar{j} + (z_2 - z_M) \cdot \bar{k}.$$

Obţinem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow & (x_M - x_1) \cdot \bar{i} + (y_M - y_1) \cdot \bar{j} + (z_M - z_1) \cdot \bar{k} \\ & = k \cdot (x_2 - x_M) \cdot \bar{i} + k \cdot (y_2 - y_M) \cdot \bar{j} + k \cdot (z_2 - z_M) \cdot \bar{k}, \end{aligned}$$

de unde rezultă imediat formulele de calcul pentru coordonatele punctului M. □

Din această propoziţie obţinem imediat următorul corolar.

COROLARUL 2.20. *Mijlocul segmentului cu vârfurile* $A(x_1, y_1, z_1)$ *şi* $B(x_2, y_2, z_2)$ *este punctul* $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$.

În acelaşi fel, obţinem următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 2.21. *Fie punctele* $A(x_1, y_1)$ *şi* $B(x_2, y_2)$ *în plan. Coordonatele unui punct* M *care împarte segmentul orientat* $\overrightarrow{AB}$ *într-un raport* $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *sunt*

$$x_M = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k}, \quad y_M = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k}.$$

APLICAŢIA 2.1. Fie punctele necoliniare $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ şi $C(x_3, y_3, z_3)$. Atunci centrul de greutate G al triunghiului $\triangle ABC$ are coordonatele

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Într-adevăr, dacă A' este mijlocul segmentului BC, atunci coordonatele sale sunt $x_{A'} = \frac{x_2+x_3}{2}$, $y_{A'} = \frac{y_2+y_3}{2}$ şi $z_{A'} = \frac{z_2+z_3}{2}$, şi, deoarece centrul de greutate se află pe mediana AA' la două treimi de vârf şi o treime de bază, adică împarte segmentul $\overrightarrow{AA'}$ în raportul $k = 2$, avem

$$x_G = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2+x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_G = \frac{y_1 + 2 \cdot \frac{y_2+y_3}{2}}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

şi

$$z_G = \frac{z_1 + 2 \cdot \frac{z_2+z_3}{2}}{3} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

PROPOZIŢIA 2.22. (1) *Aria triunghiului din plan cu vârfurile* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *şi* $C(x_3, y_3)$ *este*

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

(2) *Aria triunghiului din spaţiu cu vârfurile* $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ *şi* $C(x_3, y_3, z_3)$ *este*

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \right)^2}.$$

DEMONSTRAŢIE. Aşa cum am văzut în capitolul precedent, aria paralelogramului construit pe $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ este $\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$ şi, prin urmare aria triunghiului construit pe cele două segmente orientate, adică $\triangle ABC$, va fi

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Dacă A, B şi C sunt puncte din spaţiu avem

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_2 - z_1) \cdot \bar{k},$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (x_3 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_3 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_3 - z_1) \cdot \bar{k},$$

şi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\cdot\bar{k}.\end{aligned}$$

Folosind proprietăţile determinanţilor obţinem

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2+L_1 \\ = \\ L_3+L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Transformând în acelaşi fel şi ceilalţi doi determinanţi din expresia de mai sus avem

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2_{\triangle ABC} &= \tfrac{1}{4}\cdot\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\left[\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\right)^2 \right.\\ &\quad \left. + \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\right)^2\right].\end{aligned}$$

În final, presupunând că punctele A, B şi C sunt în planul (xOy) determinat de originea O şi de vectorii $\bar{i}$ şi $\bar{j}$, această formulă devine

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

□

Propoziţia 2.23. *Volumul tetraedrului cu vârfurile* $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ *şi* $D(x_4, y_4, z_4)$ *este*

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Demonstraţie. Volumul tetraedrului construit pe $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AD}$ este

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$

Avem

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2-x_1)\cdot\bar{i} + (y_2-y_1)\cdot\bar{j} + (z_2-z_1)\cdot\bar{k},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (x_3 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_3 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_3 - z_1) \cdot \bar{k},$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (x_4 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_4 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_4 - z_1) \cdot \bar{k}$$

şi

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right|.$$

Din proprietăţile determinanţilor rezultă

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

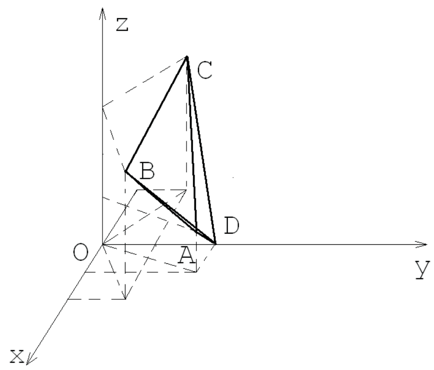
$$\underset{L_4+L_1}{\overset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3+L_1}}{=}} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exemplul 2.5. Fie punctele $A(1,2,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-2,1,3)$ şi $D(0,2,0)$. Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$, aria triunghiului $\triangle BCD$ şi distanţa de la punctul A la planul (BCD).

Volumul tetraedrului este

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = 1.$$



Aria triunghiului $\triangle BCD$ este

$$\mathcal{A}_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)^2},$$

adică, $\mathcal{A}_{\triangle BCD} = 2 \cdot \sqrt{10}$.

Distanţa de la punctul A la planul (BCD) este egală cu lungimea h a înălţimii din A a tetraedrului $ABCD$. Avem

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \mathcal{A}_{\triangle BCD},$$

de unde rezultă

$$d(A, (BCD)) = h = \frac{3 \cdot V}{\mathcal{A}_{\triangle BCD}} = \frac{3 \cdot \sqrt{10}}{20}.$$

CAPITOLUL 3

DREAPTA ÎN PLAN

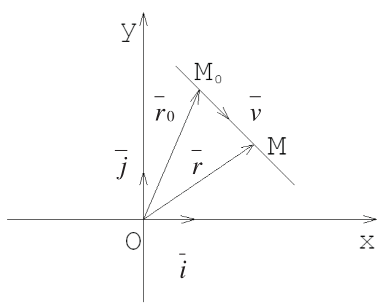
Dreapta în plan este studiată cu ajutorul geometriei analitice încă din clasele liceale. În acest capitol vom reaminti (şi uneori demonstra) unele rezultate deja cunoscute cititorilor şi le vom adăuga unele noi, care vor veni să completeze studiul acestui subiect.

1. Reprezentări analitice ale dreptelor în plan

O dreaptă poate fi determinată în mai multe moduri: cunoscând un punct de pe dreaptă şi vectorul ei director, cunoscând două puncte distincte de pe dreptă sau cunoscând distanţa de la originea reperului cartezian considerat la dreaptă şi versorul normal la aceasta. Vom studia în continuare fiecare din aceste cazuri şi vom găsi ecuaţiile dreptelor obţinute.

Vom folosi în întregul capitol reperul ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ şi axele de coordonate corespunzătoare (Ox) şi (Oy).

1.1. Dreapta determinată de un punct şi vectorul director. Considerăm dreapta (d) pentru care cunoaştem punctul $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ şi vectorul $\bar{v} \parallel (d)$, $\bar{v} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j}$, cu $a^2 + b^2 > 0$, care se numeşte *vectorul director* al lui (d). Considerăm $M(x, y)$ un punct oarecare pe dreapta (d). Notăm vectorii de poziţie ai punctelor M_0 şi M cu $\bar{r}_0$ şi respectiv $\bar{r}$.



Din faptul că $\bar{v}$ este vectorul director al dreptei (d) urmează că $\overrightarrow{MM_0} \parallel \bar{v}$, adică $\overrightarrow{MM_0} = \lambda \cdot \bar{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Avem

$$\overrightarrow{MM_0} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = r - r_0 = (x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j}$$

şi atunci obţinem condiţia necesară şi suficientă (în forma sa vectorială) ca punctul $M(x, y)$ să aparţină dreptei (d), adică *ecuaţia vectorială* a dreptei (d):

$$(d) : \bar{r} - \bar{r}_0 = \lambda \cdot \bar{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind vectorii $\bar{r} - \bar{r}_0$ şi $\bar{v}$ în ecuaţia vectorială rezultă

$$(x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j} = \lambda \cdot a \cdot \bar{i} + \lambda \cdot b \cdot \bar{j}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

şi, mai departe, *ecuaţiile parametrice* ale dreptei (d):

$$(d) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot a \\ y = y_0 + \lambda \cdot b \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eliminând λ între cele două ecuaţii de mai sus obţinem *ecuaţia canonică* a dreptei (d):

$$(d) : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

De aici rezultă *ecuaţia redusă* a dreptei (d):

$$(d) : y = m \cdot x + n,$$

unde $m = \frac{b}{a}$ se numeşte *panta* dreptei (d) şi $n = y_0 - \frac{b}{a} \cdot x_0$.

Deoarece, aşa cum am văzut, ecuaţia unei drepte este o ecuaţie de gradul 1 putem scrie *ecuaţia generală* a unei drepte în plan

$$(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0,$$

unde A, B şi C sunt constante reale astfel încât A şi B nu se anulează simultan (această ultimă condiţie poate fi scrisă $A^2 + B^2 > 0$). Se observă că, în cazul în care drepta (d) este dată prin ecuaţia generală, atunci panta sa este $m = -\frac{A}{B}$.

Observaţia 3.1. Este evident, din modul în care au fost determinate, că toate formele ecuaţiei unei drepte în plan deduse aici sunt echivalente.

Exemplul 3.1. Să se scrie ecuaţia dreptei (d) din plan al cărei vector director este $\bar{v} = 4 \cdot \bar{i} - 2\bar{j}$ ştiind că $M_0(1, 1) \in (d)$.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei (d) sunt

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + 4 \cdot \lambda \\ y = 1 - 2 \cdot \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia canonică este

$$(d) : \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1}{-2},$$

iar cea redusă

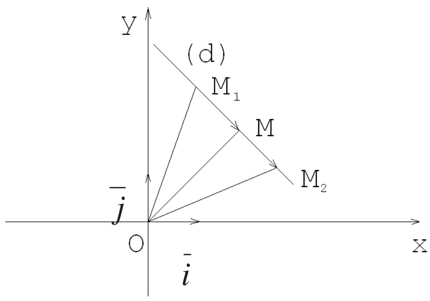
$$(d) : y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}.$$

Din această ultimă ecuaţie vedem că panta dreptei este $m = -\frac{1}{2}$.

În final, ecuaţia generală a dreptei (d) poate fi scrisă

$$(d) : x + 2 \cdot y - 3 = 0.$$

1.2. Dreapta determinată de două puncte distincte. În continuare fie dreapta (d) şi punctele distincte $M_1(x_1, y_1) \in (d)$ şi $M_2(x_2, y_2) \in (d)$. Notăm cu $\bar{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ şi cu $\bar{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ vectorii de poziţie ai celor două puncte. Considerăm un punct oarecare $M(x, y)$ pe dreaptă şi $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ vectorul său de poziţie.



Din faptul că punctele M_1, M_2 şi M sunt coliniare rezultă că segmentele orientate $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M}$ sunt coliniare, adică $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ţinând cont că

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \bar{r} - \bar{r}_1 = (x - x_1) \cdot \bar{i} + (y - y_1) \cdot \bar{j}$$

şi

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j},$$

obţinem *ecuaţia vectorială* a dreptei (d):

$$(d) : \bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Folosind în această ecuaţie expresiile vectorilor de poziţie în baza $\mathcal{B}$ avem *ecuaţiile parametrice* ale dreptei (d):

$$(d) : \begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia canonică a dreptei (d) se obţine eliminând parametrul λ între cele două ecuaţii:

$$(d) : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Ecuaţia canonică poate fi pusă şi sub forma

$$(d) : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau, procedând la fel ca în cazul calculului ariei unui triunghi efectuat în capitolul precedent,

$$(d) : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În sfârşit, *ecuaţia redusă* a dreptei (d) este, în acest caz,

$$(d): y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1.$$

OBSERVAŢIA 3.2. În acest caz de determinare a unei drepte, panta dreptei va fi $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Dacă $x_2 = x_1 = \alpha = \text{constant} \in \mathbb{R}$ atunci ecuaţia dreptei va fi

$$(d): x = \alpha = \text{constant} \in \mathbb{R},$$

şi, astfel, $(d) \parallel (Oy)$.

OBSERVAŢIA 3.3. Este evident că, în cazul dreptei determinate de punctele M_1 şi M_2, vectorul director va fi $\bar{v} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j}$.

EXEMPLUL 3.2. Să se scrie ecuaţia dreptei din plan determinată de punctele $M_1(1,2)$ şi $M_2(-1,3)$. Să se determine vectorul director al acestei drepte şi panta ei.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei (d) sunt

$$(d): \begin{cases} x = 1 + (-1-1) \cdot \lambda = 1 - 2 \cdot \lambda \\ y = 2 + (3-2) \cdot \lambda = 2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

iar ecuaţia sa canonică este

$$(d): \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{3-2} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1}.$$

De aici se observă că vectorul director al dreptei (d) este $\bar{v} = -2 \cdot \bar{i} + \bar{j}$.

Ecuaţia redusă a dreptei va fi

$$(d): y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2},$$

deci panta lui (d) este $m = -\frac{1}{2}$. Avem şi ecuaţia generală

$$(d): x + 2 \cdot y - 5 = 0.$$

1.3. Ecuaţia normală a unei drepte. Fie dreapta (d) pentru care cunoaştem versorul normal la dreaptă, adică vectorul liber $\bar{n} \perp (d)$ cu $\|\bar{n}\| = 1$ şi $(\widehat{\bar{n}, \bar{i}}) = \alpha \in [0, 2\pi)$. Astfel, versorul $\bar{n}$ va fi dat de

$$\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}.$$

Presupunem ca fiind cunoscută şi distanţa $d(O,(d)) = p \geq 0$ de la originea O la dreapta (d).

Considerăm punctul $P \in (d)$, proiecţia lui O pe dreapta (d), şi avem $\|\overrightarrow{OP}\| = p$, adică

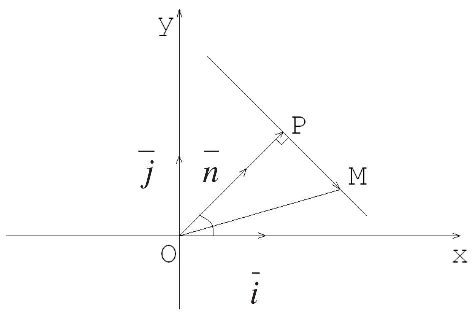
$$\overrightarrow{OP} = p \cdot \bar{n} = p \cdot \cos\alpha \cdot \bar{i} + p \cdot \sin\alpha \cdot \bar{j}.$$

Acum, un punct $M(x,y)$ aparţine dreptei (d) dacă şi numai dacă $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{PM}$, adică $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$. Dar

$$\overrightarrow{PM} = (x - p \cdot \cos\alpha) \cdot \bar{i} + (y - p \cdot \sin\alpha) \cdot \bar{j}$$

şi atunci avem

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$$



$$\Leftrightarrow p \cdot \cos\alpha \cdot (x - p \cdot \cos\alpha) + p \cdot \sin\alpha \cdot (y - p \cdot \sin\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot p \cdot \cos\alpha + y \cdot p \cdot \sin\alpha - p^2 \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0$$

de unde rezultă *ecuaţia normală* a dreptei:

$$(d) : x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.$$

2. Unghiul a două drepte

Fie dreptele (d_1) şi (d_2) în plan date prin ecuaţiile canonice

$$(d_1) : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1}, \quad (d_2) : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2}. \tag{3.1}$$

Vectorii directori ai acestor drepte vor fi $\bar{v}_1 = a_1 \cdot \bar{i} + b_1 \cdot \bar{j}$ şi respectiv $\bar{v}_2 = a_2 \cdot \bar{i} + b_2 \cdot \bar{j}$. Cum unghiul φ făcut de cele două drepte coincide, în mod evident, cu unghiul dintre vectorii lor directori, avem

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}_2}) = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_1\| \cdot \|\bar{v}_2\|} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Avem următorul rezultat imediat.

Propoziţia 3.1. *Dreptele (d_1) şi (d_2) date de ecuaţiile* (3.1) *sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$.*

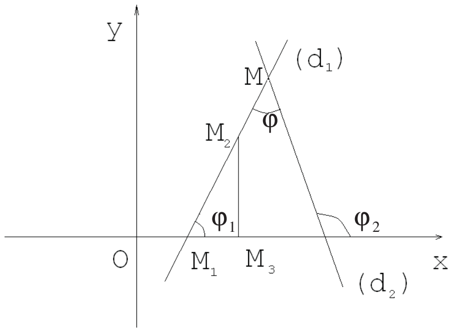
Aşa cum ştim, vectorii liberi $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ şi atunci avem următorul rezultat.

Propoziţia 3.2. *Dreptele (d_1) şi (d_2) date de ecuaţiile* (3.1) *sunt paralele sau coincid dacă şi numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.*

În continuare considerăm dreptele (d_1) şi (d_2) în plan date prin ecuaţiile reduse

$$(d_1) : y = m_1 \cdot x + n_1, \quad (d_2) : y = m_2 \cdot x + n_2.$$

Notăm cu φ_1 şi cu φ_2 unghiurile făcute de dreptele (d_1) şi respectiv (d_2) cu vectorul $\bar{i}$ şi cu $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ unghiul dintre cele două drepte.



Fie $\{M_1(x_1,0)\} = (d_1) \cap (Ox)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ un alt punct de pe dreapta (d_1). Atunci panta dreptei va fi $m_1 = \frac{y_2}{x_2 - x_1}$. Proiectăm punctul M_2 pe axa (Ox) în punctul $M_3(x_2, 0)$ şi, în $\triangle M_1M_2M_3$, avem

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(\widehat{M_2M_1M_3}) = \frac{\|\overrightarrow{M_2M_3}\|}{\|\overrightarrow{M_1M_3}\|} = \frac{y_2}{x_2 - x_1} = m_1, \quad \text{dacă } \varphi_1 \in [0, \frac{\pi}{2})$$

şi

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi_1) = -\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_2}{x_1 - x_2} = -m_1, \quad \text{dacă } \varphi_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi].$$

Acum, dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$ atunci $\operatorname{tg}\varphi_1 \to \infty$, dreapta (d_1) este perpendiculară pe axa (Ox) şi, în acest caz, are ecuaţia $(d_1) : x = \text{constant}$ adică $m_1 \to \infty$.
În concluzie $\operatorname{tg}\varphi_1 = m_1$ şi, analog pentru drepta (d_2), avem $\operatorname{tg}\varphi_2 = m_2$.

Acum este clar că avem $\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$ şi, mai departe, obţinem unghiul dintre cele două drepte astfel

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}|\varphi_2 - \varphi_1| = \frac{|\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1|}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{|m_2 - m_1|}{1 + m_1 \cdot m_2}.$$

Din această formulă avem

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

şi

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi \to \infty \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1,$$

adică următoarele două propoziţii.

Propoziţia 3.3. *Două drepte în plan sunt paralele dacă şi numai dacă pantele lor sunt egale.*

Propoziţia 3.4. *Două drepte în plan sunt perpendiculare dacă şi numai dacă produsul pantelor lor este egal cu -1.*

În final, dacă avem dreptele

$$(d_1) : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0, \quad (d_2) : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0, \tag{3.2}$$

în plan, atunci pantele lor sunt $m_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ şi respectiv $m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. Prin urmare $m_1 = m_2$ dacă şi numai dacă $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$. Dacă, în plus, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ atunci este clar că dreptele coincid.

Propoziţia 3.5. *Dreptele* (d_1) *şi* (d_2) *date de ecuaţiile* (3.2) *sunt paralele dacă şi numai dacă*

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Dreptele (d_1) *şi* (d_2) *coincid dacă şi numai dacă*

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

3. Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie dreapta (d) în plan dată prin ecuaţia generală

$$(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0.$$

Căutăm ecuaţia normală a lui (d) de forma

$$(d) : x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.$$

Această operaţiune poartă numele de *normalizarea ecuaţiei dreptei* (d).
Cum cele două ecuaţii determină aceeaşi dreptă, avem

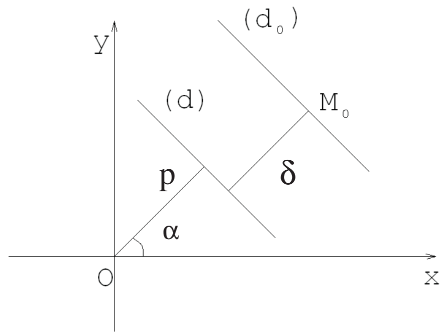
$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = -\frac{p}{C} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

de unde rezultă $\cos\alpha = \lambda \cdot A$, $\sin\alpha = \lambda \cdot B$ şi $-p = \lambda \cdot C$. Din $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ urmează $\lambda^2 \cdot (A^2 + B^2) = 1$, adică $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Astfel

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad -p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Am obţinut ecuaţia normală a dreptei (d):

$$(d) : \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$



În continuare, fie punctul $M_0(x_0, y_0)$ în plan şi notăm cu $\delta = d(M_0, (d))$ distanţa de la M_0 la dreapta (d). Considerăm dreapta (d_0) în plan astfel încât $M_0 \in (d_0)$ şi $(d_0) \parallel (d)$. Rezultă că distanţa dintre cele două drepte este egală cu δ şi atunci distanţa de la O la (d_0) va fi egală cu $p \pm \delta$. Din $(d_0) \parallel (d)$, avem ecuaţia normală a dreptei (d_0):

$$(d_0) : x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - (p \pm \delta) = 0.$$

Acum, din $M_0(x_0, y_0) \in (d_0)$, rezultă $x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \sin\alpha - (p \pm \delta) = 0$ de unde obţinem $\pm\delta = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p$, adică $\delta = |x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p|$. Aşa cum am văzut mai sus,

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad -p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

şi, în concluzie, avem formula distanţei de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la dreapta $(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0$

$$\delta = d(M_0, (d)) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Exemplul 3.3. Să se determine distanţa de la punctul $M_0(1, 2)$ la dreapta (d) care trece prin punctele $M_1(1, 0)$ şi $M_2(3, -1)$.

Ecuaţia canonică a dreptei (d) este

$$(d) : \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{-1},$$

iar ecuaţia sa generală este

$$(d) : x + 2 \cdot y - 1 = 0.$$

Prin urmare distanţa căutată va fi

$$\delta = d(M_0, (d)) = \frac{|1 + 4 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}.$$

4. Fascicule de drepte în plan

Definiţia 3.1. Fie dreptele concurente (d_1) şi (d_2) în plan şi fie M_0 punctul lor de intersecţie. Mulţimea tuturor dreptelor din plan care trec prin punctul M_0 se numeşte *fasciculul* de drepte determinat de (d_1) şi (d_2).

Propoziţia 3.6. *Ecuaţia unei drepte din fasciculul determinat de dreptele concurente*

$$(d_1) : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \quad \text{şi} \quad (d_2) : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$$

este

$$(d) : \alpha \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1) + \beta \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2) = 0,$$

unde α şi β sunt doi parametri reali oarecare.

Demonstraţie. Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul de intersecţie al dreptelor (d_1) şi (d_2) şi fie $(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ o dreaptă din fasciculul determinat de (d_1) şi (d_2). Atunci coordonatele punctului M_0 verifică sistemul format din ecuaţiile celor trei drepte

$$\begin{cases} A_1 \cdot x & + & B_1 \cdot y & = & -C_1 \\ A_2 \cdot x & + & B_2 \cdot y & = & -C_2 \\ A \cdot x & + & B \cdot y & = & -C \end{cases},$$

a cărui matrice asociată este $E = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A & B \end{pmatrix}$ cu $\operatorname{rang} E \leq 2$. Matricea extinsă a sistemului este $\bar{E} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -C_1 \\ A_2 & B_2 & -C_2 \\ A & B & -C \end{pmatrix}$. Deoarece acest sistem este compatibil urmează că $\operatorname{rang} \bar{E} = \operatorname{rang} E \leq 2$, adică $\det \bar{E} = 0$. Din proprietăţile determinanţilor rezultă că linia a treia a acestui determinant este o combinaţie liniară a celorlalte două, adică există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$A = \alpha \cdot A_1 + \beta A_2, \quad B = \alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2, \quad C = \alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exemplul 3.4. Să se găsească dreapta din fasciculul determinat de $(d_1) : x + y - 2 = 0$ şi $(d_2) : 2 \cdot x - y = 0$ care este perpendiculară pe dreapta $(d_3) : 2 \cdot x + y - 1 = 0$.

Mai întâi vom verifica dacă una din dreptele (d_1) sau (d_2) este perpendiculară pe (d_3). Panta dreptei (d_3) este $m_3 = -2$, iar pantele dreptelor (d_1) şi (d_2) sunt $m_1 = -1$ şi respectiv $m_2 = 2$. Cum două drepte sunt perpendiculare dacă şi numai dacă produsul pantelor lor este egal cu -1 rezultă că nici (d_1) şi nici (d_2) nu sunt perpendiculare pe (d_3).

În continuare fie o dreaptă oarecare (d) din fascicul:

$$(d) : \alpha \cdot (x + y - 2) + \beta \cdot (2x - y) = 0, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Deoarece nici una din dreptele (d_1) şi (d_2) nu este dreapta căutată atunci $\alpha \neq 0$ şi $\beta \neq 0$. Astfel ecuaţia dreptei (d) poate fi scrisă

$$(d) : x + y - 2 + \lambda \cdot (2x - y) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot \lambda + 1) \cdot x - (\lambda - 1) \cdot y - 2 = 0,$$

unde $\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$. Prin urmare panta lui (d) este $m = \frac{2 \cdot \lambda + 1}{\lambda - 1}$ şi $(d) \perp (d_3)$ dacă şi numai dacă

$$m \cdot m_3 = -1 \Leftrightarrow -2 \cdot \frac{2 \cdot \lambda + 1}{\lambda - 1} = -1,$$

adică $\lambda = -1$. Am obţinut ecuaţia dreptei căutate:

$$(d) : -x + 2 \cdot y - 2 = 0.$$

CAPITOLUL 4

PLANUL ŞI DREAPTA ÎN SPAŢIU

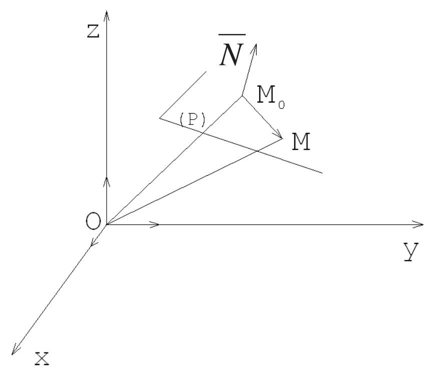
Acest capitol este dedicat studiului planului şi dreptei privite ca submulţimi ale spaţiului. Determinarea ecuaţiilor acestora, a proprietăţilor lor geometrice atunci când le sunt cunoscute ecuaţiile, găsirea unor formule de calcul pentru distanţe în spaţiu sunt câteva dintre problemele pe care le vom rezolva în continuare.

În general, în acest capitol, vom folosi reperul ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$ şi axele de coordonate corespunzătoare (Ox), (Oy) şi (Oz).

1. Reprezentări analitice ale planului

1.1. Planul determinat de un punct şi vectorul normal. Fie planul (P) în spaţiu, pentru care cunoaştem punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (P)$ şi vectorul $\bar{N}$ a cărui direcţie este perpendiculară pe (P), numit vector normal la plan, dat de $\bar{N} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k}$, cu $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ (pe scurt $\bar{N}(A, B, C)$). Considerăm un punct oarecare $M(x, y, z) \in (P)$. Notăm cu $\bar{r}_0$ şi $\bar{r}$ vectorii de poziţie ai punctelor M_0 şi respectiv M şi avem

$$\bar{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = x_0 \cdot \bar{i} + y_0 \cdot \bar{j} + z_0 \cdot \bar{k}, \quad \bar{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$



Acum, condiţia $M \in (P)$ este echivalentă cu $\bar{N} \perp \overrightarrow{M_0M}$ şi, mai departe, cu $\bar{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Deoarece

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \bar{r} - \bar{r}_0 = (x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j} + (z - z_0) \cdot \bar{k}$$

am obţinut *ecuaţia vectorială* a planului (P):

$$(P) : \bar{N} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$$

Înlocuind vectorii $\bar{N}$ şi $\bar{r}-\bar{r}_0$ cu expresiile lor în baza $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ avem *ecuaţia canonică* a planului (P):

$$(P) : A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0.$$

Notând $D = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0$, rezultă *ecuaţia generală* a planului (P):

$$(P) : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0.$$

Cazuri particulare. În continuare vom pune în evidenţă, cu ajutorul ecuaţiei generale a unui plan, câteva cazuri particulare importante, şi anume cazul în care originea reperului cartezian aparţine planului şi cazurile când planul este paralel cu unul din planele de coordonate.

(1) Dacă punctul $O(0, 0, 0)$ aparţine planului $(P) : A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D = 0$, atunci urmează că $D = 0$ şi ecuaţia lui (P) este, în acest caz,

$$(P) : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0.$$

(2) Dacă $(P) \parallel (xOy)$ atunci, evident, vectorul $\bar{k}(0, 0, 1)$ este normal la planul (P) şi ecuaţia acestuia devine

$$(P) : z + D = 0.$$

(3) Dacă $(P) \parallel (xOz)$ atunci vectorul normal la (P) poate fi considerat $\bar{j}(0, 1, 0)$ şi ecuaţia planului este

$$(P) : y + D = 0.$$

(4) Dacă $(P) \parallel (yOz)$ atunci $\bar{i}(1, 0, 0)$ este normal la plan şi atunci acesta va avea ecuaţia

$$(P) : x + D = 0.$$

Exemplul 4.1. Să se determine ecuaţia planului (P) ştiind că $(P) \parallel (Oz)$ şi $M_1(1, 2, 1), M_2(1, -1, 1) \in (P)$.

Căutăm ecuaţia planului în forma sa generală $(P) : A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D = 0$. Un vector normal la plan va fi $\bar{N}(A, B, C)$. Deoarece $(P) \parallel (Oz)$, urmează că $\bar{N} \perp \bar{k}$, adică $\bar{N} \cdot \bar{k} = 0$, de unde obţinem $C = 0$. Impunând ca $M_1 \in (P)$ şi $M_2 \in (P)$, rezultă

$$\begin{cases} A + 2B + D = 0 \\ A - B + D = 0 \end{cases}.$$

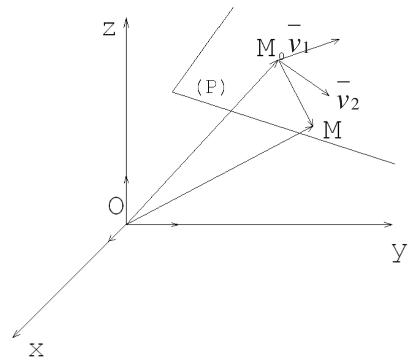
Matricea acestui sistem are rangul egal cu 2 şi putem alege ca necunoscute principale A şi B, obţinând $B = 0$ şi $A = -D$. În concluzie avem ecuaţia planului (P):

$$(P) : -D \cdot x + D = 0 \Leftrightarrow (P) : x - 1 = 0.$$

Se observă şi că planul (P) este paralel cu planul (yOz).

1.2. Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari. Considerăm planul (P) pentru care cunoaştem un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (P)$ şi doi vectori liberi $\bar{v}(a_1, b_1, c_1) \parallel (P)$ şi $\bar{v}_2(a_2, b_2, c_2) \parallel (P)$ având direcţiile paralele cu planul.

Atunci un punct oarecare $M(x, y, z)$ aparţine planului (P) dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{M_0M}$, $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sunt coplanari, adică, dacă şi numai dacă $(\overrightarrow{M_0M}, \bar{v}_1, \bar{v}_2) = 0$.



Folosind

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \bar{r} - \bar{r}_0 = (x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j} + (z - z_0) \cdot \bar{k},$$

unde $\bar{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ şi $\bar{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = x_0 \cdot \bar{i} + y_0 \cdot \bar{j} + z_0 \cdot \bar{k}$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor M şi respectiv M_0, obţinem *ecuaţia vectorială* a planului:

$$(P) : (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{v}_1, \bar{v}_2) = 0.$$

De aici rezultă *ecuaţia canonică* a lui (P):

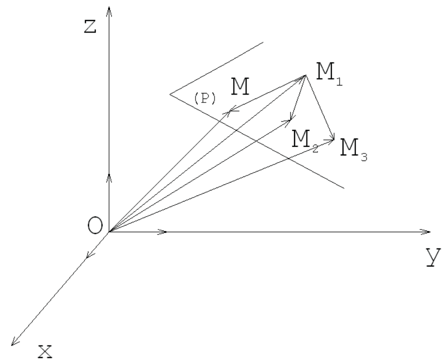
$$(P) : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

1.3. Planul determinat de trei puncte necoliniare. Mai întâi avem următorul rezultat, cunoscut încă din lecţiile de geometrie sintetică din clasele gimnaziale.

PROPOZIŢIA 4.1. *Trei puncte necoliniare din spaţiu determină în mod unic un plan, adică există un singur plan care conţine cele trei puncte.*

În continuare considerăm planul (P) în spaţiu determinat de punctele necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $M_3(x_3, y_3, z_3)$ şi fie punctul $M(x, y, z) \in (P)$. Această ultimă condiţie este echivalentă cu faptul că segmentele orientate $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$ sunt coplanare. Condiţia de coplanaritate a celor trei segmente orientate este

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$



Dacă notăm cu $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$, $\bar{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $\bar{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ şi $\bar{r}_3 = \overrightarrow{OM_3}$ vectorii de poziţie ai punctelor M, M_1, M_2 şi respectiv M_3, avem

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \bar{r} - \bar{r}_1 = (x - x_1)\cdot\bar{i} + (y - y_1)\cdot\bar{j} + (z - z_1)\cdot\bar{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1)\cdot\bar{i} + (y_2 - y_1)\cdot\bar{j} + (z_2 - z_1)\cdot\bar{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1} = \bar{r} - \bar{r}_1 = (x_3 - x_1)\cdot\bar{i} + (y_3 - y_1)\cdot\bar{j} + (z_3 - z_1)\cdot\bar{k}$$

şi atunci, din condiţia de coplanaritate, obţinem *ecuaţia vectorială* a planului (P) determinat de trei puncte necoliniare:

$$(P) : (\bar{r} - \bar{r}_1, \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0.$$

Folosind expresia analitică a produsului mixt avem *ecuaţia canonică* a planului prin trei puncte necoliniare

$$(P) : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (P) : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

unde am folosit aceeaşi metodă pentru transformarea determinantului ca în calculele similare efectuate în capitolul *Repere*.

Observaţia 4.1. Această ultimă formă a ecuaţiei unui plan poate fi obţinută şi astfel: considerăm tetraedrul $MM_1M_2M_3$ al cărui volum este

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Este clar că punctele sunt coplanare, adică $M \in (P)$, dacă şi numai dacă tetraedrul este degenerat, adică volumul său se anulează.

Observaţia 4.2. Un caz particular interesant este cel al planului determinat de intersecţiile sale cu axele de coordonate. Presupunem că planul (P) este determinat de punctele $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ şi $M_3(0, 0, c)$. Atunci ecuaţia sa este

$$(P): \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

iar, după calculul determinantului, obţinem *ecuaţia planului prin tăieturi*:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Se observă, folosind ecuaţia generală a unui plan, că un vector normal la (P) este $\bar{N}(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$.

EXEMPLUL 4.2. Să se determine ecuaţia planului care trece prin punctele $M_1(1,2,3)$, $M_2(1,1,1)$ şi $M_3(0,2,0)$.

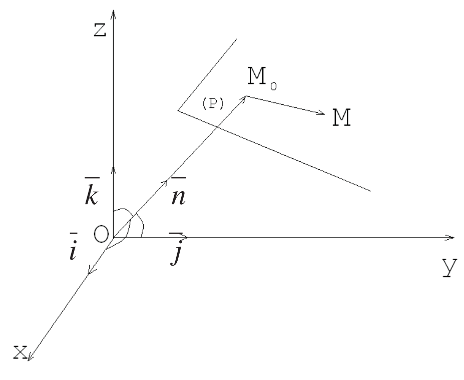
Ecuaţia planului căutat este

$$(P): \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (P): 3 \cdot x + 2 \cdot y - z - 4 = 0.$$

1.4. Ecuaţia normală a unui plan. Fie planul (P) pentru care cunoaştem versorul normal, adică vectorul normal la plan $\bar{n} \perp (P)$ cu $\|\bar{n}\| = 1$ şi $(\widehat{\bar{n}, \bar{i}}) = \alpha \in [0, \pi]$, $(\widehat{\bar{n}, \bar{j}}) = \beta \in [0, \pi]$ şi $(\widehat{\bar{n}, \bar{k}}) = \gamma \in [0, \pi]$. Prin urmare, aşa cum am văzut în capitolul *Repere*, versorul $\bar{n}$ va fi

$$\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k},$$

unde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Presupunem că este cunoscută şi distanţa $d(O, (P)) = p \geq 0$ de la originea O a reperului cartezian la plan.



Considerăm proiecţia $M_0 \in (P)$ a lui O pe plan şi avem $\|\overrightarrow{OM_0}\| = p$ şi, apoi,

$$\overrightarrow{OM_0} = p \cdot \bar{n} = p \cdot \cos\alpha \cdot \bar{i} + p \cdot \cos\beta \cdot \bar{j} + p \cdot \cos\gamma \cdot \bar{k}.$$

Un punct $M(x, y, z)$ aparţine planului (P) dacă şi numai dacă $\overrightarrow{OM_0} \perp \overrightarrow{M_0M}$, adică $\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Dar

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - p \cdot \cos\alpha) \cdot \bar{i} + (y - p \cdot \cos\beta) \cdot \bar{j} + (z - p \cdot \cos\gamma) \cdot \bar{k}$$

şi avem

$$\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$\Leftrightarrow p \cdot \cos\alpha \cdot (x - p \cdot \cos\alpha) + p \cdot \cos\beta \cdot (y - p \cdot \cos\beta) + p \cdot \cos\gamma \cdot (z - p \cdot \cos\gamma) = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot p \cdot \cos\alpha + y \cdot p \cdot \cos\beta + z \cdot p \cdot \cos\gamma - p^2 \cdot (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 0,$

de unde rezultă *ecuaţia normală* a planului (P):

$$(P) : x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0.$$

1.5. Poziţia relativă a două plane. Considerăm următoarele două plane date prin ecuaţiile lor în forma generală

$(P_1) : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ şi $(P_2) : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0.$

Un punct $M(x, y, z)$ aparţine ambelor plane dacă şi numai dacă sistemul

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}$$

este satisfăcut de coordonatele sale. Matricea acestui sistem este

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix},$$

iar matricea extinsă $\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$. Deoarece $\operatorname{rang} A < 3$, sistemul nu poate fi compatibil determinat, adică două plane nu se pot intersecta într-un singur punct.

Acum, dacă rangul matricei A este egal cu 1 rezultă că $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Dacă, în plus, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1}{D_2}$ atunci avem şi $\operatorname{rang} \bar{A} = 1$, sistemul are o infinitate de soluţii, şi, deoarece rezultă că planele au aceeaşi ecuaţie, ele coincid. Dacă $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ atunci $\operatorname{rang} \bar{A} = 2 \neq \operatorname{rang} A$ şi sistemul este incompatibil, prin urmare planele nu au nici un punct comun, adică sunt paralele.

Dacă $\operatorname{rang} A = 2$ atunci avem şi $\operatorname{rang} \bar{A} = 2$, deci sistemul este compatibil nedeterminat. În acest caz planele vor avea în comun cel puţin o dreaptă. Dacă planele ar avea în comun mai mult de o dreaptă atunci, evident, ar coincide, dar am văzut că, în acest caz $\operatorname{rang} A = 1$, ceea ce reprezintă o contradicţie. Prin urmare planele au în comun o dreaptă şi numai una.

PROPOZIŢIA 4.2. *Planele (P_1) şi (P_2) coincid dacă şi numai dacă*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

sunt paralele dacă şi numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

şi se intersectează după o dreptă în orice altă situaţie.

OBSERVAŢIA 4.3. Considerăm un al treilea plan $(P_3) : A_3 \cdot x + B_3 \cdot y + C_3 \cdot z + D_3 = 0$ şi căutăm punctele de intersecţie ale celor trei plane. Aceste puncte (coordonatele lor) trebuie să verifice sistemul

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \\ A_3 \cdot x + B_3 \cdot y + C_3 \cdot z + D_3 = 0 \end{cases},$$

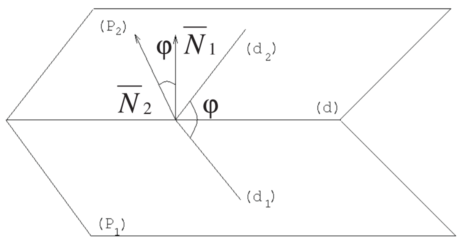
care are o singură soluţie, adică este compatibil determinat, dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prin urmare cele trei plane se intersectează într-un punct dacă şi numai dacă este verificată condiţia de mai sus.

1.6. Unghiul a două plane. Fie planele (P_1) şi (P_2) care se intersectează după dreapta (d). În planul (P_1) considerăm dreapta (d_1) perpendiculară pe (d) cu $(d_1) \cap (d) = \{M_0\}$. În planul (P_2) considerăm dreapta (d_2) astfel încât $(d_2) \perp (d)$ şi $M \in (d_2)$.

Unghiul dintre planele (P_1) şi (P_2) se notează $(\widehat{(P_1), (P_2)})$ şi este unghiul făcut de dreptele (d_1) şi (d_2) definite mai sus. Se verifică uşor că unghiul dintre două plane este bine definit, adică nu depinde de alegerea celor două drepte.



În continuare presupunem că planele (P_1) şi (P_2), date prin ecuaţiile lor generale:

$$(P_1) : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \quad \text{şi} \quad (P_2) : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0,$$

fac un unghi φ. Considerăm vectorii normali la cele două plane $\bar{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ şi respectiv $\bar{N}_2(A_2, B_2, C_2)$. Atunci unghiul dintre $\bar{N}_1$ şi vectorul director $\bar{v}_2$ al dreptei (d_2) este $\frac{\pi}{2} - \varphi$ dacă $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ sau $\varphi - \frac{\pi}{2}$ dacă $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$. Cum $\bar{N}_2 \perp \bar{v}_2$, rezultă imediat $(\widehat{\bar{N}_1, \bar{N}_2}) = \varphi$, adică unghiul făcut de cele două plane este congruent cu unghiul dintre vectorii normali. Prin urmare acest unghi este dat de

$$\cos((\widehat{P_1), (P_2})) = \cos\varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{\|\bar{N}_1\| \cdot \|\bar{N}_2\|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

DEFINIŢIA 4.1. Spunem că planele (P_1) şi (P_2) sunt perpendiculare şi scriem $(P_1) \perp (P_2)$ dacă unghiul dintre ele are măsura $\frac{\pi}{2}$.

Observaţia 4.4. Evident două plane sunt perpendiculare dacă şi numai dacă vectorii lor normali sunt perpendiculari, adică dacă şi numai dacă

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

2. Distanţa de la un punct la un plan

Considerăm planul (P) dat prin ecuaţia generală

$$(P) : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0.$$

În continuare vom normaliza această ecuaţie. Fie ecuaţia normală a lui (P)

$$(P) : x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0,$$

unde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Cele două ecuaţii determinând acelaşi plan, rezultă

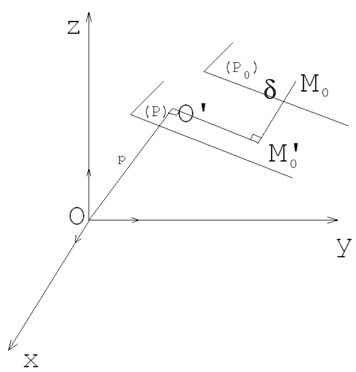
$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = -\frac{p}{D} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

de unde obţinem $\cos\alpha = \lambda \cdot A$, $\cos\beta = \lambda \cdot B$, $\cos\gamma = \lambda \cdot C$ şi $-p = \lambda \cdot D$. Din $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ urmează $\lambda^2 \cdot (A^2 + B^2 + C^2) = 1$, adică $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Astfel, avem

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad -p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Am obţinut ecuaţia normală a planului:

$$(P) : \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot (A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D) = 0.$$



În continuare, fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în spaţiu. Fie $\delta = d(M_0, (P))$ distanţa de la punctul M_0 la planul (P). Considerăm planul (P_0) astfel încât $M_0 \in (P_0)$ şi $(P_0) \parallel (P)$. Rezultă că distanţa dintre cele două plane este egală cu δ şi, astfel, distanţa de la O la planul (P_0) va fi egală cu $p \pm \delta$. Din $(P_0) \parallel (P)$, obţinem ecuaţia normală a lui (P_0):

$$(P_0) : x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - (p \pm \delta) = 0.$$

Din $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (P_0)$, rezultă $x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \cos\beta + z_0 \cdot \cos\gamma - (p \pm \delta) = 0$, de unde urmează $\pm\delta = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \cos\beta + z_0 \cdot \cos\gamma - p$, adică

$$\delta = |x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \cos\beta + z_0 \cdot \cos\gamma - p|.$$

Din ecuaţia normalizată a planului (P) avem

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad -p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

şi, în final, formula distanţei de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul (P):

$$\delta = d(M_0, (P)) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. Fascicule de plane

Definiţia 4.2. Fie planele (P_1) şi (P_2) care se intersectează după dreapta (d_0). Mulţimea tuturor planelor care conţin dreapta (d_0) se numeşte *fasciculul* de plane determinat de (P_1) şi (P_2). Dreapta (d_0) se numeşte *axa* fasciculului de plane.

Propoziţia 4.3. *Ecuaţia unui plan din fasciculul de plane determinat de*

$(P_1) : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ şi $(P_2) : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$

unde rang $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$, *este*

$(P) : \alpha \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1) + \beta \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2) = 0,$

unde α şi β sunt doi parametri reali oarecare.

Demonstraţie. Fie (d_0) dreapta de intersecţie a planelor (P_1) şi (P_2) şi fie $(P) : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ un plan din fascicul. Atunci coordonatele oricărui punct de pe dreapta (d_0) verifică sistemul format din ecuaţiile celor trei plane

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z = -D_1 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z = -D_2 \\ A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = -D \end{cases},$$

a cărui matrice asociată este $E = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{pmatrix}$ cu rang $E \le 2$, deoarece dacă rang $E = 3$ atunci planele s-ar intersecta într-un punct. Matricea extinsă a sistemului este $\bar{E} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A & B & C & -D \end{pmatrix}$. Sistemul fiind compatibil nedeterminat (coordonatele tuturor punctelor de pe drepta (d_0) îl verifică) rezultă că rang $\bar{E}$ = rang $E \le 2$. Obţinem astfel că orice linie a matricei $\bar{E}$ este o combinaţie liniară a celorlalte două, adică există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$A = \alpha \cdot A_1 + \beta A_2, \quad B = \alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2,$$

$$C = \alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2, \quad D = \alpha \cdot D_1 + \beta \cdot D_2,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exemplul 4.3. Să se determine ecuaţia planului care conţine dreapta de intersecţie a planelor $(P_1) : x + y + z + 1 = 0$ şi $(P_2) : 2 \cdot x - y + 2 \cdot z + 3 = 0$ şi este perpendicular pe planul $(P_3) : x + 2 \cdot y + 3 \cdot z - 1 = 0$.

Planul căutat (P) face parte din fasciculul de plane determinat de (P_1) şi (P_2), deci ecuaţia sa va fi

$$(P) : \alpha \cdot (x + y + z + 1) + \beta \cdot (2 \cdot x - y + 2 \cdot z + 3) = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Mai întâi vom verifica dacă unul din planele (P_1) sau (P_2) este chiar planul căutat. Pentru aceasta să ne reamintim că două plane sunt perpendiculare dacă şi numai dacă vectorii lor normali sunt ortogonali. Vectorii normali ai planelor (P_1), (P_2) şi (P_3) sunt $\bar{N}_1(1, 1, 1)$, $\bar{N}_2(2, -1, 2)$ şi respectiv $\bar{N}_3(1, 2, 3)$. Avem $\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_3 = 6$ şi $\bar{N}_2 \cdot \bar{N}_3 = 6$, adică $\bar{N}_1$ sau $\bar{N}_2$ nu sunt ortogonali pe $\bar{N}_3$ şi, astfel, nici (P_1) sau (P_2) nu sunt perpendiculare pe planul (P_3). Prin urmare în ecuaţia lui (P) avem $\alpha \neq 0$ şi $\beta \neq 0$, iar această ecuaţie se poate scrie

$$(P) : x + y + z + 1 + \lambda \cdot (2 \cdot x - y + 2 \cdot z + 3) = 0,$$

unde $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, şi, mai departe,

$$(P) : (2 \cdot \lambda + 1) \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y + (2 \cdot \lambda + 1) \cdot z + 3 \cdot \lambda + 1 = 0.$$

Din această ecuaţie rezultă că vectorul normal la planul (P) este $\bar{N}(2 \cdot \lambda + 1, 1 - \lambda, 2 \cdot \lambda + 1)$ şi, impunând $(P) \perp (P_3)$, adică $\bar{N} \perp \bar{N}_3$, avem

$$\bar{N} \cdot \bar{N}_3 = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \lambda + 6 = 0,$$

de unde obţinem $\lambda = -1$ şi ecuaţia planului căutat

$$(P) : -x + 2 \cdot y - z - 2 = 0.$$

4. Reprezentări analitice ale dreptei în spaţiu

Ca şi în cazul dreptei în plan, o dreaptă în spaţiu poate fi determinată în mai multe moduri: cunoscând un punct şi vectorul director, cunoscând două puncte distincte de pe dreaptă sau ca intersecţie a două plane.

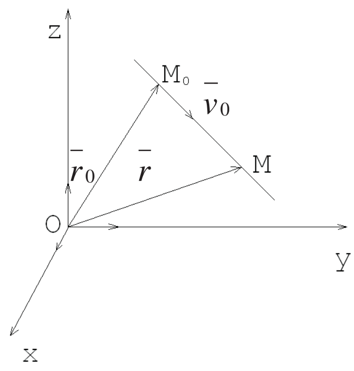
4.1. Dreapta determinată de un punct şi vectorul director. Considerăm dreapta (d) în spaţiu pentru care ştim punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (d)$ şi vectorul director $\bar{v} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$. Fie punctul oarecare $M(x, y, z)$ de pe dreapta (d). Notăm vectorii de poziţie ai punctelor M_0 şi M cu $\bar{r}_0$ şi respectiv $\bar{r}$.

Punctul M aparţine dreptei (d) dacă şi numai dacă $\overrightarrow{MM_0} \parallel \bar{v}$, de unde $\overrightarrow{MM_0} = \lambda \cdot \bar{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Avem

$$\overrightarrow{MM_0} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = r - r_0 = (x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j} + (z - z_0) \cdot \bar{k}$$

şi atunci obţinem *ecuaţia vectorială* a dreptei (d):

$$(d) : \bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda \cdot \bar{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Înlocuind $\bar{r}$, $\bar{r}_0$ şi $\bar{v}$ în această ecuaţie, rezultă

$$(x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j} + (z - z_0) \cdot \bar{k} = \lambda \cdot a \cdot \bar{i} + \lambda \cdot b \cdot \bar{j} + \lambda \cdot c \cdot \bar{k}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

şi apoi *ecuaţiile parametrice* ale dreptei (d):

$$(d) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot a \\ y = y_0 + \lambda \cdot b \\ z = z_0 + \lambda \cdot c \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eliminând λ între ecuaţiile de mai sus rezultă *ecuaţiile canonice* ale dreptei (d):

$$(d) : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

În final, din ecuaţiile canonice putem determina şi *ecuaţiile reduse* ale unei drepte în spaţiu:

$$(d) : \begin{cases} x = \alpha \cdot z + p \\ y = \beta \cdot z + q \end{cases}, \quad \alpha, \beta, p, q \in \mathbb{R},$$

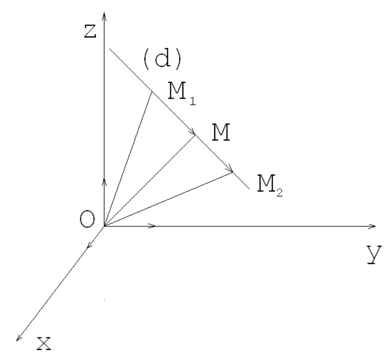
unde $\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = \frac{b}{c}$, $p = x_0 - \alpha \cdot z_0$ şi $q = y_0 - \beta \cdot z_0$.

Observaţia 4.5. Făcând $z = 0$ în ecuaţiile reduse rezultă $x = p$ şi $y = q$, adică se obţine punctul $M(p, q, 0)$, de intersecţie dintre dreapta (d) şi planul de coordonate (xOy).

4.2. Dreapta determinată de două puncte distincte. Considerăm dreapta (d) în spaţiu pentru care ştim punctele $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (d)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2) \in (d)$. Notăm cu $\bar{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ şi cu $\bar{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ vectorii de poziţie ai celor două puncte. Fie un punct oarecare $M(x, y, z)$ pe dreaptă şi $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ vectorul său de poziţie.

Din faptul că punctele M_1, M_2 şi M sunt coliniare rezultă că segmentele orientate $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M}$ sunt coliniare, adică $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ţinând cont că

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \bar{r} - \bar{r}_1 = (x - x_1) \cdot \bar{i} + (y - y_1) \cdot \bar{j} + (z - z_1) \cdot \bar{k}$$



şi

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_2 - z_1) \cdot \bar{k}$

avem *ecuaţia vectorială* a dreptei:

$$(d) : \bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind în această ecuaţie vectorii de poziţie cu expresiile lor în baza $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ obţinem *ecuaţiile parametrice* ale lui (d):

$$(d) : \begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda \cdot (z_2 - z_1) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţiile canonice ale dreptei (d) rezultă eliminând parametrul λ între cele trei ecuaţii:

$$(d) : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Observaţia 4.6. În cazul dreptei determinate de punctele M_1 şi M_2 vectorul său director va fi $\bar{v} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_2 - z_1) \cdot \bar{k}$.

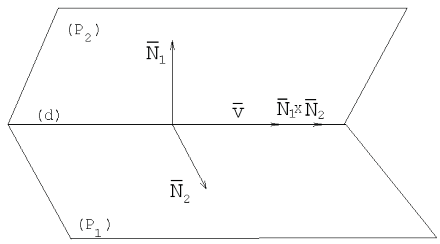
4.3. Dreapta de intersecţie a două plane. Considerăm dreapta (d), de intersecţie a planelor $(P_1) : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ şi $(P_2) : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$. Ecuaţiile acestei drepte vor fi

$$(d) : \begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases},$$

unde rangul matricei $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ este rang $A = 2$, deoarece planele (P_1) şi (P_2) nu pot fi paralele sau confundate. Aceste ecuaţii poartă numele de *ecuaţii generale* ale dreptei (d).

Una dintre problemele principale privitoare la dreptele din spaţiu date prin ecuaţiile generale este cea a determinării vectorului director al acestei drepte. Această chestiune o vom rezolva în continuare.

Deoarece $(P_1) \cap (P_2) = (d)$, dacă $\bar{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ şi $\bar{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ sunt vectorii normali la planele (P_1) şi respectiv (P_2), iar $\bar{v}(a, b, c)$ este vectorul director al dreptei (d), atunci rezultă $\bar{N}_1 \perp \bar{v}$ şi $\bar{N}_2 \perp \bar{v}$, adică vectorul $\bar{v}$ are direcţia perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\bar{N}_1$ şi $\bar{N}_2$.



Dar, prin definiţie, produsul vectorial $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2$ are direcţia perpendiculară pe acest plan. Prin urmare avem $\bar{v} \parallel (\bar{N}_1 \times \bar{N}_2)$. Calculând

$$\begin{aligned}\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k},\end{aligned}$$

obţinem ecuaţiile din care se determină coordonatele vectorului $\bar{v}(a, b, c)$:

$$\frac{a}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{b}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{c}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Exemplul 4.4. Să se determine proiecţia dreptei

$$(d) : \begin{cases} 2 \cdot x + y - z + 1 = 0 \\ x + y - 2 \cdot z = 0 \end{cases}$$

pe planul $(P) : x + y + 2 \cdot z = 0$.

Dreapta (d) este intersecţia a două plane având vectorii normali $\bar{N}_1(2, 1, -1)$ şi respectiv $\bar{N}_2(1, 1, -2)$. Vectorul director $\bar{v}$ al dreptei (d) este ortogonal pe ambii vectori normali şi, prin urmare, este coliniar cu produsul lor vectorial. Avem

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 3 \cdot \bar{j} + \bar{k}$$

şi, putem considera, $\bar{v}(-1, 3, 1)$. Pentru determinarea unui punct de pe dreaptă considerăm $x = 0$ şi, înlocuind în ecuaţiile lui (d) obţinem $y = -2$, $z = -1$, adică punctul $M_0(0, -2, -1) \in (d)$.

Acum, avem vectorul normal $\bar{N}(1, 1, 2)$ la planul (P) şi, deoarece $\bar{v} \not\parallel \bar{N}$, urmează că dreapta (d) nu este perpendiculară pe plan. Astfel proiecţia lui (d) pe planul (P) este o dreaptă pe care o vom nota (d'). Putem gândi această dreaptă ca fiind intersecţia dintre planul (P) şi planul (P') care conţine dreapta (d) şi este perpendicular pe (P). Datorită faptului că $(d) \in (P')$ rezultă că acest plan face parte din fasciculul de plane care are axa (d). Astfel ecuaţia sa va fi

$$(P') : \alpha \cdot (2 \cdot x + y - z + 1) + \beta \cdot (x + y - 2 \cdot z) = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $\bar{N} \not\parallel \bar{N}_1$ şi $\bar{N} \parallel \bar{N}_2$, rezultă că planele a căror intersecţie este (d) nu sunt perpendiculare pe (P), adică $(P') \neq (P_1)$ şi $(P') \neq (P_2)$ şi $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Atunci putem scrie ecuaţia lui (P') sub forma

$$(P') : 2 \cdot x + y - z + 1 + \lambda \cdot (x + y - 2 \cdot z) = 0,$$

adică

$$(P') : (\lambda + 2) \cdot x + (\lambda + 1) \cdot y - (2 \cdot \lambda + 1) \cdot z + 1 = 0,$$

unde $\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$. Vectorul normal la planul (P') va fi $\bar{N}'(\lambda+2, \lambda+1, -2\cdot\lambda-1)$. Planul (P') este perpendicular pe (P) dacă şi numai dacă vectorii lor normali sunt perpendiculari, adică $\bar{N} \cdot \bar{N}' = 0$, de unde obţinem $\lambda = \frac{1}{2}$. Rezultă ecuaţia lui (P')

$$(P') : \frac{5}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \cdot y - 2 \cdot z + 1 = 0$$

sau, echivalent,

$$(P') : 5 \cdot x + 3 \cdot y - 4 \cdot z + 2 = 0.$$

În final, avem ecuaţiile generale ale proiecţiei dreptei (d) pe planul (P):

$$(d') : \begin{cases} x + y + 2 \cdot z = 0 \\ 5 \cdot x + 3 \cdot y - 4 \cdot z + 2 = 0 \end{cases}.$$

5. Unghiul a două drepte

Ca şi în cazul plan, unghiul dintre două drepte în spaţiu se determină ca fiind unghiul dintre vectorii lor directori. În continuare considerăm dreptele (d_1) şi (d_2) în spaţiu date prin ecuaţiile canonice

$$(d_1) : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}, \quad (d_2) : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}.$$

Vectorii directori ai acestor drepte vor fi $\bar{v}_1(a_1, b_1, c_1)$ şi respectiv $\bar{v}_2(a_2, b_2, c_2)$. Atunci unghiul φ făcut de dreptele (d_1) şi (d_2) este dat de

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}_2}) = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_1\| \cdot \|\bar{v}_2\|} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

În final avem următoarele două cazuri particulare importante.

PROPOZIŢIA 4.4. *Dreptele (d_1) şi (d_2) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă*

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0.$$

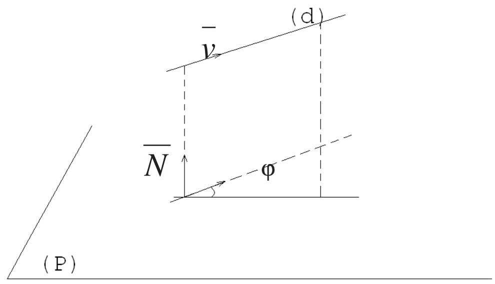
PROPOZIŢIA 4.5. *Dreptele (d_1) şi (d_2) sunt paralele dacă şi numai dacă*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

6. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Fie dreapta $(d): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ şi planul $(P): A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D = 0$. Vectorul director al dreptei va fi $\bar{v}(a,b,c)$, iar cel normal la plan $\bar{N}(A,B,C)$.

Unghiul dintre dreapta (d) şi planul (P) este, prin definiţie, unghiul dintre dreaptă şi proiecţia ei pe plan. Dacă notăm acest unghi cu $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ atunci este clar că unghiul dintre vectorul director al dreptei (d) şi cel normal la planul (P) va fi $\frac{\pi}{2} - \varphi$.



Prin urmare unghiul φ se determină din

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{N}}{\|\bar{v}\|\cdot\|\bar{N}\|} = \frac{a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Din această formulă obţinem imediat următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 4.6. *Dreapta (d) este paralelă cu planul (P) dacă şi numai dacă*

$$a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C = 0.$$

Este evident că o dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă şi numai dacă vectorul său director este paralel cu vectorul normal la plan.

PROPOZIŢIA 4.7. *Dreapta (d) este perpendiculară pe planul (P) dacă şi numai dacă*

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

7. Poziţia relativă a unei drepte faţă de un plan

Fie planul $(P): A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$ şi dreapta

$$(d): \begin{cases} A_1\cdot x + B_1\cdot y + C_1\cdot z + D_1 = 0 \\ A_2\cdot x + B_2\cdot y + C_2\cdot z + D_2 = 0 \end{cases},$$

unde matricea $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ are rangul egal cu 2.

Un punct din spaţiu aparţine şi dreptei şi planului dacă şi numai dacă are drept coordonate o soluţie a sistemului format din ecuaţiile acestora:

$$\begin{cases} A\cdot x & + & B\cdot y & + & C\cdot z & = & -D \\ A_1\cdot x & + & B_1\cdot y & + & C_1\cdot z & = & -D_1 \\ A_2\cdot x & + & B_2\cdot y & + & C_2\cdot z & = & -D_2 \end{cases}.$$

Matricea acestui sistem este $E = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, cu $\operatorname{rang} E \in \{2,3\}$, iar matricea extinsă este $\bar{E} = \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$. Dacă $\operatorname{rang} E = 3$ atunci sistemul este compatibil determinat şi dreapta (d) intersectează ("înţeapă") planul (P) într-un punct. Dacă $\operatorname{rang} \bar{E} = \operatorname{rang} E = 2$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat, adică dreapta şi planul au mai mult de un punct comun şi, prin urmare, dreapta este conţinută în plan. În sfârşit, dacă $\operatorname{rang} \bar{E} = 3$ şi $\operatorname{rang} E = 2$ sistemul este incompatibil, ceea ce înseamnă că dreapta (d) este paralelă cu planul (P).

În aplicaţii este preferabil ca pentru studiul poziţiei relative a unei drepte faţă de un plan să folosim ecuaţiile parametrice ale dreptei şi pe cea generală a planului. Astfel, dacă ecuaţiile parametrice ale dreptei (d) sunt

$$(d) : \begin{cases} x = x_0 + a\cdot\lambda \\ y = y_0 + b\cdot\lambda \\ z = z_0 + c\cdot\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

atunci coordonatele unor eventuale puncte de intersecţie ale dreptei cu planul (P) vor fi date de sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cdot\lambda \\ y = y_0 + b\cdot\lambda \\ z = z_0 + c\cdot\lambda \\ A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0 \end{cases},$$

care are soluţii dacă şi numai dacă ecuaţia

$$(a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C)\cdot\lambda + A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0 + D = 0$$

are soluţii. Dacă ecuaţia are o singură soluţie λ_0 atunci dreapta înţeapă planul în punctul $M(x = x_0 + a\cdot\lambda_0, y = y_0 + b\cdot\lambda_0, z = z_0 + c\cdot\lambda_0)$. Dacă ecuaţia are mai mult de o soluţie, atunci are o infinitate şi dreapta este conţinută în plan, iar dacă nu are nici o soluţie atunci dreapta este paralelă cu planul.

Exemplul 4.5. Se dau dreptele

$$(d_1) : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2} \quad \text{şi} \quad (d_2) : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

(1) Să se determine elementele geometrice ale celor două drepte, adică vectorii lor directori şi câte un punct de pe fiecare dintre ele.
(2) Să se determine poziţia relativă a celor două drepte şi distanţa dintre ele.

(3) Să se determine proiecţia originii O, a reperului, pe dreapta (d_2).
(4) Să se determine simetricul punctului O faţă de dreapta (d_2) şi distanţa de la O la (d_2).

(1) Dreapta (d_1) este dată prin ecuaţiile canonice şi, prin urmare, un punct de pe dreaptă este $M_1(1,0,1)$, iar vectorul său director este $\bar{v}_1(3,4,2)$.

Dreapta (d_2) este dată prin ecuaţiile sale generale, adică, din punct de vedere geometric, ca intersecţie a două plane. Normala la primul dintre acestea este $\bar{N}_1(1,1,0)$ şi normala la cel de-al doilea $\bar{N}_2(1,1,-1)$. Deoarece dreapta (d_2) se află în ambele plane atunci vectorul său director $\bar{v}_2$ va fi perpendicular pe ambele normale, $\bar{v}_2 \perp \bar{N}_1$ şi $\bar{v}_2 \perp \bar{N}_2$, deci va fi coliniar cu produsul lor vectorial, de unde rezultă

$$\bar{v}_2 \parallel (\bar{N}_1 \times \bar{N}_2).$$

Avem

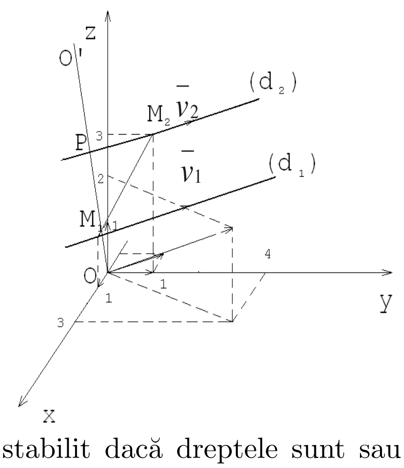
$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + \bar{j}$$

şi, este convenabil să considerăm, $\bar{v}_2 = -\bar{i} + \bar{j}$. Se observă şi faptul că (d_2) este paralelă cu planul de coordonate (xOy).

Acum, pentru găsirea coordonatelor unui punct de pe dreapta (d_2) vom determina o soluţie particulară pentru sistemul de ecuaţii care ne dau această dreaptă. Pentru aceasta vom da o valoare particulară uneia din necunoscute, să spunem $x = 0$, şi obţinem

$$\begin{cases} y = 1 \\ y - z = -2 \end{cases},$$

adică punctul $M_2(0,1,3) \in (d_2)$.



(2) Mai întâi trebuie stabilit dacă dreptele sunt sau nu coplanare. Pentru aceasta să observăm că (d_1) şi (d_2) sunt coplanare dacă şi numai dacă vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt coplanari, adică dacă şi numai dacă produsul lor mixt este egal cu 0. Avem

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = -\bar{i} + \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$$

şi, astfel,

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0.$$

În concluzie, cele două drepte nu sunt coplanare. Prin urmare distanţa dintre ele va fi egală cu lungimea segmentului tăiat de cele două drepte pe perpendiculara comună (d). Este ştiut că această perpendiculară există şi este unică. Dreapta (d) intersectând şi (d_1) şi (d_2) este coplanară cu fiecare dintre acestea, aşa că este dată ca fiind intersecţia dintre planele (P_1), care este determinat de (d) şi (d_1) şi (P_2), determinat de (d) şi (d_2). Vom găsi în continuare ecuaţiile acestor plane.

Pentru început, deoarece avem $(d) \perp (d_1)$ şi $(d) \perp (d_2)$, rezultă că vectorul director $\bar{v}$ al dreptei (d) este ortogonal pe $\bar{v}_1$ şi pe $\bar{v}_2$, adică

$$\bar{v} \parallel (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2).$$

Obţinem

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 7 \cdot \bar{k}$$

şi putem considera $\bar{v}(-2, -2, 7)$.

Planul (P_1) conţine dreptele (d) şi (d_1), deci normala sa $\bar{N}'$ este ortogonală pe $\bar{v}$ şi pe $\bar{v}_1$, adică

$$\bar{N}' \parallel (\bar{v} \times \bar{v}_1).$$

Avem

$$\bar{v} \times \bar{v}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -32 \cdot \bar{i} + 25 \cdot \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}$$

şi luăm $\bar{N}'(-32, 25, -2)$. Avem şi $M_1(1, 0, 1) \in (P_1)$ şi, prin urmare, ecuaţia acestui plan este

$$(P_1) : -32 \cdot (x-1) + 25 \cdot y - 2 \cdot (z-1) = 0 \Leftrightarrow (P_1) : -32 \cdot x + 25 \cdot y - 2 \cdot z + 69 = 0.$$

Normala $\bar{N}''$ a planului (P_2) este ortogonală pe $\bar{v}$ şi pe $\bar{v}_2$, de unde avem

$$\bar{N}'' \parallel (\bar{v} \times \bar{v}_2).$$

Avem

$$\bar{v} \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \cdot \bar{i} - 7 \cdot \bar{j} - 4 \cdot \bar{k}$$

şi luăm $\bar{N}''(7, 7, 4)$. Ţinând cont şi de $M_2(0, 1, 3) \in (P_2)$, ecuaţia planului va fi

$$(P_2) : 7 \cdot x + 7 \cdot (y-1) + 4 \cdot (z-3) = 0 \Leftrightarrow (P_2) : 7 \cdot x + 7 \cdot y + 4 \cdot z - 19 = 0.$$

Astfel am obţinut ecuaţiile generale ale dreptei (d), perpendiculara comună pentru (d_1) şi (d_2):

$$(d) : \begin{cases} -32 \cdot x + 25 \cdot y - 2 \cdot z + 34 = 0 \\ 7 \cdot x + 7 \cdot y + 4 \cdot z - 19 = 0 \end{cases}.$$

Căutăm un punct de pe dreapta (d). Pentru a-l găsi luăm în ecuaţiile de mai sus $x = 1$ (îl alegem pentru a obţine o soluţie cât mai simplă a sistemului) şi obţinem $y = \frac{8}{57}$ şi $z = \frac{157}{57}$, adică punctul $M(2, \frac{8}{57}, \frac{157}{57}) \in (d)$. Acum putem scrie ecuaţiile parametrice ale lui (d):

$$(d): \begin{cases} x = 1 - 2 \cdot \lambda \\ y = \frac{8}{57} - 2 \cdot \lambda \\ z = \frac{157}{57} + 7 \cdot \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Este evident că A, punctul de intersecţie dintre (d) şi (d_1), coincide cu punctul de intersecţie dintre (d) şi planul (P_3) care are ca vector normal vectorul $\bar{v}$ şi conţine punctul M_1. Ecuaţia acestui plan este

$$(P_3): -2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot y + 7 \cdot (z - 1) = 0 \Leftrightarrow (P_3): -2 \cdot x - 2 \cdot y + 7 \cdot z - 5 = 0.$$

Coordonatele punctului A se determină rezolvând sistemul format din ecuaţiile parametrice ale lui (d) şi ecuaţia planului (P_3):

$$\begin{cases} x = 1 - 2 \cdot \lambda \\ y = \frac{8}{57} - 2 \cdot \lambda \\ z = \frac{157}{57} + 7 \cdot \lambda \\ -2 \cdot x - 2 \cdot y + 7 \cdot z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 57 \cdot \lambda + 1 = 0.$$

Rezultă $\lambda = -\frac{12}{57}$, $x = \frac{81}{57}$, $y = \frac{32}{57}$, $z = \frac{73}{57}$, adică avem $A(\frac{81}{57}, \frac{32}{57}, \frac{73}{57})$.

Punctul B de intersecţie dintre (d) şi (d_2) este punctul de intersecţie dintre (d) şi planul (P_4) care are ca vector normal vectorul $\bar{v}$ şi conţine punctul M_2. Ecuaţia acestui plan este

$$(P_4): -2 \cdot x - 2 \cdot (y - 1) + 7 \cdot (z - 3) = 0 \Leftrightarrow (P_4): -2 \cdot x - 2 \cdot y + 7 \cdot z - 19 = 0.$$

Astfel, coordonatele punctului B satisfac sistemul:

$$\begin{cases} x = 1 - 2 \cdot \lambda \\ y = \frac{8}{57} - 2 \cdot \lambda \\ z = \frac{157}{57} + 7 \cdot \lambda \\ -2 \cdot x - 2 \cdot y + 7 \cdot z - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow 57 \cdot \lambda - 2 = 0.$$

Rezultă $\lambda = \frac{2}{57}$ şi $B(\frac{53}{57}, \frac{4}{57}, \frac{171}{57})$.

În final distanţa dintre dreptele (d_1) şi (d_2) va fi egală cu distanţa dintre punctele A şi B:

$$d((d_1), (d_2)) = d(A, B) = \frac{14\sqrt{57}}{57}.$$

(3) Fie P proiecţia punctul O pe dreapta (d_2). Atunci punctul P poate fi gândit ca fiind intersecţia dintre dreapta (d_2) şi un plan (P_5) care conţine (O) şi are ca vector normal vectorul $\bar{v}_2$. Ecuaţia acestui plan este

$$(P_5) : -x + y = 0.$$

Ecuaţiile parametrice ale dreptei (d_2) sunt:

$$(d_2) : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

iar coordonatele lui P sunt date de următorul sistem

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}.$$

Obţinem $\lambda = -\frac{1}{2}$ şi $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$.
(4) Fie O' simetricul lui O faţă de dreapta (d_2). Atunci punctul P este mijlocul segmentului OO' şi avem

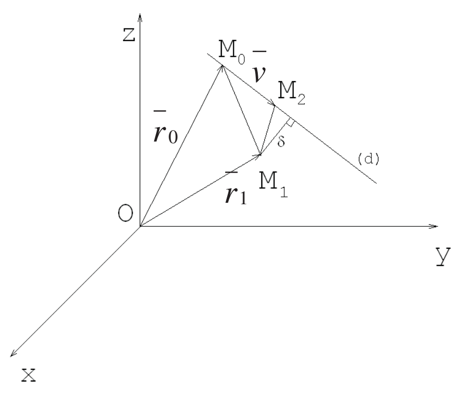
$$x_P = \frac{x_O + x_{O'}}{2}, \quad y_P = \frac{y_O + y_{O'}}{2}, \quad z_P = \frac{z_O + z_{O'}}{2},$$

de unde rezultă $O'(1, 1, 6)$.

8. Distanţa de la un punct la o dreaptă în spaţiu

Fie (d) o dreaptă în spaţiu determinată de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, cu vectorul de poziţie $\bar{r}_0 = x_0 \cdot \bar{i} + y_0 \cdot \bar{j} + z_0 \cdot \bar{k}$, şi vectorul director $\bar{v} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$. Ecuaţia vectorială a dreptei va fi

$$(d) : \bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda \cdot \bar{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Vom determina distanţa de la un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$, cu vectorul de poziţie $\bar{r}_1 = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}$, la dreapta (d). Considerăm segmentul orientat $\overrightarrow{M_0M_2} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$. Este clar că $\overrightarrow{M_0M_2}$ este un reprezentant al vectorului liber $\bar{v}$ şi, deoarece $M_0 \in (d)$, rezultă $M_2 \in (d)$. Dacă notăm $\delta = d(M_1,(d))$ atunci, în triunghiul $\triangle M_0M_1M_2$, avem

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\triangle M_0M_1M_2} &= \tfrac{1}{2}\cdot\|\overrightarrow{M_0M_1}\times\overrightarrow{M_0M_2}\| = \tfrac{1}{2}\cdot\|(\bar{r}_1-\bar{r}_0)\times\bar{v}\| \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\delta\cdot\|\overrightarrow{M_0M_2}\| = \tfrac{1}{2}\cdot\delta\cdot\|\bar{v}\|,\end{aligned}$$

de unde obţinem

$$\delta = d(M_1,(d)) = \frac{\|(\bar{r}_1-\bar{r}_0)\times\bar{v}\|}{\|\bar{v}\|}.$$

Exemplul 4.6. Să se determine distanţa de la punctul $M_1(1,1,1)$ la dreapta

$$(d):\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases}.$$

Mai întâi determinăm elementele geometrice ale dreptei (d). Deoarece dreapta este intersecţia planelor $(P_1): x+y-z+1=0$, cu normala $\bar{N}_1(1,1,-1)$, şi $(P_2): 2x+y-3z+2=0$, cu normala $\bar{N}_2(2,1,-3)$, atunci $\bar{v}\perp\bar{N}_1$ şi $\bar{v}\perp\bar{N}_2$, adică $\bar{v}\parallel(\bar{N}_1\times\bar{N}_2)$, unde $\bar{v}$ este vectorul director al lui (d). Avem

$$\bar{N}_1\times\bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2\cdot\bar{i}+\bar{j}-\bar{k},$$

deci putem considera $\bar{v}(-2,1,-1)$. Pentru a determina un punct de pe (d) vom alege $z=0$ în ecuaţiile dreptei şi avem sistemul $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$, cu soluţia $x=-1$, $y=0$. Am obţinut astfel $M_0(-1,0,0)\in(d)$.

În continuare fie punctul $M_2\in(d)$ astfel încât $\overrightarrow{M_0M_2}=\bar{v}=-2\cdot\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$ (rezultă imediat că M_2 are coordonatele $(-1,1,-1)$). Deoarece

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_0}=2\cdot\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$$

şi

$$\overrightarrow{M_0M_1}\times\overrightarrow{M_0M_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot\bar{i}+4\cdot\bar{k},$$

în triunghiul $\triangle M_0M_1M_2$ avem

$$\mathcal{A}_{\triangle M_0M_1M_2} = \frac{1}{2}\cdot\|\overrightarrow{M_0M_1}\times\overrightarrow{M_0M_2}\| = \sqrt{5}.$$

Pe de altă parte

$$\mathcal{A}_{\triangle M_0M_1M_2} = \frac{1}{2}\cdot\delta\cdot\|\overrightarrow{M_0M_2}\| = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\delta,$$

unde $\delta=d(M_1,(d))$. De aici obţinem distanţa de la M_1 la dreapta (d):

$$\delta = d(M_1,(d)) = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

CAPITOLUL 5

CERCUL ÎN PLAN

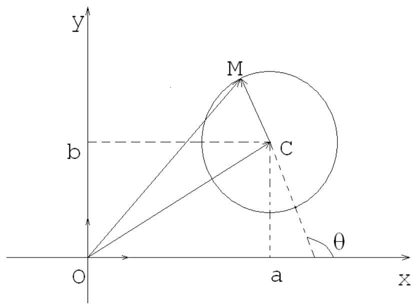
Unele probleme referitoare la cerc sunt studiate încă din clasele gimnaziale, pentru ca în liceu acestea să fie aprofundate. De aceea ne vom rezuma aici doar la prezentarea şi demonstrarea unora dintre rezultatele generale cele mai importante legate de geometria cercului. Pentru aprofundarea acestui studiu recomandăm cursul [**10**].

Vom folosi, atunci când nu vom face alte precizări, reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{\imath}, \bar{\jmath}\})$ şi sistemul de axe de coordonate (Ox), (Oy) corespunzător.

1. Reprezentări analitice ale cercului în plan

1.1. Cercul determinat de centrul şi de raza sa.

Definiţia 5.1. Locul geometric al punctelor din plan aflate la o distanţă $R > 0$ de un punct dat C din plan se numeşte *cerc* de centru C şi rază R şi se notează $\mathcal{C}(C, R)$.



Considerăm cercul $\mathcal{C}(C, R)$, unde $C(a, b)$ şi $R > 0$, şi punctul $M(x, y) \in \mathcal{C}(C, R)$. Notăm cu $\bar{r}_0 = \overrightarrow{OC} = a \cdot \bar{\imath} + b \cdot \bar{\jmath}$ vectorul de poziţie al centrului cercului şi cu $\bar{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{\imath} + y \cdot \bar{\jmath}$ vectorul de poziţie al punctului M. Atunci avem

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \bar{r} - \bar{r}_0 = (x - a) \cdot \bar{\imath} + (y - b) \cdot \bar{\jmath}$$

şi condiţia ce defineşte cercul se scrie $\|\overrightarrow{CM}\| = \|\bar{r} - \bar{r}_0\| = R$. Am obţinut astfel *ecuaţia vectorială* a cercului $\mathcal{C}(C, R)$:

$$(\mathcal{C}) : (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = R^2.$$

Calculând produsul scalar din ecuaţia de mai sus avem *ecuaţia canonică* a cercului:

$$(\mathcal{C}) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

În continuare considerăm versorul $\bar{n} = \frac{1}{R} \cdot \overrightarrow{CM}$ şi notăm cu θ unghiul dintre vectorii $\bar{i}$ şi $\bar{n}$, măsurat în sensul invers celor al acelor de ceasornic, dinspre $\bar{i}$ spre $\bar{n}$. Atunci $\theta = (\widehat{\bar{n}, \bar{i}}) \in [0, 2\pi)$ şi $\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}$. Obţinem $\overrightarrow{CM} = R \cdot \bar{n} = R \cdot (\cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j})$, adică $\bar{r} - \bar{r}_0 = R \cdot \bar{n}$ şi, mai departe, *ecuaţia parametrică* a cercului în forma sa vectorială:

$$(\mathcal{C}) : \bar{r} = \bar{r}_0 + R \cdot \bar{n},$$

de unde urmează *ecuaţiile parametrice* ale $\mathcal{C}(C, R)$:

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x = a + R \cdot \cos\theta \\ y = b + R \cdot \sin\theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi).$$

EXEMPLUL 5.1. Ecuaţia canonică a cercului din plan cu centrul în punctul $C(1, -2)$ şi de rază $R = 2$ este

$$(\mathcal{C}) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4,$$

iar ecuaţiile sale parametrice sunt

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \cos\theta \\ y = -2 + 2 \cdot \sin\theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi).$$

1.2. Ecuaţia generală a unui cerc.

PROPOZIŢIA 5.1. *Ecuaţia oricărui cerc din plan poate fi pusă sub forma*

$$\alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot y^2 + \beta \cdot x + \gamma \cdot y + \delta = 0, \tag{5.1}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\alpha \neq 0$ *şi* $\beta^2 + \gamma^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \delta > 0$, *numită* ***ecuaţia generală*** *a cercului. Reciproc,* (5.1) *este ecuaţia unui cerc în plan de centru* $C(-\frac{\beta}{2\cdot\alpha}, -\frac{\gamma}{2\cdot\alpha})$ *şi rază* $R = \frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2-4\cdot\alpha\cdot\delta}}{2\cdot|\alpha|}$.

DEMONSTRAŢIE. Fie cercul $\mathcal{C}(C, R)$ cu ecuaţia canonică

$$(\mathcal{C}) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

care se poate pune sub forma

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b \cdot y + a^2 + b^2 - R^2 = 0,$$

care este evident o ecuaţie de tipul (5.1).

Reciproc, ecuaţia (5.1) poate fi scrisă

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\cdot\alpha} \cdot x + \left(\frac{\beta}{2\cdot\alpha}\right)^2\right) + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{\gamma}{2\cdot\alpha} \cdot y + \left(\frac{\gamma}{2\cdot\alpha}\right)^2\right)$$
$$= \left(\frac{\beta}{2\cdot\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2\cdot\alpha}\right)^2 - \frac{\delta}{\alpha},$$

adică

$$\left(x + \frac{\beta}{2\cdot\alpha}\right)^2 + \left(y + \frac{\gamma}{2\cdot\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \delta}{4 \cdot \alpha^2}.$$

Este clar că aceasta este ecuaţia canonică a unui cerc cu centrul $C(-\frac{\beta}{2\cdot\alpha}, -\frac{\gamma}{2\cdot\alpha})$ şi raza $R = \frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2-4\cdot\alpha\cdot\delta}}{2\cdot|\alpha|}$. $\square$

Observaţia 5.1. Notând $p = \frac{\beta}{\alpha}$, $q = \frac{\gamma}{\alpha}$ şi $s = \frac{\delta}{\alpha}$ ecuaţia generală a unui cerc poate fi scrisă

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + p \cdot x + q \cdot y + s = 0.$$

Aceasta este *ecuaţia normală* a cercului $(\mathcal{C})$.

1.3. Cercul determinat de trei puncte necoliniare.

Propoziţia 5.2. *Considerăm trei puncte necoliniare $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ şi $M_3(x_3, y_3)$ în plan. Atunci există şi este unic un cerc care trece prin cele trei puncte, a cărui ecuaţie este*

$$(\mathcal{C}) : \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.2}$$

Demonstraţie. Mai întâi, din condiţia ca punctele M_1, M_2 şi M_3 să fie necoliniare, rezultă

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.3}$$

În continuare căutăm ecuaţia normală

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + p \cdot x + q \cdot y + s = 0$$

a unui cerc $(\mathcal{C})$ care trece prin cele trei puncte. Un al patrulea punct $M(x, y)$ aparţine acestui cerc, şi astfel, implicit, există $(\mathcal{C})$ cu proprietăţile cerute, dacă şi numai dacă următorul sistem

$$\begin{cases} x^2+y^2+p\cdot x+q\cdot y+s &= 0 \\ x_1^2+y_1^2+p\cdot x_1+q\cdot y_1+s &= 0 \\ x_2^2+y_2^2+p\cdot x_2+q\cdot y_2+s &= 0 \\ x_3^2+y_3^2+p\cdot x_3+q\cdot y_3+s &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p\cdot x+q\cdot y+s &= -x^2-y^2 \\ p\cdot x_1+q\cdot y_1+s &= -x_1^2-y_1^2 \\ p\cdot x_2+q\cdot y_2+s &= -x_2^2-y_2^2 \\ p\cdot x_3+q\cdot y_3+s &= -x_3^2-y_3^2 \end{cases},$$

în necunoscutele p, q şi s, are soluţie. Matricea sistemului şi matricea sa extinsă sunt

$$A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} x & y & 1 & -x^2 - y^2 \\ x_1 & y_1 & 1 & -x_1^2 - y_1^2 \\ x_2 & y_2 & 1 & -x_2^2 - y_2^2 \\ x_3 & y_3 & 1 & -x_3^2 - y_3^2 \end{pmatrix}.$$

Din (5.3) rezultă că rangul matricei A este $\operatorname{rang} A = 3$. Prin urmare, sistemul este compatibil dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} \bar{A} = 3$, adică dacă şi numai dacă $\det \bar{A} = 0$. Această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia (5.2). După calculul determinantului care apare în ecuaţie, se observă că aceasta este ecuaţia generală a unui cerc şi, astfel, rezultă că există cercul $(\mathcal{C})$ care trece prin punctele M_1, M_2 şi M_3.

Mai mult, deoarece rangul matricilor A şi $\bar{A}$ este egal cu numărul de necunoscute ale sistemului urmează că soluţia acestui sistem este unică şi astfel coeficienţii p, q şi s din ecuaţia normală a cercului sunt unic determinaţi. În concluzie, există un cerc unic cu proprietăţile cerute. $\square$

Exemplul 5.2. Să se determine centrul şi raza cercului din plan care trece prin punctele $M_1(1, 0)$, $M_2(1, 1)$ şi $M_3(0, 1)$.

Mai întâi, din $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rezultă că punctele M_1, M_2 şi M_3 sunt necoliniare, deci determină în mod unic un cerc.

Ecuaţia acestui cerc va fi

$$(\mathcal{C}) : \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - x - y = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{C}) : \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = 0.$$

Am obţinut ecuaţia canonică a cercului:

$$(\mathcal{C}) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

din care rezultă că acesta are centrul în punctul $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ şi raza $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Poziţia relativă a unei drepte faţă de un cerc

Fie dreapta $(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, $A^2 + B^2 > 0$, şi cercul

$$(\mathcal{C}) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

în plan. Căutăm eventualele puncte de intersecţie dintre dreaptă şi cerc. Coordonatele unui astfel de punct trebuie să verifice sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \end{cases}.$$

Deoarece A şi B nu pot fi simultan 0 putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $B \neq 0$. Atunci, din ecuaţia dreptei (d), avem $y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$. Înlocuind în ecuaţia cercului obţinem

$$(x-a)^2 + \Big(-\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B} - b\Big)^2 - R^2 = 0,$$

de unde

$$(A^2 + B^2) \cdot x^2 + (2 \cdot A \cdot B + 2 \cdot A \cdot B \cdot b - 2 \cdot a \cdot B^2) \cdot x$$

$$+a^2 \cdot B^2 + C^2 + b^2 \cdot B^2 + 2 \cdot B \cdot C \cdot b - R^2 \cdot B^2 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuaţii de gradul 2 este

$$\begin{aligned} \Delta &= -4 \cdot B^2 \cdot (A^2 + B^2) \cdot \Big(\tfrac{(A \cdot a + B \cdot b + C)^2}{A^2 + B^2} - R^2\Big) \\ &= -4 \cdot B^2 \cdot (A^2 + B^2) \cdot (\delta - R^2), \end{aligned}$$

unde $\delta = d(C_0, (d))$ este distanţa de la centrul $C_0(a, b)$ al cercului la dreapta (d).

În concluzie avem următoarele situaţii:

- dacă $\delta > R$ atunci ecuaţia nu are soluţii reale, deci (d) nu intersectează $(\mathcal{C})$ şi spunem că dreapta este *exterioară* cercului;
- dacă $\delta = R$ atunci ecuaţia are o singură soluţie reală, adică (d) intersectează cercul într-un singur punct şi spunem că dreapta este *tangentă* la cerc;
- dacă $\delta < R$ ecuaţia are două soluţii reale şi dreapta intersectează cercul în două puncte distincte, caz în care spunem că (d) este *secantă* cercului $(\mathcal{C})$.

EXEMPLUL 5.3. Să se precizeze poziţia relativă a dreptelor $(d_1) : x+y-4 = 0$, $(d_2) : 3 \cdot x + 4 \cdot y + 6 = 0$ şi respectiv $(d_3) : x - 2 \cdot y - 2 = 0$, faţă de cercul

$$(\mathcal{C}) : 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 4 \cdot x + 8 \cdot y + 8 = 0.$$

Să se determine punctele de intersecţie ale dreptelor cu cercul, în cazul în care aceste puncte există.

Mai întâi determinăm centrul şi raza cercului $(\mathcal{C})$ găsind ecuaţia sa canonică. Transformăm ecuaţia generală în felul următor:

$$(\mathcal{C}) : 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 4 \cdot x + 8 \cdot y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 4 \cdot y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{C}) : (x^2 + 2 \cdot x + 1) - 1 + (y^2 + 4 \cdot y + 4) - 4 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{C}) : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 1.$$

Astfel, centrul cercului va fi punctul $C_0(-1, -2)$, iar raza $R = 1$.

Distanţa de la C_0 la dreapta (d_1) este $d(C_0, (d_1)) = \frac{|-1-2-4|}{\sqrt{2}} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{2} > 1$, deci dreapta (d_1) este exterioară cercului.

Distanţa de la C_0 la dreapta (d_2) este $d(C_0,(d_2)) = \frac{|-3-8+6|}{5} = 1$ şi, prin urmare, (d_2) este tangentă la cercului. Coordonatele punctului de tangenţă verifică atât ecuaţia dreptei cât şi pe cea a cercului, adică sistemul

$$\begin{cases} 3\cdot x + 4\cdot y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\cdot x + 4\cdot y + 4 = 0 \end{cases}.$$

Din prima ecuaţie avem $y = -\frac{3}{4}\cdot x - \frac{6}{4}$ şi, înlocuind în a doua ecuaţie, obţinem

$$25\cdot x^2 + 20\cdot x + 4 = 0,$$

cu soluţia unică $x = -\frac{2}{5}$. Rezultă $y = -\frac{6}{5}$ şi punctul de tangenţă $M_0(-\frac{2}{5}, -\frac{6}{5})$.

În final, distanţa de la C_0 la (d_3) este $d(C_0,(d_3)) = \frac{|-1+4-2|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$, adică dreapta este secantă cercului. Punctele de intersecţie se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x - 2\cdot y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\cdot x + 4\cdot y + 4 = 0 \end{cases}.$$

Din prima ecuaţie rezultă $x = 2\cdot y + 2$ şi, apoi, din a doua, avem

$$5\cdot y^2 + 16\cdot y + 12 = 0.$$

Soluţiile acestei ecuaţii sunt $y_1 = -2$ şi $y_2 = -\frac{6}{5}$, de unde rezultă $x_1 = -2$ şi $x_2 = -\frac{2}{5}$, adică punctele în care dreapta (d_3) intersectează cercul sunt $M_1(-2,-2)$ şi $M_2 = M_0(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5})$.

3. Probleme de tangenţă

3.1. Tangenta la un cerc printr-un punct de pe cerc. În plan considerăm cercul dat prin ecuaţia sa vectorială

$$(\mathcal{C}) : (\bar{r} - \bar{r}_0)\cdot(\bar{r} - \bar{r}_0) = R^2,$$

unde $\bar{r}_0(a,b)$ este vectorul de poziţie al centrului cercului $C(a,b)$. Fie punctul $M_0(x_0,y_0) \in (\mathcal{C})$ cu vectorul de poziţie $\bar{r}_{M_0}(x_0,y_0)$ şi dreapta (d) care trece prin M_0 şi este tangentă la cerc.

Reamintim, fără demonstraţie, următorul rezultat.

Propoziţia 5.3. *Dreapta suport a segmentului orientat $\overrightarrow{CM_0}$ este perpendiculară pe dreapta (d).*

Acum, fie $M(x,y)$ un punct oarecare de pe dreapta (d) cu vectorul de poziţie $\bar{r}(x,y)$. Din propoziţia precedentă rezultă $\overrightarrow{CM_0} \perp \overrightarrow{M_0M}$, adică

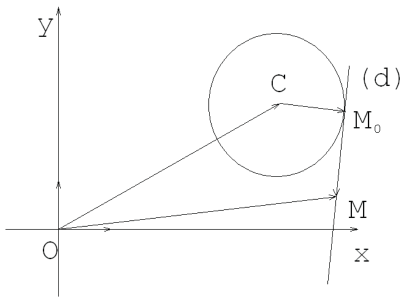
$$\overrightarrow{CM_0}\cdot\overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Deoarece

$$\overrightarrow{CM_0} = \overrightarrow{OM_0} - \overrightarrow{OC} = \bar{r}_{M_0} - \bar{r}_0 = (x_0 - a)\cdot\bar{i} + (y_0 - b)\cdot\bar{j}$$

şi

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \bar{r} - \bar{r}_{M_0} = (x - x_0)\cdot\bar{i} + (y - y_0)\cdot\bar{j},$$



obţinem condiţia (în forma sa vectorială) ca punctul M să se afle pe dreapta (d), adică ecuaţia vectorială a dreptei (d),

$$(d) : (\bar{r} - \bar{r}_{M_0}) \cdot (\bar{r}_{M_0} - \bar{r}_0) = 0$$

şi, în forma sa generală,

$$(d) : (x_0 - a) \cdot x + (y_0 - b) \cdot y - x_0^2 - y_0^2 + a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 0. \tag{5.4}$$

În continuare, presupunem că cercul $(\mathcal{C})$ este dat prin ecuaţia generală

$$(\mathcal{C}) : \alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot y^2 + \beta \cdot x + \gamma \cdot y + \delta = 0.$$

În acest caz, aşa cum am văzut anterior, centrul cercului este $C(a = -\frac{\beta}{2 \cdot \alpha}, b = -\frac{\gamma}{2 \cdot \alpha})$. Înlocuind a şi b în ecuaţia (5.4) obţinem, după calcule, ecuaţia tangentei la cerc prin punctul M_0, în acest caz,

$$(d) : \alpha \cdot x_0 \cdot x + \alpha \cdot y_0 \cdot y + \frac{\beta}{2} \cdot (x + x_0) + \frac{\gamma}{2} \cdot (y + y_0) + \delta = 0.$$

Observaţia 5.2. Procedeul prin care se obţine ecuaţia tangentei la cerc printr-un punct de pe cerc atunci când acesta este dat prin ecuaţia sa generală se numeşte *dedublare* a acestei ecuaţii. Dedublarea unei ecuaţii de gradul 2 constă, formal, în efectuarea următoarelor înlocuiri în această ecuaţie:

$$x^2 \to x \cdot x_0, \quad y^2 \to y \cdot y_0, \quad x \cdot y \to \frac{x \cdot x_0 + y \cdot y_0}{2},$$
$$x \to \frac{x + x_0}{2}, \quad y \to \frac{y + y_0}{2}, \quad \delta = \text{constant} \to \delta.$$

Exemplul 5.4. Să se determine ecuaţia tangentei prin punctul $M_0(3, 2)$ la cercul

$$(\mathcal{C}) : f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 2 = 0.$$

Avem imediat $f(3, 2) = 0$, adică $M_0(3, 2) \in (\mathcal{C})$ şi, deoarece ecuaţia cercului se poate scrie

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4 \cdot x - 2 \cdot y + 3 = 0,$$

obţinem ecuaţia tangentei (d), care trece prin punctul M_0, prin dedublarea ecuaţiei de mai sus,

$$(d) : 3 \cdot x + 2 \cdot y - 4 \cdot \frac{x + 3}{2} - 2 \cdot \frac{y + 2}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow (d) : x + y - 4 = 0.$$

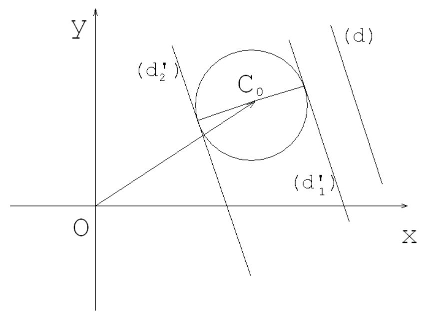
3.2. Tangentele la un cerc paralele cu o dreaptă dată. Fie dreapta $(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, $A^2 + B^2 > 0$, şi cercul $(\mathcal{C})$ dat prin ecuaţia sa canonică

$$(\mathcal{C}) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

în plan. Căutăm dreapta (d') tangentă la cerc cu proprietatea $(d') \parallel (d)$. Din această ultimă condiţie rezultă că ecuaţia unei astfel de drepte este de forma

$$(d') : A \cdot x + B \cdot y + \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Condiţia ca (d') să fie tangentă la cerc este $d(C_0, (d')) = R$, unde $C_0(a, b)$ este centrul cercului $(\mathcal{C})$.



Avem

$$d(C_0, (d')) = R \Leftrightarrow \frac{|A \cdot a + B \cdot b + \alpha|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \pm R \cdot \sqrt{A^2 + B^2} - A \cdot a - B \cdot b,$$

de unde rezultă că sunt două drepte paralele cu (d) şi tangente la cerc

$$(d'_{1,2}) : A \cdot x + B \cdot y \pm R \cdot \sqrt{A^2 + B^2} - A \cdot a - B \cdot b = 0.$$

Exemplul 5.5. Să se determine dreptele tangente la cercul

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 6 \cdot y + 1 = 0$$

paralele cu dreapta $(d) : x + y - 2 = 0$.

Ecuaţia canonică a cercului se obţine astfel:

$$(\mathcal{C}) : (x^2 - 2 \cdot x + 1) - 1 + (y^2 + 6 \cdot y + 9) - 9 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{C}) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9.$$

Prin urmare centrul cercului $\mathcal{C}$ este punctul $C_0(1, -3)$, iar raza sa $R = 3$.

O dreaptă $(d') \parallel (d)$ are ecuaţia de forma

$$(d') : x + y + \alpha = 0$$

şi, impunând ca (d') să fie tangentă la cerc, obţinem

$$d(C_0, (d')) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 3 + \alpha|}{\sqrt{10}} = 3,$$

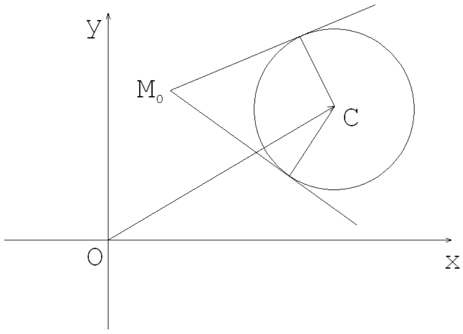
adică $\alpha = 2 \pm 3 \cdot \sqrt{10}$. Dreptele căutate sunt date de ecuaţiile

$$(d'_{1,2}) : x + y + 2 \pm 3\sqrt{10} = 0.$$

3.3. Tangentele la un cerc printr-un punct exterior cercului. Spunem că un punct M_0 din plan este interior cercului $\mathcal{C}(C, R)$ dacă distanţa $d(C, M_0) = \|\overrightarrow{CM_0}\| < R$ şi exterior cercului dacă $d(C, M_0) > 0$.

Este evident că orice dreaptă care trece printr-un punct interior al unui cerc este secantă cercului. Cât despre problema tangentelor printr-un punct exterior cercului, avem următorul rezultat, cunoscut din lecţiile de geometrie sintetică din gimnaziu.

Propoziţia 5.4. *Printr-un punct exterior unui cerc din plan trec două drepte tangente la cerc.*



În continuare vom determina ecuaţiile dreptelor care sunt tangente la un cerc dat şi trec printr-un punct exterior cercului. Fie o dreaptă (d) în plan astfel încât să fie tangentă cercului

$$(\mathcal{C}) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

şi să treacă prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ exterior acestui cerc. Din $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ rezultă că ecuaţia redusă a lui (d) este

$$(d) : y - y_0 = m \cdot (x - x_0),$$

unde $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ este panta dreptei (d). Echivalent această ecuaţie poate fi scrisă

$$(d) : m \cdot x - y - m \cdot x_0 + y_0 = 0.$$

Acum, dreapta (d) este tangentă la cercul $\mathcal{C}(C, R)$ dacă şi numai dacă $d(C, (d)) = R$, adică

$$\frac{|m \cdot a - b - m \cdot x_0 + y_0|}{\sqrt{1+m^2}} = R,$$

de unde obţinem ecuaţia

$$-2R \cdot (y_0 - b) \cdot m + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0, \tag{5.5}$$

dacă $|x_0 - a| = R$, sau ecuaţia de gradul 2

$$((x_0 - a)^2 - R^2) \cdot m^2 - 2 \cdot (y_0 - b) \cdot (x_0 - a) \cdot m + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0, \tag{5.6}$$

dacă $|x_0 - a| \neq R$.

Studiem primul caz: $|x_0 - a| = R$. Rezultă imediat că punctul $M_0(x_0, y_0)$ este exterior cercului dacă şi numai dacă $y_0 \neq b$. Fie punctul $M(x_0, b) \in \mathcal{C}$. Obţinem $(d_1) = (M_0M) : x = x_0 = a$ şi $d(C, (d_1)) = |x_0 - a| = R$, adică dreapta (d_1) este tangentă la cerc. Dacă punctul M_0 este exterior cercului atunci $y_0 \neq b$ şi ecuaţia (5.5) are o soluţie reală $m_2 = \frac{(y_0-b)^2-R^2}{2R\cdot(y_0-b)}$ care determină o a doua dreptă tangentă la cerc care trece prin M_0:

$$(d_2) : y - y_0 = \frac{(y_0 - b)^2 - R^2}{2R \cdot (y_0 - b)} \cdot (x - x_0).$$

În al doilea caz, $|x_0 - a| = R$, discriminantul ecuaţiei (5.6) este

$$\Delta = 4 \cdot R^2 \cdot ((x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2).$$

Astfel obţinem imediat că $\Delta > 0$, adică ecuaţia are două soluţii reale dacă şi numai dacă punctul M_0 este exterior cercului, şi, cu această condiţie îndeplinită, aceste soluţii sunt

$$m_{1,2} = \frac{(y_0 - b) \cdot (x_0 - a) - R \cdot \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2}}{(x_0 - a)^2 - R^2}.$$

Se obţin din nou două drepte tangente la cerc care trec prin M_0:

$$(d_{1,2}) : y - y_0 = \frac{(y_0 - b) \cdot (x_0 - a) - R \cdot \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2}}{(x_0 - a)^2 - R^2} \cdot (x - x_0).$$

Observaţia 5.3. Este evident că procedeul prezentat mai sus poate fi privit şi ca o demonstrţie, cu ajutorul geometriei analitice, a propoziţiei (5.4).

Exemplul 5.6. Să se determine ecuaţiile dreptelor tangente la cercul din plan

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4 \cdot x - 2 \cdot y - 4 = 0,$$

care trec prin punctul $M_0(-2, 3)$.

Pentru început vom găsi coordonatele centrului C_0 al cercului şi raza R a acestuia. Pentru aceasta obţinem forma canonică a ecuaţiei cercului astfel:

$$(\mathcal{C}) : (x^2 - 4 \cdot x + 4) - 4 + (y^2 - 2 \cdot y + 1) - 1 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

Prin urmare centrul cercului este $C_0(2, 1)$ şi raza este $R = 3$. Avem $\|\overrightarrow{C_0M_0}\| = 2\sqrt{5} > 3$, deci punctul M_0 este exterior cercului.
O dreaptă care trece prin punctul $M_0(-2, 3)$ are ecuaţia redusă de forma

$$(d) : y - 3 = m \cdot (x + 2) \Leftrightarrow (d) : m \cdot x - y + 2 \cdot m + 3 = 0,$$

unde m este panta dreptei (d). Atunci, impunând ca dreapta (d) să fie tangentă la cerc, avem

$$d(C_0, (d)) = \frac{|2 \cdot m - 1 + 2 \cdot m + 3|}{\sqrt{1 + m^2}} = R = 3 \Leftrightarrow (4 \cdot m + 2)^2 = 9 \cdot \{m^2 + 1\}$$
$$\Leftrightarrow 7 \cdot m^2 + 16 \cdot m - 5 = 0.$$

Discriminantul ecuaţiei este $\Delta = 256 + 140 = 396 > 0$, deci avem două soluţii şi, prin urmare, două drepte tangente la cerc. Soluţiile sunt $m_{1,2} = \frac{-8\pm 3\sqrt{11}}{7}$ şi dreptele tangente la cerc care trec prin M_0 vor fi date de:

$$(d_{1,2}) : (-8 \pm 3\sqrt{11}) \cdot x - 7 \cdot y + 5 \pm 3\sqrt{11} = 0.$$

CAPITOLUL 6

CONICE

Acest capitol este divizat în două secţiuni: în prima parte vom prezenta noţiuni şi rezultate privind conicele date cu ajutorul ecuaţiilor canonice, iar în cea de-a doua vom studia şi, într-un final, vom clasifica curbele algebrice de ordinul 2, demonstrând că acestea sunt conice.

1. Conice date prin ecuaţia canonică

DEFINIŢIA 6.1. Fie F un punct şi fie (d) o dreaptă din plan. Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul dintre distanţa până la punctul F şi distanţa până la dreapta (d) este constant se numeşte *conică*. Punctul F se numeşte *focarul* conicei, iar dreapta (d) se numeşte *dreapta directoare* a conicei. Raportul constant care defineşte conica se numeşte *excentricitatea* conicei şi se notează cu e.

DEFINIŢIA 6.2. O conică a cărui focar aparţine dreptei directoare se numeşte conică *degenerată*. Dacă focarul nu aparţine dreptei directoare atunci conica este *nedegenerată*.

DEFINIŢIA 6.3. În funcţie de valoarea excentricităţii sale spunem că o conică este:

(1) de gen *eliptic* dacă $e \in (0, 1)$;
(2) de gen *parabolic* dacă $e = 1$;
(3) de gen *hiperbolic* dacă $e > 1$.

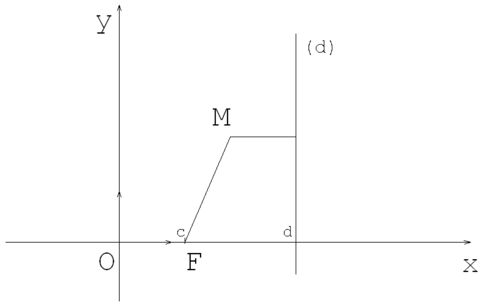
DEFINIŢIA 6.4. O conică nedegenerată se numeşte

(1) *elipsă* dacă este de gen eliptic,
(2) *parabolă* dacă este de gen parabolic,
(3) *hiperbolă* dacă este de gen hiperbolic.

În continuare vom deduce ecuaţia unei conice pornind de la definiţie. Considerăm conica (Γ) cu focarul F şi dreapta directoare (d). Alegem un sistem de axe de coordonate astfel încât $F \in (Ox)$ şi $(d) \parallel (Oy)$. Atunci avem coordonatele focarului $F(c, 0)$ şi ecuaţia dreptei directoare $(d) : x = d = \text{constant}$. Este evident că (Γ) este o conică degenerată dacă şi numai dacă $c = d$ şi nedegenerată în rest.

Conform definiţiei, un punct $M(x, y)$ aparţine conicei (Γ) dacă şi numai dacă

$$\frac{\|\overrightarrow{MF}\|}{d(M, (d))} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x - d|} = e = \text{constant}$$



De aici rezultă ecuaţia conicei:

$$(\Gamma) : (1 - e^2) \cdot x^2 + y^2 + 2 \cdot (e^2 \cdot d - c) \cdot x + c^2 - e^2 \cdot d^2 = 0. \tag{6.1}$$

TEOREMA 6.1. *Pentru orice conică degenerată* (Γ) *există un reper cartezian ortonormat orientat pozitiv, numit* ***reperul canonic*** *al conicei, în care ecuaţia lui* (Γ) *are una din următoarele forme:*

(1) $(\Gamma) : \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$, *dacă* (Γ) *este de gen eliptic;*
(2) $(\Gamma) : \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$, *dacă* (Γ) *este de gen hiperbolic;*
(3) $(\Gamma) : (y')^2 = q = \text{constant}$, *dacă* (Γ) *este de gen parabolic,*

numită ***ecuaţia canonică*** *a conicei.*

DEMONSTRAŢIE. Fie reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv în plan $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ în care conica (Γ) are ecuaţia (6.1).

Deoarece conica este degenerată rezultă că avem $c = d$ şi ecuaţia (6.1) devine

$$(\Gamma) : (1 - e^2) \cdot x^2 + y^2 + 2 \cdot c \cdot (e^2 - 1) \cdot x + c^2 \cdot (1 - e^2) = 0.$$

Pentru început presupunem că $e \neq 1$ şi atunci putem scrie ecuaţia de mai sus astfel

$$(\Gamma) : x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} - 2 \cdot c \cdot x + c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\Gamma) : (x - c)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = 0.$$

Acum efectuăm o translaţie a reperului iniţial cu noua origine în punctul $O' = F(c, 0)$. Obţinem reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$ în care un punct oarecare din plan are coordonatele

$$\begin{cases} x' = x - c \\ y' = y \end{cases},$$

unde (x, y) sunt coordonatele punctului în reperul iniţial. Atunci ecuaţia lui (Γ) în reperul $\mathcal{R}'$ este

$$(\Gamma) : (x')^2 + \frac{y'^2}{1 - e^2} = 0.$$

Dacă (Γ) este de gen eliptic, adică $e < 1$, avem $1 - e^2 > 0$, deci putem nota $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, şi rezultă

$$(\Gamma) : \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0.$$

Dacă (Γ) este de gen hiperbolic, atunci $e > 1$ şi $1 - e^2 < 0$, deci putem scrie $1 - e^2 = -\frac{b^2}{a^2}$, adică ecuaţia conicei în reperul $\mathcal{R}'$ devine

$$(\Gamma) : \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0.$$

În final, dacă $e = 1$ şi $M(x, y) \in (\Gamma)$ rezultă $\frac{(x-c)^2+y^2}{(x-c)^2} = 1 + \frac{y^2}{(x-c)^2} = 1$, adică $(x - c)^2 \to \infty$ şi, mai departe, $c \to \pm\infty$. Presupunem că există $\lim_{e\to 1, c\to\pm\infty} c^2 \cdot (e^2 - 1) = q$. Ecuaţia (6.1) este

$$(\Gamma) : y^2 + 2 \cdot c \cdot (e^2 - 1) \cdot x + c^2 \cdot (1 - e^2) = 0.$$

Împărţind prin c, trecând la limită cu $c \to \pm\infty$ şi $e \to 1$ avem

$$\lim_{e\to 1, c\to\pm\infty} \frac{y^2 + 2 \cdot c \cdot (e^2 - 1) \cdot x + c^2 \cdot (1 - e^2)}{c} = 0,$$

de unde rezultă

$$\lim_{e\to 1, c\to\pm\infty} (y^2 + 2 \cdot c \cdot (e^2 - 1) \cdot x + c^2 \cdot (1 - e^2)) = 0$$

şi, astfel, ecuaţia lui (Γ) în reperul $\mathcal{R}$ este

$$(\Gamma) : y^2 = q.$$

□

Observaţia 6.1. Interpretând ecuaţiile canonice ale conicelor degenerate se obţin imediat următoarele:

(1) o conică degenerată de gen eliptic este un punct dublu;
(2) o conică degenerată de gen hiperbolic este o pereche de drepte concurente în focarul conicei;
(3) o conică degenerată de gen parabolic poate fi: o pereche de drepte paralele, dacă $\lim_{e\to 1, c\to\pm\infty} c^2 \cdot (e^2 - 1) = q > 0$, mulţimea vidă (conică vidă), dacă $q < 0$ sau o pereche de drepte confundate, dacă $q = 0$.

Teorema 6.2. *Pentru orice conică nedegenerată* (Γ) *există un reper cartezian ortonormat orientat pozitiv, numit* ***reper canonic****, în care ecuaţia lui* (Γ) *are una din următoarele forme:*

(1) $(\Gamma) : \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0$, *dacă* (Γ) *este de gen eliptic;*
(2) $(\Gamma) : \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0$, *dacă* (Γ) *este de gen hiperbolic,*

numită ***ecuaţia canonică*** *a conicei.*

Demonstraţie. Ca şi în demonstraţia teoremei precedente, considerăm reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv în plan $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ în care conica (Γ) are ecuaţia (6.1).

Deoarece pentru conicele de gen eliptic sau hiperbolic excentricitatea este $e \neq 1$, ecuaţia (6.1) devine

$$(\Gamma) : x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} + 2 \cdot \frac{e^2 \cdot d - c}{1-e^2} \cdot x + \frac{c^2 - e^2 \cdot d^2}{1-e^2} = 0.$$

Acum, efectuăm o translaţie a reperului $\mathcal{R}$ cu noua origine $O'(\frac{c-e^2 \cdot d}{1-e^2}, 0)$ şi obţinem reperul $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$. Legăturile dintre coordonatele unui punct oarecare din plan în cele două repere sunt

$$\begin{cases} x = \frac{c-e^2 \cdot d}{1-e^2} + x' \\ y = y' \end{cases}$$

şi astfel ecuaţia conicei în reperul $\mathcal{R}'$ este

$$(\Gamma) : \frac{(x')^2}{\frac{e^2 \cdot (c-d)^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{(y')^2}{\frac{e^2 \cdot (c-d)^2}{1-e^2}} - 1 = 0.$$

În final, dacă genul conicei este eliptic atunci $e \in (0, 1)$ şi putem nota $\frac{e^2 \cdot (c-d)^2}{(1-e^2)^2} = a^2$ şi $\frac{e^2 \cdot (c-d)^2}{1-e^2} = b^2$. Avem

$$(\Gamma) : \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Dacă (Γ) este de gen hiperbolic atunci $e > 1$ şi putem nota $\frac{e^2 \cdot (c-d)^2}{(1-e^2)^2} = a^2$ şi $-\frac{e^2 \cdot (c-d)^2}{1-e^2} = b^2$. Folosind aceste notaţii ecuaţia conicei în reperul $\mathcal{R}'$ se scrie

$$(\Gamma) : \frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} - 1 = 0.$$

□

Observaţia 6.2. În reperul canonic $\mathcal{R}'$ al unei conice (Γ) de gen eliptic sau hiperbolic focarul conicei este $F(c' = \frac{e^2 \cdot (d-c)}{1-e^2}, 0)$, iar dreapta directoare are ecuaţia $(d) : x' = d' = \frac{d-c}{1-e^2}$. Atunci, pentru o conică nedegenerată de gen eliptic obţinem, din definiţiile lui a şi b, prin calcul direct, focarul conicei în reperul canonic: $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ (sau $F(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$), dreapta directoare $(d) : x' = d' = \frac{a^2 \cdot \sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$ (sau $(d) : x' = d' = -\frac{a^2 \cdot \sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$) şi excentricitatea $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$. Tot prin calcul direct, pentru o conică nedegenerată de gen hiperbolic, urmează că avem focarul $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ (sau $F(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$), dreapta directoare $(d) : x' = d' = \frac{a^2 \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$ (sau $(d) : x' = d' = -\frac{a^2 \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$) şi excentricitatea $e = 1 + \frac{b^2}{a^2}$.

Aşa cum am văzut, pentru o conică nedegenerată de gen eliptic sau hiperbolic, putem considera două focare şi respectiv două drepte directoare. Acest fapt va putea fi înţeles mai bine atunci când vom discuta despre fiecare gen în parte, puţin mai departe în acest subcapitol.

DEFINIŢIA 6.5. Fie elipsa $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, dată prin ecuaţia canonică. Punctele $A_1(a, 0), A_2(-a, 0) \in (E)$ şi $B_1(0, b), B_2(0, -b) \in (E)$ se numesc *vârfurile* elipsei, iar a şi b se numesc *semiaxele* ei.

DEFINIŢIA 6.6. Fie hiperbola $(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, dată prin ecuaţia canonică. Punctele $A_1(a, 0), A_2(-a, 0) \in (H)$ se numesc *vârfurile reale* ale hiperbolei, iar $B_1(0, b), B_2(0, -b)$ sunt *vârfurile imaginare.*

Pentru conicele nedegenerate de gen parabolic avem următoarea teoremă.

TEOREMA 6.3. *Pentru orice parabolă există un reper cartezian ortonormat orientat pozitiv, numit* ***reper canonic*** *astfel încât ecuaţia conicei în acest reper, adică* ***ecuaţia canonică****, este*

$$(\Gamma) : (y')^2 = 2px'.$$

DEMONSTRAŢIE. Deoarece în cazul parabolei excentricitatea este $e = 1$, ecuaţia (6.1) devine

$$(\Gamma) : y^2 - 2 \cdot (c - d) \cdot x + c^2 - d^2 = 0,$$

în reperul iniţial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. Translăm acest reper în punctul $O'(\frac{c+d}{2}, 0)$ şi obţinem reperul $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$ în care coordonatele (x', y') ale unui punct oarecare din plan sunt date de

$$\begin{cases} x = \frac{c+d}{2} + x' \\ y = y' \end{cases},$$

unde (x, y) sunt coordonatele punctului în reperul iniţial. Astfel, ecuaţia conicei în reperul $\mathcal{R}'$ este

$$(\Gamma) : (y')^2 = 2px' = 2(c - d)x'.$$

□

OBSERVAŢIA 6.3. Se observă că originea reperului canonic al unei parabole îi aparţine. Acest punct se numeşte *vârful* parabolei.

Din ecuaţiile translaţiei rezultă că focarul unei parabole este, în reperul canonic, $F(c' = \frac{p}{2}, 0)$, iar dreapta sa directoare are ecuaţia $(d) : x' = d' = -\frac{p}{2}$.

DEFINIŢIA 6.7. Ecuaţia canonică a unei conice se numeşte şi *ecuaţia redusă* a conicei.

DEFINIŢIA 6.8. Un punct C se numeşte *centru de simetrie* al unei conice (Γ) dacă simetricul oricărui punct $M \in (\Gamma)$ faţă de C aparţine şi el lui (Γ). O dreaptă (d) se numeşte *axă de simetrie* a conicei dacă simetricul oricărui punct $M \in (\Gamma)$ faţă de (d) aparţine lui (Γ).

1.1. Elipsa. O elipsă poate fi definită şi în modul următor:

DEFINIŢIA 6.9. Fie punctele F şi F' în plan. Locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor până la F şi respectiv F' este constantă, adică

$$\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = k = \text{constant},$$

se numeşte *elipsă.* Punctele F şi F' se numesc *focarele* elipsei.

Propoziţia 6.4. *Definiţia 6.9 este echivalentă cu definiţia generală a conicelor în cazul genului eliptic nedegenerat.*

Demonstraţie. Mai întâi vom considera o elipsă dată prin definiţia generală a conicelor şi vom arăta că aceasta verifică şi proprietatea din definiţia 6.9. Aşa cum am văzut, ecuaţia canonică a elipsei este

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

şi, în reperul în care se obţine această ecuaţie, adică în reperul canonic al elipsei, focarul ei este $F(c = \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$. Considerăm şi punctul $F'(-c = -\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, dat tot în reperul canonic. Acum, fie $M(x, y) \in (E)$ un punct oarecare de pe elipsă. Urmează că $y^2 = b^2 \cdot (1 - \frac{x^2}{a^2})$. De aici, prin calcul direct, obţinem

$$\begin{aligned} (\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\|)^2 &= (\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 \\ &= 2x^2 + 2a^2 - \tfrac{2b^2x^2}{a^2} + 2\sqrt{(x^2 - a^2 - \tfrac{b^2x^2}{a^2})^2} \\ &= 4a^2, \end{aligned}$$

unde am folosit $x \in [-a, a]$ şi atunci $\sqrt{(x^2 - a^2 - \frac{b^2x^2}{a^2})^2} = a^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - x^2$. Am arătat că

$$\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = 2a = \text{constant}, \tag{6.2}$$

adică (E) verifică definiţia 6.9.

Reciproc, considerăm punctul M care verifică ecuaţia (6.2), şi fie reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv astfel încât în acest reper să avem $F(c, 0)$ şi $F(-c, 0)$. Notăm coordonatele lui M în acest reper cu x şi y. Prin calcul direct se arată că aceste coordonate verifică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0$$

şi, în plus, rezultă şi $a^2 > c^2$. Prin urmare, notând $b^2 = a^2 - c^2$, avem că punctul M verifică ecuaţia unei elipse. □

În continuare, considerăm elipsa (E) dată în reperul său canonic $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ prin:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a > 0, b > 0, a > b,$$

cu focarele $F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$. Dacă $M(x, y) \in (E)$ rezultă imediat că simetricul punctului M faţă de originea reperului canonic $M'(-x, -y)$ aparţine şi el elipsei. Deasemeni punctele $M_1(x, -y)$ şi $M_2(-x, y)$, adică simetricele punctului M faţă de axele (Ox) şi respectiv (Oy), aparţin şi ele lui (E).
Prin urmare O este centru de simetrie al elipsei, iar axele de coordonate sunt axe de simetrie ale acesteia.

1.1.1. *Reprezentare grafică.* Deoarece o elipsă este simetrică faţă de axele de coordonate, pentru reprezentarea ei este suficient să reprezentăm grafic funcţia

$$f : [0, a] \to [0, b], \quad f(x) = y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2},$$

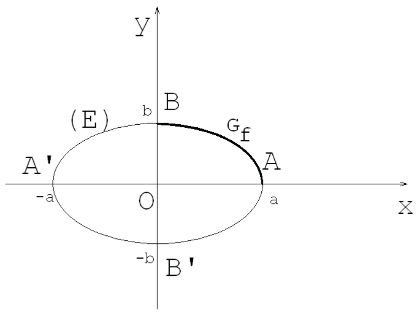
cu derivata

$$f' : [0, a) \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{b \cdot x}{a\sqrt{a^2 - x^2}} < 0.$$

Prin urmare funcţia f este descrescătoare. Derivata sa de ordinul 2 este

$$f'' : [0, a) \to \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\frac{a \cdot b}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

de unde rezultă că f este concavă.



1.1.2. *Ecuaţii parametrice.* Din ecuaţia elipsei, rezultă că pentru fiecare punct $M(x, y) \in (E)$ există un unghi $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel încât $\frac{x^2}{a^2} = \cos^2\theta$ şi $\frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$. De aici rezultă *ecuaţiile parametrice* ale elipsei:

$$(E) : \begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \\ y = b \cdot \sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

1.1.3. *Poziţia relativă a unei drepte faţă de o elipsă. Probleme de tangenţă.* În acelaşi fel ca în cazul cercului în plan, studiat anterior, se demonstrează că o dreptă poate fi exterioară elipsei, tangentă sau secantă.

PROPOZIŢIA 6.5. *Ecuaţia unei drepte (t) tangente la elipsa*

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

printr-un punct $M_0(x_0, y_0) \in (E)$ se obţine prin dedublarea ecuaţiei elipsei, adică avem

$$(t) : \frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y - 1 = 0.$$

DEMONSTRAŢIE. Ecuaţia unei drepte (t) care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ este

$$(t) : y - y_0 = m \cdot (x - x_0).$$

Considerăm sistemul format din ecuaţia lui (t) şi cea a elipsei (E)

$$\begin{cases} y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}.$$

Pentru ca dreapta (t) să fie tangentă la elipsă, soluţia acestui sistem trebuie să fie unică, $x = x_0$, $y = y_0$. Din prima ecuaţie avem $y = m \cdot (x - x_0) + y_0$ şi, înlocuind în a doua, rezultă, ţinând cont şi de $M_0 \in (H)$, ecuaţia

$$(x - x_0) \cdot \Big(\Big(\frac{1}{a^2} \cdot x + \frac{m^2}{a^2} \Big) + \frac{x_0}{a^2} - \frac{m^2 \cdot x_0}{b^2} + \frac{2 \cdot m \cdot y_0}{b^2} \Big) = 0$$

care trebuie să aibă doar soluţia $x = x_0$. Urmează

$$-\Big(\frac{x_0}{a^2} - \frac{m^2 \cdot x_0}{b^2} + \frac{2 \cdot m \cdot y_0}{b^2} \Big) = (\frac{1}{a^2} \cdot x + \frac{m^2}{a^2}) \cdot x_0,$$

de unde $m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$. Înlocuind expresia pantei în ecuaţia lui (t) rezultă

$$(t) : \frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y - 1 = 0.$$

□

În continuare vom căuta ecuaţiile dreptelor tangente la elipsă printr-un punct exterior acesteia. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un astfel de punct. O dreaptă care trece prin M_0 are ecuaţia de forma

$$(d) : y - y_0 = m \cdot (x - x_0).$$

Dreapta este tangentă la elipsa (E) dacă are un singur punct comun cu aceasta, adică dacă sistemul

$$\begin{cases} y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

este compatibil determinat. Eliminând y între cele două ecuaţii avem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(m \cdot (x - x_0) + y_0)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

de unde ecuaţia

$$(b^2 - a^2 \cdot m^2) \cdot x^2 + 2 \cdot m \cdot a^2 \cdot (y_0 - x_0) \cdot x + a^2 \cdot ((m \cdot x_0 - y_0)^2 - b^2) = 0,$$

care trebuie să aibă o singură rădăcină reală, adică discriminantul său trebuie să fie $\Delta = 0$. Rezultă o ecuaţie de gradul 2 cu necunoscuta m, despre care se arată, folosind faptul că M_0 este exterior elipsei, că admite două soluţii reale. Obţinem astfel două drepte tangente la elipsă prin orice punct exterior acesteia.

Definiţia 6.10. Fie (γ) o curbă în plan şi $M_0 \in (\gamma)$ un punct al curbei prin care trece o unică dreaptă (t) tangentă la (γ). Se numeşte *dreapta normală* (sau simplu *normala*) la (γ) în punctul M_0 dreapta (n) care trece prin punct şi este perpendiculară pe tangenta (t).

Propoziţia 6.6. (Proprietatea optică a elipsei)
Normala într-un punct M_0 al elipsei (E) cu focarele F şi F' este bisectoarea unghiului $\widehat{FM_0F'}$.

Demonstraţie. Considerăm elipsa $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu focarele $F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$, unde $c^2 = a^2 - b^2$. Dacă punctul $M_0(x_0, y_0)$ aparţine elipsei atunci ecuaţia tangentei la (E) prin M_0 se obţine prin dedublarea ecuaţiei elipsei în punct, adică avem tangenta

$$(t) : \frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} - 1 = 0,$$

a cărei pantă este $m_t = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$. Normala la elipsă în punctul M_0 este dreapta $(n) \perp (t)$, deci panta sa verifică relaţia $m_n \cdot m_t = -1$ şi, prin urmare, $m_n = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0}$. Deoarece $M_0 \in (n)$, ecuaţia normalei va fi

$$(n) : y - y_0 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot (x - x_0)$$

şi poate fi scrisă în forma canonică

$$(n) : \frac{x - x_0}{b^2 \cdot x_0} = \frac{y - y_0}{a^2 \cdot y_0}.$$

Astfel avem vectorul director al normalei $\bar{v}(b^2 \cdot x_0, a^2 \cdot y_0)$.

În continuare obţinem vectorii directori ai dreptelor (M_0F) şi (M_0F')

$$\bar{v}_1 = (c - x_0) \cdot \bar{i} - y_0 \cdot \bar{j} \quad \text{şi respectiv} \quad \bar{v}_2 = (-c - x_0) \cdot \bar{i} - y_0 \cdot \bar{j}$$

şi avem

$$\cos\varphi_1 = \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{v}_1\|} = \frac{b^2 \cdot (c \cdot x_0 - a^2)}{\sqrt{b^4 \cdot x_0^2 + a^4 \cdot y_0^2} \cdot \sqrt{(c - x_0)^2 + y_0^2}}$$

$$\begin{aligned} \cos\varphi_2 &= \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{v}_2\|} = \frac{b^2 \cdot (-c \cdot x_0 - a^2)}{\sqrt{b^4 \cdot x_0^2 + a^4 \cdot y_0^2} \cdot \sqrt{(-c - x_0)^2 + y_0^2}} \\ &= \frac{b^2 \cdot (-c \cdot x_0 - a^2)}{\sqrt{b^4 \cdot x_0^2 + a^4 \cdot y_0^2} \cdot (2 \cdot a - \sqrt{(c - x_0)^2 + y_0^2})}, \end{aligned}$$

unde $\varphi_1 = (\widehat{\bar{v}, \bar{v}_1})$ şi $\varphi_2 = (\widehat{\bar{v}, \bar{v}_2})$. Pentru a obţine expresia lui $\cos\varphi_2$ am folosit faptul, demonstrat anterior, că

$$\|\overrightarrow{M_0F}\| + \|\overrightarrow{M_0F'}\| = \|\bar{v}_1\| + \|\bar{v}_2\| = 2a.$$

Din $M_0 \in (E)$ şi $c^2 = a^2 - b^2$, rezultă cu uşurinţă $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ şi, de aici, urmează că (n) este bisectoarea unghiului $\widehat{FM_0F'}$. □

Exemplul 6.1. Fie elipsa de ecuaţie

$$(E) : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0.$$

Să se determine elementele geometrice ale acestei elipse şi să se scrie ecuaţiile ei parametrice. Să se determine ecuaţiile tangentelor la elipsă prin punctele $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ şi respectiv $B(1, 3)$ şi ecuaţia normalei în A.

Semiaxele elipsei sunt $a = \sqrt{6}$ şi $b = \sqrt{3}$, vârfurile sale sunt $A(\sqrt{6}, 0)$, $A'(-\sqrt{6}, 0)$, $B(0, \sqrt{3})$, $B'(0, -\sqrt{3})$, semidistanţa focală este $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$, iar focarele sunt $F(\sqrt{3}, 0)$, $F'(-\sqrt{3}, 0)$, excentricitatea este $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lneq 1$, iar dreptele directoare au ecuaţiile $x = \pm 2 \cdot \sqrt{3}$.

Se verifică cu uşurinţă că punctul $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se află pe elipsa, deci ecuaţia tangentei în acest punct se determină dedublând ecuaţia elipsei. Avem tangenta

$$(t) : \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot y - 1 = 0.$$

Panta tangentei este $m_t = -\frac{1}{2}$, deci panta m_n a normalei (n) în M_0 la elipsă este dată de $m_n \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$, adică $m_n = 2$. Obţinem ecuaţia normalei

$$(n) : y - \sqrt{2} = 2 \cdot (x - \sqrt{2}).$$

Deoarece $\frac{1^2}{6} + \frac{3^2}{3} - 1 = \frac{13}{6} > 0$, rezultă că punctul $B(1, 3)$ se află în exteriorul elipsei. Ecuaţia unei drepte care trece prin B este $(d) : y - 3 = m \cdot (x - 1)$. Dreapta este tangentă elipsei dacă şi numai dacă sistemul

$$\begin{cases} y - 3 = m(x - 1) \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0 \end{cases}$$

are soluţie unică. De aici rezultă că ecuaţia

$$(1 + m^2) \cdot x^2 + 4 \cdot m \cdot (3 - m) \cdot x + 2 \cdot m^2 - 12 \cdot m + 12 = 0$$

are o singura soluţie reală, adică

$$\Delta = 4(10m^2 + 12m - 12) = 0,$$

de unde $m_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{39}}{5}$. Rezultă că ecuaţiile tangentelor prin punctul B sunt:

$$(d_1) : y - 3 = \frac{-6 + \sqrt{39}}{5}(x - 1) \text{ şi } (d_2) : y - 3 = \frac{-6 - \sqrt{39}}{5}(x - 1).$$

1.2. Hiperbola. Şi pentru hiperbolă avem o definiţie echivalentă cu definiţia generală a conicelor, ca în cazul elipsei.

Definiţia 6.11. Fie punctele F şi F' în plan. Locul geometric al punctelor din plan pentru care modulul diferenţei dintre distanţele până la F şi respectiv F' este constantă, adică

$$|\|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\|| = k = \text{constant},$$

se numeşte *hiperbolă*. Punctele F şi F' se numesc *focarele* hiperbolei.

Echivalenţa celor două definiţii se demonstrează la fel ca rezultatul similar pentru elipsă şi, din acest motiv, nu o vom prezenta aici.

Considerăm hiperbola (H) dată prin ecuaţia sa canonică în reperul canonic $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$:

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a > 0, b > 0, a > b,$$

cu focarele $F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$, unde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dacă $a = b$ spunem că (H) este o hiperbolă *echilateră*. Se arată imediat că O este centru de simetrie al hiperbolei, iar axele de coordonate sunt axe de simetrie ale acesteia.

1.2.1. *Reprezentare grafică.* Datorită simetriilor precizate mai sus, pentru reprezentarea grafică a hiperbolei este suficient să obţinem graficul funcţiei

$$f : [a, \infty] \to [0, \infty], \quad f(x) = y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Cum derivata sa este

$$f' : (a, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{b \cdot x}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0,$$

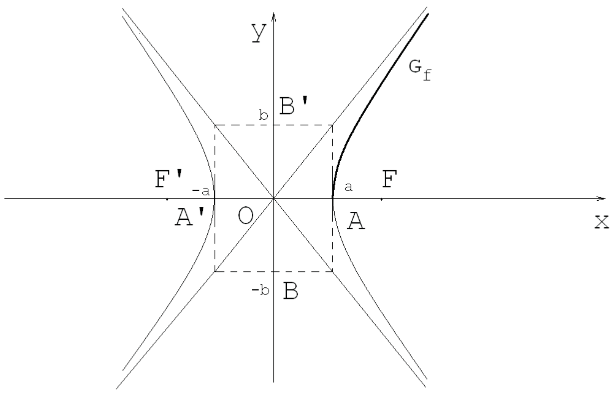
urmează că funcţia f este crescătoare. Derivata de ordinul 2 a lui f este

$$f'' : (a, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\frac{a \cdot b}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} < 0,$$

deci f este concavă. Mai avem

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a} \quad \text{şi} \quad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m \cdot x) = 0,$$

şi, prin urmare, o asimptotă oblică $(d) : y = \frac{b}{a} \cdot x$ pentru graficul lui f.



Datorită faptului că hiperbola este simetrică faţă de axa (Oy), şi dreapta $(d') : y = -\frac{b}{a} \cdot x$ este asimptotă a lui (H).

1.2.2. *Ecuaţii parametrice.* Pentru hiperbola (H) *ecuaţiile parametrice* se pot obţine din ecuaţia canonică, în felul următor:

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow (H) : \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow (H) : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow (H) : \begin{cases} x = \frac{a}{2} \cdot \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \\ y = \frac{b}{2} \cdot \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Trebuie să precizăm că ecuaţiile parametrice ale unei hiperbole nu sunt unice. De exemplu următoarele ecuaţii sunt tot ecuaţii parametrice ale lui (H):

$$(H) : \begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $\operatorname{ch} t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ este cosinusul hiperbolic al lui t şi $\operatorname{sh} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2}$ este sinusul hiperbolic al lui t, iar $e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$ cu i numărul complex cu proprietatea $i^2 = -1$. Este uşor de verificat $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

1.2.3. *Probleme de tangenţă. Proprietatea optică.* La fel ca în cazul elipsei, se arată că ecuaţia tangentei (t) la o hiperbolă (H) printr-un punct $M_0(x_0, y_0) \in (H)$, se obţine prin dedublarea ecuaţiei lui (H) în M_0, adică avem

$$(t) : \frac{x_0}{a^2} \cdot x - \frac{y_0}{b^2} \cdot y - 1 = 0.$$

Exemplul 6.2. Să se determine ecuaţia tangentei şi ecuaţia normalei în punctul $M_0(2, 5)$ la hiperbola

$$(H) : \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{25} - 1 = 0.$$

Se verifică imediat $M_0 \in (H)$. Dedublând ecuaţia hiperbolei în punct se obţine ecuaţia tangentei în M_0:

$$(t) : x - \frac{y}{5} - 1 = 0,$$

cu panta $m_t = 5$.

Normala (n) în M_0 la (H) este perpendiculară pe tangentă, deci panta sa, m_n, verifică relaţia $m_n \cdot m_t = -1$. Rezultă $m_n = -\frac{1}{5}$ şi ecuaţia normalei este

$$(n) : y - 5 = -\frac{1}{5} \cdot (x - 2) \Leftrightarrow (n) : x + 5 \cdot y - 27 = 0.$$

Încheiem această secţiune cu următorul rezultat, care se demonstrează la fel ca proprietatea similară pentru elipsă.

Propoziţia 6.7. (Proprietatea optică a hiperbolei)

Normala într-un punct M_0 al hiperbolei (H) cu focarele F şi F' este bisectoarea unghiului $\widehat{FM_0F'}$.

1.3. Parabola. Fie parabola (P) cu ecuaţia canonică

$$(P) : y^2 = 2px, \quad p > 0, x > 0,$$

în reperul său canonic $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$, cu focarul $F(c = \frac{p}{2}, 0)$ şi dreapta directoare $(d) : x = -\frac{p}{2}$. Se observă că dacă un punct $M(x, y)$ aparţine parabolei atunci şi simetricul său $M'(x, -y)$ faţă de axa de coordonate (Ox) îi aparţine lui (P). Prin urmare parabola este simetrică faţă de (Ox).

1.3.1. *Reprezentare grafică.* Este suficient să reprezentăm grafic funcţia

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = y = \sqrt{2px}.$$

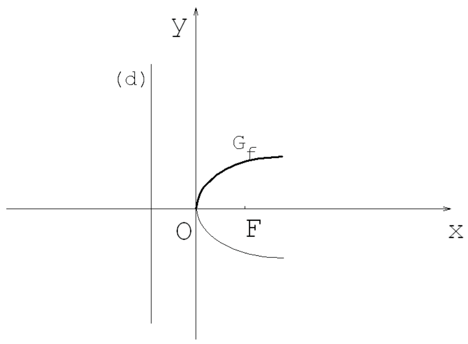
Avem derivata

$$f' : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} > 0,$$

deci f este crescătoare. Calculând derivata de ordinul 2

$$f'' : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\frac{\sqrt{2p}}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0,$$

obţinem că f este concavă.



1.3.2. *Ecuaţii parametrice.* O formă a *ecuaţiilor parametrice* ale parabolei se obţine imediat din ecuaţia canonică:

$$(P) : \begin{cases} x = 2p\lambda^2 \\ y = 2p\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.3.3. *Probleme de tangenţă. Proprietatea optică.* Fie punctul $M_0(x_0, y_0) \in (P)$. Vom determina ecuaţia tangentei (t) la parabolă prin punctul M_0. Dreapta (t) are ecuaţia de forma

$$(t) : y - y_0 = m \cdot (x - x_0),$$

iar sistemul

$$\begin{cases} y = m \cdot (x - x_0) + y_0 \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

admite doar soluţia $x = x_0$, $y = y_0$. Eliminăm y între cele două ecuaţii şi, folosind $M_0 \in (P)$, obţinem ecuaţia de gradul 2

$$m^2 \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot m \cdot y_0 \cdot (x - x_0) - 2 \cdot p \cdot (x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0) \cdot (m^2 \cdot (x - x_0) + 2 \cdot m \cdot y_0 - 2 \cdot p) = 0,$$

care are doar soluţia $x = x_0$ dacă şi numai dacă $m \cdot y_0 = p$. De aici, înlocuind m în ecuaţia dreptei (t), rezultă

$$(t) : y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0).$$

Am arătat astfel că ecuaţia tangentei se obţine prin dedublarea ecuaţiei parabolei în punctul M_0.

Exemplul 6.3. Să se demonstreze că tangenta şi normala duse într-un punct oarecare al unei parabole întâlnesc axa parabolei în două puncte egal depărtate de focar.

Fie parabola $(P) : y^2 = 2px$ şi un punct $M_0(x_0, y_0) \in (P)$. Rezultă că tangenta la parabolă prin M_0 are ecuaţia

$$(t) : y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0),$$

iar normala are ecuaţia

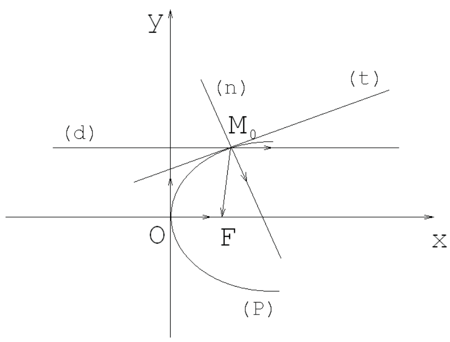
$$(n) : y - y_0 = -\frac{y_0}{p} \cdot (x - x_0).$$

Avem $(t) \cap (Ox) = \{A\}$, $A(-x_0, 0)$ şi $(n) \cap (Oy) = \{B\}$, $B(p + x_0, 0)$. Focarul parabolei este $F(\frac{p}{2}, 0)$. Obţinem $\|\overrightarrow{AF}\| = \frac{p}{2} + x_0$ şi $\|\overrightarrow{BF}\| = |\frac{p}{2} - p - x_0| = \frac{p}{2} + x_0$.

Ca şi în cazurile precedente, al elipsei şi al hiperbolei, şi pentru parabolă avem următorul rezultat.

PROPOZIŢIA 6.8. (Proprietatea optică a parabolei)
Normala într-un punct M_0 al parabolei (P), cu focarul F, este bisectoarea unghiului făcut de dreapta (M_0F) şi de dreapta paralelă cu axa de coordonate (Ox) care trece prin punctul M_0.

DEMONSTRAŢIE. Fie dreapta (d) astfel încât $(d) \parallel (Ox)$ şi $M_0(x_0, y_0) \in (d)$. Atunci ecuaţia sa este $(d) : y = y_0$, cu vectorul director $\bar{v}_1 = \bar{i}$. Dreapta (M_0F) are vectorul director $\bar{v}_2 = \overrightarrow{M_0F} = (\frac{p}{2} - x_0) \cdot \bar{i} - y_0 \cdot \bar{j}$.



În continuare vom determina ecuaţia normalei la parabolă în M_0. Mai întâi avem ecuaţia tangentei în punct

$$(t) : y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0) \Leftrightarrow (t) : y = \frac{p}{y_0} \cdot (x + x_0)$$

şi atunci ecuaţia normalei este

$$(n) : y - y_0 = -\frac{y_0}{p} \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow (n) : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{-y_0}.$$

De aici rezultă că vectorul director al dreptei normale este $\bar{v} = p \cdot \bar{i} - y_0 \cdot \bar{j}$.

Notăm $\varphi_1 = (\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}})$ şi $\varphi_2 = (\widehat{\bar{v}_2, \bar{v}})$ şi avem

$$\cos \varphi_1 = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}_1\| \cdot \|\bar{v}\|} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}},$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi_2 &= \tfrac{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}_1\| \cdot \|\bar{v}\|} = \frac{\frac{p^2}{2} - p \cdot x_0 + y_0^2}{\sqrt{\frac{p^2}{4} - p \cdot x_0 + x_0^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{p^2 + y_0^2}} = \frac{p \cdot (p + 2 \cdot x_0)}{(p + 2 \cdot x_0) \cdot \sqrt{p^2 + y_0^2}} \\ &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}, \end{aligned}$$

adică $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$, ceea ce încheie demonstraţia. □

2. Conice date prin ecuaţia generală

Pentru început considerăm reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv în plan $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$. Avem următoarea definiţie.

DEFINIŢIA 6.12. Locul geometric al punctelor $M(x, y)$ din plan ale căror coordonate în reperul $\mathcal{R}$ verifică o ecuaţie cu coeficienţi reali, de forma

$$(\Gamma) : f(x, y) = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0, \tag{6.3}$$

se numeşte *curbă algebrică de ordinul* 2.

OBSERVAŢIA 6.4. Dacă $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$ atunci (Γ) este o dreaptă, iar dacă $a_{11} = a_{22} \neq 0$ şi $a_{12} = 0$ atunci (Γ) este un cerc. Din aceste motive cele două clase vor fi excluse, adică în continuare vom presupune că nu avem simultan $a_{11} = a_{22}$ şi $a_{12} = 0$.

OBSERVAŢIA 6.5. Este evident că orice conică este o curbă algebrică de ordinul 2.

În continuare notăm

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

şi ecuaţia (6.3) se poate scrie sub forma

$$(\Gamma) : f(X) = X^t \times A \times X + 2 \cdot B \times X + a_{33} = 0 \tag{6.4}$$

PROPOZIŢIA 6.9. *Proprietatea lui* (Γ) *de a fi o curbă algebrică de ordinul* 2 *nu depinde de reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv ales.*

DEMONSTRAŢIE. Fie reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}' = \{\bar{i}', \bar{j}'\})$, unde O' are coordonatele (x_0, y_0), iar matricea schimbării de bază $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ este matricea ortogonală $C \in GO(2, \mathbb{R})$. Atunci coordonatele unui punct oarecare M din plan se transformă la schimbarea de reper după formula

$$X = X_0 + C^t \times X',$$

unde $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ este matricea coloană a coordonatelor lui O' şi $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ cea a coordonatelor lui M în reperul $\mathcal{R}'$.
Astfel, ecuaţia lui (Γ) devine, în reperul $\mathcal{R}'$,

$$\begin{aligned} (\Gamma) : f(X') &= (X')^t \times (C \times A \times C^t) \times X' \\ &\quad + 2 \cdot (C \times A \times C^t + B \times C^t) \times X' + f(X_0) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Notând

$$A' = C \times A \times C^t, \quad B' = X_0^t \times A \times C^t + B \times C^t, \quad a'_{33} = f(X_0), \tag{6.6}$$

această ecuaţie se scrie

$$(\Gamma) : f(X') = (X')^t \times A' \times X' + 2 \cdot B' \times X' + a'_{33} = 0,$$

adică are aceeaşi formă ca şi în reperul iniţial, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

2.1. Invarianţi ai unei curbe algebrice de ordinul 2**.** Pentru curba (Γ) dată prin ecuaţia (6.3) (sau echivalent prin (6.4)), introducem următoarele notaţii

$$\delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I = \operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Acum putem da următorul rezultat, esenţial pentru clasificarea curbelor algebrice de ordinul 2.

TEOREMA 6.10. *Dacă* (Γ) *este o curbă algebrică de ordinul* 2 *dată prin ecuaţia* (6.3)*, atunci*

(1) *δ, I şi Δ sunt invarianţi la translaţii şi rotaţii;*
(2) *K este invariant la rotaţii;*
(3) *dacă $\delta = \Delta = 0$ atunci K este invariant şi la translaţii.*

DEMONSTRAŢIE. (1) Considerăm polinomul caracteristic al matricei A din ecuaţia (6.4):

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta.$$

Am văzut, în demonstraţia propoziţiei 6.9, că după o translaţie a reperului iniţial cu noua origine $O'(x_0, y_0)$ urmată de o rotaţie de unghi α dată de matricea ortogonală $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, ecuaţia lui (Γ) devine

$$(\Gamma) : f(X') = (X')^t \times A' \times X' + 2 \cdot B' \times X' + a'_{33} = 0,$$

unde am folosit aceleaşi notaţii ca în demonstraţia menţionată, sau, echivalent,

$$(\Gamma) : f(x', y') = a'_{11} \cdot x'^2 + 2 \cdot a'_{12} \cdot x' \cdot y' + a'_{22} \cdot y'^2 + 2 \cdot a'_{13} \cdot x' + 2 \cdot a'_{23} \cdot y' + a'_{33} = 0.$$

Polinomul caracteristic al matricei A' este

$$p'(\lambda) = \det(A' - \lambda \cdot I_2) = \lambda^2 - I' \cdot \lambda + \delta'.$$

Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned} p'(\lambda) &= \det(A' - \lambda \cdot I_2) = \det(C \times A \times C^t - \lambda \cdot C \times I_2 \times C^t) \\ &= \det C \cdot \det(A - \lambda \cdot I_2) \cdot \det C^t = p(\lambda) \cdot \det(C \times C^t) \\ &= p(\lambda) \cdot \det I_2 = p(\lambda), \end{aligned}$$

de unde rezultă $\delta' = \delta$ şi $I' = I$.

În continuare considerăm matricile

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix},\quad D'=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13}\\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23}\\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33}\end{pmatrix}$$

şi

$$\bar{C}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ x_0 & y_0 & 1\end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat că $D'=\bar{C}\times D\times\bar{C}^t$ şi, prin urmare, avem

$$\Delta'=\det D'=\det(\bar{C}\times D\times\bar{C}^t)=(\det\bar{C})^2\cdot\det D=(\det C)^2\cdot\Delta=\Delta.$$

(2) Polinoamele caracteristice ale matricilor D şi D' sunt

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(D-\lambda\cdot I_3)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}\\ &= -\lambda^3+(\operatorname{trace} D)\cdot\lambda^2-K\cdot\lambda+\Delta\end{aligned}$$

şi respectiv

$$\begin{aligned} p'(\lambda) &= \det(D'-\lambda\cdot I_3)=\begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13}\\ a'_{12} & a'_{22}-\lambda & a'_{23}\\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33}-\lambda\end{vmatrix}\\ &= -\lambda^3+(\operatorname{trace} D')\cdot\lambda^2-K'\cdot\lambda+\Delta'.\end{aligned}$$

Dacă efectuăm doar o rotaţie a reperului iniţial, rezultă că în expresia matricei $\bar{C}$ avem $x_0=y_0=0$ şi $\bar{C}\times\bar{C}=I_3$, adică, în acest caz, $\bar{C}$ este o matrice ortogonală. Atunci rezultă că $p(\lambda)=p'(\lambda)$ şi, astfel, $K'=K$.

(3) Deoarece, aşa cum am văzut, K este invariant la rotaţii, este suficient să arătăm că este invariant şi la translaţiile reperului iniţial.

Se observă că putem scrie

$$K=\delta+a_{33}\cdot I-B^t\times B$$

în reperul iniţial $\mathcal{R}$ şi

$$K'=\delta'+a'_{33}\cdot I-(B')^t\times B'$$

în reperul $\mathcal{R}'$ obţinut după o translaţie lui $\mathcal{R}$ cu noua origine în $O'(x_0,y_0)$. În continuare presupunem $\delta=0$ şi atunci avem şi $\delta'=0$. Aşa cum am văzut şi I este invariant la astfel de schimbări ale reperului, deci $I'=I$. Rezultă

$$K=a_{33}\cdot I-B^t\times B\quad\text{şi}\quad K'=a'_{33}\cdot I-(B')^t\times B'.$$

Din (6.6) obţinem $B'=X_0^t\times A+B$ şi $a'_{33}=f(X_0)$, unde $X_0=\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}$.

Înlocuind în expresia lui K', după un calcul direct, avem

$$K'=K+(X_0^t\times A+2\cdot B)\times(I\cdot I_2-A)\times X_0. \tag{6.7}$$

Acum

$$A \times (I \cdot I_2 - A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = O_2,$$

deoarece am presupus $\delta = 0$. Pe de altă parte

$$\begin{aligned} B \times (I \cdot I_2 - A) &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{13} \cdot a_{22} - a_{23} \cdot a_{12} & -a_{13} \cdot a_{12} + a_{23} \cdot a_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculând Δ obţinem

$$\Delta = -a_{23} \cdot (a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{12}) + a_{13} \cdot (a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22})$$

şi, cum $\delta = \Delta = 0$, avem sistemul

$$\begin{cases} a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0 \\ -a_{23} \cdot (a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{12}) + a_{13} \cdot (a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}) = 0 \end{cases}.$$

Nu putem avea $a_{11} = a_{22} = 0$ pentru că atunci $a_{12} = 0$, caz pe care, încă de la început, l-am exclus pentru că (Γ) nu ar fi o conică. Presupunem $a_{11} \neq 0$ şi avem, din prima ecuaţie a sistemului, $a_{22} = \frac{a_{12}^2}{a_{11}}$. Înlocuind în a doua ecuaţie obţinem $a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{12} = 0$ şi apoi $a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} = 0$, adică $B \times (I \cdot I_2 - A) = O_{12}$.

În concluzie, din (6.7), am obţinut $K' = K$. □

TEOREMA 6.11. (Clasificarea curbelor algebrice de ordinul 2)
O curbă algebrică de ordinul 2 este o conică. Clasificarea acestor curbe, în funcţie de invarianţii δ, Δ, I şi K, este dată în tabelul următor:

	δ	Δ	$I \cdot \Delta$	K	Gen	Tip	Denumire
1	> 0	$\neq 0$	< 0		eliptic	nedegenerată	elipsă
2	> 0	$\neq 0$	> 0		eliptic	nedegenerată	conica vidă (elipsă imaginară)
3	> 0	0			eliptic	degenerată	punct dublu
4	< 0	$\neq 0$			hiperbolic	nedegenerată	hiperbolă
5	< 0	0			hiperbolic	degenerată	pereche de drepte concurente
6	0	$\neq 0$			parabolic	nedegenerată	parabolă
7	0	0		< 0	parabolic	degenerată	drepte paralele
8	0	0		0	parabolic	degenerată	dreaptă dublă
9	0	0		0	parabolic	degenerată	conica vidă (drepte paralele imaginare)

DEMONSTRAŢIE. Reamintim că ecuaţia unei curbe algebrice de ordinul 2 poate fi scrisă

$$(\Gamma) : f(X) = X^t \times A \times X + 2 \cdot B \times X + a_{33} = 0,$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

în reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv iniţial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$.

Deoarece matricea A este simetrică rezultă că rădăcinile λ_1 şi λ_2 ale polinomului său caracteristic

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_2) = \lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta$$

sunt reale şi distincte, de unde rezultă că există o bază ortonormată $\mathcal{B}' = \{\bar{i}', \bar{j}'\}$, formată din vectori proprii ai lui A astfel încât în reperul $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}')$ avem

$$(\Gamma) : f(X') = (X')^t \times A' \times X' + 2 \cdot B' \times X' + a'_{33} = 0,$$

unde $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Pe larg, în reperul $\mathcal{R}'$, ecuaţia lui (Γ) este

$$(6.8)\quad (\Gamma) : f(x', y') = \lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_{13} \cdot x' + 2 \cdot a'_{23} \cdot y' + a'_{33} = 0.$$

Cazurile (1)-(5) ($\delta \neq 0$). Deoarece $\delta \neq 0$ rezultă $\delta = \det A = \det A' = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, adică $\lambda_1 \neq 0$ şi $\lambda_2 \neq 0$, iar ecuaţia (6.8) se poate scrie

$$\begin{aligned} (\Gamma) : f(x', y') &= \lambda_1 \cdot \left((x')^2 + 2 \cdot \tfrac{a'_{13}}{\lambda_1} \cdot x' + \left(\tfrac{a'_{13}}{\lambda_1} \right)^2 \right) - \tfrac{(a'_{13})^2}{\lambda_1} \\ &\quad + \lambda_2 \cdot \left((y')^2 + 2 \cdot \tfrac{a'_{23}}{\lambda_2} \cdot x' + \left(\tfrac{a'_{23}}{\lambda_2} \right)^2 \right) - \tfrac{(a'_{23})^2}{\lambda_2} + a'_{33} = 0, \end{aligned}$$

adică

$$(\Gamma) : f(x', y') = \lambda_1 \cdot \left((x') + \frac{a'_{13}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \cdot \left((y') + \frac{a'_{23}}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{(a'_{13})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{23})^2}{\lambda_2} + a'_{33} = 0.$$

În reperul $\mathcal{R}'$ avem $\delta' = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ şi

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & a'_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot a'_{33} - \lambda_2 \cdot (a'_{13})^2 - \lambda_1 \cdot (a'_{23})^2.$$

Obţinem $\frac{(a'_{13})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{23})^2}{\lambda_2} + a'_{33} = \frac{\Delta'}{\delta'} = \frac{\Delta}{\delta}$, deoarece δ şi Δ sunt invarianţi la schimbarea reperului. Astfel avem

$$(\Gamma) : f(x', y') = \lambda_1 \cdot \left((x') + \frac{a'_{13}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \cdot \left((y') + \frac{a'_{23}}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

În final considerăm reperul $\mathcal{R}'' = (C, \mathcal{B}')$ obţinut prin translarea reperului $\mathcal{R}'$ în punctul $C(-\frac{a'_{13}}{\lambda_1}, \frac{a'_{23}}{\lambda_2})$. În reperul $\mathcal{R}''$ ecuaţia curbei este

$$(\Gamma) : f(x'', y'') = \lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Acum, dacă $\Delta \neq 0$, ecuaţia lui (Γ) se poate scrie în forma canonică (şi astfel $\mathcal{R}''$ este reperul canonic al lui (Γ)):

$$(6.9)\qquad (\Gamma) : f(x'', y'') = \frac{(x'')^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}} + \frac{(y'')^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}} - 1 = 0.$$

Cazurile (1)-(3) ($\delta > 0$). În aceste cazuri avem $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta > 0$, adică λ_1, λ_2 şi $I = \lambda_1 + \lambda_2$ au acelaşi semn. Prin urmare $\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$ şi $\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$ au acelaşi semn cu $I \cdot \Delta$.

Dacă $I \cdot \Delta < 0$ atunci $-\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta} > 0$ şi $-\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta} > 0$, iar (Γ) este o elipsă.

Dacă $I \cdot \Delta > 0$ atunci $-\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta} < 0$ şi $-\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta} < 0$ şi (Γ) este o conică vidă, deoarece ecuaţia sa nu are soluţii reale. În acest caz (Γ) se numeşte elipsă imaginară.

Dacă $\Delta = 0$ atunci ecuaţia (6.9) devine

$$(\Gamma) : f(x'', y'') = \lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 = 0.$$

De aici se obţine $(x'')^2 = 0$ şi $(y'')^2 = 0$, adică (Γ) este un punct dublu.

Cazurile (4), (5) $(\delta < 0)$**.** Avem $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta < 0$, deci λ_1 şi λ_2 au semne diferite şi, atunci $\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$ şi $\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$ au semne diferite dacă $\Delta \neq 0$, adică, în acest caz, (Γ) dată de ecuaţia canonică (6.9) este o hiperbolă.

Dacă $\Delta = 0$ atunci, din ecuaţia

$$(\Gamma) : f(x'', y'') = \lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 = 0,$$

rezultă $(\Gamma) : y'' = \pm\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot x''$, adică (Γ) este reuniunea a două drepte concurente în punctul C.

Cazurile (6)-(9) $(\delta = 0)$**.** Vom folosi şi aici reperul $\mathcal{R}'$ considerat la începutul acestei demonstraţii. Dacă $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ rezultă sau $\lambda_1 = 0$ sau $\lambda_2 = 0$. În continuare presupunem $\lambda_1 = 0$ şi, prin urmare, $\lambda_2 \neq 0$, iar ecuaţia (6.8) devine

$$(\Gamma) : f(x', y') = \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_{13} \cdot x' + 2 \cdot a'_{23} \cdot y' + a'_{33} = 0$$

şi se poate scrie

$$(\Gamma) : f(x', y') = \lambda_2 \cdot \left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 + 2 \cdot a'_{13} \cdot x' + a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{\lambda_2} = 0.$$

Deoarece Δ este invariant la schimbări de reper, avem

$$\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} = -\lambda_2 \cdot (a'_{13})^2,$$

şi atunci $\Delta = 0$ dacă şi numai dacă $a'_{13} = 0$.

Pe de altă parte, ştim că şi K este invariant la rotaţii ale reperului, astfel că avem

$$K = K' = \lambda_2 \cdot a'_{33} - (a'_{13})^2 - (a'_{23})^2.$$

Dacă $\Delta = 0$, rezultă

$$\frac{K}{I} = \frac{K}{\lambda_2} = a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{\lambda_2}$$

şi

$$(\Gamma) : f(x', y') = \left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 + \frac{K}{I^2} = 0.$$

Pentru $K = 0$ obţinem $(\Gamma) : \left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 = 0$, adică (Γ) este o dreaptă dublă; pentru $K > 0$ rezultă că (Γ) este o conică vidă (o pereche de drepte paralele imaginare); iar pentru $K < 0$ avem $(\Gamma) : y' = \pm\sqrt{\frac{K}{I^2} - \frac{a'_{23}}{I}}$, adică (Γ) este reuniunea a două drepte paralele.

Dacă $\Delta \neq 0$ avem şi $a'_{13} \neq 0$, iar după efectuarea unei translaţii a reperului iniţial $\mathcal{R}'$ cu noua origine în punctul $V(-\frac{1}{2\cdot a'_{13}}\cdot(\frac{K}{I} - \frac{\Delta}{I^2}), -\frac{a'_{23}}{I})$ se obţine reperul $\mathcal{R}'' = (V, \mathcal{B}')$ în care ecuaţia lui (Γ) are forma canonică:

$$(\Gamma) : (y'')^2 = \pm 2 \cdot \sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}} \cdot x''.$$

Prin urmare, în acest caz, curba este o parabolă. □

Observaţia 6.6. De acum ne vom referi la o curbă algebrică de ordinul 2 numind-o, simplu, conică.

Observaţia 6.7. Teorema de clasificare se poate demonstra şi în alte moduri. Am optat pentru această demonstraţie (prezentată şi în [**17**]) pentru că ea pune în valoare cunoştinţele de algebră liniară acumulate, alături de cele de geometrie analitică în plan.

În următoarele observaţii facem unele precizări legate de forma ecuaţiei canonice a unei conice, obţinute la fel ca în demonstraţia teoremei de clasificare din ecuaţia generală, şi despre obţinerea reperului canonic. Aceste observaţii vor fi utile mai ales în aplicaţii.

Observaţia 6.8. Valorile proprii ale matricei A din ecuaţia conicei (Γ) în reperul iniţial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice a lui A

$$\lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta = 0,$$

adică

$$\lambda_{1,2} = \frac{I \pm \sqrt{I^2 - 4\cdot\delta}}{2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4\cdot a_{12}^2}}{2}.$$

Vectorii bazei $\mathcal{B}' = \{\bar{i}', \bar{j}'\}$ din reperul canonic al lui (Γ) vor fi coliniari cu vectorii proprii ai matricei A corespunzători valorilor proprii λ_1 şi respectiv λ_2. În continuare vom determina aceşti vectori.

Fie $f : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ un operator liniar a cărui matrice în baza $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ este A. Atunci valorile proprii ale lui f sunt λ_1 şi λ_2.

Din ecuaţia $f(\bar{v}) = \lambda_1 \cdot \bar{v}$, $\bar{v} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$, rezultă sistemul

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\cdot x + a_{12}\cdot y = 0 \\ a_{12}\cdot x + (a_{22} - \lambda_1)\cdot y = 0 \end{cases},$$

a cărui soluţie este

$$\begin{cases} x = (a_{22} - \lambda_1)\cdot t \\ y = -a_{12}\cdot t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare subspaţiul propriu al lui f (şi al lui A) corespunzător lui λ_1 este

$$V(\lambda_1) = \{\bar{v} = ((a_{22} - \lambda_1)\cdot t, -a_{12}\cdot t) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Se obţine imediat că $\mathcal{B}_1 = \{\bar{v}_1 = (a_{22} - \lambda_1)\cdot \bar{i} - a_{12}\cdot \bar{j}\}$ este o bază în acest subspaţiu.

Aşa cum am văzut, reperul canonic al conicei se obţine din cel iniţial printr-o rotaţie urmată de o translaţie. Dacă notăm $\alpha = \widehat{(\bar{i}', \bar{i})}$ unghiul de rotaţie atunci $\bar{i}' = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}$ şi, deoarece $\bar{i} \parallel \bar{v}_1$, rezultă

$$\frac{\cos\alpha}{a_{22} - \lambda_1} = \frac{\sin\alpha}{-a_{12}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{12}}{a_{22} - \lambda_1}.$$

Acum, dacă $\lambda_1 = 0$, adică $\delta = 0$ şi (Γ) este de gen parabolic, avem

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}.$$

Dacă $\lambda_1 \neq 0$ presupunem că $\lambda_1 = \frac{a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4\cdot a_{12}^2}}{2}$ şi obţinem, prin calcul direct,

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - (\operatorname{tg}\alpha)^2} = \frac{2 \cdot a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Se arată imediat că dacă $\lambda_1 = \frac{a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4\cdot a_{12}^2}}{2}$, atunci avem acelaşi rezultat. Rezultatul se regăseşte în aceeaşi formă dacă determinăm subspaţiul propriu $V(\lambda_2)$, apoi o bază $\mathcal{B}_2 = \{\bar{v}_2\}$ în acest subspaţiu şi impunem ca vectorii $\bar{j}$ şi $\bar{v}_2$ să fie coliniari.

Am găsit astfel un mod de determinare a unghiului de rotaţie α, care va fi folosit în aplicaţii pentru găsirea reperului canonic al unei conice şi pentru reprezentarea grafică a acesteia.

Observaţia 6.9. Fie (Γ) o elipsă sau o hiperbolă. Atunci, aşa cum am văzut în demonstraţia teoremei de clasificare, ecuaţia sa canonică este

$$(\Gamma): \frac{(x'')^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_1\cdot\delta}} + \frac{(y'')^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_2\cdot\delta}} - 1 = 0.$$

Dacă (Γ) este o elipsă atunci valorile pentru λ_1 şi λ_2 trebuie alese astfel încât $-\frac{\Delta}{\lambda_1\cdot\delta} > -\frac{\Delta}{\lambda_2\cdot\delta}$, adică $\frac{\Delta}{\lambda_1} < \frac{\Delta}{\lambda_2}$. Cum λ_1 şi λ_2 au în acest caz acelaşi semn rezultă

- $\lambda_1 > \lambda_2$ dacă $\Delta > 0$, şi
- $\lambda_1 < \lambda_2$ dacă $\Delta < 0$.

Dacă (Γ) este o hiperbolă atunci valorile lui λ_1 şi λ_2 trebuie alese astfel încât $-\frac{\Delta}{\lambda_1\cdot\delta} > 0$ şi $-\frac{\Delta}{\lambda_2\cdot\delta} < 0$, adică $\frac{\Delta}{\lambda_1} > 0$ şi $\frac{\Delta}{\lambda_2} < 0$. Prin urmare avem

- $\lambda_1 > 0$ şi $\lambda_2 < 0$ (sau, altfel spus, deoarece λ_1 şi λ_2 au oricum semne opuse, $\lambda_1 > \lambda_2$) dacă $\Delta > 0$, şi
- $\lambda_1 < 0$ şi $\lambda_2 > 0$ (sau echivalent $\lambda_1 < \lambda_2$) dacă $\Delta < 0$.

În concluzie, pentru o astfel de conică, avem

$$\operatorname{sign}(\lambda_1 - \lambda_2) = \operatorname{sign}\Delta,$$

adică $\lambda_1 - \lambda_2$ şi Δ au acelaşi semn.

Pentru o conică degenerată de gen hiperbolic avem $\Delta = 0$ şi ecuaţia canonică

$$(\Gamma): \lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 = 0.$$

În acest caz convenim să alegem $\lambda_1 > 0$ şi $\lambda_2 < 0$.

Observaţia 6.10. Dacă avem o conică (Γ) de gen eliptic sau hiperbolic şi rotaţia reperului iniţial se face cu unghiul α, atunci avem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = C^t \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \times C,$$

unde $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in GO(2, \mathbb{R})$. De aici rezultă, după efectuarea calculelor,

$$2 \cdot a_{12} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \sin(2\alpha).$$

Prin urmare semnul lui $\sin(2\alpha)$ este acelaşi cu al expresiei $a_{12} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)$, adică acelaşi cu semnul lui $a_{12} \cdot \Delta$, dacă (Γ) este nedegenerată, deci, pentru o astfel de conică, avem:

- $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ dacă $a_{12} \cdot \Delta > 0$;
- $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ dacă $a_{12} \cdot \Delta < 0$.

Dacă (Γ) este de gen hiperbolic şi degenerată, am convenit că $\lambda_1 > 0$ şi $\lambda_2 < 0$, adică, în acest caz, vom avea $\operatorname{sign} \sin(2\alpha) = \operatorname{sign} a_{12}$ şi, prin urmare $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ dacă $a_{12} > 0$ şi $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ dacă $a_{12} < 0$.

2.2. Centre de simetrie. Fie (Γ) o conică dată în reperul iniţial $\mathcal{R}$ prin ecuaţia

$$(\Gamma) : f(x, y) = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0,$$

care, aşa cum am văzut, se poate scrie

$$(\Gamma) : f(X) = X^t \times A \times X + 2 \cdot B \times X + a_{33} = 0,$$

unde am folosit aceleaşi notaţii ca şi până acum.

Reamintim că un punct $C(x_0, y_0)$ din plan se numeşte centru de simetrie al lui (Γ) dacă pentru orice punct $M(x, y) \in (\Gamma)$ rezultă că şi simetricul său faţă de C aparţine conicei.

În continuare vom determina centrele de simetrie ale conicei (Γ) folosind forma matricială a ecuaţiei sale.

Dacă $M'(x', y')$ este simetricul lui M faţă de punctul P atunci P este mijlocul segmentului MM' şi avem $x_0 = \frac{x+x'}{2}$ şi $y_0 = \frac{y+y'}{2}$, adică $x' = 2 \cdot x_0 - x$ şi $y' = 2 \cdot y_0 - y$. Matricial putem scrie $X' = 2 \cdot X_0 - X$, unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ şi $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Dacă C este un centru de simetrie al conicei atunci $M' \in (\Gamma)$ şi, din ecuaţia conicei, avem

$$\begin{aligned} f(X) &= X^t \times A \times X + 2 \cdot B \times X + a_{33} \\ &= (2 \cdot X_0^t + (X')^t) \times A \times (2 \cdot X_0 + X') + 2B \times (2 \cdot X_0 + X') + a_{33} \\ &= 4 \cdot (X_0^t \times A \times X_0 - X_0^t \times A \times X') + 4 \cdot B \times (X_0 - X') + f(X') \\ &= 4 \cdot (X_0^t \times A + B) \times (X - X_0) = 0, \end{aligned}$$

unde am folosit faptul că $((X')^t \times A \times X_0)^t = X_0^t \times A \times X'$.

Acum, să presupunem că $X_0^t \times A + B \neq O_{12}$, adică $X_0^t \times A + B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, unde $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$. În acest caz ecuaţia conicei este

$$(\Gamma) : f(X) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

sau, echivalent,

$$(\Gamma) : f(x, y) = \alpha_1 \cdot (x - x_0) + \alpha_2 \cdot (y - y_0) = 0,$$

adică conica este o dreaptă, ceea ce este o contradicţie. Prin urmare rezultă

$$X_0^t \times A + B = O_{12} \Leftrightarrow A \times X_0 + B^t = O_{21}.$$

Scriind pe larg matricile A, B şi X_0 avem ecuaţia matricială

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_0 + a_{12} \cdot y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12} \cdot x_0 + a_{22} \cdot y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}.$$

În concluzie, putem enunţa următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 6.12. *Un punct $C(x_0, y_0)$ din plan este un centru de simetrie al conicei*

$$(\Gamma) : a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0$$

dacă şi numai dacă coordonatele sale verifică sistemul

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} = 0 \\ a_{12} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} = 0 \end{cases}. \tag{6.10}$$

OBSERVAŢIA 6.11. Se observă uşor că sistemul (6.10) poate fi scris

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

În continuare vom studia sistemul (6.10) pentru a vedea în ce condiţii este compatibil. Matricea sistemului este, evident, matricea A cu $\det A = \delta$. Prin urmare, dacă $\delta \neq 0$, adică (Γ) este o conică de gen eliptic sau hiperbolic, atunci $\operatorname{rang} A = 2$ şi sistemul este compatibil determinat.

PROPOZIŢIA 6.13. *O conică de gen eliptic sau hiperbolic are un centru de simetrie unic.*

OBSERVAŢIA 6.12. Centrul de simetrie al unei conice de gen eliptic sau hiperbolic este originea reperului său canonic.

Dacă $\delta = 0$, adică (Γ) este de gen parabolic, atunci $\operatorname{rang} A = 1$. Matricea extinsă a sistemului este $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix}$. Atunci $\operatorname{rang} \bar{A} = 1$ dacă şi numai dacă $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$. Dacă $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, adică (Γ) este nedegenerată, rezultă imediat că $\operatorname{rang} \bar{A} \neq 1 = \operatorname{rang} A$, deci, în acest caz, sistemul nu este compatibil.
Am presupus $\delta = 0$, adică $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Presupunem şi că $a_{11} \neq 0$ şi avem $a_{22} = \frac{a_{12}^2}{a_{11}}$. După un calcul direct, obţinem

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} = \frac{(a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{12})}{a_{11}} \\ &= \frac{1}{a_{11}} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

De aici rezultă că $\operatorname{rang} \bar{A} = 1$ dacă şi numai dacă $\Delta = 0$. Prin urmare, în acest caz sistemul este compatibil nedeterminat, iar soluţiile sale sunt coordonatele punctelor situate pe dreapta $(d) : a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} = 0$.

Propoziţia 6.14. *O conică de gen parabolic nu are centru de simetrie dacă este nedegenerată şi are o dreaptă de centre de simetrie dacă este degenerată (este o pereche de drepte paralele).*

Observaţia 6.13. Pentru o conică vidă orice punct din spaţiu este centru de simetrie.

Exemplul 6.4. Să se determine genul, tipul, ecuaţia canonică, reperul canonic şi să se reprezinte următoarea conică:

$$(\Gamma) : f(x, y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 - 8x - 44y + 32 = 0.$$

Să se precizeze care sunt focarele conicei şi excentricitatea acesteia.
Calculăm invarianţii conicei

$$\delta = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{vmatrix} = 100, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 8 & -6 & -4 \\ -6 & 17 & -22 \\ -4 & -22 & 32 \end{vmatrix} = -2000, \quad I = 8+17 = 25.$$

Cum $\delta > 0$ conica este de gen eliptic (şi are un centru de simetrie). Deoarece $\Delta \neq 0$ urmează că (Γ) este o conică nedegenerată, iar din $I \cdot \Delta < 0$ rezultă că este o elipsă.
Ecuaţia canonică va fi

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt soluţiile ecuaţiei

$$\lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0.$$

Avem $\lambda_{1,2} = \frac{25\pm15}{2}$ şi, cum $\lambda_1 - \lambda_2$ are acelaşi semn cu $\Delta = -2000 < 0$, rezultă $\lambda_1 = 5$ şi $\lambda_2 = 20$ şi, prin urmare,

$$(\Gamma) : \frac{(x')^2}{4} + (y')^2 - 1 = 0.$$

Reperul canonic se obţine printr-o rotaţie de unghi α dat de $\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}} = \frac{4}{3}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ (deoarece $a_{12} \cdot \Delta > 0$) urmată de o translaţie cu noua origine în centrul de simetrie al elipsei.

Coordonatele centrului de simetrie se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 6y - 4 = 0 \\ -6x + 17y - 22 = 0 \end{cases}.$$

Avem soluţia $x_0 = 2$, $y_0 = 2$ şi, astfel, centrul de simetrie $C(2, 2)$.

În continuare, notăm $\mathrm{tg}\,\alpha = m > 0$ şi obţinem ecuaţia

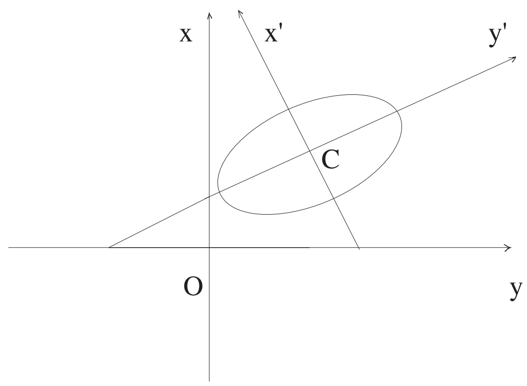
$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2m}{1-m^2} = \frac{4}{3},$$

de unde rezultă pantele noilor axe de coordonate $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -2$.

În concluzie reperul canonic are originea $C(2, 2)$ şi axele de coordonate date de următoarele ecuaţii:

$$(Cx') : y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \quad \text{şi} \quad (Cy') : y - 2 = -2 \cdot (x - 2).$$

Studiem dacă elipsa intersectează axele reperului iniţial. Rezolvăm ecuaţia $f(x, 0) = 0$ şi observăm că nu avem soluţii reale, deci conica nu intersectează axa (Ox). Ecuaţia $f(0, y) = 0$ de asemeni nu are soluţii reale, deci elipsa nu intersectează nici (Oy).



Din ecuaţia canonică a elipsei rezultă că aceasta are semiaxele $a = 2$ şi $b = 1$, deci semistanţa sa focală este $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$, adică $\|\overrightarrow{CF}\|^2 = \|\overrightarrow{CF'}\|^2 = 3$. Pe de altă parte focarele F şi F' aparţin axei (Cx'). Prin urmare coordonatele lui F şi ale lui F' în reperul iniţial verifică sistemul

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 3 \\ y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \end{cases},$$

cu soluţiile $x_{1,2} = 2 \pm \frac{6\cdot\sqrt{5}}{5}$, $y_{1,2} = 2 \pm \frac{3\cdot\sqrt{5}}{5}$. Atunci focarele elipsei sunt $F(2+\frac{6\cdot\sqrt{5}}{5}, 2+\frac{3\cdot\sqrt{5}}{5})$ şi $F'(2-\frac{6\cdot\sqrt{5}}{5}, 2-\frac{3\cdot\sqrt{5}}{5})$. Excentricitatea elipsei este dată de $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemplul 6.5. Să se determine genul, tipul, ecuaţia canonică, reperul canonic şi să se reprezinte următoarea conică:

$$(\Gamma) : f(x, y) = 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Să se precizeze care sunt focarele conicei şi excentricitatea acesteia.

Mai întâi calculăm invarianţii lui (Γ):

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 81, \quad I = 8.$$

Deoarece $\delta < 0$ conica este de gen hiperbolic (deci are un centru de simetrie). Din $\Delta > 0$ urmează că (Γ) este nedegenerată. Prin urmare (Γ) este o hiperbolă.

Ecuaţia canonică este

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt date de ecuaţia

$$\lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0.$$

Obţinem $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$ (deoarece $\Delta > 0$) şi ecuaţia canonică

$$(\Gamma) : (x')^2 - \frac{(y')^2}{9} - 1 = 0.$$

Coordonatele centrului de simetrie rezultă din sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 6 = 0 \\ 3x + 8y - 13 = 0 \end{cases}.$$

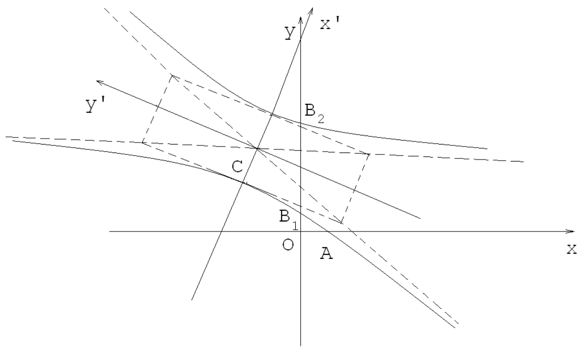
Avem soluţia $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ şi centrul de simetrie $C(-1, 2)$.

Notăm cu α unghiul de rotaţie a reperului iniţial ($\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, deoarece $a_{12} \cdot \Delta > 0$) şi notăm $\operatorname{tg}\alpha = m$. Atunci $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2m}{1-m^2} = \frac{2\cdot a_{12}}{a_{11}-a_{22}} = \frac{3}{4}$, deci pantele noilor axe de coordonate sunt $m_1 = 3$, $m_2 = -\frac{1}{3}$. Astfel reperul canonic are originea $C(-1, 2)$ şi axele de ecuaţii

$$(Cx') : y - 2 = 3 \cdot (x + 1) \quad \text{şi} \quad (Cy') : y - 2 = -\frac{1}{3} \cdot (x + 1).$$

Studiem dacă hiperbola intersectează axele reperului iniţial. Considerăm ecuaţia $f(x, 0) = 0$ şi obţinem $x = \frac{11}{12}$, deci conica intersectează axa Ox în punctul $A(\frac{11}{12}, 0)$. Din ecuaţia $f(0, y) = 0$ rezultă punctele de intersecţie dintre hiperbolă şi axa (Oy): $B_1(0, \frac{1}{2})$ şi $B_2(0, \frac{11}{4})$.

Semiaxele hiperbolei sunt $a = 1$ şi $b = 3$. Prin urmare semidistanţa focală va fi $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$. Focarele F şi F' ale hiperbolei se află pe axa



(Cx') şi $\|\overrightarrow{CF}\| = \|\overrightarrow{CF'}\| = c = \sqrt{10}$. Atunci coordonatele lor se determină din sistemul

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 10 \\ y - 2 = 3 \cdot (x+1) \end{cases}.$$

Soluţiile sunt $x_1 = 2$, $y_1 = 11$ şi $x_2 = 0$, $y_2 = 5$, deci avem focarele $F(1, 11)$ şi $F'(0, 5)$. Excentricitatea hiperbolei este $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{10}$.

Exemplul 6.6. Să se determine genul, tipul, ecuaţia canonică, reperul canonic şi să se reprezinte următoarea conică:

$$(\Gamma) : f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Să se determine coordonatele focarului conicei.

Invarianţii conicei sunt

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{vmatrix} = -64, \quad I = 2.$$

Din $\delta = 0$ rezultă că genul conicei este parabolic (deci nu are centru de simetrie). Cum $\Delta \neq 0$ conica este nedegenerată, deci este o parabolă.

Ecuaţia canonică a lui Γ este

$$(\Gamma) : (y'')^2 = 2\sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}} x'' \Leftrightarrow (\Gamma) : (y'')^2 = 4\sqrt{2}x'',$$

unde $p = \sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}}$ (vezi secţiunea *Parabola* din subcapitolul precedent).

Reperul canonic se obţine din reperul iniţial după o rotaţie de unghi α, unde $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = 1$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ (deoarece $a_{12} \cdot \Delta > 0$), adică $\alpha = \frac{\pi}{4}$, urmată de o translaţie cu noua origine în vârful parabolei V. În continuare vom determina coordonatele lui $V(x_0, y_0)$ (în reperul iniţial).

Relaţiile dintre coordonatele unui punct înainte şi după rotaţie sunt

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' - y') \\ y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' + y') \end{cases}.$$

Atunci ecuaţia parabolei în noul reper este

$$(\Gamma): 2(y')^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0.$$

Considerăm translaţia acestui reper cu noua origine în $V(x_0', y_0')$, vârful parabolei (coordonatele lui V sunt cele din reperul obţinut după rotaţie). Relaţiile dintre vechile coordonate ale unui punct oarecare din plan, şi cele noi sunt

$$\begin{cases} x' = x_0' + x'' \\ y' = y_0' + y'' \end{cases},$$

iar ecuaţia parabolei în reperul obţinut după translaţie este

$$(\Gamma): 2(y'')^2 - 8\sqrt{2}x'' + (4y_0 + 2\sqrt{2})y'' + 2(y_0')^2 - 8\sqrt{2}x_0' + 2\sqrt{2} + 25 = 0.$$

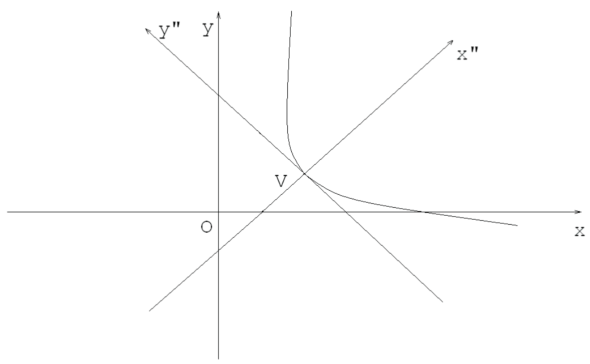
Această ecuaţie trebuie să coincidă cu ecuaţia canonică a parabolei, dedusă anterior. Avem sistemul

$$\begin{cases} 4y_0' + 2\sqrt{2} = 0 \\ \\ 2(y_0')^2 - 8\sqrt{2}x_0' + 2\sqrt{2}y_0' + 25 = 0 \end{cases},$$

cu soluţia $x_0' = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y_0' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Atunci coordonatele lui V în reperul iniţial sunt

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_0' - y_0') = 2 \\ \\ y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_0' + y_0') = 1 \end{cases}.$$

Axa de coordonate (Vx'') a reperului canonic trece prin V şi are panta $m = \operatorname{tg}\alpha = 1$. Astfel avem $(Vx'') : y - 1 = x - 2$, iar cealaltă axă de coordonate (Vy'') (care trece prin V şi este perpendiculară pe (Vx'')) este $(Vy'') : y - 1 = -x + 2$.



În final, studiem dacă parabola intersectează axele reperului iniţial. Avem ecuaţia $f(x, 0) = 0$ cu soluţia $x = 5$, deci conica intersectează axa (Ox) în punctul $A(5, 0)$. Cum ecuaţia $f(0, y) = 0$ nu are soluţii reale rezultă că parabola nu intersectează axa Oy.

Focarul parabolei F are, în reperul canonic, coordonatele $x_0'' = \frac{p}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ şi $y_0'' = 0$. Atunci avem $\|\overrightarrow{VF}\| = \sqrt{2}$. Deoarece $F \in (Vx'')$, atunci coordonatele lui F în reperul iniţial satisfac sistemul

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y - 1 = x - 2 \end{cases}.$$

De aici, folosind şi faptul că focarul se află în semiplanul superior determinat de dreapta (Vy''), rezultă că F are coordonatele $x = 3$ şi $y = 2$ în reperul iniţial.

Exemplul 6.7. Să se determine genul, tipul, ecuaţia canonică, reperul canonic şi să se reprezinte următoarea conică:

$$(\Gamma) : f(x,y) = 5x^2 + 4xy - y^2 - 5x + y = 0.$$

Pentru (Γ) avem invarianţii

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -9, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad I = 4.$$

Deoarece $\delta < 0$ conica este de gen hiperbolic. Din $\Delta = 0$ rezultă că (Γ) este degenerată. Astfel, conform teoremei de clasificare, conica este reuniunea a două drepte concurente cu ecuaţia canonică

$$(\Gamma) : \lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Determinăm λ_1 şi λ_2 din ecuaţia

$$\lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 9 = 0.$$

Obţinem $\lambda_1 = 2 + \sqrt{13}$ şi $\lambda_2 = 2 - \sqrt{13}$ şi ecuaţia canonică

$$(\Gamma) : (2 + \sqrt{13}) \cdot (x')^2 + (2 - \sqrt{13}) \cdot (y')^2 = 0.$$

Centrul de simetrie al lui (Γ), care este punctul de intersecţie al celor două drepte care compun conica, se determină din

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 4y - 5 = 0 \\ 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

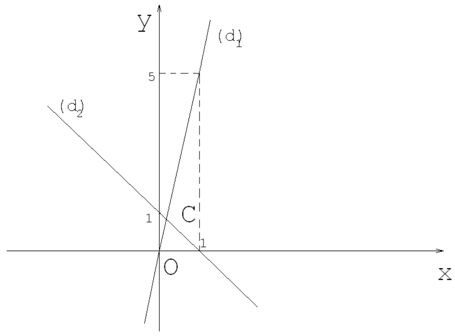
Soluţia sistemului este $x_0 = \frac{1}{6}$, $y_0 = \frac{5}{6}$ şi centrul de simetrie al conicei este $C(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$.

Pantele axelor de coordonate ale reperului canonic se determină din ecuaţia $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2m}{1-m^2} = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}} = \frac{2}{3}$, unde α este unghiul cu care este rotit reperul iniţial şi $m = \operatorname{tg}\alpha$. Rezultă $m_1 = -3 + \sqrt{13}$ (am ţinut cont că $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, deoarece $a_{12} > 0$) şi $m_2 = -3 - \sqrt{13}$. Ecuaţiile noilor axe de coordonate sunt

$$(Cx') : y - \frac{5}{6} = (-3 + \sqrt{13}) \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right) \text{ şi } (Cy') : y - \frac{5}{6} = (-3 - \sqrt{13}) \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right).$$

Pentru reprezentarea grafică este convenabil să privim ecuaţia iniţială ca pe o ecuaţie în necunoscuta y. Rezolvând-o obţinem ecuaţiile dreptelor a căror reuniune este conica, în reperul iniţial,

$$(d_1) : y = 5x \quad \text{şi} \quad (d_2) : y = -x + 1.$$



Exemplul 6.8. Să se determine genul, tipul, ecuaţia canonică, reperul canonic şi să se reprezinte următoarea conică:

$$(\Gamma) : f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 20x - 30y - 11 = 0.$$

Invarianţii conicei sunt

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -6 & 9 & -15 \\ 10 & -15 & -11 \end{vmatrix} = 0, \quad I = 13.$$

Deoarece $\delta = 0$ conica este de gen parabolic. Din $\Delta = 0$ rezultă că (Γ) este degenerată, deci este reuniunea a două drepte paralele.

Ecuaţia canonică a conicei este

$$(\Gamma) : (y')^2 + \frac{K}{I^2} = 0,$$

unde

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -468.$$

Prin urmare, avem

$$(\Gamma) : (y')^2 - \frac{36}{13} = 0.$$

Centrele de simetrie ale lui (Γ) se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ -2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}.$$

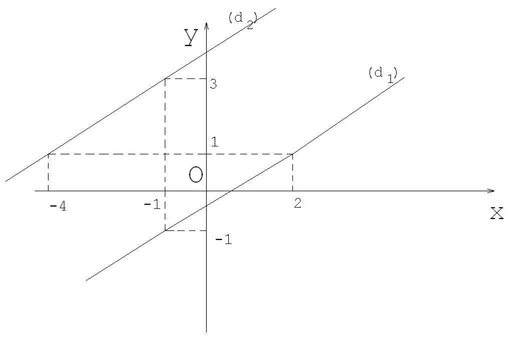
Avem dreapta de centre de simetrie, care este şi axa $(O'x')$ a reperului canonic, $(O'x') : 2x - 3y + 5 = 0$.

Pentru reprezentarea grafică, revenim la ecuaţia iniţială şi, grupând corespunzător termenii, obţinem

$$(2x - 3y)^2 + 10(2x - 3y) - 11 = 0.$$

Notăm $2x - 3y = t$ şi avem ecuaţia $t^2 + 10t - 11 = 0$, cu soluţiile $t_1 = 1$ şi $t_2 = -11$. Rezultă că dreptele a căror reuniune este conica sunt date, în reperul iniţial, de

$$(d_1) : 2x - 3y - 1 = 0 \quad \text{şi} \quad (d_2) : 2x - 3y + 11 = 0.$$



2.3. Poziţia relativă a unei drepte faţă de o conică. În această ultimă secţiune a acestui capitol vom prezenta, fără demonstraţii, definiţiile şi ecuaţiile axelor de simetrie ale unei conice, ale asimptotelor unei hiperbole, precum şi unele probleme de tangenţă. Pentru demonstraţii, detalii şi rezultate suplimentare pot fi consultate cursurile [**10**] şi [**17**].

Fie conica (Γ) dată prin ecuaţia generală

$$(\Gamma) : f(x, y) = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0.$$

DEFINIŢIA 6.13. Fie vectorul $\bar{v}(a, b)$ în plan. Se numeşte *diametru conjugat* direcţiei $\bar{v}$ în raport cu (Γ) locul geometric al punctelor P din plan cu proprietatea că pentru dreapta $(d_{P,\bar{v}})$ care trece prin P şi are vectorul director $\bar{v}$ şi pentru orice punct $M(x, y) \in (d_{P,\bar{v}})$, considerând simetricul său $M'(x', y')$ faţă de P, avem $f(x, y) = f(x', y')$.

PROPOZIŢIA 6.15. *Ecuaţia diametrului conjugat direcţiei lui $\bar{v}(a, b)$ în raport cu (Γ) este dreapta (d) de ecuaţie*

$$(d) : (a_{11} \cdot a + a_{12} \cdot b) \cdot x + (a_{21} \cdot a + a_{22} \cdot b) \cdot y = 0$$

sau, echivalent,

$$(d) : \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

TEOREMA 6.16. *Dacă (Γ) are centre de simetrie atunci acestea aparţin oricărui diametru conjugat oricărei direcţii în raport cu (Γ).*

DEFINIŢIA 6.14. O direcţie $\bar{v}$ se numeşte *direcţie principală* a conicei (Γ) dacă direcţia diametrului conjugat lui $\bar{v}$ este ortogonală pe $\bar{v}$.

PROPOZIŢIA 6.17. *Vectorul $\bar{v}$ este o direcţie principală a conicei (Γ) dacă şi numai dacă $\bar{v}$ este un vector propriu al matricei* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

PROPOZIŢIA 6.18. *Un diametru conjugat unei direcţii principale a unei conice este o axă de simetrie a conicei.*

PROPOZIŢIA 6.19. *Elipsele sau hiperbolele au două axe de simetrie care sunt axele reperelor lor canonice.*

PROPOZIŢIA 6.20. *Parabolele au o singură axă de simetrie, dată de ecuaţia*

$$(d) : \frac{1}{2} \cdot a_{11} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot a_{12} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \text{dacă} \quad a_{11} \neq 0$$

sau

$$(d) : \frac{1}{2} \cdot a_{12} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot a_{22} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \text{dacă} \quad a_{22} \neq 0.$$

DEFINIŢIA 6.15. O direcţie $\bar{v}$ se numeşte *direcţie asimptotică* a lui (Γ) dacă direcţia diametrului conjugat lui $\bar{v}$ coincide cu cea a lui $\bar{v}$.

PROPOZIŢIA 6.21. *Coordonatele unei direcţii asimptotice a conicei (Γ) sunt date de ecuaţia*

$$a_{11} \cdot a^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot a \cdot b + a_{22} \cdot b^2 = 0.$$

TEOREMA 6.22. *O conică (Γ) nu are direcţii asimptotice dacă este de gen eliptic; are o singură direcţie asimptotică dacă este de gen parabolic şi are două direcţii asimptotice dacă este de gen hiperbolic.*

DEFINIŢIA 6.16. O dreaptă din plan se numeşte *asimptotă* a unei conice dacă este diametrul conjugat unei direcţii asimptotice a conicei.

TEOREMA 6.23. *Elipsele şi parabolele nu au asimptote, în timp ce hiperbolele au două asimptote.*

Acum considerăm forma matricială a ecuaţiei conicei (Γ):

$$(\Gamma) : f(X) = X^t \times A \times X + 2 \cdot B \times X + a_{33} = 0,$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Fie dreapta (d) în plan, care trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0)$ şi are vectorul director $\bar{v}(a, b)$, $a^2 + b^2 > 0$, dată prin ecuaţiile parametrice

$$(d) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot a \\ y = y_0 + \lambda \cdot b \end{cases} \Leftrightarrow (d) : X = X_0 + \lambda \cdot V, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

unde am notat $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Coordonatele punctelor comune conicei (Γ) şi dreptei (d) trebuie să verifice ecuaţia de gradul 2 cu necunoscuta λ care se obţine (matricial) înlocuind X din ecuaţia lui (d) în cea a lui (Γ). În acest mod obţinem ecuaţia, scrisă cu ajutorul matricilor,

$$(V^t \times A \times V) \cdot \lambda^2 + 2 \cdot ((X_0^t \times A + B) \times V) \cdot \lambda + f(X_0) = 0.$$

Dacă această ecuaţie are două soluţii reale atunci există două puncte comune şi dreapta (d) este secantă conicei. Dacă nu avem soluţii reale atunci nu avem puncte comune şi dreapta (d) este nesecantă conicei. Dacă avem soluţie unică atunci (d) este tangentă conicei şi putem enunţa următoarele două rezultate.

PROPOZIŢIA 6.24. *Ecuaţiile tangentelor duse prin punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *la conica* (Γ) *se obţin din*

$$((X_0 \times A + B) \times (X - X_0))^2 - f(X_0) \cdot ((X - X_0)^t \times A \times (X - X_0)) = 0.$$

PROPOZIŢIA 6.25. *Ecuaţia (matricială) a tangentei la* (Γ) *în punctul* $M_0(x_0, y_0) \in (\Gamma)$ *este*

$$(t) : X_0^t \times A \times X + B \times (X + X_0) + a_{33} = 0.$$

OBSERVAŢIA 6.14. Scriind pe larg ecuaţia tangentei la (Γ) prin $M_0(x_0, y_0)$ din propoziţia anterioară, se obţine

$$(t) : a_{11} \cdot x_0 \cdot x + a_{12} \cdot (x \cdot y_0 + x_0 \cdot y) + a_{22} \cdot y_0 \cdot y + a_{13} \cdot (x + x_0) + a_{23} \cdot (y + y_0) + a_{33} = 0,$$

adică ecuaţia tangentei se poate deduce prin dedublarea ecuaţiei conicei în punct.

CAPITOLUL 7

SFERA

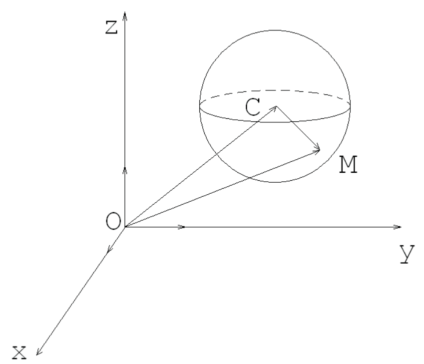
După plan, sfera este cel de-al doilea tip de suprafaţă pe care îl vom studia în acest curs. Vom vedea că în multe privinţe acest studiu este asemănător, din punctul de vedere al metodelor folosite, celui efectuat în cazul cercului în plan.

În acest capitol vom folosi reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$ în spaţiu şi sistemul corespunzător de axe de coordonate, (Ox), (Oy) şi (Oz).

1. Reprezentări analitice ale sferei

1.1. Sfera determinată de centrul şi de raza sa.

Definiţia 7.1. Locul geometric al punctelor din spaţiu aflate la o distanţă $R > 0$ de un punct dat C se numeşte *sferă* de centru C şi rază R şi se notează $\mathcal{S}(C, R)$.



Fie sfera $\mathcal{S}(C, R)$, unde $C(a, b, c)$ şi $R > 0$, şi punctul $M(x, y, z) \in \mathcal{S}(C, R)$. Notăm cu $\bar{r}_0 = \overrightarrow{OC} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$ vectorul de poziţie al centrului şi cu $\bar{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ vectorul de poziţie al punctului M. Atunci avem

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \bar{r} - \bar{r}_0 = (x - a) \cdot \bar{i} + (y - b) \cdot \bar{j} + (z - c) \cdot \bar{k}.$$

Astfel, din definiţia sferei avem $\|\overrightarrow{CM}\| = \|\bar{r} - \bar{r}_0\| = R$ şi apoi *ecuaţia vectorială* a sferei:

$$(\mathcal{S}) : (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = R^2.$$

De aici rezultă, după explicitarea produsului scalar, *ecuaţia canonică* a sferei:

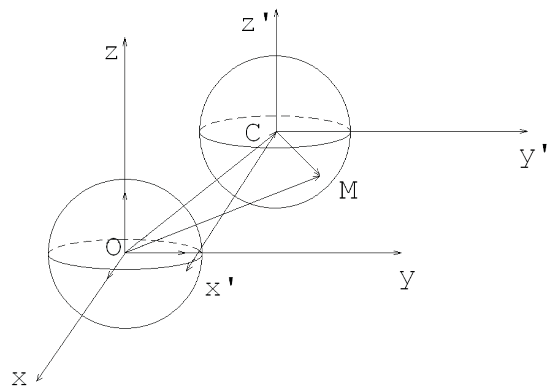
$$(\mathcal{C}) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Aşa cum am văzut anterior (în capitolul *Repere*), un punct din spaţiu poate fi determinat atât cu ajutorul coordonatelor carteziene cât şi prin precizarea coordonatelor polare. Reamintim că, pentru un punct M, aceste coordonate sunt $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| \in (0,\infty)$, $\theta = (\widehat{\bar{i}, \overrightarrow{OM'}}) \in [0,2\pi)$ şi $\varphi = (\widehat{\bar{k}, \overrightarrow{OM}}) \in (0,\pi)$, unde M' este proiecţia punctului M pe planul de coordonate (xOy); iar între coordonatele carteziene şi cele polare ale unui punct din spaţiu au loc relaţiile

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\varphi \end{cases}.$$

Este clar că toate punctele care aparţin unei sfere de rază R vor avea prima coordonată polară $\rho = R$, iar dacă sfera $S_0(O,R)$ are centrul în originea O a reperului cartezian $\mathcal{R}$ rezultă imediat *ecuaţiile* sale *parametrice*:

$$(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} x = R \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = R \cdot \cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0,2\pi), \varphi \in [0,\pi].$$



Dacă avem o sferă de centru $C(a,b,c)$ şi rază R, pentru a-i determina ecuaţiile parametrice, considerăm translaţia reperului iniţial $\mathcal{R}$ cu noua origine în C. Atunci, aşa cum am văzut mai sus, ecuaţiile parametrice ale sferei în reperul obţinut după translaţie sunt:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x' = R \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y' = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z' = R \cdot \cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0,2\pi), \varphi \in [0,\pi].$$

Folosind formulele schimbării coordonatelor unui punct la o translaţie în spaţiu obţinem *ecuaţiile parametrice* ale sferei $\mathcal{S}(C,R)$ în reperul $\mathcal{R}$:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x = a + x' = a + R \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = b + y' = b + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = c + z' = c + R \cdot \cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0,2\pi), \varphi \in [0,\pi].$$

Exemplul 7.1. Ecuaţia canonică a sferei cu centrul în punctul $C(1,2,3)$ şi de rază $R = 3$ este

$$(\mathcal{S}) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9,$$

iar ecuaţiile sale parametrice sunt

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = 2 + 3 \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = 3 + 3 \cdot \cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi].$$

1.2. Ecuaţia generală a unei sfere. La fel ca în cazul cercului în plan, se demonstrează imediat următorul rezultat.

PROPOZIŢIA 7.1. *Ecuaţia oricărui sfere poate fi scrisă astfel:*

$$\alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot y^2 + \alpha \cdot z^2 + \beta \cdot x + \gamma \cdot y + \delta \cdot z + \lambda = 0, \tag{7.1}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$, *cu* $\alpha \neq 0$ *şi* $\beta^2+\gamma^2+\delta^2-4\cdot\alpha\cdot\delta > 0$. *Reciproc,* (7.1) *este ecuaţia unei sfere de centru* $C(-\frac{\beta}{2\cdot\alpha}, -\frac{\gamma}{2\cdot\alpha}, -\frac{\delta}{2\cdot\alpha})$ *şi rază* $R = \frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2-4\cdot\alpha\cdot\lambda}}{2\cdot|\alpha|}$.

Ecuaţia (7.1) poartă numele de *ecuaţia generală* a sferei.

OBSERVAŢIA 7.1. Notând $p = \frac{\beta}{\alpha}$, $q = \frac{\gamma}{\alpha}$, $r = \frac{\delta}{\alpha}$ şi $s = \frac{\lambda}{\alpha}$, ecuaţia generală a unei sfere devine

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 + p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z + s = 0,$$

iar aceasta este *ecuaţia normală* a sferei $(\mathcal{S})$.

1.3. Sfera determinată de patru puncte necoplanare.

PROPOZIŢIA 7.2. *Fie* $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,4}$, *patru puncte necoplanare în spaţiu. Există şi este unică o sferă care conţine cele patru puncte. Ecuaţia acestei sfere este*

$$(\mathcal{S}) : \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.2}$$

DEMONSTRAŢIE. Deoarece punctele M_1, M_2, M_3 şi M_4 sunt necoplanare, rezultă

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.3}$$

Căutăm o sferă, dată prin ecuaţia normală, care să conţină cele patru puncte:

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 + p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z + s = 0$$

Un punct $M(x,y,z)$ aparţine acestei sfere dacă şi numai dacă sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+p\cdot x+q\cdot y+r\cdot z+s &= 0\\ x_1^2+y_1^2+z_1^2+p\cdot x_1+q\cdot y_1+r\cdot z_1+s &= 0\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2+p\cdot x_2+q\cdot y_2+r\cdot z_2+s &= 0\\ x_3^2+y_3^2+z_3^2+p\cdot x_3+q\cdot y_3+r\cdot z_3+s &= 0\\ x_4^2+y_4^2+z_4^2+p\cdot x_4+q\cdot y_4+r\cdot z_4+s &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p\cdot x+q\cdot y+r\cdot z+s &= -x^2-y^2-z^2\\ p\cdot x_1+q\cdot y_1+r\cdot z_1+s &= -x_1^2-y_1^2-z_1^2\\ p\cdot x_2+q\cdot y_2+r\cdot z_2+s &= -x_2^2-y_2^2-z_2^2\\ p\cdot x_3+q\cdot y_3+r\cdot z_3+s &= -x_3^2-y_3^2-z_3^2\\ p\cdot x_4+q\cdot y_4+r\cdot z_4+s &= -x_3^2-y_3^2-z_4^2 \end{cases},$$

cu necunoscutele p, q, r şi s, este compatibil. Matricea sistemului şi matricea sa extinsă sunt

$$A=\begin{pmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \bar{A}=\begin{pmatrix} x & y & z & 1 & -x^2-y^2-z^2\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & -x_1^2-y_1^2-z_1^2\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & -x_2^2-y_2^2-z_2^2\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & -x_3^2-y_3^2-z_3^2\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 & -x_4^2-y_4^2-z_4^2 \end{pmatrix}.$$

Din (7.3) rezultă $\operatorname{rang} A = 4$. Prin urmare, sistemul este compatibil dacă şi numai dacă $\operatorname{rang}\bar{A}=4$, adică, dacă şi numai dacă $\det\bar{A}=0$. Această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia (7.2).

Dacă sistemul este compatibil atunci este compatibil determinat, adică soluţia sa este unică şi astfel coeficienţii p, q, r şi s din ecuaţia normală a sferei sunt unic determinaţi. □

Exemplul 7.2. Să se determine centrul şi raza sferei care conţine punctele $M_1(1,0,1)$, $M_2(1,1,0)$, $M_3(1,0,0)$ şi $M_4(-1,-1,0)$.

Din $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, rezultă că punctele M_1, M_2, M_3 şi M_4 sunt necoliniare, deci determină în mod unic o sferă, iar ecuaţia acestei sfere va fi:

$$(\mathcal{S}): \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$(\mathcal{S}): x^2+y^2+z^2+x-y-z-2=0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{S}): \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(z^2-z+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}-2=0.$$

Ecuaţia canonică a sferei este:

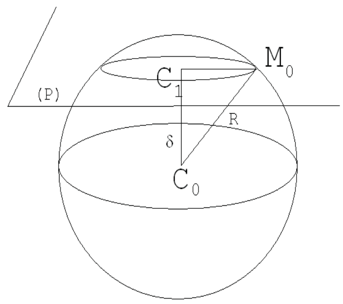
$$(\mathcal{C}): \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{4},$$

de unde rezultă că sfera are centrul în punctul $C(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ şi raza $R = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

2. Poziţia relativă a unui plan faţă de o sferă. Cercul în spaţiu

Fie planul $(P) : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, şi sfera $\mathcal{S}(C_0, R)$ de centru $C_0(a, b, c)$ şi rază R. Este clar că minimul distanţelor de la centrul sferei la punctele planului este realizat de distanţa de la centru la plan şi, în consecinţă, dacă notăm $\delta = d(C_0, (P))$ avem:

- dacă $\delta > R$ atunci planul nu intersectează sfera, adică este exterior acesteia;
- dacă $\delta = R$ atunci planul are un singur punct de intersecţie cu sfera (piciorul perpendicularei din C_0 pe (P)), adică este tangent sferei;
- dacă $\delta < R$ atunci (P) şi $(\mathcal{S})$ au mai mult de un singur punct comun şi spunem că planul secţionează sfera.



Vom studia în continuare acest ultim caz. Fie C_1 proiecţia punctului C_0 pe planul (P) şi fie M_0 un punct oarecare de pe sferă care apaţine şi planului (P). Atunci, în triunghiul $\triangle C_0C_1M_0$, avem, din teorema lui Pitagora,

$$\|\overrightarrow{C_1M_0}\|^2 = \|\overrightarrow{C_0M_0}\|^2 - \|\overrightarrow{C_1C_0}\|^2 = R^2 - \delta^2 = \text{constant}\,.$$

Prin urmare locul geometric al punctelor care aparţin şi sferei şi planului este un cerc situat în plan, numit cercul de secţiune al sferei $(\mathcal{S})$ cu planul (P). Cercurile care se obţin prin secţionarea unei sfere cu plane ce conţin centrul acesteia se numesc *cercurile mari* ale sferei.

Astfel, în spaţiu, un cerc se defineşte ca fiind intersecţia unei sfere cu un plan (în general) şi va fi determinat de ecuaţiile

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \end{cases}.$$

Trebuie spus că acest mod de a determina un cerc în spaţiu nu este unic (aşa cum vom vedea în capitolul *Cuadrice*).

Exemplul 7.3. Să se determine centrul şi raza cercului de secţiune al sferei

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$

cu planul $(P) : x + y + z = 0$.

Mai întâi vom determina ecuaţia canonică a sferei pentru a-i găsi centrul şi raza. Obţinem imediat

$$(\mathcal{S}) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9,$$

de unde rezultă coordonatele centrului sferei $C_0(1,-1,2)$ şi raza $R = 3$.
Cum distanţa de la C_0 la planul (P) este

$$\delta = d(C_0, (P)) = \frac{|1-1+2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} < 3 = R,$$

urmează că planul secţionează sfera. Aşa cum am văzut, centrul C_1 al cercului de secţiune este piciorul perpendicularei din centrul sferei pe plan. Vectorul director al acestei drepte va fi vectorul normal $N(1,1,1)$ la (P) şi, cum C_0 îi aparţine, ecuaţiile sale parametrice sunt:

$$(C_0C_1) : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pentru a determina intersecţia dintre (C_0C_1) şi (P) trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2+\lambda \\ x+y+z = 0 \end{cases}.$$

Obţinem $\lambda = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{5}{3}$ şi $z = \frac{4}{3}$, adică avem centrul cercului de secţiune $C_1(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.
Considerăm punctul M de pe cercul de secţiune. Deoarece M apaţine sferei şi cum $\overrightarrow{C_0C_1} \perp \overrightarrow{C_0M}$, rezultă, aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle C_0C_1M$,

$$\|\overrightarrow{C_1M}\|^2 = \|\overrightarrow{C_0M}\|^2 - \|\overrightarrow{C_0C_1}\|^2 = 9 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3}.$$

Astfel raza cercului de secţiune este $r = \|\overrightarrow{C_1M}\| = \frac{\sqrt{69}}{3}$.

3. Poziţia relativă a unei drepte faţă de o sferă

Vom studia această problemă folosind ecuaţiile vectoriale ale sferei şi dreptei. Considerăm sfera $\mathcal{S}(C,R)$ dată de ecuaţia

$$(\mathcal{S}) : (\bar{r} - \bar{r}_0)\cdot(\bar{r} - \bar{r}_0) = R^2,$$

unde $\bar{r}_0$ este vectorul de poziţie al centrului sferei, şi dreapta, dată de asemeni vectorial,

$$(d) : \bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda\cdot\bar{v},$$

unde $\bar{r}_1$ este vectorul de poziţie al unui punct de pe dreaptă, iar $\bar{v}$ este vectorul director al dreptei. Posibilele puncte de intersecţie dintre (d) şi $(\mathcal{S})$ corespund valorilor parametrului λ care sunt soluţii ale sistemului format din cele două ecuaţii. Înlocuind vectorul $\bar{r}$ dat de ecuaţia dreptei în ecuaţia sferei, obţinem următoarea ecuaţie de grad 2 cu necunoscuta λ:

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_0 + \lambda\cdot\bar{v})\cdot(\bar{r}_1 - \bar{r}_0 + \lambda\cdot\bar{v}) = R^2$$

$$\Leftrightarrow \|\bar{v}\|^2 \cdot \lambda^2 - 2 \cdot (\bar{v} \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_0)) \cdot \lambda + \|\bar{r}_1 - \bar{r}_0\|^2 - R^2 = 0,$$

cu discriminantul

$$\Delta = 4 \cdot (\bar{v} \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_0))^2 - 4 \cdot \|\bar{v}\|^2 \cdot (\|\bar{r}_1 - \bar{r}_0\|^2 - R^2).$$

Din identitatea lui Lagrange rezultă

$$\Delta = 4 \cdot \|\bar{v}\|^2 \cdot (R^2 - \delta^2),$$

unde $\delta = d(C, (d))$. În concluzie, avem

- dacă $\delta > R$ atunci ecuaţia nu are soluţii reale, deci dreapta nu intersectează sfera, adică (d) este exterioară sferei;
- dacă $\delta = R$ atunci ecuaţia are o singură soluţie reală, adică (d) este tangentă sferei;
- dacă $\delta < R$ ecuaţia are două soluţii reale şi dreapta intersectează sfera în două puncte distincte, adică este secantă sferei.

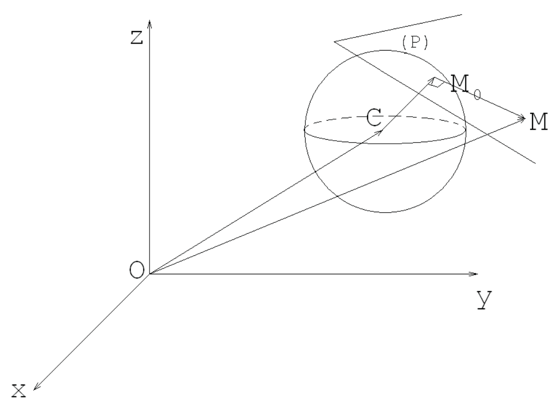
4. Probleme de tangenţă

4.1. Planul tangent la o sferă printr-un punct de pe sferă. Fie sfera $\mathcal{S}(C, R)$ dată prin ecuaţia sa vectorială

$$(\mathcal{S}) : (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = R^2,$$

unde $\bar{r}_0(a, b, c)$ este vectorul de poziţie al centrului $C(a, b, c)$. Considerăm punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\mathcal{S})$ cu vectorul de poziţie $\bar{r}_{M_0}(x_0, y_0, z_0)$ şi planul (P) care trece prin M_0 şi este tangent la sferă. Aşa cum am văzut în subcapitolul precedent, avem următorul rezultat.

Propoziţia 7.3. *Segmentul orientat $\overrightarrow{CM_0}$ este normal la planul (P).*



Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare din planul (P) cu vectorul de poziţie $\bar{r}(x, y, z)$. Din propoziţia precedentă rezultă $\overrightarrow{CM_0} \perp \overrightarrow{M_0M}$, adică

$$\overrightarrow{CM_0} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Cum

$$\overrightarrow{CM_0} = \overrightarrow{OM_0} - \overrightarrow{OC} = \bar{r}_{M_0} - \bar{r}_0 = (x_0 - a) \cdot \bar{i} + (y_0 - b) \cdot \bar{j} + (z_0 - c) \cdot \bar{k},$$

şi

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \bar{r} - \bar{r}_{M_0} = (x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j} + (z - z_0) \cdot \bar{k},$$

avem ecuaţia vectorială a planului tangent $(P) : (\bar{r} - \bar{r}_{M_0}) \cdot (\bar{r}_{M_0} - \bar{r}_0) = 0$ şi apoi ecuaţia sa canonică:

$$(P) : (x_0 - a) \cdot x + (y_0 - b) \cdot y - x_0^2 - y_0^2 + a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 0. \tag{7.4}$$

Dacă sfera $(\mathcal{S})$ este dată prin ecuaţia generală

$$(\mathcal{S}) : \alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot y^2 + \alpha \cdot z^2 + \beta \cdot x + \gamma \cdot y + \delta \cdot z + \lambda = 0,$$

atunci centrul sferei este $C(a = -\frac{\beta}{2 \cdot \alpha}, b = -\frac{\gamma}{2 \cdot \alpha}, c = -\frac{\delta}{2 \cdot \alpha})$. Înlocuind a, b şi c în (7.4), rezultă ecuaţia planului tangent în M_0 la sferă:

$$\begin{aligned} (P) \quad : \quad & \alpha \cdot x_0 \cdot x + \alpha \cdot y_0 \cdot y + \alpha \cdot z_0 \cdot z + \tfrac{\beta}{2} \cdot (x + x_0) + \tfrac{\gamma}{2} \cdot (y + y_0) \\ & + \tfrac{\delta}{2} \cdot (z + z_0) + \lambda = 0. \end{aligned}$$

De aici se vede că ecuaţia planului tangent într-un punct de pe sferă se obţine prin dedublarea ecuaţiei sferei în punct.

Exemplul 7.4. Să se determine ecuaţia planului tangent la sfera

$$(\mathcal{S}) : f(x, y, z) = x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 - 4 = 0,$$

care trece prin punctul $M_0(0, 1, 2)$.

Este clar că $f(0, 1, 2) = 0$, adică $M_0 \in (\mathcal{S})$ şi, deoarece ecuaţia sferei este

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot y - 4 \cdot z + 1 = 0,$$

ecuaţia planului tangent în punctul M_0 se obţine prin dedublarea acesteia în punct:

$$(P) : 3 \cdot y + 2 \cdot z - 2 = 0.$$

4.2. Planul tangent la o sferă paralel cu un plan dat. Fie planul $(P) : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, şi sfera $\mathcal{S}(C_0, R)$ cu centrul $C_0(a, b, c)$ şi raza R. Căutăm planul (P') tangent la sferă cu proprietatea $(P') \parallel (P)$. Ecuaţia unui astfel de plan are forma

$$(P') : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

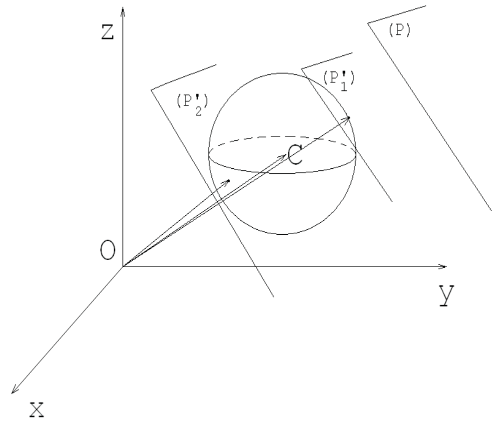
Planul (P') este tangent la sferă dacă şi numai dacă $d(C_0, (P')) = R$. Obţinem

$$d(C_0, (P')) = R \Leftrightarrow \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + \alpha|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm R \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - A \cdot a - B \cdot b - C \cdot c,$$

adică există două plane paralele cu (P) şi tangente la sferă, date de ecuaţiile

$$(P'_{1,2}) : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot c \pm R \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - A \cdot a - B \cdot b - C \cdot c = 0.$$



Exemplul 7.5. Să se determine planele tangente la sfera

$$(\mathcal{S}): x^2 + y^2 + 4 \cdot x - 2 \cdot y + z^2 + 1 = 0$$

paralele cu planul $(P): 2 \cdot x + y - z - 1 = 0$.

Ecuaţia canonică a sferei este

$$(\mathcal{S}): (x^2 + 4 \cdot x + 4) - 4 + (y^2 - 2 \cdot y + 1) - 1 + z^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{S}): (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4.$$

Centrul sferei este punctul $C_0(-2, 1, 0)$, iar raza sa $R = 2$.

Un plan $(P') \parallel (P)$ are ecuaţia de forma

$$(P'): 2 \cdot x + y - z - \alpha = 0$$

şi, impunând ca (P') să fie tangent la sferă, avem

$$d(C_0, (P')) = R \Leftrightarrow \frac{|-4 + 1 - \alpha|}{\sqrt{6}} = 2,$$

adică $\alpha = -3 \pm 2 \cdot \sqrt{6}$. Planele căutate vor fi

$$(P'_{1,2}): 2 \cdot x + y - z - 3 \pm 2\sqrt{6} = 0.$$

4.3. Planul tangent la o sferă care conţine o dreaptă dată exterioară sferei. Fie sfera $(\mathcal{S})$ cu centrul în punctul $C(a, b, c)$ şi raza R şi fie dreapta

$$(d): \begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

astfel încât (d) nu are nici un punct comun cu $(\mathcal{S})$, adică este exterioară sferei.

Un plan care conţine dreapta face parte din fasciculul de plane cu axa (d), iar ecuaţia sa are forma:

$$(P): \alpha \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1) + \beta \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P) \; : \; (\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2) \cdot x + (\alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2) \cdot y + (\alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2) \cdot z$$

$$+ \alpha \cdot D_1 + \beta \cdot D_2 = 0.$$

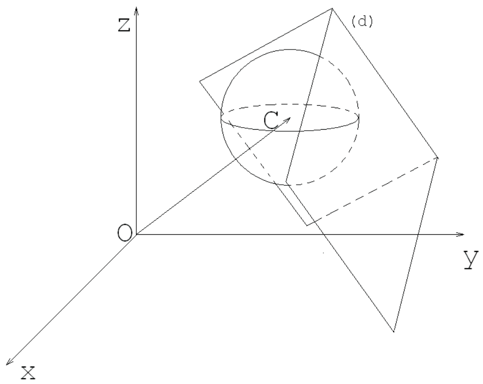
Planul (P) este tangent la sfera $(\mathcal{S})$ dacă şi numai dacă $d(C,(P)) = R$, adică

$$\frac{|\alpha \cdot (A_1 \cdot a + B_1 \cdot b + C_1 \cdot c + D_1) + \beta \cdot (A_2 \cdot a + B_2 \cdot b + C_2 \cdot c + D_2)|}{\sqrt{(\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2)^2 + (\alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2)^2 + (\alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2)^2}} = R.$$

Putem avea următoarele situaţii:

- dacă ambele plane care apar în definiţia dreptei (d) sunt tangente la sferă atunci ecuaţia de mai sus se transformă într-o identitate;
- dacă unul din cele două plane care definesc dreapta (d) este tangent la sferă atunci ecuaţia este liniară, iar soluţia sa determină un al doilea plan care conţine dreapta şi este tangent la sferă;
- dacă nici unul din planele din definiţia dreptei (d) nu este tangent la sferă atunci ecuaţia este de gradul 2 şi, prin calcul direct, se arată că are două soluţii reale, care determină apoi două plane tangente la sferă.

PROPOZIŢIA 7.4. *Există două plane tangente la o sferă care conţin o dreaptă dată exterioară acesteia.*



EXEMPLUL 7.6. Să se determine ecuaţiile planelor tangente la sfera

$$(\mathcal{S}) : (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

care conţin dreapta

$$(d) : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

Centrul sferei este $C(-1,0,1)$, cu vectorul de poziţie $r_1(-1,0,1)$, iar raza sa este $R = 1$. Din ecuaţiile dreptei rezultă $M_0(2,0,2) \in (d)$ şi că vectorul de poziţie al dreptei este $\bar{v}(2,-1,2)$. Dacă notăm cu $\bar{r}_0$ vectorul de poziţie al punctului M_0 atunci $\bar{r}_0(2,0,2)$ şi avem

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \bar{i} - 8 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k},$$

iar distanţa de la punctul C la dreapta (d) va fi

$$\delta = d(C,(d)) = \frac{\|(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) \times \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|} = \sqrt{2} > 1 = R,$$

deci dreapta este exterioară sferei.

Ecuaţiile generale ale dreptei pot fi obţinute astfel:

$$(d): \begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} \\ \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x+2y-2=0 \\ 2y+z-2=0 \end{cases}.$$

Un plan care face parte din fasciculul de plane cu axa (d) are ecuaţia de forma

$$(P'): \alpha \cdot (x+2y-2) + \beta \cdot (2y+z-2) = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dacă notăm $(\pi_1): x+2y-2=0$ şi $(\pi_2): 2y+z-2=0$ planele a căror intersecţie este dreapta (d), se verifică imediat că

$$\delta_1 = d(C,(\pi_1)) = \frac{3}{\sqrt{5}} \neq 1 \quad \text{şi} \quad \delta_2 = d(C,(\pi_2)) = \frac{1}{\sqrt{5}} \neq 1,$$

adică nici unul dintre cele două plane nu este tangent la sferă, astfel că $\alpha \neq 0$ şi $\beta \neq 0$. Atunci ecuaţia lui (P') poate fi scrisă

$$(P'): \lambda \cdot x + (2 + 2 \cdot \lambda) \cdot y + z - 2 - 2 \cdot \lambda = 0,$$

unde $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$. Impunând ca planul (P') să fie tangent la sferă, adică $\delta = d(C,(P')) = R$, avem ecuaţia

$$\frac{|-\lambda + 1 - 2 - 2 \cdot \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 4 \cdot (1+\lambda)^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

cu soluţiile $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ şi $\lambda_2 = -2$. Prin urmare, planele tangente la sferă care conţin dreapta (d) sunt:

$$(P_1'): \frac{5}{2}x + 7y + z - 7 = 0 \quad \text{şi} \quad (P_2'): -2x - 2y + z + 2 = 0.$$

CAPITOLUL 8

CUADRICE

Ca şi conicele, cuadricele pot fi studiate atât pe ecuaţiile reduse cât şi pe ecuaţiile generale. Deoarece al doilea caz depăşeşte cadrul acestui curs (pe care ne-am propus să îl restrângem la elementele cuprinse în programa de studiu a anului I al facultăţilor cu profil tehnic), vom prezenta, în partea a doua a acestui capitol, fără demonstraţie, doar teorema de clasificare a suprafeţelor algebrice de ordinul 2. Pentru aprofundarea acestor noţiuni recomandăm cursul [**17**].

Ca şi până acum, va fi folosit un reper cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$ în spaţiu şi sistemul de axe de coordonate corespunzător.

1. Cuadrice date prin ecuaţia canonică

Toate suprafeţele pe care le vom studia în continuare, în acest subcapitol, se numesc *cuadrice*.

(1) Elipsoidul este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia următoare:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \text{cu} \quad a \neq b \text{ sau } a \neq c \text{ sau } b \neq c.$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia canonică* a elipsoidului, iar reperul în care se obţine se numeşte reperul canonic al lui (E). Vom considera $a > 0$, $b > 0$ şi $c > 0$.

Pentru a studia şi reprezenta grafic o cuadrică vom determina intersecţiile acesteia cu axele de coordonate, cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu acestea. De asemeni, vom pune în evidenţă simetriile cuadricei.

Pentru un elipsoid, se observă imediat că dacă $M(x, y, z) \in (E)$ atunci $M_1(-x, -y, -z) \in (E)$, $M_2(x, y, -z) \in (E)$, $M_3(x, -y, z) \in (E)$, $M_4(-x, y, z) \in (E)$, $M_5(x, -y, -z) \in (E)$, $M_6(-x, y, -z) \in (E)$ şi $M_7(-x, -y, z) \in (E)$, adică originea reperului canonic este centru de simetrie al elipsoidului, iar axele şi planele de coordonate sunt axe şi respectiv plane de simetrie pentru (E).

Intersecţiile elipsoidului cu axele de coordonate sunt:

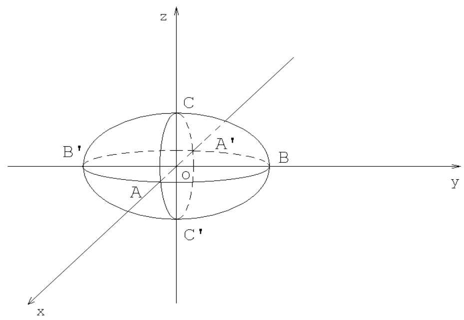
- cu (Ox): $A(a, 0, 0)$ şi $A'(-a, 0, 0)$;
- cu (Oy): $B(0, b, 0)$ şi $B'(0, -b, 0)$;
- cu (Oz): $C(0, 0, c)$ şi $C'(0, 0, -c)$.

Aceste puncte se numesc *vârfurile elipsoidului.*

Intersecţiile elipsoidului cu planele de coordonate sunt:

- cu $(xOy): z=0$: elipsa (sau cercul) de ecuaţii $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$;
- cu $(xOz): y=0$: elipsa (sau cercul) de ecuaţii $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$;
- cu $(yOz): x=0$: elipsa (sau cercul) de ecuaţii $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=0 \end{cases}$.

Observaţia 8.1. Este clar că cele trei secţiuni ale elipsoidului nu pot fi simultan cercuri. În schimb, aceste secţiuni pot fi toate elipse (dacă $a \neq b \neq c \neq a$).



Intersecţiile elipsoidului cu plane paralele cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(P): z=h=$ constant $((P) \parallel (xOy))$:
  - elipsa (sau cercul) de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1=0 \\ z=h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2\cdot(1-\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2\cdot(1-\frac{h^2}{c^2})}-1=0 \\ z=h \end{cases},$$

  dacă $h \in [-c,c]$;
  - punctul $C(0,0,c)$, dacă $h=c$, şi punctul $C'(0,0,-c)$, dacă $h=-c$;
  - mulţimea vidă dacă $h \in (-\infty,-c)\cup(c,\infty)$.
- cu planul $(P): y=h=$ constant $((P) \parallel (xOz))$:
  - elipsa (sau cercul) de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{h^2}{b^2}-1=0 \\ y=h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2\cdot(1-\frac{h^2}{b^2})}+\frac{z^2}{c^2\cdot(1-\frac{h^2}{b^2})}-1=0 \\ y=h \end{cases},$$

  dacă $h \in [-b,b]$;
  - punctul $B(0,b,0)$, dacă $h=b$, şi punctul $B'(0,-b,0)$, dacă $h=-b$;
  - mulţimea vidă dacă $h \in (-\infty,-b)\cup(b,\infty)$.
- cu planul $(P): x=h=$ constant $((P) \parallel (yOz))$:
  - elipsa (sau cercul) de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{h^2}{a^2}-1=0 \\ x=h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2\cdot(1-\frac{h^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2\cdot(1-\frac{h^2}{a^2})}-1=0 \\ x=h \end{cases},$$

dacă $h \in [-a, a]$;
- punctul $A(a, 0, 0)$, dacă $h = a$, şi punctul $A'(-a, 0, 0)$, dacă $h = -a$;
- mulţimea vidă dacă $h \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

Observaţia 8.2. Evident, nici pentru secţiunile cu plane paralele cu planele de coordonate nu putem avea simultan numai cercuri. În schimb, aceste secţiuni pot fi toate elipse.

Din ecuaţia canonică a elipsoidului (E) se observă că pentru un punct $M(x, y, z) \in (E)$ există un unghi $\varphi \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varphi \\ \frac{z^2}{c^2} = \cos^2 \varphi \end{cases},$$

şi, mai departe, există un unghi $\theta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} x = a \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = b \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = c \cdot \cos \varphi \end{cases}.$$

Reciproc, se verifică uşor că orice punct ale cărui coordonate carteziene sunt date de ecuaţiile de mai sus îi aparţin lui (E). Datorită periodicităţii funcţiilor sinus şi cosinus este clar că φ şi θ nu sunt unic determinaţi, de aceea vom considera $\varphi \in [0, \pi)$ şi $\theta \in [0, 2\pi]$. Am obţinut astfel *ecuaţiile parametrice* ale elipsoidului:

$$(E) : \begin{cases} x = a \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = b \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = c \cdot \cos \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, \pi), \ \theta \in [0, 2\pi).$$

(2) Hiperboloidul cu o pânză este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia

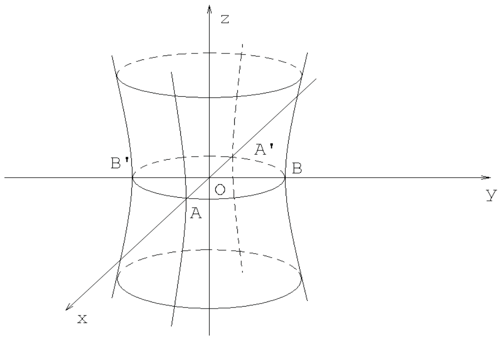
$$(H_1) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia canonică* a hiperboloidului cu o pânză.

Ca şi pentru elipsoid, se observă că originea, axele de coordonate şi planele de coordonate sunt elemente de simetrie ale hiperboloidului cu o pânză.

Intersecţiile lui (H_1) cu axele de coordonate sunt:
- cu (Ox): $A(a, 0, 0)$ şi $A'(-a, 0, 0)$;
- cu (Oy): $B(0, b, 0)$ şi $B'(0, -b, 0)$;
- (H_1) nu intersectează axa (Oz).

Intersecţiile hiperboloidului cu o pânză cu planele de coordonate sunt:
- cu $(xOy) : z = 0$: elipsa (sau cercul) de ecuaţii $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$;
- cu $(xOz) : y = 0$: hiperbola de ecuaţii $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$;
- cu $(yOz) : x = 0$: hiperbola de ecuaţii $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.



Intersecţiile hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(P): z = h =$ constant $((P) \parallel (xOy))$: elipsa (sau cercul) de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \cdot (1+\frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2 \cdot (1+\frac{h^2}{c^2})} - 1 = 0 \\ z = h \end{cases};$$

- cu planul $(P): y = h =$ constant $((P) \parallel (xOz))$: hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{h^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \cdot (1-\frac{h^2}{b^2})} - \frac{z^2}{c^2 \cdot (1-\frac{h^2}{b^2})} - 1 = 0 \\ y = h \end{cases};$$

- cu planul $(P): x = h =$ constant $((P) \parallel (yOz))$: hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{h^2}{a^2} - 1 = 0 \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2 \cdot (1-\frac{h^2}{a^2})} - \frac{z^2}{c^2 \cdot (1-\frac{h^2}{a^2})} - 1 = 0 \\ x = h \end{cases}.$$

La fel ca în cazul elipsoidului, se obţin *ecuaţiile parametrice* ale hiperboloidului cu o pânză:

$$(H_1): \begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} u \cdot \cos v \\ y = b \cdot \operatorname{ch} u \cdot \sin v \\ z = c \cdot \operatorname{sh} u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi).$$

(3) Hiperboloidul cu două pânze este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia:

$$(H_2): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

care se numeşte *ecuaţia canonică* a hiperboloidului cu două pânze.

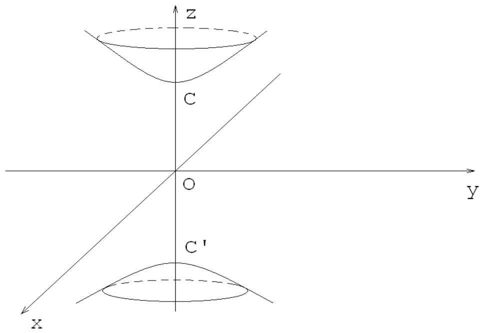
Se observă că originea, axele de coordonate şi planele de coordonate sunt elemente de simetrie ale hiperboloidului cu două pânze.

Intersecţiile lui (H_2) cu axele de coordonate sunt:

- (H_2) nu intersectează axa (Ox);
- (H_2) nu intersectează axa (Oy);
- cu (Oz): $C(0, 0, c)$ şi $C'(0, 0, -c)$.

Intersecţiile unui hiperboloid cu două pânze cu planele de coordonate sunt:

- (H_2) nu intersectează planul (xOy);
- cu $(xOz) : y = 0$: hiperbola de ecuaţii $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$;
- cu $(yOz) : x = 0$: hiperbola de ecuaţii $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.



Intersecţiile unui hiperboloid cu două pânze cu plane paralele cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(P) : z = h = \text{constant}$ $((P) \parallel (xOy))$:
  - (H_2) nu intersectează planul (P), dacă $h \in (-c, c)$;
  - punctul $C(0, 0, c)$, dacă $h = c$, şi punctul $C'(0, 0, -c)$, dacă $h = -c$;
  - elipsa (sau cercul) de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} + 1 = 0 \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2\cdot(\frac{h^2}{c^2}-1)} + \frac{y^2}{b^2\cdot(\frac{h^2}{c^2}-1)} - 1 = 0 \\ z = h \end{cases},$$

dacă $h \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$.

- cu planul $(P) : y = h = \text{constant}$ $((P) \parallel (xOz))$: hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{h^2}{b^2} + 1 = 0 \\ y = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2\cdot(1+\frac{h^2}{b^2})} - \frac{z^2}{c^2\cdot(1+\frac{h^2}{b^2})} + 1 = 0 \\ y = h \end{cases};$$

- cu planul $(P) : x = h = \text{constant}$ $((P) \parallel (yOz))$: hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{h^2}{a^2} + 1 = 0 \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2\cdot(1+\frac{h^2}{a^2})} - \frac{z^2}{c^2\cdot(1+\frac{h^2}{a^2})} + 1 = 0 \\ x = h \end{cases}.$$

Ecuaţiile parametrice ale hiperboloidului cu două pânze sunt:

$$(H_2) : \begin{cases} x = a \cdot \operatorname{sh} u \cdot \cos v \\ y = b \cdot \operatorname{sh} u \cdot \sin v \\ z = \pm c \cdot \operatorname{ch} u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi).$$

(4) Paraboloidul eliptic este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia:

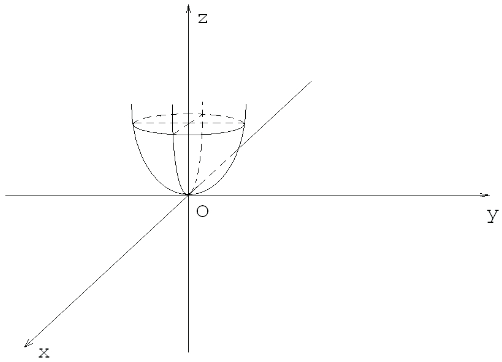
$$(PE) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

numită *ecuaţia canonică* a paraboloidului eliptic.

Avem imediat că $M(x, y, z) \in (PE)$ implică $z > 0$ şi că axa de coordonate (Oz) şi planele de coordonate (xOz) şi (yOz) sunt elemente de simetrie ale paraboloidului eliptic. Deasemeni se observă că $O(0, 0, 0) \in (PE)$ şi că O este singurul punct de intersecţie dintre un paraboloid eliptic şi axele de coordonate ale reperului său canonic.

Intersecţiile unui paraboloid eliptic cu planele de coordonate sunt:

- cu $(xOy) : z = 0$: originea reperului canonic $O(0, 0, 0)$;
- cu $(xOz) : y = 0$: parabola de ecuaţii $\begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0 \end{cases}$;
- cu $(yOz) : x = 0$: parabola de ecuaţii $\begin{cases} y^2 = 2b^2 z \\ x = 0 \end{cases}$.



Intersecţiile lui (PE) cu plane paralele cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(P) : z = h = \text{constant} > 0$ $((P) \parallel (xOy))$: elipsa (sau cercul) de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} - 1 = 0 \\ z = h \end{cases};$$

- cu planul $(P) : y = h = \text{constant}$ $((P) \parallel (xOz))$: parabola de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - 2z + \frac{h^2}{b^2} = 0 \\ y = h \end{cases};$$

- cu planul $(P) : x = h = \text{constant}$ $((P) \parallel (yOz))$: parabola de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - 2z + \frac{h^2}{a^2} = 0 \\ x = h \end{cases}.$$

Ecuaţiile parametrice ale paraboloidului eliptic sunt:

$$(PE) : \begin{cases} x = 2au \\ y = 2bv \\ z = 2(u^2 + v^2) \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(5) Paraboloidul hiperbolic este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia:

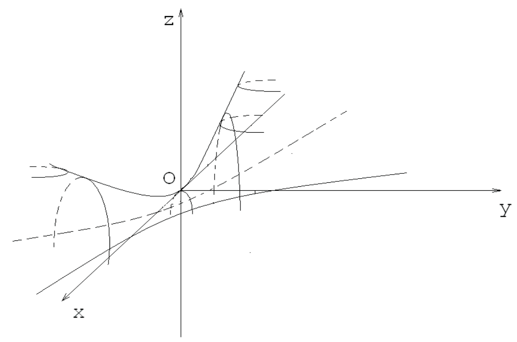
$$(PH) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

numită *ecuaţia canonică* a paraboloidului hiperbolic.

Se observă că $O(0,0,0) \in (PH)$ şi că axa (Oz) este o axă de simetrie a cuadricei, deoarece $M(x,y,z) \in (PH)$ implică $M'(-x,-y,z) \in (PH)$. Se verifică uşor că paraboloidul hiperbolic intersectează axele de coordonate ale reperului canonic doar în origine.

Intersecţiile lui (PH) cu planele de coordonate sunt:

- cu $(xOy) : z = 0$: două drepte concurente în origine, de ecuaţii $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$;
- cu $(xOz) : y = 0$: parabola de ecuaţii $\begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0 \end{cases}$;
- cu $(yOz) : x = 0$: parabola de ecuaţii $\begin{cases} y^2 = 2b^2 z \\ x = 0 \end{cases}$.



Intersecţiile lui (PH) cu plane paralele cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(P) : z = h =$ constant $((P) \parallel (xOy))$: hiperbola de ecuaţii
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} - 1 = 0 \\ z = h \end{cases},$$
cu axa reală paralelă cu (Ox), dacă $h > 0$, sau cu (Oy), dacă $h < 0$;
- cu planul $(P) : y = h =$ constant $((P) \parallel (xOz))$: parabola de ecuaţii
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - 2z - \frac{h^2}{b^2} = 0 \\ y = h \end{cases},$$
cu axa de simetrie paralelă cu (Oz);
- cu planul $(P) : x = h =$ constant $((P) \parallel (yOz))$: parabola de ecuaţii
$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + 2z - \frac{h^2}{a^2} = 0 \\ x = h \end{cases},$$
cu axa de simetrie paralelă cu (Ox).

Ecuaţiile parametrice ale paraboloidului hiperbolic sunt:
$$(PH) : \begin{cases} x = 2au \\ y = 2bv \\ z = 2(u^2 - v^2) \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(6) Conul pătratic este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia:

$$(CP): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Se observă că $O(0,0,0) \in (CP)$ şi că axele şi planele de coordonate sunt elemente de simetrie ale conului. Se vede imediat şi că (CP) intersectează axele şi planul de coordonate (xOy) ale reperului canonic doar în origine.

Intersecţiile lui (CP) cu celelalte plane de coordonate sunt:

- cu planul $(xOz): y = 0$: o pereche de drepte concurente în origine, de ecuaţii $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$;
- cu planul $(yOz): x = 0$: o pereche de drepte concurente în origine, de ecuaţii $\begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Intersecţiile lui (CP) cu plane paralele cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(P): z = h =$ constant $((P) \parallel (xOy))$: elipsa de ecuaţii

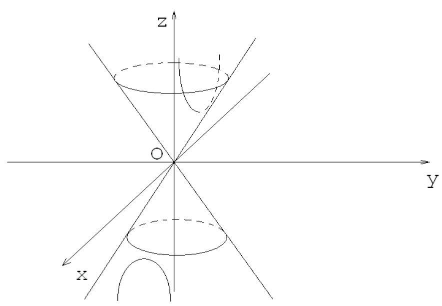
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 0 \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{h^2}{c^2}} - 1 = 0 \\ z = h \end{cases};$$

- cu planul $(P): y = h =$ constant $((P) \parallel (xOz))$: hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z^2}{c^2 \cdot \frac{h^2}{b^2}} - \frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{h^2}{b^2}} - 1 = 0 \\ y = h \end{cases};$$

- cu planul $(P): x = h =$ constant $((P) \parallel (yOz))$: hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z^2}{c^2 \cdot \frac{h^2}{a^2}} - \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{h^2}{a^2}} - 1 = 0 \\ x = h \end{cases}.$$



Ecuaţiile parametrice ale conului pătratic sunt:

$$(CP): \begin{cases} x = a \cdot u \cdot \cos v \\ y = b \cdot u \cdot \sin v \\ z = c \cdot u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi).$$

(7) Cilindri pătratici.

(a) Cilindrul eliptic este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia:

$$(CE) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Se verifică imediat că originea, axele şi planele de coordonate sunt elemente de simetrie ale cilindrului eliptic.

Intersecţiile cilindrului eliptic cu axele de coordonate sunt:

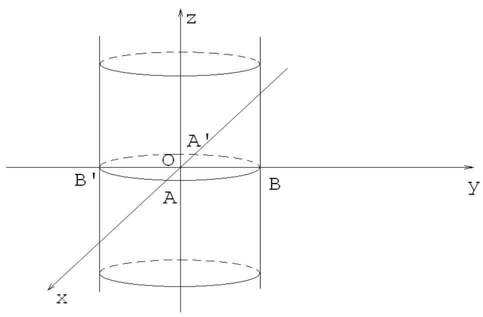
- cu (Ox): $A(a, 0, 0)$ şi $A'(-a, 0, 0)$;
- cu (Oy): $B(0, b, 0)$ şi $B'(0, -b, 0)$;
- (CE) nu intersectează axa (Oz).

Intersecţiile lui (CE) cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(xOy) : z = 0$: elipsa de ecuaţii $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$;
- cu planul $(xOz) : y = 0$: o pereche de drepte paralele, de ecuaţii $\begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} x = -a \\ y = 0 \end{cases}$;
- cu planul $(yOz) : x = 0$: o pereche de drepte paralele, de ecuaţii $\begin{cases} y = b \\ x = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} y = -b \\ x = 0 \end{cases}$

Intersecţiile lui (CE) cu plane paralele cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(P) : z = h =$ constant $((P) \parallel (xOy))$: elipsa de ecuaţii
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = h \end{cases};$$
- cu planul $(P) : y = h =$ constant $((P) \parallel (xOz))$:
  - o pereche de drepte paralele, de ecuaţii
$$\begin{cases} x = a \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} \\ y = h \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = -a \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} \\ y = h \end{cases},$$
    dacă $h \in (-b, b)$;
  - dreapta $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm b \end{cases}$, dacă $h = \pm b$;
  - cilindrul nu intersectează planul, dacă $h \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$;
- cu planul $(P) : x = h =$ constant $((P) \parallel (yOz))$:
  - o pereche de drepte paralele, de ecuaţii
$$\begin{cases} y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}} \\ x = h \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = -b \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}} \\ x = h \end{cases},$$
    dacă $h \in (-a, a)$;
  - dreapta $\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm a \end{cases}$, dacă $h = \pm a$;
  - cilindrul nu intersectează planul, dacă $h \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.



Ecuaţiile parametrice ale cilindrului eliptic sunt:

$$(CE):\begin{cases} x = a\cdot\cos v \\ y = b\cdot\sin v \\ z = u \end{cases},\quad u\in\mathbb{R},\ v\in[0,2\pi).$$

(b) Cilindrul hiperbolic este locul geometric al punctelor $M(x,y,z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia:

$$(CH):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Se vede uşor că originea, axele şi planele de coordonate sunt elemente de simetrie ale cilindrului hiperbolic.

Cilindrul hiperbolic nu intersectează axele (Oy) şi (Oz), iar axa (Ox) o intersectează în punctele $A(a,0,0)$ şi $A'(-a,0,0)$.

Intersecţiile lui (CH) cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(xOy): z=0$: hiperbola de ecuaţii $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$;
- cu planul $(xOz): y=0$: o pereche de drepte paralele, de ecuaţii $\begin{cases} x=a \\ y=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} x=-a \\ y=0 \end{cases}$;
- (CH) nu intersectează planul $(yOz): x=0$.

Intersecţiile lui (CH) cu plane paralele cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(P): z=h=\text{constant}$ $((P)\parallel(xOy))$: hiperbola de ecuaţii
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \\ z=h \end{cases};$$
- cu planul $(P): y=h=\text{constant}$ $((P)\parallel(xOz))$: o pereche de drepte paralele, de ecuaţii
$$\begin{cases} x=a\cdot\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}} \\ y=h \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x=-a\cdot\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}} \\ y=h \end{cases};$$
- cu planul $(P): x=h=\text{constant}$ $((P)\parallel(yOz))$:

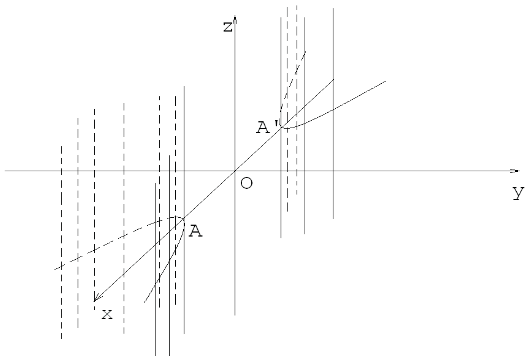
– o pereche de drepte paralele, de ecuaţii

$$\begin{cases} y = b \cdot \sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1} \\ x = h \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = -b \cdot \sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1} \\ x = h \end{cases},$$

dacă $h \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

– dreapta $\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm a \end{cases}$, dacă $h = \pm a$;

– cilindrul nu intersectează planul, dacă $h \in (-a, a)$.



Ecuaţiile parametrice ale cilindrului hiperbolic sunt:

$$(CH) : \begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} u \\ y = b \cdot \operatorname{sh} u \\ z = v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(c) Cilindrul parabolic este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia:

$$(CPb) : y^2 = 2px, \quad x > 0.$$

Axa de coordonate (Oz) este inclusă în (CPb), iar axa (Ox) şi planele de coordonate (xOz), (yOz) sunt elemente de simetrie ale cilindrului parabolic. În plus (CPb) intersectează axele (Ox) şi (Oy) doar în origine.

Intersecţiile lui (CE) cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(xOy) : z = 0$: parabola de ecuaţii $\begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases}$;
- cu planul $(xOz) : y = 0$ şi cu planul $(yOz) : x = 0$: axa de coordonate $(Oz) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

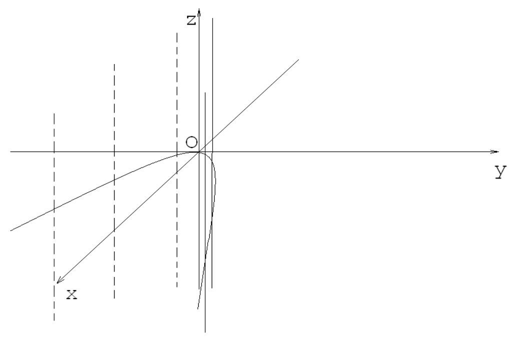
Intersecţiile lui (CE) cu plane paralele cu planele de coordonate sunt:

- cu planul $(P) : z = h =$ constant $((P) \parallel (xOy))$: parabola de ecuaţii

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ z = h \end{cases};$$

- cu planul $(P) : y = h = \text{constant}$ $((P) \parallel (xOz))$: o dreaptă de ecuaţii $\begin{cases} x = \frac{h^2}{2p} \\ y = h \end{cases}$;
- cu planul $(P) : x = h = \text{constant} > 0$ $((P) \parallel (yOz))$: o pereche de drepte paralele, de ecuaţii

$$\begin{cases} y = \sqrt{2ph} \\ x = h \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} y = -\sqrt{2ph} \\ x = h \end{cases}.$$



Ecuaţiile parametrice ale cilindrului parabolic sunt:

$$(CPb) : \begin{cases} x = 2pu^2 \\ y = 2pu \\ z = v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(8) Perechi de plane.

(a) O pereche de plane neparalele este dată de ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

sau de ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = au \\ y = bu \\ z = v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(b) O pereche de plane paralele este dată de ecuaţia canonică

$$x^2 - a^2 = 0$$

sau de ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = \pm a \\ y = u \\ z = v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Dacă $a = 0$ se obţin două plane confundate.

(9) O dreaptă dublă este o cuadrică cu ecuaţia canonică $x^2 + y^2 = 0$.

(10) Un punct dublu este o cuadrică cu ecuaţia canonică $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

(11) Cuadrica vidă este determinată de orice ecuaţie de gradul 2 în necunoscutele x, y şi z fără soluţii reale.

2. Cuadrice riglate

Definiţia 8.1. O cuadrică se numeşte *cuadrică riglată* dacă există o familie de drepte cu următoarele proprietăţi:

(1) orice dreaptă din familie este situată pe cuadrică;
(2) prin orice punct al cuadricei trece cel puţin o dreaptă din familie.

O familie de drepte cu aceste proprietăţi se numeşte *sistem de generatoare rectilinii* pentru cuadrică.

Observaţia 8.3. Se verifică uşor că dreapta dublă, perechile de plane, cilindrii pătratici şi conurile pătratice sunt cuadrice riglate (vezi şi subcapitolul precedent).

Propoziţia 8.1. *Hiperboloidul cu o pânză şi paraboloidul hiperbolic sunt cuadrice riglate.*

Demonstraţie. Fie hiperboloidul cu o pânză

$$(H_1): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Ecuaţia acestuia se poate scrie

$$(H_1): \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Considerăm familia de drepte formată din

$$(d_\lambda): \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\cdot\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ \lambda\cdot\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b} \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}, \quad \text{şi} \quad (d_\infty): \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0 \\ 1-\frac{y}{b}=0 \end{cases}.$$

Se verifică imediat că aceste drepte sunt bine definite (adică planele care le definesc nu sunt paralele) şi este evident, din ecuaţia lui (H_1), că se află pe hiperboloid.

Acum fie punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(H_1)$. Dacă $y_0=b$ atunci $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, adică $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$ sau $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$. Dacă $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$ atunci $M_0\in(d_\infty)$. Dacă $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$ atunci $M_0\in(d_0)$.

Dacă $y_0\neq b$ atunci $M_0\in(d_{\lambda_0})$, unde $\lambda_0=\frac{b(x_0c-z_0a)}{ac(b-y_0)}$.

Prin urmare, dreptele considerate constituie un sistem de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză.

Este clar că un alt sistem de generatoare rectilinii pentru (H_1) este format din dreptele:

$$(d'_\mu): \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mu\cdot\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \mu\cdot\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b} \end{cases}, \ \mu\in\mathbb{R}, \quad \text{şi} \quad (d'_\infty): \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0 \\ 1+\frac{y}{b}=0 \end{cases}.$$

În continuare fie paraboloidul hiperbolic

$$(PH): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

Ecuaţia sa se poate scrie

$$(PH): \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 2z$$

şi, la fel ca pentru hiperboloidul cu o pânză, se arată că familiile de drepte

$$(d_\lambda): \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\lambda z \\ \lambda \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{şi} \quad (d_\infty): \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

şi

$$(d'_\mu): \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu \\ \mu \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R},$$

sunt sisteme de generatoare rectilinii pentru paraboloidul hiperbolic. □

Observaţia 8.4. Cele două sisteme de generatoare rectilinii puse în evidenţă pentru hiperboloidul cu o pânză şi respectiv pentru paraboloidul hiperbolic sunt singurele sisteme de generatoare rectilinii pentru fiecare dintre aceste suprafeţe în parte (vezi [**17**] pentru demonstraţie). De aici şi din demonstraţia propoziţiei de mai sus, rezultă că prin fiecare punct al unui hiperboloid cu o pânză sau al unui paraboloid hiperbolic trece o dreaptă şi numai una din fiecare sistem de generatoare rectilinii.

Exemplul 8.1. Să se determine generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

$$(H_1): \frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} - 1 = 0,$$

care trec prin punctul $M_0(2, 1, 3)$.

Se verifică imediat că $M_0 \in (H_1)$. Cum ecuaţia hiperboloidului se scrie

$$(H_1): \left(\frac{x}{2} - \frac{z}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{z}{3}\right) = (1 - y) \cdot (1 + y),$$

rezultă că sistemele de generatoare rectilinii ale lui (H_1) sunt

$$(d_\lambda): \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = \lambda \cdot (1 - y) \\ \lambda \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{z}{3}\right) = 1 + y \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{şi} \quad (d_\infty): \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases}$$

şi

$$(d'_\mu): \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = \mu \cdot (1 + y) \\ \mu \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{z}{3}\right) = 1 - y \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}, \quad \text{şi} \quad (d'_\infty): \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 0 \\ 1 + y = 0 \end{cases}.$$

Aşa cum se observă imediat, $M_0 \notin (d_\infty)$ şi $M_0 \notin (d'_\infty)$. Căutăm în continuare λ_0 şi μ_0 astfel încât $\{M_0\} = (d_{\lambda_0}) \cap (d'_{\mu_0})$.

Din $M_0 \in (d_{\lambda_0})$ rezultă $\lambda_0 = 1$, adică $M_0 \in (d_1): \begin{cases} 3x + 6y - 2z - 6 = 0 \\ 3x - 6y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$.

Din $M_0 \in (d_{\mu_0})$ rezultă $\mu_0 = 0$, adică $M_0 \in (d'_0): \begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases}$.

Exemplul 8.2. Să se determine generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$(PH): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z,$$

care trec prin punctul $M_0(3,2,0)$.

Se verifică imediat că $M_0 \in (PH)$. Ecuaţia lui (PH) se scrie

$$(PH): \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right) = 2z,$$

iar sistemele de generatoare rectilinii ale paraboloidului sunt

$$(d_\lambda): \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 2\lambda z \\ \lambda \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right) = 1 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{şi} \quad (d_\infty): \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{z}{2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

şi

$$(d'_\mu): \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \mu \\ \mu \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right) = 2z \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Avem $M_0 \notin (d_\infty)$ şi căutăm λ_0 şi μ_0 astfel încât $\{M_0\} = (d_{\lambda_0}) \cap (d'_{\mu_0})$.

Din $M_0 \in (d_{\lambda_0})$ rezultă $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, adică $M_0 \in (d_{\frac{1}{2}}): \begin{cases} 2x - 3y - 6z = 0 \\ 2x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$.

Din $M_0 \in (d_{\mu_0})$ rezultă $\mu_0 = 0$, adică $M_0 \in (d'_0): \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

3. Cuadrice date prin ecuaţia generală

În acest subcapitol vom prezenta unele rezultate legate de clasificarea suprafeţelor algebrice de ordinul 2 aşa cum sunt ele date în [**17**].

Definiţia 8.2. Locul geometric al punctelor din spaţiu $M(x,y,z)$ ale căror coordonate verifică o ecuaţie matricială de forma:

$$(\Sigma): f(X) = X^t \times A \times X + 2 \cdot B \times X + a_{44} = 0, \tag{8.1}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

se numeşte *suprafaţă algebrică de ordinul* 2.

Observaţia 8.5. Pe larg, ecuaţia suprafeţei (Σ) se scrie

$$\begin{aligned} (\Sigma): f(x,y,z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ &\quad +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fel ca în cazul curbelor algebrice de ordinul 2, se arată că într-un reper $\mathcal{R}'(O', \mathcal{B}')$, cu $O'(x_0,\ y_0, z_0)$ şi $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$, ecuaţia generală a unei suprafeţe algebrice de ordinul 2 devine

$$(\Sigma) : f(X') = (X')^t \times A' \times X' + 2 \cdot B' \times X' + a'_{44} = 0,$$

unde am notat

$$A' = C \times A \times C^t, \quad B' = X_0^t \times A \times C^t + B \times C^t, \quad a'_{44} = f(X_0), \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Astfel avem următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 8.2. *Proprietatea submulţimii* (Σ) *din spaţiu de a fi suprafaţă algebrică de ordinul* 2 *nu depinde de reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv ales.*

OBSERVAŢIA 8.6. Este clar că toate cuadricele prezentate în primul subcapitol sunt suprafeţe algebrice de ordinul 2.

În continuare vom prezenta, fără demonstraţie, un rezultat care arată că orice suprafaţă algebrică de ordinul 2 este o cuadrică. Mai întâi, pentru o suprafaţă (Σ) dată de ecuaţia (8.1), definim

$$\delta = \det A, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$L = J + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$K =$ suma minorilor diagonali de ordinul 3 ai matricei D.

TEOREMA 8.3. *Pentru o suprafaţă algebrică de ordinul* 2 *avem*

(1) δ, Δ, I *şi* J *sunt invarianţi la translaţii şi rotaţii;*
(2) L *şi* K *sunt invarianţi la rotaţii;*
(3) *dacă* $\delta = \Delta = 0$ *atunci* K *este invariant şi la translaţii;*
(4) *dacă* $\delta = \Delta = K = J = 0$ *atunci* L *este invariant şi la translaţii.*

În aceeaşi manieră ca în cazul teoremei de clasificare a curbelor algebrice de ordinul 2, se obţine următoarea teoremă.

TEOREMA 8.4. *O suprafaţă algebrică de ordinul* 2 *dată de ecuaţia* (8.1) *este una dintre cuadricele* (1) – (11) *(prezentate în primul subcapitol). În* *funcţie de valorile δ, Δ, J, K, L şi de valorile proprii λ_1, λ_2, λ_3, ale matricei A, avem următoarea clasificare a suprafeţelor algebrice de ordinul 2:*

	δ	Δ	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	$\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}, \frac{\Delta}{\lambda_2\delta}, \frac{\Delta}{\lambda_3\delta}$	K	L	Cuadrica
1	> 0	$\neq 0$		$+, +, +$			elipsoid
2	< 0	$\neq 0$		$+, +, -$			hiperboloid cu o pânză
3	> 0	$\neq 0$		$-, -, +$			hiperboloid cu două pânze
4	< 0	$\neq 0$		$-, -, -$			cuadrica vidă
5	$\neq 0$	0	acelaşi semn				punct dublu
6	$\neq 0$	0	$+, +, -$				con pătratic
7	0	$\neq 0$	$\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$				paraboloid eliptic
8	0	$\neq 0$	$\lambda_1\lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$				paraboloid hiperbolic
9	0	0	$+, +, 0$		> 0		cuadrica vidă
10	0	0	$\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$		0		dreaptă dublă
11	0	0	$+, +, 0$		< 0		cilindru eliptic
12	0	0	$-, -, 0$		> 0		cilindru eliptic
13	0	0	$-, -, 0$		< 0		cuadrica vidă
14	0	0	$\lambda_1\lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$		$\neq 0$		cilindru hiperbolic
15	0	0	$\lambda_1\lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$		0		plane secante
16	0	0	$\neq 0, 0, 0$		0	> 0	cuadrica vidă
17	0	0	$\neq 0, 0, 0$		0	0	plan dublu
18	0	0	$\neq 0, 0, 0$		0	< 0	plane paralele
19	0	0	$\neq 0, 0, 0$		$\neq 0$		cilindru parabolic

CAPITOLUL 9

CURBE

Acest capitol este dedicat studiului unor elemente de geometrie diferenţială a curbelor în plan şi în spaţiu. Pentru aprofundarea noţiunilor şi tehnicilor de lucru prezentate aici (ca de altfel şi a celor din capitolul *Suprafeţe*) recomandăm monografia [**7**] şi cursurile [**3**], [**10**], [**12**], [**13**] şi [**20**].

O curbă poate fi privită în două moduri: ca fiind drumul parcurs de o particulă în mişcare sau ca fiind un loc geometric. Cele două variante sunt echivalente şi în cele ce urmează le vom prezenta şi folosi pe rând pe amândouă.

1. Teorema de inversare locală. Teorema funcţiilor implicite

În această secţiune vom reaminti două rezultate importante din analiza matematică care vor fi folosite apoi pentru a arăta echivalenţa modurilor de a reprezenta o curbă (sau o suprafaţă, în capitolul următor), adică parametric, explicit sau implicit. Cele două teoreme sunt prezentate la fel ca în [**19**], curs pe care dealtfel îl recomandăm atât celor interesaţi de demonstraţii cât şi pentru clarificarea altor probleme din analiza matematică care apar aici.

Definiţia 9.1. Fie aplicaţia $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, unde D este o mulţime deschisă. Spunem că F este de clasă C^k pe D, $k \geq 1$, dacă există derivatele sale parţiale în raport cu toate variabilele până la ordinul k pe D şi toate derivatele de ordin k sunt continue. Dacă există derivatele parţiale ale lui F pe D de orice ordin atunci spunem că aplicaţia este de clasă C^∞ pe D.

Teorema 9.1. (Teorema de inversare locală)
Fie D o submulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$, $F : D \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie de clasă C^k pe D şi $a \in D$. Dacă diferenţiala $dF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lui F în a este un izomorfism de spaţii liniare atunci există o vecinătate deschisă $V_a \subset D$ a lui a astfel încât $F(V_a)$ să fie o submulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ iar $F : V_a \to F(V_a)$ să fie inversabilă şi $F^{-1} : F(V_a) \to V_a$ să fie de clasă C^k pe $F(V_a)$.

Teorema 9.2. (Teorema funcţiilor implicite)
Fie D o submulţime deschisă din $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $F : D \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie dată prin

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_m(x, y)),$$

unde $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, şi fie $(x_0, y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$;
(2) F *este de clasă* C^k *pe* D;

$$(3)\quad \frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_0,y_0) = \left|\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0,$$

atunci există o vecinătate deschisă I a punctului x_0 în $\mathbb{R}^n$, o vecinătate deschisă J a punctului y_0 în $\mathbb{R}^m$ şi o aplicaţie $f : I \to J$ astfel încât

- *$F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in I$;*
- *$F(x, y) = 0$ pentru $(x, y) \in I \times J \Rightarrow y = f(x)$;*
- *f este de clasă C^k pe I.*

Cazuri particulare. În acest curs vom folosi cele două cazuri particulare ale teoremei funcţiilor implicite expuse în continuare.
(1) Dacă D este o submulţime deschisă din $\mathbb{R}^2$, $F : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$ şi sunt îndeplinite condiţiile:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$;
(2) F este de clasă C^1 pe D;
(3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci există o vecinătate deschisă I a punctului $x_0 \in \mathbb{R}$, o vecinătate deschisă J a punctului $y_0 \in \mathbb{R}$ şi o funcţie $f : I \to J$ astfel încât

(1) $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in I$;
(2) $F(x, y) = 0$ pentru $x \in I$ şi $y \in J$ implică $y = f(x)$;
(3) f este derivabilă pe I;
(4) $f(x_0) = y_0$.

(2) Dacă D este o submulţime deschisă din $\mathbb{R}^3$ iar $F : D \to \mathbb{R}$ satisface condiţiile din teorema funcţiilor implicite, atunci, din $F(x, y, z) = 0$, vom putea determina local pe z ca o aplicaţie cu argumentele x şi y.

2. Curbe în plan

2.1. Reprezentări analitice ale curbelor din plan. Fie reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ în plan şi notăm cu $\mathbb{V}^2$ spaţiul euclidian al vectorilor de poziţie în raport cu acest reper ai punctelor din plan.

Mai întâi gândim curbele ca fiind drumurile parcurse de particule în mişcare în plan şi atunci avem următoarea definiţie.

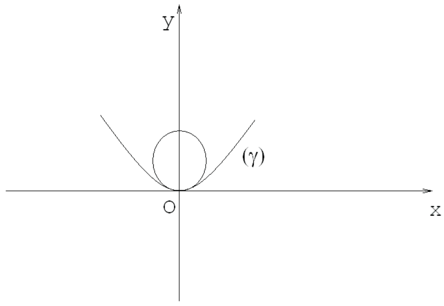
Definiţia 9.2. O *curbă de clasă C^n*, $n \geq 1$, în plan este o aplicaţie $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ de clasă C^n definită pe un interval deschis $I \subseteq \mathbb{R}$. O curbă de clasă C^∞ se numeşte *curbă diferenţiabilă.*

Observaţia 9.1. În definiţia de mai sus am adoptat denumirea pentru curbele de clasă C^∞ folosită în [**7**]. Astfel, nu trebuie confundate curbele diferenţiabile cu cele de clasă C^1, pentru care nu vom folosi o denumire specială.

DEFINIŢIA 9.3. Un punct $M_0(x_0, y_0)$ se numeşte *punct simplu* al curbei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ dacă există şi este unic $t_0 \in I$ astfel încât $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$, iar dacă există $t_1, t_2, \ldots, t_k \in I$ astfel încât $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \ldots = \alpha(t_k) = (x_0, y_0)$ atunci M_0 se numeşte *punct multiplu* de ordin k al curbei.

OBSERVAŢIA 9.2. Se observă că imaginea unei curbe se autointersectează de k ori într-un punct multiplu de ordin k.

EXEMPLUL 9.1. Fie curba diferenţiabilă $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definită prin $\alpha(t) = (t(t^2-1), (t^2-1)^2)$. Se observă că pentru $t_1 = 1$ şi $t_2 = -1$ se obţine punctul $O(0,0)$ care aparţine curbei, adică O este un punct dublu (multiplu de ordin 2) al său.



DEFINIŢIA 9.4. O curbă $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ de clasă C^n, $n \geq 1$, se numeşte *curbă regulată* de clasă C^n dacă $\alpha'(t) \neq 0$, pentru orice $t \in I$.

Gândind o curbă ca pe un loc geometric putem da următoarea definiţie.

DEFINIŢIA 9.5. O *curbă simplă* de clasă C^n în plan este o submulţime (γ) a planului cu proprietatea că pentru orice punct $M \in (\gamma)$ există o vecinătate a acestuia $V_M \subset (\gamma)$ şi o curbă regulată $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ de clasă C^n, injectivă, astfel încât $\alpha(I) = V_M$, unde am identificat planul cu $\mathbb{R}^2$. Curba α se numeşte o *parametrizare locală* a curbei simple (γ).

OBSERVAŢIA 9.3. Se poate demonstra că, dacă pentru orice punct M_0 al unei submulţimi (γ) a planului există o vecinătate deschisă V_0 în plan astfel încât $(\gamma) \cap V_0$ să fie o curbă simplă, atunci (γ) este o curbă (imaginea unei curbe) regulată de clasă C^n.

Acum fie curba (γ) de clasă C^n, cu parametrizarea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Putem defini aplicaţia $\bar{r} : I \to \mathbb{V}^2$, de clasă C^n, prin $\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j}$ şi avem *ecuaţia vectorială parametrică*

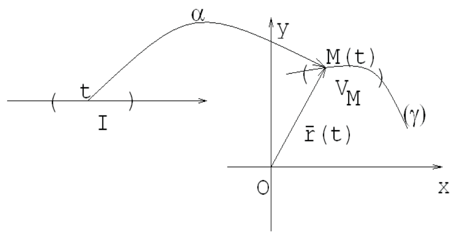
$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t), \quad t \in I,$$

a curbei (γ) determinată de α, echivalentă cu sistemul de *ecuaţii parametrice* ale lui (γ):

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Pentru un punct $M(x(t), y(t)) \in (\gamma)$ folosim şi notaţia $M(t)$, $t \in I$ numindu-se coordonata pe curbă a lui M.

Observaţia 9.4. Este clar că $\alpha'(t) \neq 0$ dacă şi numai dacă $\bar{r}'(t) \neq 0$, deci curba $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in I$, este regulată dacă şi numai dacă $\bar{r}'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$.



Observaţia 9.5. Parametrizarea unei curbe nu este unică. Astfel, dacă avem funcţia bijectivă $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to I$ de clasă C^n, unde J este un interval deschis, atunci pentru orice $t \in I$ există şi este unic $u \in J$ astfel încât $t = \varphi(u)$, iar ecuaţiile parametrice ale lui (γ) devin

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(\varphi(u)) = x(u) \\ y = y(\varphi(u)) = y(u) \end{cases}, \quad u \in J,$$

ceea ce arată că am obţinut o nouă parametrizare $\beta = \alpha \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^2$ a curbei.

O curbă plană de clasă C^n poate fi definită şi explicit sau implicit, după cum vom vedea în continuare.

Propoziţia 9.3. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^n definită pe intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$. Atunci locul geometric al punctelor $M(x, y)$ din plan cu $y = f(x)$ este o curbă regulată (γ) (imaginea unei curbe regulate $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$) de clasă C^n şi, reciproc, pentru orice curbă regulată de clasă C^n*

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in \widetilde{I},$$

şi pentru orice punct $M_0(x_0(t_0), y_0(t_0)) \in (\gamma)$ există intervalul deschis I, centrat în x_0 (sau intervalul deschis J, centrat în y_0) şi o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^n astfel încât $y = y(x) = f(x)$ pentru orice punct $M(x, y) \in (\gamma)$, $x \in I$ (sau o funcţie $g : J \to \mathbb{R}$ de clasă C^n astfel încât $x = x(y) = g(y)$ pentru orice punct $M(x, y) \in (\gamma)$, $y \in J$).

Demonstraţie. Punctele $M(x, f(x))$ aparţin curbei (γ) din plan dată de ecuaţiile parametrice

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = f(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Cum $x'(t) = 1 \neq 0$ pentru orice $t \in I$ şi f este de clasă C^n, rezultă imediat că (γ) este o curbă regulată de clasă C^n.

În continuare considerăm curba regulată de clasă C^n din plan

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in \widetilde{I}.$$

Funcţiile $x, y : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ sunt de clasă C^n şi, pentru fiecare $t \in \widetilde{I}$ avem $x'(t) \neq 0$ sau $y'(t) \neq 0$. Presupunem că în punctul $M(x_0(t_0), y_0(t_0)) \in (\gamma)$ avem $x'(t_0) \neq 0$ şi atunci, din teorema de inversare locală, rezultă că există un interval deschis $I_0 \subseteq \widetilde{I}$ centrat în t_0 şi funcţia inversabilă $t : I = x(I_0) \to I_0$ de clasă C^n cu $t \circ x = \mathrm{id}_{I_0}$, adică putem scrie $t = t(x)$ pentru orice $x \in I$. Urmează că $y = y(t) = y(t(x))$ pentru orice punct de pe curbă cu $x \in I$. Astfel putem scrie ecuaţia curbei în vecinătatea I a punctului x: $(\gamma) : y = f(x)$, unde $f = y \circ t : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^n cu $f'(x) \neq 0$, pentru $x \in I$. Analog se procedează în cazul în care $x'(t_0) = 0$ şi $y'(t_0) \neq 0$, rezultând ecuaţia curbei pe o vecinătate J a lui y: $(\gamma) : x = x(y) = g(y)$. $\square$

Definiţia 9.6. Ecuaţia $(\gamma) : y = f(x),\ x \in I$ se numeşte *ecuaţia explicită* a curbei.

Exemplul 9.2. Fie curba $(\gamma) : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$. Eliminând parametrul t între cele două ecuaţii obţinem ecuaţia explicită a curbei: $(\gamma) : y = f(x) = x^{\frac{2}{3}},\ x \in \mathbb{R}$.

Propoziţia 9.4. *Fie aplicaţia $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde D este o mulţime deschisă, care îndeplineşte următoarele condiţii:*

(1) *este de clasă C^n, $n \geq 1$;*
(2) *derivatele sale parţiale de ordinul 1 nu se anulează simultan în nici un punct, adică*

$$F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in D,$$

sau, echivalent, $\nabla F \neq \bar{0}$ pe D, unde am notat $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ şi $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, iar $\nabla F(x, y) = F_x(x, y) \cdot \bar{i} + F_y(x, y) \cdot \bar{j}$ este gradientul aplicaţiei F.

Atunci locul geometric al punctelor $M(x, y)$ din plan ale căror coordonate verifică $F(x, y) = 0$ este o curbă regulată (γ) (imaginea unei curbe regulate $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$) de clasă C^n şi reciproc, pentru orice curbă regulată (γ) de clasă C^n există o aplicaţie F ca mai sus astfel încât $F(x, y) = 0$ pentru orice $M(x, y) \in (\gamma)$.

Demonstraţie. Fie punctul $M_0(x_0, y_0)$ cu $F(x_0, y_0) = 0$. Presupunem $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ şi atunci, conform teoremei funcţiilor implicite, rezultă că există o vecinătate I a lui x_0 şi o vecinătate J a lui y_0 în $\mathbb{R}$ şi o aplicaţie $f : I \times J$ astfel încât $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in I$.

Considerăm aplicaţia $\bar{r} : I \times \mathbb{V}^2$ definită prin

$$\bar{r}(t) = t \cdot \bar{i} + f(t) \cdot \bar{j}.$$

Evident $\bar{r}'(t) \neq \bar{0}$ şi $\bar{r}$ este injectivă, adică avem curba simplă

$$(\gamma_0) : \bar{r} = \bar{r}(t), \quad t \in I.$$

Astfel, conform observaţiei 9.3, locul geometric al punctelor $M(x, y)$ din plan cu $F(x, y) = 0$ este o curbă regulată (γ) de clasă C^n în plan.

În continuare fie o curbă regulată de clasă C^n dată explicit

$$(\gamma) : y = f(x), \quad x \in I,$$

şi considerăm $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde $D = I \times f(I)$ este o mulţime deschisă definită prin $F(x, y) = y - f(x)$. Este evident că pentru orice $M(x, y) \in (\gamma)$ avem $F(x, y) = 0$ şi că F este de clasă C^n cu $\nabla F \neq \bar{0}$ (deoarece $F_y = 1 \neq 0$), ceea ce încheie demonstraţia. □

Definiţia 9.7. Ecuaţia $(\gamma) : F(x, y) = 0$ se numeşte *ecuaţia implicită* a curbei (γ).

Observaţia 9.6. Ca o concluzie a acestei secţiuni putem spune că reprezentările parametrică, explicită şi implicită ale unei curbe regulate sunt echivalente local, adică într-o vecinătate a fiecărui punct de pe curbă putem trece de la o reprezentare la alta.

Observaţia 9.7. Condiţiile de regularitate pentru o curbă dată pe rând în cele trei reprezentări sunt:

- în toate reprezentările aplicaţiile care apar în diversele forme ale ecuaţiilor curbei trebuie să fie de clasă C^n;
- în reprezentarea parametrică derivatele funcţiilor coordonate nu trebuie să se anuleze simultan în nici un punct, iar în cea implicită derivatele parţiale de ordinul 1 ale aplicaţiei care defineşte curba să nu se anuleze simultan;
- în reprezentarea parametrică $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in I$, aplicaţia $\bar{r}$ trebuie să fie injectivă.

Definiţia 9.8. Un punct al unei curbe (γ) pentru care există o vecinătate inclusă în (γ) pe care sunt îndeplinite condiţiile de regularitate se numeşte punct *ordinar* al curbei.

Observaţia 9.8. Avem următoarele observaţii imediate:

(1) O curbă regulată este formată numai din puncte ordinare.
(2) Un punct ordinar al unei curbe este punct simplu al acesteia.
(3) Un punct multiplu al unei curbe nu este punct ordinar al acesteia (este satisfăcută condiţia 1, dar nu este satisfăcută condiţia 2 sau condiţia 3).

În final, considerăm o curbă în plan dată prin ecuaţiile parametrice

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Deoarece orice punct din plan $M(x, y)$ poate fi dat şi cu ajutorul coordonatelor polare $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ şi $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \in [0, 2\pi)$, atunci şi ecuaţiile lui (γ) pot fi scrise folosind aceste coordonate:

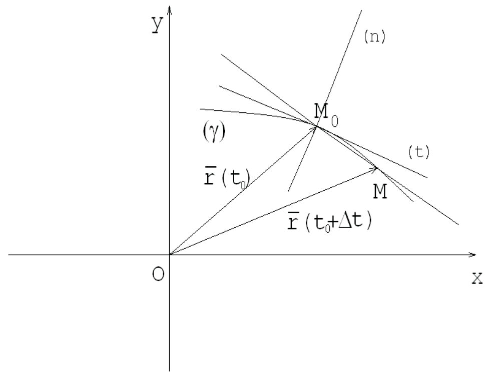
$$(\gamma) : \begin{cases} \rho = \rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \\ \theta = \theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} \end{cases}, \quad t \in I.$$

Dacă (γ) este dată explicit atunci ecuaţia se poate scrie $(\gamma) : \rho = \rho(\theta)$, iar dacă este dată implicit ecuaţia sa devine $(\gamma) : F(\rho, \theta) = 0$.

2.2. Tangenta şi normala la o curbă într-un punct ordinar. Fie curba $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in I$, de clasă C^n, $n \geq 1$, şi fie punctele $M_0(t_0) \in (\gamma)$, fixat, şi $M(t) \in (\gamma)$ care se deplasează pe curbă. Putem scrie $t = t_0 + (t - t_0) = t + \Delta t$ unde am notat $\Delta t = t - t_0$. Atunci vectorii de poziţie ai celor două puncte sunt $\bar{r}(t_0)$ şi respectiv $\bar{r}(t_0 + \Delta t)$. Presupunând că M_0 este un punct ordinar al curbei, rezultă că există

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{M_0 M} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t} = \bar{r}'(t_0) \neq 0.$$

Definiţia 9.9. Dreapta (t) care trece prin punctul ordinar $M_0(t_0) \in (\gamma)$ şi are vectorul director $\bar{v} = \bar{r}'(t_0)$ se numeşte *tangentă* la curba (γ) în M_0, iar dreapta (n) care trece prin M_0 şi este perpendiculară pe (t) se numeşte *normala* la (γ) în M_0.



Observaţia 9.9. Se observă că tangenta în M_0 la curbă este poziţia limită a dreptei (M_0M) atunci când M tinde spre M_0.

Vom determina în continuare ecuaţiile tangentei şi normalei într-un punct ordinar al unei curbe date, pe rând, parametric, explicit şi implicit.

Mai întâi, aşa cum am văzut, dacă (γ) este dată prin ecuaţia vectorială parametrică $\bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in I$, atunci tangenta în punctul ordinar $M_0(t_0)$ al curbei este

$$(t) : \bar{r} = \bar{r}(t_0) + \lambda \cdot \bar{r}'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Deoarece vectorul director al normalei în punctul M_0 este perpendicular pe cel al tangentei, avem şi ecuaţia dreptei normale la curbă în M_0:

$$(n) : (\bar{r} - \bar{r}(t_0)) \cdot \bar{r}'(t_0) = 0.$$

Acum, dacă scriem ecuaţiile parametrice ale lui (γ)

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I,$$

avem $\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j}$ şi $\bar{r}'(t) = x'(t) \cdot \bar{i} + y'(t) \cdot \bar{j}$. Astfel, înlocuind în ecuaţia vectorială a tangentei în punctul $M_0(t_0)$, ale cărui coordonate carteziene sunt $x_0 = x(t_0)$ şi $y_0 = y(t_0)$, avem ecuaţiile parametrice ale lui (t):

$$(t) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot x'(t_0) \\ y = y_0 + \lambda \cdot y'(t_0) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

şi ecuaţia canonică

$$(t): \frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)}.$$

Panta dreptei (t) este $m_{(t)} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$, de unde rezultă că panta normalei (n) va fi $m_{(n)} = -\frac{x'(t_0)}{y'(t_0)}$, iar ecuaţia canonică a lui (n) este

$$(n): \frac{x-x_0}{-y'(t_0)} = \frac{y-y_0}{x'(t_0)}.$$

Dacă (γ) este dată explicit prin $(\gamma): y = f(x),\ x \in I$, ecuaţiile sale parametrice sunt

$$(\gamma): \begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = f(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Atunci, în punctul ordinar al curbei $M_0(x_0, y_0) \in (\gamma)$ (unde $x_0 = t_0$) avem $x'(t_0) = 1$ şi $y'(t_0) = f'(t_0) = f'(x_0)$, deci ecuaţia canonică a tangentei (t) este

$$(t): x - x_0 = \frac{y-y_0}{f'(x_0)} \Leftrightarrow (t): y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

iar panta sa este $m_{(t)} = f'(x_0)$. Astfel panta normalei la curbă în M_0 va fi $m_{(n)} = -\frac{1}{f'(x_0)}$, adică dreapta (n) este dată de ecuaţia

$$(n): x - x_0 = -f'(x_0) \cdot (y - y_0).$$

În sfârşit, presupunem că (γ) este determinată implicit

$$(\gamma): F(x, y) = 0.$$

Aşa cum am văzut în secţiunea precedentă, curba (γ) poate fi scrisă (local) explicit $(\gamma): y = f(x)$ cu $F(x, f(x)) = 0$ în vecinătăţi ale punctelor $M(x, y)$ de pe curbă cu $F_y(x, y) \neq 0$. Derivând această ultimă ecuaţie în raport cu x şi ţinând cont de modul de derivare al funcţiilor compuse avem

$$F_x(x, y) + F_y(x, y) \cdot f'(x) = 0.$$

Deoarece punctul $M_0(x_0, y_0)$ este ordinar, rezultă că $F_x(x_0, y_0)$ şi $F_y(x_0, y_0)$ nu se pot anula simultan. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Atunci

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)},$$

şi, prin urmare, ecuaţia tangentei în M_0 la curbă este

$$(t): y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0),$$

sau, în forma canonică,

$$(t): \frac{x-x_0}{F_y(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{-F_x(x_0, y_0)}.$$

Deoarece panta lui (t) este, în acest caz, $m_{(t)} = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$, urmează că panta normalei la curbă prin M_0 este $m_{(n)} = \frac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}$, iar ecuaţia lui (n) va fi

$$(n) : y - y_0 = \frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0).$$

Ecuaţia sa canonică este $(n) : \frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0)}$.

Exemplul 9.3. Să se determine tangentele şi normalele la curbele următoare în punctele precizate:

(1) $(\gamma) : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $M_0(t_0 = 1)$;
(2) $(\gamma) : y = \ln(\sin x)$, $x \in (0, \pi)$, $M_0(\frac{\pi}{4}, -\ln\sqrt{2})$;
(3) $(\gamma) : x^3 - 2y^2 + 1 = 0$, $M_0(1, 1)$.

(1) Mai întâi avem coordonatele carteziene ale punctului M_0: $x_0 = t_0^3 = 1$ şi $y_0 = t_0^2 = 1$.

Pe de altă parte, avem $x'(t) = 3t^2$ şi $y'(t) = 2t$. Astfel, în $t_0 = 1$, rezultă $x'(1) = 3$ şi $y'(1) = 2$. Acum putem scrie ecuaţia tangentei la curba (γ) în punctul $M_0(1, 1)$:

$$(t) : \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{2}$$

şi ecuaţia normalei la (γ) prin M_0:

$$(n) : \frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{3}.$$

(2) Notăm $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sin x)$ şi avem $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ şi $f'(\frac{\pi}{4}) = 1$. Astfel tangenta la (γ) în M_0 este dată de ecuaţia

$$(t) : y + \ln\sqrt{2} = x - \frac{\pi}{4},$$

iar normala la curbă prin punct este dată de

$$(n) : -y - \ln\sqrt{2} = x - \frac{\pi}{4}.$$

(3) Notăm $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^3 - 2y^2 + 1$ şi avem $F_x(x, y) = 3x^2$ şi $F_y(x, y) = -4y^2$. În punctul $M_0(1, 1)$ derivatele parţiale vor fi $F_x(1, 1) = 3$ şi $F_y(1, 1) = -4$. Putem scrie ecuaţia tangentei în punct la curbă:

$$(t) : \frac{x - 1}{-4} = \frac{y - 1}{-3} \Leftrightarrow (t) : \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1}{3}$$

şi ecuaţia normalei:

$$(n) : \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{-4}.$$

2.3. Lungimea unui arc de curbă. Parametrizarea naturală a unei curbe. Fie curba simplă de clasă C^n, $n \geq 1$, dată prin ecuaţia explicită

$$(\gamma) : y = f(x), \quad x \in I.$$

În continuare vom prezenta o schiţă de demonstraţie pentru formula de calcul a lungimii unui arc de curbă

$$(\widehat{AB}) : y = f(x), \quad x \in [a, b] \subset I,$$

unde $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$. În acest scop vom încerca să "aproximăm" cât mai bine forma arcului de curbă printr-o linie poligonală având capetele în punctele A şi B. Pentru început considerăm diviziunea

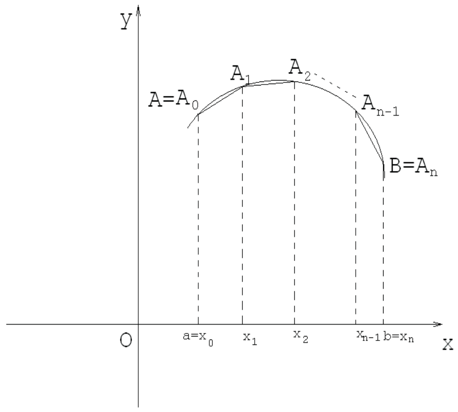
$$\Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$$

a intervalului închis $[a, b]$ şi punctele corespunzătoare

$$A = A_0(x_0, f(x_0)),\ A_1(x_1, f(x_1)), \ldots,\ A_n(x_n, f(x_n)) = B$$

de pe arcul de curbă $(\widehat{AB})$. Definim norma diviziunii Δ prin

$$\|\Delta\| = \max_{k=\overline{0,n-1}} |x_{k+1} - x_k|.$$



Linia poligonală formată din segmentele AA_1, A_1A_2, $\ldots$, $A_{n-1}B$ aproximează cu atât mai bine forma arcului de curbă cu cât $\|\Delta\|$ este mai mică, ceea ce implică şi creşterea numărului punctelor de tipul A_k. Astfel lungimea arcului de curbă va fi

$$l_{\widehat{AB}} = \lim_{n\to\infty, \|\Delta\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{A_kA_{k+1}}\|. \tag{9.1}$$

În continuare, pentru orice $k = \overline{0, n-1}$, avem

$$\|\overrightarrow{A_kA_{k+1}}\| = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

şi, conform teoremei lui Lagrange aplicate funcţiei f pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$,

$$\exists\ \xi_k \in (x_k, x_{k+1}) \quad \text{astfel încât} \quad f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Obţinem

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{A_kA_{k+1}}\| &= \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f'(\xi_k))^2(x_{k+1}-x_k)^2}\\ &= \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\cdot(x_{k+1}-x_k),\end{aligned}$$

şi ecuaţia (9.1) devine

$$l_{\widehat{AB}} = \lim_{n\to\infty,\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}[\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\cdot(x_{k+1}-x_k)].$$

Mai departe definim funcţia continuă (şi, prin urmare, integrabilă) $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ prin $g(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$. Atunci suma Riemann asociată funcţiei g, diviziunii Δ a intervalului $[a,b]$ şi sistemului de puncte $\xi=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n\}$ este

$$S(g,\Delta,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\cdot(x_{k+1}-x_k),$$

şi avem

$$\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\lim_{n\to\infty,\|\Delta\|\to 0}S(g,\Delta,\xi).$$

În concluzie, formula de calcul pentru lungimea arcului de curbă $(\widehat{AB}) : y = f(x),\ x\in[a,b]$ este

$$l_{(\widehat{AB})}=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Definiţia 9.10. Definim *elementul de arc* al curbei (γ) prin

$$ds=\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Observaţia 9.10. Se observă că formula lungimii arcului de curbă $(\widehat{AB})$ se poate scrie cu ajutorul unei integrale curbilinii de speţa I astfel:

$$l_{(\widehat{AB})}=\int_{(\widehat{AB})}ds.$$

Exemplul 9.4. Să se calculeze lungimea arcului de curbă

$$(\widehat{AB}) : y=\ln\sin\ x,\quad x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right].$$

Avem

$$l_{\widehat{AB}}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx=\ln|tg\frac{x}{2}|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\sqrt{3}.$$

În continuare, dacă curba (γ) este dată prin ecuaţiile parametrice, atunci avem

$$(\widehat{AB}) : \begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\quad t\in[t_1,t_2],$$

unde $x(t_1)=a$ şi $x(t_2)=b$. Aşa cum am văzut în cadrul secţiunii dedicate reprezentărilor posibile pentru o curbă, presupunând că $x'(t)\neq 0$, $t\in[t_1,t_2]$, conform teoremei de inversare locală, există inversa $t : [a, b] \to [t_1, t_2]$ a funcţiei $x : [t_1, t_2] \to [a, b]$ şi putem trece la reprezentarea explicită a arcului de curbă:

$$(\widehat{AB}) : y = f(x) = (y \circ t)(x), \quad x \in [a, b].$$

Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$f'(x) = \frac{dy}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

pentru $x = x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Pe de altă parte, diferenţiala funcţiei $x[t_1, t_2] \to [a, b]$ este $dx = x'(t)dt$. Expresia elementului de arc al curbei (γ) va fi, în acest caz,

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}x'(t)dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Prin urmare, formula de calcul a lungimii arcului de curbă este

$$l_{(\widehat{AB})} = \int_{(\widehat{AB})} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Dacă $\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j}$ este vectorul de poziţie al unui punct oarecare de pe arcul de curbă, atunci, evident, putem scrie

$$l_{(\widehat{AB})} = \int_{t_1}^{t_2} \|\bar{r}'(t)\|dt.$$

În plus, pentru elementul de arc, avem $ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\bar{r}^2$.

Exemplul 9.5. Să se determine lungimea arcului de curbă

$$(\widehat{AB}) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Avem $x'(t) = -\sin t$ şi $y'(t) = \cos t$, de unde rezultă că, în acest caz, elementul de arc al curbei este $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}dt = dt$, iar lungimea arcului de curbă este $l_{(\widehat{AB})} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

Dacă (γ) este reprezentată implicit atunci

$$(\widehat{AB}) : F(x, y) = 0, \quad x \in [a, b].$$

Presupunem că $F_y(x, y) \neq 0$ pentru orice $M(x, y) \in (\widehat{AB})$ şi, conform teoremei funcţiilor implicite, putem trece la reprezentarea explicită a arcului de curbă

$$(\widehat{AB}) : y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

cu $F(x, f(x)) = 0$. Folosind din nou regula de derivare a funcţiilor compuse, obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\frac{df}{dx}(x) = 0,$$

adică $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, de unde $f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$. Avem astfel elementul de arc al curbei:

$$ds = \frac{\sqrt{F_x(x, f(x))^2 + F_y(x, f(x))^2}}{|F_y(x, f(x))|}dx$$

şi lungimea arcului de curbă:

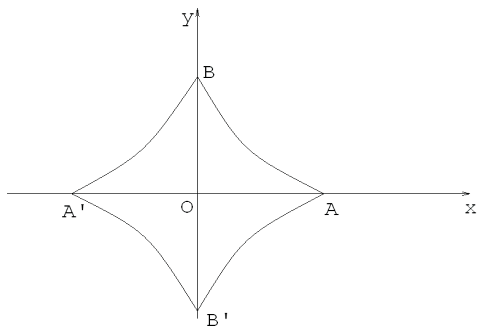
$$l_{(\widehat{AB})} = \int_a^b \frac{\sqrt{F_x(x, f(x))^2 + F_y(x, f(x))^2}}{|F_y(x, f(x))|}dx.$$

Exemplul 9.6. Să se determine lungimea arcului curbei

$$(\gamma) : F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0, \quad a > 0$$

situat în primul cadran.

Mai întâi determinăm intersecţiile curbei (γ) cu axele de coordonate.



Dacă $x = 0$, din ecuaţia $F(0, y) = 0$ rezultă $y = \pm a$, deci punctele de intersecţie cu axa (Oy) sunt $B(0, a)$ şi $B'(0, -a)$, iar dacă $y = 0$, din $F(x, 0) = 0$, avem $x = \pm a$ şi punctele de intersecţie cu axa (Ox) sunt $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$. Astfel arcul curbei situat în primul cadran este $(\widehat{AB})$.

Calculăm derivatele parţiale ale aplicaţiei F şi obţinem $F_x(x, y) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ şi $F_y(x, y) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$. Se observă că $F_y(x, y) \neq 0$ în toate punctele $M(x, y) \in (\widehat{AB})$, mai puţin în punctul A, şi

$$\frac{\sqrt{F_x(x, y)^2 + F_y(x, y)^2}}{|F_y(x, y)|} = \sqrt{1 + \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}} = \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Lungimea arcului de curbă este

$$l_{(\widehat{AB})} = \int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx == a^{\frac{1}{3}} \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^a x^{-\frac{1}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} \lim_{\epsilon \to 0}(a^{\frac{2}{3}} - \epsilon^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{2}a.$$

În continuare considerăm o curbă simplă de clasă C^n, dată de parametrizarea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, ale cărei ecuaţii parametrice sunt

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t), \quad t \in I \Leftrightarrow (\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I,$$

şi fixăm punctul $M_0(t_0)$ pe (γ) pe care îl vom numi originea arcelor curbei. Definim funcţia $s : I \to \mathbb{R}$ prin

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\bar{r}'(u)\| du.$$

Se observă că $s(t) = \begin{cases} l_{(\widehat{M_0M})} & \text{dacă } t \geq t_0 \\ -l_{(\widehat{M_0M})} & \text{dacă } t < t_0 \end{cases}$, pentru orice punct $M(t) \in (\gamma)$.

Evident, $ds = s'(t)dt = \|\bar{r}'(t)\|dt$ este elementul de arc al curbei (γ).

Deoarece $s'(t) = \frac{ds}{dt} = \|\bar{r}'(t)\| \neq 0$, conform teoremei de inversare locală, există, pentru fiecare $t \in I$, un interval $I_0 \subseteq I$ centrat în t astfel încât $s : I_0 \to s(I_0)$ este inversabilă de clasă C^n. Notăm inversa cu $\varphi : s(I_0) \to I_0$ şi rezultă că $\beta = \alpha \circ \varphi$ este o nouă parametrizare a curbei (γ) în care parametrul este lungimea de arc. Această parametrizare se numeşte *parametrizarea naturală* a curbei, iar ecuaţia lui (γ) este $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s)$. Mai spunem că (γ) este parametrizată prin lungimea de arc.

Notaţie. Atunci când o curbă $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s)$ este parametrizată natural vom nota derivatele aplicaţiilor care definesc curba astfel: derivatele de ordinul 1: $\dot{\bar{r}}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds}$, $\dot{x}(s) = \frac{dx}{ds}$, $\dot{y}(s) = \frac{dy}{ds}$; derivatele de ordinul 2: $\ddot{\bar{r}}(t) = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$, $\ddot{x}(s) = \frac{d^2x}{ds^2}$, $\ddot{y}(s) = \frac{d^2y}{ds^2}$, etc.

Observaţia 9.11. Deoarece, aşa cum am văzut, pentru orice curbă avem $ds^2 = d\bar{r}^2$ atunci $\frac{d\bar{r}^2}{ds^2} = 1$, adică $\|\dot{\bar{r}}(s)\| = \|\frac{d\bar{r}}{ds}(s)\| = 1$.

Exemplul 9.7. Fie curba $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t) = e^t \cdot \bar{i} + e^t \cdot \bar{j},\ t \in \mathbb{R}$. Fixăm punctul $M_0(t_0 = 0) = M_0(1,1)$ pe curbă şi avem

$$s = s(t) = \int_0^t \|\bar{r}'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{2e^{2u}} du = \sqrt{2}(e^t - 1),$$

de unde rezultă $e^t = \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. Astfel, curba (γ), parametrizată natural, este dată de

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s) = \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \bar{i} + \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \bar{j}, \quad s > -\sqrt{2}.$$

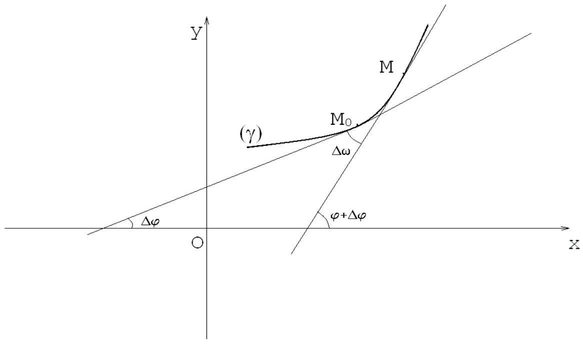
Avem $\dot{\bar{r}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \bar{j}$ pentru orice $s > -\sqrt{2}$, şi $\|\dot{\bar{r}}(s)\| = 1$.

2.4. Curbura unei curbe plane. Fie curba simplă de clasă C^n, $n \geq 2$, parametrizată prin lungimea de arc

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s), \quad s \in I \Leftrightarrow (\gamma) : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}, \quad s \in I,$$

şi fie punctele $M_0(s_0) \in (\gamma)$ şi $M(s) \in (\gamma)$. Vom nota cu $\Delta\omega$ unghiul dintre vectorii $\dot{\bar{r}}(s_0)$ şi $\dot{\bar{r}}(s)$, tangenţi la (γ) în punctele M_0 şi respectiv M, şi cu Δs lungimea arcului de curbă $(\widehat{M_0M})$.

Observaţia 9.12. Se verifică uşor că unghiul $\Delta\omega$ nu depinde de parametrizarea aleasă pe curbă.



Definiţia 9.11. Raportul $\kappa_{(\widehat{M_0M})} = \frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ se numeşte *curbura medie* a curbei (γ) corespunzătoare arcului de curbă $(\widehat{M_0M})$.

Observaţia 9.13. Dacă notăm cu $\varphi(s_0)$ unghiul făcut de tangenta la curbă în M_0 cu axa (Ox) şi cu $\varphi(s) = \varphi(s_0) + (\varphi(s) - \varphi(s_0)) = \varphi(s_0) + \Delta\varphi$ unghiul făcut de tangenta la (γ) în M cu (Ox), atunci avem $\Delta\omega = \pi - \varphi(s_0) - [\pi - (\varphi(s_0) + \Delta\varphi)] = \Delta\varphi$, deci $\kappa_{(\widehat{M_0M})} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$.

Definiţia 9.12. *Curbura* curbei (γ) în punctul $M_0(s_0) \in (\gamma)$ este limita curburii medii a arcului de curbă $(\widehat{M_0M})$ când lungimea acestuia tinde la 0, adică, în $M_0(s_0)$ curba (γ) are curbura

$$\kappa(s_0) = \lim_{\Delta s\to 0} \kappa_{(\widehat{M_0M})} = \lim_{s\to s_0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s}.$$

Definiţia 9.13. Raportul $R(s_0) = \frac{1}{\kappa(s_0)}$ se numeşte *raza de curbură* a curbei (γ) în punctul $M_0(s_0) \in (\gamma)$.

În continuare, să ne reamintim că panta tangentei la (γ) într-un punct oarecare $M(s)$ al curbei este $m = \operatorname{tg}\varphi(s) = \frac{\dot y(s)}{\dot x(s)}$, de unde rezultă că putem defini funcţia $\varphi : I \to [0,\pi]$ prin $\varphi(s) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\dot y(s)}{\dot x(s)}, & s \in I_0 \\ \frac{\pi}{2}, & s \in I \setminus I_0 \end{cases}$, unde $I_0 = \{s \in I \mid \dot x(s) \neq 0\}$. Se verifică imediat că φ este o funcţie continuă şi derivabilă pe I (deoarece (γ) este o curbă simplă) cu derivata $\dot\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\dot\varphi(s) = \dot x(s)\ddot y(s) - \ddot x(s)\dot y(s)$, unde am folosit faptul că $\|\dot{\bar r}(s)\| = \sqrt{\dot x(s)^2 + \dot y(s)^2} = 1$.
Acum, curbura curbei (γ) în punctul $M_0(s_0)$ poate fi scrisă

$$\kappa(M_0) = \kappa(s_0) = \lim_{s\to s_0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \lim_{s\to s_0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}(s_0) = \dot\varphi(s_0).$$

Definim funcţia curbură a curbei (γ) astfel:

$$\kappa : I \to \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \dot\varphi(s)$$

şi avem formula de calcul pentru curbura unei curbe parametrizate natural:

$$\kappa(s) = \dot x(s)\ddot y(s) - \ddot x(s)\dot y(s). \tag{9.2}$$

Acum schimbăm parametrizarea pe curbă, considerând din nou funcţia lungime de arc $s : J \to I$, definită în paragraful precedent, care, conform teoremei de inversare locală, este inversabilă, cu inversa $t : I \to J$, a cărei derivată în punctul $s_0 = s(t_0)$ este $\frac{dt}{ds}(s_0) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t_0)}$. Pentru curba (γ), dată acum printr-o parametrizare oarecare

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{r}(s(t)) = x(s(t)) \cdot \bar{i} + y(s(t)) \cdot \bar{j}, \quad t \in J,$$

avem, în $M(t) \in (\gamma)$ cu $s(t) = s$,

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx}{ds}(s)\frac{ds}{dt}(t) = \dot{x}(s)\frac{ds}{dt}(t),$$

adică $\dot{x}(s) = \frac{x'(t)}{\frac{ds}{dt}(t)} = \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}$, şi

$$\begin{aligned} x''(t) = \tfrac{d^2x}{dt^2}(t) &= \tfrac{d^2x}{ds^2}(s)\Big(\tfrac{ds}{dt}(t)\Big)^2 + \tfrac{dx}{ds}(s)\tfrac{d^2s}{dt^2}(t) \\ &= \ddot{x}(s)[(x'(t))^2 + (y'(t))^2] + \tfrac{(x'(t))^2+x'(t)y'(t)}{(x'(t))^2+(y'(t))^2}, \end{aligned}$$

adică $\ddot{x}(s) = \frac{1}{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\Big[x''(t) - \frac{(x'(t))^2+x'(t)y'(t)}{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\Big]$. Analog, obţinem $\dot{y}(s) = \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}$ şi $\ddot{y}(s) = \frac{1}{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\Big[y''(t) - \frac{(y'(t))^2+x'(t)y'(t)}{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\Big]$.

Înlocuind în (9.2) rezultă expresia curburii pentru o curbă dată printr-o parametrizare arbitrară:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|^3}.$$

Dacă avem curba simplă $(\gamma) : y = f(x)$, $x \in I$, de clasă C^n, $n \geq 2$, atunci o putem reprezenta parametric astfel:

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = f(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

În acest caz avem $x'(t) = 1$, $x''(t) = 0$ şi $y'(t) = f'(t) = f'(x)$, deci funcţia curbură a curbei (γ) este

$$\kappa : I \to \mathbb{R}, \quad \kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x))^2}.$$

De aici obţinem imediat următoarele două rezultate.

PROPOZIŢIA 9.5. *O curbă are funcţia curbură egală cu funcţia identic nulă dacă şi numai dacă este o dreaptă (sau un segment de dreaptă).*

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" Fie curba simplă $(\gamma) : y = f(x)$, $x \in I$, având funcţia curbură $\kappa : I \to \mathbb{R}$, $\kappa(x) = 0$, pentru orice $x \in I$. Rezultă că $f''(x) = 0$, $\forall x \in I$, adică $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Astfel ecuaţia curbei devine $(\gamma) : y = ax+b$, $x \in I$, adică (γ) este o dreaptă, dacă $I = \mathbb{R}$, sau un segment de dreaptă, dacă I este un interval inclus în $\mathbb{R}$.

"$\Leftarrow$" Fie dreapta $(\gamma) : y = f(x) = ax + b$. Este clar că $f''(x) = 0$, adică funcţia curbură a curbei se anulează peste tot. $\square$

Propoziţia 9.6. *Dacă într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ al unei curbe simple (γ) de clasă C^n, $n \geq 2$, curbura este $\kappa(M_0) = 0$, atunci M_0 este un punct de inflexiune pentru (γ) (adică în acest punct se schimbă convexitatea lui (γ)) şi reciproc.*

În sfârşit, considerăm curba simplă de clasă C^n, $n \geq 2$, reprezentată implicit $(\gamma) : F(x, y) = 0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $F_y(x, y) \neq 0$ în orice punct $M(x, y)$ al curbei. Atunci, folosind teorema funcţiilor implicite, avem reprezentarea explicită a curbei $(\gamma) : y = f(x)$, unde $f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$. Obţinem

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_x^2 + F_y^2}(x, f(x)),$$

unde am notat $F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ şi $F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, şi curbura într-un punct oarecare al curbei este, în acest caz,

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= -\tfrac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, f(x)) \\ &= -\tfrac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(\nabla F)^3}(x, f(x)). \end{aligned}$$

Exemplul 9.8. Să se determine funcţiile curbură ale următoarelor curbe:

(1) $(\gamma) : \begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R};$

(2) $(\gamma) : y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R};$

(3) $(\gamma) : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0, \quad a > 0, x, y \in (0, a).$

(1) Curba (γ) este reprezentată parametric, într-o parametrizare oarecare, şi avem $x'(t) = e^t(1 + t)$, $x''(t) = e^t(2 + t)$, $y'(t) = e^{-t}(1 - t)$, $y''(t) = e^{-t}(t - 2)$, deci funcţia curbură este $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(t^2 - 2)}{[e^{2t}(1 + t)^2 + e^{-2t}(1 - t)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

(2) Deoarece curba (γ) este reprezentată explicit, notând $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, avem $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ şi funcţia curbură a lui (γ) este $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2x(1 + x^2)}{[1 + (1 + x^2)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

(3) Notăm $F : (0, a) \times (0, a) \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}$ şi avem $F_x(x, y) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $F_y(x, y) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$, $F_{xx}(x, y) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$, $F_{xy}(x, y) = 0$, $F_{yy}(x, y) = -\frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}}$. Funcţia curbură a lui (γ) va fi $\kappa : (0, a) \to \mathbb{R}$,

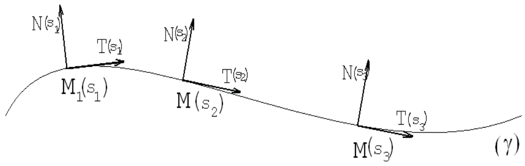
$$\kappa(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) = \frac{2\sqrt{6}}{9}a^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}},$$

unde am folosit faptul că $y^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$, pentru orice punct $M(x, y) \in (\gamma)$.

2.5. Formulele lui Frenet. Fie curba simplă $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s) = x(s) \cdot \bar{i} + y(s) \cdot \bar{j}$, $s \in I$, de clasă C^n, $n \geq 2$, parametrizată prin lungimea de arc. Notăm cu $\bar{T}(s) = \dot{\bar{r}}(s)$ vectorul director al tangentei la curbă în punctul $M(s) \in (\gamma)$ şi avem aplicaţia $\bar{T} : I \to \mathbb{V}^2$ diferenţiabilă de clasă C^{n-1} pentru care $\|\bar{T}(s)\| = \|\dot{\bar{r}}(s)\| = 1$, oricare ar fi $s \in I$. Pentru fiecare vector $\bar{T}(s)$ considerăm versorul normal la curbă $\bar{N}(s) \perp \bar{T}(s)$ care face cu $\bar{T}(s)$ un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ măsurat dinspre $\bar{T}(s)$ în sens invers acelor de ceasornic. Din aceste condiţii, rezultă

$$\bar{N}(s) = -\dot{y}(s) \cdot \bar{i} + \dot{x}(s) \cdot \bar{j}.$$

Avem astfel şi aplicaţia diferenţiabilă $N : I \to \mathbb{V}^2$ cu $\|\bar{N}(s)\| = 1$ şi $\bar{T}(s) \cdot \bar{N}(s) = 0$, pentru orice $s \in I$. În fiecare punct $M(s) \in (\gamma)$ avem o bază ortonormată $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s)\}$ în plan şi reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $(M(s), \{\bar{T}(s), \bar{N}(s)\})$ numit *reperul lui Frenet* în punctul $M(s)$.



În continuare derivăm relaţiile

$$\bar{T}(s) \cdot \bar{T}(s) = 1, \quad \bar{N}(s) \cdot \bar{N}(s) = 1, \quad \bar{T}(s) \cdot \bar{N}(s) = 0$$

şi obţinem

$$\dot{\bar{T}}(s) \cdot \bar{T}(s) = 0, \quad \dot{\bar{N}}(s) \cdot \bar{N}(s) = 0, \quad \dot{\bar{T}}(s) \cdot \bar{N}(s) + \bar{T}(s) \cdot \dot{\bar{N}}(s) = 0.$$

Din prima relaţie rezultă $\dot{\bar{T}}(s) \perp \bar{T}(s)$, adică $\dot{\bar{T}}(s) \parallel \bar{N}(s)$, deci există funcţia $\lambda_1 : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $\dot{\bar{T}}(s) = \lambda_1(s)\bar{N}(s)$. În acelaşi fel, din a doua relaţie, avem $\dot{\bar{N}}(s) = \lambda_2(s)\bar{T}(s)$, unde $\lambda_2 : I \to \mathbb{R}$. Înlocuind în

$$\dot{\bar{T}}(s) \cdot \bar{N}(s) + \bar{T}(s) \cdot \dot{\bar{N}}(s) = 0$$

şi, ţinând cont de $\|\bar{T}(s)\| = \|\bar{N}(s)\| = 1$, rezultă $\lambda_1(s) + \lambda_2(s) = 0$, adică $\lambda_1(s) = -\lambda_2(s) = \lambda(s)$, pentru orice $s \in I$, unde $\lambda : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată de $\lambda(s) = \dot{\bar{T}}(s) \cdot \bar{N}(s) = -\dot{\bar{N}}(s) \cdot \bar{T}(s)$. Astfel

$$\dot{\bar{T}}(s) = \lambda(s)\bar{N}(s) \quad \text{şi} \quad \dot{\bar{N}}(s) = -\lambda(s)\bar{T}(s).$$

Cum $\dot{\bar{T}}(s) = \ddot{\bar{r}}(s) = \ddot{x}(s) \cdot \bar{i} + \ddot{y}(s) \cdot \bar{j}$ şi $\bar{N}(s) = -\dot{y}(s) \cdot \bar{i} + \cdot x(s) \cdot \bar{j}$, obţinem

$$\lambda(s) = \dot{\bar{T}}(s) \cdot \bar{N}(s) = \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \ddot{x}(s)\dot{y}(s) = \kappa(s),$$

şi de aici *formulele lui Frenet* pentru curba (γ):

$$\dot{\bar{T}}(s) = \kappa(s)\bar{N}(s) \quad \text{şi} \quad \dot{\bar{N}}(s) = -\kappa(s)\bar{T}(s),$$

unde $\kappa : I \to \mathbb{R}$ este curbura lui (γ).

Observaţia 9.14. Deoarece $\bar{T}(s) \perp \bar{N}(s)$, $\bar{T}(s) \perp \ddot{\bar{r}}(s)$ şi $\|\bar{N}(s)\| = 1$, oricare ar fi $s \in I$, rezultă $\bar{N}(s) = \pm\frac{1}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|}\ddot{\bar{r}}(s)$, de unde obţinem $\kappa(s) = \pm\|\ddot{\bar{r}}(s)\|$.

În încheierea acestei secţiuni vom prezenta (fără demonstraţie) următoarea teoremă.

Teorema 9.7. (Teorema fundamentală a teoriei curbelor în plan)
Fiind date o funcţie $\kappa : I \to \mathbb{R}$ continuă pe intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, un punct M_0 în plan şi o dreaptă (d_0) care trece prin M_0, atunci există şi este unică o curbă regulată $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s)$, $s \in I$, de clasă C^n, $n \geq 2$, parametrizată prin lungimea de arc $s \in I$, astfel încât

(1) *(γ) să treacă prin M_0 şi parametrul pe curbă corespunzător acestui punct să fie $s_0 = 0$;*
(2) *dreapta (d_0) să fie tangentă la curbă în M_0;*
(3) *funcţia curbură a curbei (γ) să fie $\kappa : I \to \mathbb{R}$.*

Definiţia 9.14. Ecuaţia $\kappa = \kappa(s)$, $s \in I$, se numeşte *ecuaţia intrinsecă* a curbei (γ).

Observaţia 9.15. Din teorema fundamentală a teoriei curbelor în plan rezultă că funcţia curbură determină o curbă până la o deplasare (o translaţie compusă cu o rotaţie) în plan.

2.6. Contactul a două curbe în plan. Cercul osculator al unei curbe într-un punct.

Definiţia 9.15. Spunem că două curbe simple (γ_1) şi (γ_2) de clasă C^n, $n \geq 1$, au un contact de ordin mai mare sau egal cu m, unde $m \leq n$, în punctul comun $M_0 \in (\gamma_1) \cap (\gamma_2)$, dacă admit reprezentările parametrice

$$(\gamma_1) : \bar{r} = \bar{r}_1(t) = x_1(t) \cdot \bar{i} + y_1(t) \cdot \bar{j}, \quad t \in I,$$

şi

$$(\gamma_2) : \bar{r} = \bar{r}_2(\widetilde{t}) = x_2(\widetilde{t}) \cdot \bar{i} + y_2(\widetilde{t}) \cdot \bar{j}, \quad \widetilde{t} \in J,$$

astfel încât dacă $t = t_0$ şi $\widetilde{t} = \widetilde{t}_0$ sunt parametrii punctului M_0 pe (γ_1) şi respectiv pe (γ_2), atunci

$$\bar{r}_1(t_0) = \bar{r}_2(\widetilde{t}_0),\ \bar{r}_1'(t_0) = \bar{r}_2'(\widetilde{t}_0),\ \bar{r}_1''(t_0) = \bar{r}_2''(\widetilde{t}_0), \ldots,\ \bar{r}_1^{(m)}(t_0) = \bar{r}_2^{(m)}(\widetilde{t}_0).$$

Observaţia 9.16. Dacă două curbe au un contact de ordin $m \geq 2$ într-un punct comun atunci ele au în acest punct aceeaşi tangentă, aceeaşi normală şi aceeaşi curbură.

Ţinând cont de modul în care, pentru o curbă simplă, se trece de la un tip de reprezentare la altul, şi de modul de derivare a funcţiilor compuse, se obţin imediat următoarele două rezultate.

Propoziţia 9.8. *Două curbe simple de clasă C^n, $n \geq 1$, reprezentate explicit*

$$(\gamma_1) : y = f_1(x) \quad \text{şi} \quad (\gamma_2) : y = f_2(x)$$

au un contact de ordin exact m, cu $m < n$, în punctul comun $M_0(x_0, y_0)$ dacă şi numai dacă

$$f_1(x_0) = f_2(x_0),\ f_1'(x_0) = f_2'(x_0), \ldots,\ f_1^{(m)}(x_0) = f_2^{(m)}(x_0)$$

şi $f_1^{(m+1)}(x_0) \neq f_2^{(m+1)}(x_0)$.

Propoziţia 9.9. *Două curbe simple de clasă C^n date prin*

$$(\gamma_1) : F(x, y) = 0 \quad \text{şi} \quad (\gamma_2) : \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j},\ t \in I,$$

au un contact de ordin exact m, cu $m < n$, în punctul comun $M_0(x_0, y_0)$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, dacă şi numai dacă

$$\phi(t_0) = 0,\ \phi'(t_0) = 0, \ldots,\ \phi^{(m)}(t_0) = 0,\ \phi^{(m+1)}(t_0) \neq 0,$$

*unde $\phi : I \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = (F \circ \bar{r})(t) = F(x(t), y(t))$ se numeşte **funcţia de contact** a celor două curbe.*

Exemplul 9.9. Să se determine punctele de contact ale următoarelor curbe

$$(\gamma_1) : \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases},\ t \in [0, 2\pi), \quad \text{şi} \quad (\gamma_2) : x^2 + y^2 = a^2,\ a > 0.$$

Definim $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2$ şi avem funcţia de contact $\phi : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, unde

$$\phi(t) = a^2(\cos t + t \sin t)^2 + a^2(\sin t - t \cos t)^2 - a^2 = a^2 t^2.$$

Punctele comune celor două curbe au coordonata pe curba (γ_1) o soluţie a ecuaţiei $\phi(t) = 0$. Obţinem $t_0 = 0$ şi punctul de intersecţie a celor două curbe $M_0(t_0 = 0) = M_0(a, 0)$. Avem $\phi'(t) = 2a^2 t$ şi $\phi''(t) = 2a^2$, de unde rezultă $\phi'(0) = 0$ şi $\phi''(0) = 2a^2 \neq 0$. În concluzie, M_0 este un punct de contact de ordin 1 al celor două curbe.

Definiţia 9.16. Fie (γ) o curbă simplă de clasă C^n, $n \geq 2$, şi punctul $M_0 \in (\gamma)$. Se numeşte *cerc osculator* al curbei în M_0 un cerc care are în acest punct un contact de ordin $m \geq 2$ cu (γ).

Teorema 9.10. *În fiecare punct neinflexionar $M_0(t_0)$ al curbei simple de clasă C^n, $n \geq 2$,*

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j}, \quad t \in I,$$

există şi este unic un cerc osculator cu centrul

$$C\Big(x(t_0) - \frac{y'(t_0)[(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2]}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}, y(t_0) + \frac{x'(t_0)[(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2]}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}\Big)$$

şi raza $R = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, unde $\kappa(t_0)$ este curbura lui (γ) în punctul $M_0(t_0)$.

Demonstraţie. Căutăm ecuaţia canonică a cercului osculator al curbei (γ) în punctul $M_0(t_0)$:

$$(\mathcal{C}) : F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0,$$

cu centrul $C(a, b)$ şi raza R. Funcţia de contact a curbei şi cercului este $\phi : I \to \mathbb{R}$, dată prin

$$\phi(t) = F(x(t), y(t)) = (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 - R^2.$$

Curba (γ) şi cercul $(\mathcal{C})$ au un contact de ordin mai mare sau egal cu 2 dacă şi numai dacă

$$\phi(t_0) = 0, \quad \phi'(t_0) = 0, \quad \phi''(t_0) = 0.$$

Astfel avem ecuaţiile

$$(x(t_0) - a)^2 + (y(t_0) - b)^2 - R^2 = 0,$$

$$x'(t_0)(x(t_0) - a) + y'(t_0)(y(t_0) - b) = 0,$$

$$x''(t_0)(x(t_0) - a) + y''(t_0)(y(t_0) - b) + (x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 = 0,$$

cu necunoscutele a, b şi R. Din ultimele două ecuaţii obţinem imediat coordonatele centrului cercului osculator

$$a = x(t_0) - \frac{y'(t_0)[(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2]}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}$$

şi

$$b = y(t_0) + \frac{x'(t_0)[(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2]}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}.$$

Înlocuind în prima ecuaţie, rezultă

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\{y'(t_0)[(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2]\}^2+\{x'(t_0)[(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2]\}^2}{(x'(t_0)y''(t_0)-x''(t_0)y'(t_0))^2} \\ &= \frac{[(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2]^3}{(x'(t_0)y''(t_0)-x''(t_0)y'(t_0))^2} \\ &= \frac{1}{\kappa^2(t_0)}. \end{aligned}$$

Din rezultatele obţinute rezultă că un cerc osculator există şi este unic în fiecare punct al curbei (γ). □

Observaţia 9.17. Se verifică uşor că centrul cercului osculator al lui (γ) în $M_0(t_0) \in (\gamma)$ se află pe normala la curbă în punctul M_0.

Observaţia 9.18. Dacă punctul $M_0(t_0)$ de pe curbă este inflexionar, atunci curbura curbei în acest punct este $\kappa(t_0) = 0$, iar raza cercului osculator în M_0 este $R \to \infty$. Intuitiv, cercul osculator coincide, în acest caz, cu tangenta la curbă în punctul M_0.

Observaţia 9.19. Dacă (γ) este parametrizată prin lungimea de arc, (γ) : $\bar{r} = \bar{r}(s) = x(s)\cdot\bar{i} + y(s)\cdot\bar{j}$, ţinând cont că $\|\dot{\bar{r}}(s)\| = 1$, adică $\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1$, avem coordonatele centrului osculator al curbei în punctul $M_0(s_0)$:

$$a = x(s_0) - \frac{\dot{y}(s_0)}{\dot{x}(s_0)\ddot{y}(s_0) - \ddot{x}(s_0)\dot{y}(s_0)} = x(s_0) - \frac{\dot{y}(s_0)}{\kappa(s_0)},$$
$$b = y(s_0) + \frac{\dot{x}(s_0)}{\dot{x}(s_0)\ddot{y}(s_0) - \ddot{x}(s_0)\dot{y}(s_0)} = y(s_0) + \frac{\dot{x}(s_0)}{\kappa(s_0)}$$

şi raza sa

$$R = \frac{1}{|\kappa(s_0)|} = \frac{1}{|\dot{x}(s_0)\ddot{y}(s_0) - \ddot{x}(s_0)\dot{y}(s_0)|}.$$

Exemplul 9.10. Să se determine ecuaţia cercului osculator al curbei

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t) = te^t\bar{i} + te^{-t}\bar{j}, \quad t \in \mathbb{R}$$

în punctul $M_0(t_0 = 0) = M_0(0, 0)$.

În acest caz, avem $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = te^t$, $y(t) = te^{-t}$ şi $x'(t) = e^t(t+1)$, $x''(t) = e^t(t+2)$, $y'(t) = e^{-t}(1-t)$, $y''(t) = e^{-t}(t-2)$. Rezultă $x'(0) = 1$, $x''(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$. Coordonatele centrului cercului osculator al curbei în M_0 sunt

$$a = x(0) - \frac{y'(0)[(x'(0))^2 + (y'(0))^2]}{x'(0)y''(0) - x''(0)y'(0)} = \frac{1}{2}$$

şi

$$b = y(0) + \frac{x'(0)[(x'(0))^2 + (y'(0))^2]}{x'(0)y''(0) - x''(0)y'(0)} = -\frac{1}{2},$$

iar raza sa este

$$R = \frac{1}{|\kappa(0)|} = \frac{[(x'(0))^2 + (y'(0))^2]^{\frac{3}{2}}}{|x'(0)y''(t) - x''(0)y'(0)|} = \frac{1}{4}.$$

Astfel ecuaţia canonică a cercului osculator în $M_0(0, 0)$ este

$$(\mathcal{C}) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

2.7. Înfăşurătoarea unei familii de curbe. Evoluta şi evolventa unei curbe. Fie familia de curbe simple de clasă C^n, $n \geq 1$, reprezentate implicit

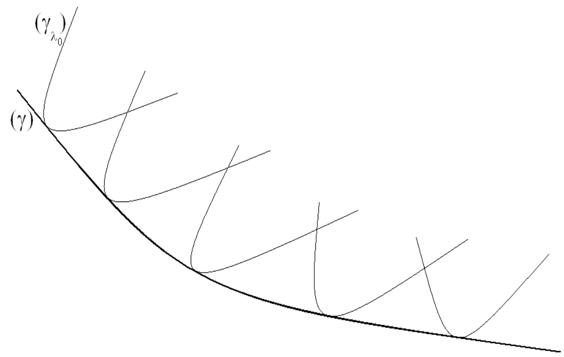
$$(\gamma_\lambda) : F(x, y, \lambda) = 0, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ \lambda \in I \subset \mathbb{R},$$

unde I este un interval deschis, F este de clasă cel puţin C^1 în raport cu λ, iar $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ nu se anulează identic pe $D \times I$.

Definiţia 9.17. Spunem că două curbe sunt tangente dacă au un punct comun şi în acest punct au aceeaşi tangentă.

Definiţia 9.18. Se numeşte *înfăşurătoarea* familiei de curbe (γ_λ) o curbă (γ), tangentă la toate curbele familiei, astfel încât pentru fiecare punct al lui (γ) există o curbă (γ_λ) care îl conţine.

Observaţia 9.20. Nu orice familie de curbe admite o înfăşurătoare.



Teorema 9.11. *Dacă familia de curbe*

$$(\gamma_\lambda) : F(x, y, \lambda) = 0, \quad \lambda \in I \subset \mathbb{R},$$

admite o înfăşurătoare (γ)*, atunci coordonatele punctelor acesteia verifică sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}, \tag{9.3}$$

unde am notat $F_\lambda = \frac{\partial F}{\partial \lambda}$.

Demonstraţie. Presupunem că există înfăşurătoarea (γ) a familiei de curbe (γ_λ). Atunci aceasta poate fi reprezentată parametric

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(\lambda) = x(\lambda) \cdot \bar{i} + y(\lambda) \cdot \bar{j}, \quad \lambda \in I.$$

Din definiţia înfăşurătorii rezultă că pentru un punct oarecare $M(\lambda) \in (\gamma)$ există curba $(\gamma_\lambda) : F(x, y, \lambda) = 0$ astfel încât $M \in (\gamma_\lambda)$, adică

$$\phi(\lambda) = F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0,$$

unde $\phi : I \to \mathbb{R}$, $\phi(\lambda) = (F \circ \bar{r})(\lambda)$. Derivând această relaţie în raport cu λ avem

$$\phi'(\lambda) = F_x(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) \cdot x'(\lambda) + F_y(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) \cdot y'(\lambda) + F_\lambda(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0.$$

Pe de altă parte, în punctul $M(\lambda) \in (\gamma)$ curbele (γ) şi (γ_λ) au aceeaşi tangentă şi aceeaşi normală. Vectorul director al tangentei comune îl deducem din ecuaţia lui (γ):

$$\bar{T} = \bar{r}'(\lambda) = x'(\lambda) \cdot \bar{i} + y'(\lambda) \cdot \bar{j},$$

iar cel al normalei din ecuaţia lui $(\gamma_\lambda) : F(x, y, \lambda) = 0$:

$$\bar{N} = \nabla F(x, y, \lambda) = F_x(x, y, \lambda) \cdot \bar{i} + F_y(x, y, \lambda) \cdot \bar{j},$$

unde $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$. Deoarece $\bar{T} \cdot \bar{N} = 0$, rezultă

$$F_x(x, y, \lambda) \cdot x'(\lambda) + F_y(x, y, \lambda) \cdot y'(\lambda) = 0.$$

Înlocuind în ecuaţia $\phi'(\lambda) = 0$ obţinem $F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$. □

Definiţia 9.19. Locul geometric al punctelor care verifică sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,\lambda)=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{array}\right. \tag{9.4}$$

se numeşte *înfăşurătoarea în sens larg* a familiei de curbe (γ_λ).

Definiţia 9.20. Un punct care verifică (9.4) se numeşte punct caracteristic al familiei de curbe (γ_λ).

Folosind teorema funcţiilor implicite se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 9.12. *Dacă într-un punct caracteristic M_0 al familiei de curbe (γ_λ) sunt verificate condiţiile*

$$\left|\begin{array}{cc} F_x & F_y \\ F_{\lambda x} & F_{\lambda y} \end{array}\right|_{|M_0} \neq 0 \quad \text{şi} \quad F_{\lambda\lambda}(M_0)\neq 0,$$

unde aplicaţia F care defineşte familia de curbe este de clasă C^n, $n\geq 2$, şi unde am folosit notaţiile $F_{\lambda x}=\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial x}$, $F_{\lambda y}=\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial y}$ şi $F_{\lambda\lambda}=\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2}$, atunci există o vecinătate deschisă $V_0\subset\mathbb{R}^2$ a lui M_0 pe care sistemul (9.4) *defineşte un arc al înfăşurătorii familiei de curbe.*

Observaţia 9.21. În aplicaţii concrete ecuaţia înfăşurătorii unei familii de curbe, dacă aceasta există, se va determina eliminând λ între cele două ecuaţii ale sistemului (9.4).

Exemplul 9.11. Să se determine înfăşurătoarea familiei de cercuri

$$(\gamma_\lambda): (x-\lambda)^2+(y-2\lambda)^2=1, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Ecuaţia implicită a familiei de cercuri este $F(x,y,\lambda)=(x-\lambda)^2+(y-2\lambda)^2-9=0$, deci, în acest caz, sistemul (9.4) devine:

$$\left\{\begin{array}{l} (x-\lambda)^2+(y-2\lambda)^2-1=0 \\ x+2y-5\lambda=0 \end{array}\right. .$$

Din a doua ecuaţie rezultă $\lambda=\frac{1}{5}(x+2y)$ şi, înlocuind în prima ecuaţie, obţinem ecuaţia înfăşurătorii:

$$(\gamma): 4x^2-4xy+y^2-5=0,$$

care este de fapt reuniunea a două drepte concurente $(\gamma)=(d_1)\cup(d_2)$, unde

$$(d_1): 2x-y+\sqrt{5}=0 \quad \text{şi} \quad (d_2): 2x-y-\sqrt{5}=0.$$

În cazul în care curbele din familia (γ_λ) sunt reprezentate parametric, adică

$$(\gamma_\lambda): \bar r=\bar r(t,\lambda)=x(t,\lambda)\cdot\bar i+y(t,\lambda)\cdot\bar j, \quad t\in I,\lambda\in J,$$

cu $\bar r$ este cel puţin de clasă C^1 în raport cu λ şi derivata sa în raport cu λ nu se anulează identic pe $I\times J$, atunci înfăşurătoarea familiei de curbe, dacă există, este dată de sistemul

$$(9.5) \qquad \begin{cases} \bar{r} = \bar{r}(t,\lambda) \\ \bar{r}_\lambda(t,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t,\lambda) \\ y = y(t,\lambda) \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t,\lambda) = 0 \end{cases}.$$

Exemplul 9.12. Să se determine înfăşurătoarea familiei de curbe

$$(\gamma_\lambda) : \bar{r} = \bar{r}(t,\lambda) = (\lambda^2 + \lambda) \cdot e^t \cdot \bar{i} + e^{-t} \cdot \bar{j}, \quad t, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sistemul (9.5) devine, în acest caz,

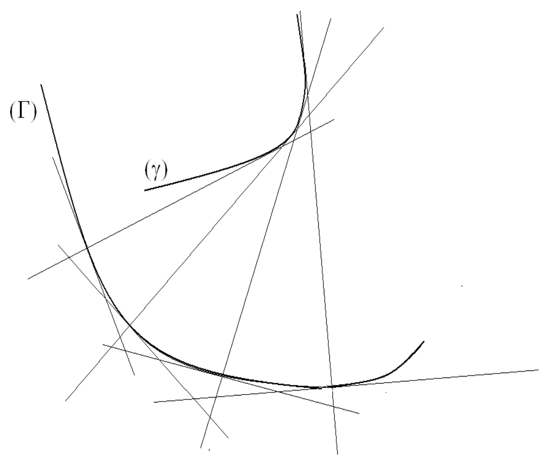
$$\begin{cases} x = \lambda \cdot e^t \\ y = \lambda \cdot e^{-t} \\ (2\lambda + 1) \cdot e^{-t} = 0 \end{cases},$$

deoarece $\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$. Rezultă $\lambda = -\frac{1}{2}$ şi, prin urmare, ecuaţiile parametrice ale înfăşurătorii vor fi

$$(\gamma) : \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \cdot e^t \\ y = -\frac{1}{2} \cdot e^{-t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Din aceste ecuaţii obţinem ecuaţia implicită a lui $(\gamma) : 4xy = 1$, $x, y > 0$, ceea ce înseamnă că înfăşurătoarea familiei de curbe este porţiunea situată în primul cadran a unei hiperbole echilatere.

Definiţia 9.21. Se numeşte *evoluta* unei curbe (Γ) înfăşurătoarea (γ) a familiei formate din normalele la curbă.



Fie curba de clasă C^n, $n \geq 2$, fără puncte inflexionare, parametrizată prin lungimea de arc $(\Gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s)$, $s \in I$, şi considerăm un punct oarecare $M(s) \in (\Gamma)$. Vectorul tangent în M la curbă este $\bar{T}(s) = \dot{\bar{r}}(s)$, iar cel normal $\bar{N}(s)$. Ecuaţia vectorială a normalei la (Γ) în punctul M este

$$(n_s) : \bar{r} = \bar{r}(\alpha, s) = \bar{r}(s) + \alpha \cdot \bar{N}(s).$$

Astfel am obţinut ecuaţia familiei normalelor la curba (Γ), unde rolul parametrului λ este jucat de s. Ecuaţia evolutei va rezulta din sistemul

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}(\alpha, s) \\ \bar{r}_s(\alpha, s) = 0 \end{cases}.$$

Din $\bar{r}_s(\alpha, s) = 0$ avem $\dot{\bar{r}}(s) + \alpha\dot{\bar{N}}(s) = 0$, adică $\bar{T}(s) = -\alpha\dot{\bar{N}}(s)$. Dar din a doua ecuaţie a lui Frenet se obţine $\dot{\bar{N}} = -\kappa(s)\bar{T}(s)$ şi de aici urmează $\alpha = \frac{1}{\kappa(s)}$, unde κ este funcţia curbură a lui (Γ) (am folosit şi $\kappa(s) \neq 0$ pentru orice $s \in I$, deoarece curba nu are puncte inflexionare). Acum, înlocuind α în ecuaţia $\bar{r} = \bar{r}(\alpha, s)$, putem scrie ecuaţia evolutei curbei (Γ):

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \bar{N}(s), \quad s \in I.$$

Vectorul normal la curba (Γ) în punctul $M(s)$ este dat de $\bar{N}(s) = -\dot{y}(s) \cdot \bar{i} + \dot{x}(s) \cdot \bar{j}$ şi, prin urmare, ecuaţiile parametrice ale evolutei sunt

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(s) - \frac{\dot{y}(s)}{\kappa(s)} \\ y = y(s) + \frac{\dot{x}(s)}{\kappa(s)} \end{cases}, \quad s \in I,$$

iar aceste ecuaţii conduc la următorul rezultat.

TEOREMA 9.13. *Evoluta unei curbe este locul geometric al centrelor cercurilor osculatoare ale curbei.*

Obţinem şi ecuaţiile parametrice ale evolutei atunci când curba (Γ) este dată printr-o parametrizare arbitrară $(\Gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in J$:

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) - \frac{y'(t)[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \\ \\ y = y(t) + \frac{x'(t)[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \end{cases}, \quad t \in J.$$

DEFINIŢIA 9.22. Se numeşte *evolventă* a unei curbe (γ) o curbă (Γ) a cărei evolută este (γ).

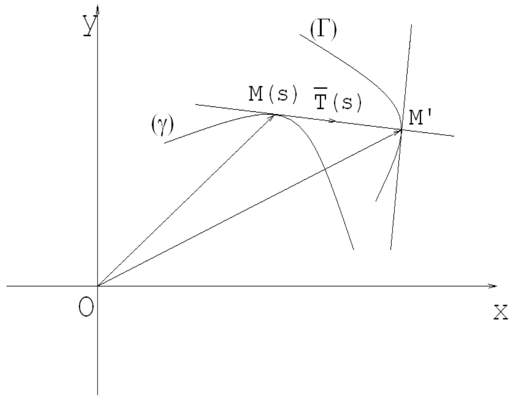
Fie curba de clasă C^n, $n \geq 2$, fără puncte inflexionare, parametrizată prin lungimea de arc $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s),\ s \in I$.

Un punct M' se află pe evolventa (Γ) a curbei (γ) dacă şi numai dacă există un punct $M(s) \in (\gamma)$ astfel încât M' se află pe tangenta în M la (γ). Dacă $\bar{R}$ este vectorul de poziţie al punctului M' atunci, conform regulii triunghiului de adunare a vectorilor avem $\bar{R} = \bar{r}(s) + \lambda \cdot \bar{T}(s)$, unde $\lambda = \|\overrightarrow{MM'}\|$, iar ecuaţia evolventei curbei (γ) este:

$$(\Gamma) : \bar{R}(s) = \bar{r}(s) + \lambda(s) \cdot \bar{T}(s), \quad s \in I,$$

unde $\lambda : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie definită în lungul curbei (γ) şi $\bar{T}(s) = \dot{\bar{r}}(s)$ este vectorul tangent în M la (γ). Vectorul tangent în M' la curba (Γ) este

$$\bar{R}'(s) = \dot{\bar{r}}(s) + \lambda'(s) \cdot \bar{T}(s) + \lambda(s) \cdot \dot{\bar{T}}(s) = (\lambda'(s) + 1) \cdot \bar{T}(s) + \lambda(s) \cdot \dot{\bar{T}}(s),$$



iar cel normal este $\bar{T}(s)$. De aici rezultă

$$\bar{R}'(s) \cdot \bar{T}(s) = 0 \Leftrightarrow [(\lambda'(s)+1) \cdot \bar{T}(s) + \lambda(s) \cdot \dot{\bar{T}}(s)] \cdot \bar{T}(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(\lambda'(s)+1) \cdot \bar{T}(s) + \lambda(s) \cdot \kappa(s)\bar{N}(s)] \cdot \bar{T}(s) = 0 \Leftrightarrow \lambda'(s)+1 = 0,$$

unde am folosit prima ecuaţie a lui Frenet $\dot{\bar{T}}(s) = \kappa(s)\bar{N}(s)$, $\kappa : I \to \mathbb{R}$ fiind funcţia curbură a lui (γ) şi $\bar{N}(s)$ vectorul normal în M la (γ). Am obţinut $\lambda(s) = s_0 - s$, unde s_0 este o constantă reală.

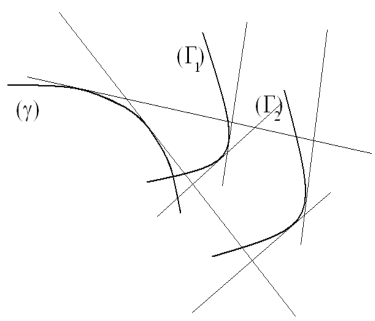
Avem ecuaţia vectorială parametrică a evolventei:

$$(\Gamma) : \bar{R}(s) = \bar{r}(s) + (s_0 - s) \cdot \dot{\bar{r}}(s), \quad s \in I,$$

şi, de aici, ecuaţiile sale parametrice

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = x(s) + (s_0 - s) \cdot \dot{x}(s) \\ y = y(s) + (s_0 - s) \cdot \dot{y}(s) \end{cases}, \quad s \in I.$$

Observaţia 9.22. Curba (γ) are o infinitate de evolvente. Tangentele la aceste evolvente în punctele corespunzătoare aceluiaşi punct de pe (γ) sunt paralele între ele.



3. Curbe în spaţiu

Modul de a defini curbele în spaţiu este acelaşi ca în cazul curbelor plane. De altfel multe din rezultatele din acest paragraf sunt similare celor din cazul plan, motiv pentru care ne vom mărgini la a le enunţa, omiţând demonstraţiile acolo unde ele sunt foarte asemănătoare cu unele deja prezentate în subcapitolul anterior.

Pe tot parcursul acestui subcapitol vom folosi reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$.

Dacă privim curbele în spaţiu ca traiectorii ale unor particule în mişcare atunci putem da următoarea definiţie.

Definiţia 9.23. O *curbă de clasă* C^n, $n \geq 1$, în spaţiu este o aplicaţie $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, de clasă C^n, definită pe un interval deschis $I \subseteq \mathbb{R}$. O curbă de clasă C^∞ se numeşte *curbă diferenţiabilă*.

Definiţia 9.24. Un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ se numeşte *punct simplu* al curbei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ dacă există şi este unic $t_0 \in I$ astfel încât $\alpha(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, iar dacă există $t_1, t_2, \ldots, t_k \in I$ cu proprietăţile $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \ldots = \alpha(t_k) = (x_0, y_0, z_0)$ atunci M_0 se numeşte *punct multiplu* de ordin k al curbei.

Definiţia 9.25. O curbă $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, de clasă C^n, $n \geq 1$, se numeşte *curbă regulată* de clasă C^n dacă $\alpha'(t) \neq 0$, pentru orice $t \in I$.

Privite ca locuri geometrice curbele în spaţiu se definesc după cum urmează.

Definiţia 9.26. O *curbă simplă* de clasă C^n în spaţiu este o submulţime (γ) a spaţiului cu proprietatea că pentru orice punct $M \in (\gamma)$ există o vecinătate a acestuia $V_M \subset (\gamma)$ şi o curbă regulată $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, de clasă C^n, injectivă, astfel încât $\alpha(I) = V_M$. Curba α se numeşte o *parametrizare locală* a curbei simple (γ).

Observaţia 9.23. Dacă pentru orice punct M_0 al unei submulţimi (γ) a spaţiului există o vecinătate deschisă V_0 astfel încât $(\gamma) \cap V_0$ să fie o curbă simplă de clasă C^n atunci (γ) este o curbă (imaginea unei curbe) regulată de clasă C^n.

Observaţia 9.24. Fie funcţia bijectivă $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to I$ de clasă C^n, unde J este un interval deschis, atunci $\beta = \alpha \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^2$ este o nouă parametrizare a curbei (γ).

În continuare, fie curba (γ) de clasă C^n, $n \geq 1$, cu parametrizarea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$. Considerăm aplicaţia $\bar{r} : I \to \mathbb{V}^3$, dată prin $\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}$, care de asemeni este de clasă C^n. Obţinem *ecuaţia vectorială parametrică* a curbei (γ):

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t), \quad t \in I,$$

sau, echivalent, *ecuaţiile parametrice* ale lui (γ):

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

OBSERVAŢIA 9.25. Curba $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in I$, este regulată dacă şi numai dacă $\bar{r}'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$.

Următoarele două rezultate se demonstrează cu ajutorul teoremei de inversare locală şi respectiv teoremei funcţiilor implicite (la fel ca în cazul curbelor plane) şi arată că şi în spaţiu curbele pot fi reprezentate explicit şi implicit.

PROPOZIŢIA 9.14. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^n, $n \geq 1$, definite pe intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$. Atunci locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ cu $y = f(x)$ şi $z = g(x)$ este o curbă regulată (γ) (imaginea unei curbe regulate $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$) de clasă C^n şi reciproc, pentru orice curbă regulată de clasă C^n, $n \geq 1$,*

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in \widetilde{I},$$

şi pentru orice punct $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in (\gamma)$ cu $x'(t_0) \neq 0$, există intervalul deschis I, centrat în $x_0 = x(t_0)$ şi funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^n astfel încât $y = y(x) = f(x)$ şi $z = z(x) = g(x)$, pentru orice punct $M(x, y, z) \in (\gamma)$, $x \in I$.

DEFINIŢIA 9.27. Ecuaţiile $(\gamma) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$, $x \in I$, se numesc *ecuaţiile explicite* ale curbei.

OBSERVAŢIA 9.26. Deoarece derivatele funcţiilor x, y, z din ecuaţiile parametrice ale curbei regulate (γ) nu se pot anula simultan pentru nici un $t \in \widetilde{I}$, rezultă că trecerea de la ecuaţiile parametrice la cele explicite se poate face pe o vecinătate a oricărui punct de pe (γ).

EXEMPLUL 9.13. Fie curba $(\gamma) : \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = e^{2t} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Ecuaţiile explicite ale curbei sunt $(\gamma) : \begin{cases} y = f(x) = \frac{1}{x} \\ z = g(x) = x^2 \end{cases}$, $x > 0$.

PROPOZIŢIA 9.15. *Fie aplicaţiile $F, G : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde D este o mulţime deschisă, care îndeplinesc următoarele condiţii:*

(1) *sunt de clasă C^n, $n \geq 1$;*
(2) *avem*

$$(\nabla F \times \nabla G)(x, y, z) = \left| \begin{array}{ccc} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{array} \right|_{(x,y,z)} \neq \bar{0}, \quad \forall (x, y, z) \in D,$$

unde am notat $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$, $G_x = \frac{\partial G}{\partial x}$, $G_y = \frac{\partial G}{\partial y}$ şi $G_z = \frac{\partial G}{\partial z}$, iar $\nabla F(x, y, z) = F_x(x, y, z) \cdot \bar{i} + F_y(x, y, z) \cdot \bar{j} + F_z(x, y, z) \cdot \bar{k}$ şi $\nabla G(x, y, z) = G_x(x, y, z) \cdot \bar{i} + G_y(x, y, z) \cdot \bar{j} + G_z(x, y, z) \cdot \bar{k}$ sunt gradienţii aplicaţiilor F şi respectiv G.

Atunci locul geometric al punctelor $M(x,y,z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică $F(x,y,z)=0$ şi $G(x,y,z)=0$ este o curbă regulată (γ) (imaginea unei curbe regulate $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$) de clasă C^n şi reciproc, pentru orice curbă (γ) regulată de clasă C^n există aplicaţiile F şi G ca mai sus astfel încât $F(x,y,z)=0$ şi $G(x,y,z)$ pentru orice $M(x,y,z) \in (\gamma)$.

Definiţia 9.28. Ecuaţiile $(\gamma) : \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ se numesc *ecuaţiile implicite* ale curbei (γ).

Observaţia 9.27. Reprezentările parametrică, explicită şi implicită ale unei curbe regulate sunt echivalente local.

Observaţia 9.28. Condiţiile de regularitate pentru o curbă dată pe rând în cele trei reprezentări sunt:

- în toate reprezentările aplicaţiile care apar în diversele ecuaţii ale curbei să fie de clasă C^n;
- în reprezentarea parametrică derivatele funcţiilor coordonate nu trebuie să se anuleze simultan în nici un punct;
- în reprezentarea implicită $(\gamma) : \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ produsul vectorial al gradienţilor aplicaţiilor F şi G trebuie să fie diferit de vectorul nul, adică $\nabla F \times \nabla G \neq \bar{0}$;
- în reprezentarea parametrică $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in I$, aplicaţia $\bar{r}$ trebuie să fie injectivă.

Definiţia 9.29. Un punct al unei curbe (γ) pentru care există o vecinătate inclusă în (γ) pe care sunt îndeplinite condiţiile de regularitate se numeşte punct *ordinar* al curbei.

În final, considerăm curba γ reprezentată parametric

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Folosind coordonatele polare în spaţiu, ecuaţiile lui (γ) pot fi scrise:

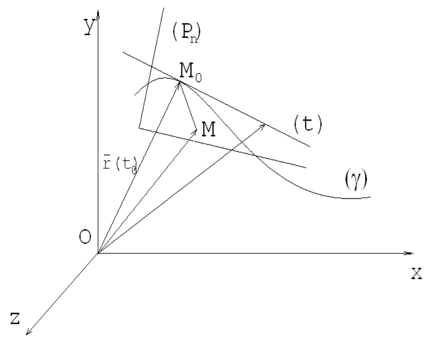
$$(\gamma) : \begin{cases} \rho = \rho(t) = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)} \\ \theta = \theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} \\ \varphi = \varphi(t) = \arccos \frac{z(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}} \end{cases}, \quad t \in I.$$

Aceste ecuaţii se numesc *ecuaţiile polare parametrice* ale curbei.

3.1. Tangenta şi planul normal la o curbă într-un punct ordinar. Fie curba $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in I$, de clasă C^n, $n \geq 1$, şi fie punctele $M_0(t_0) \in (\gamma)$, fixat, şi $M(t) \in (\gamma)$ care se deplasează pe curbă. Putem scrie $t = t_0 + (t - t_0) = t + \Delta t$, unde am notat $\Delta t = t - t_0$. Atunci vectorii de poziţie ai celor două puncte sunt $\bar{r}(t_0)$ şi respectiv $\bar{r}(t_0 + \Delta t)$. Presupunând că M_0 este un punct ordinar al curbei, rezultă că există

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \overrightarrow{M_0 M} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t} = \bar{r}'(t_0) \neq 0.$$

Definiţia 9.30. Dreapta (t) care trece prin punctul ordinar $M_0(t_0) \in (\gamma)$ şi are vectorul director $\bar{v} = \bar{r}'(t_0)$ se numeşte *tangentă* la curba (γ) în M_0, iar planul (P_n) care conţine M_0 şi este perpendicular pe (t) se numeşte *planul normal* la (γ) în M_0.



Dacă (γ) este reprezentată parametric, $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in I$ atunci tangenta în punctul ordinar $M_0(t_0)$ al curbei este dată de ecuaţia vectorială

$$(t) : \bar{r} = \bar{r}(t_0) + \lambda \cdot \bar{r}'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

iar ecuaţia vectorială a planului normal în M_0 este:

$$(P_n) : (\bar{r} - \bar{r}(t_0)) \cdot \bar{r}'(t_0) = 0.$$

Avem $\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}$ şi $\bar{r}'(t) = x'(t) \cdot \bar{i} + y'(t) \cdot \bar{j} + z'(t) \cdot \bar{k}$, de unde rezultă ecuaţiile parametrice ale tangentei la curbă în $M_0(t_0) = M(x_0, y_0, z_0)$:

$$(t) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot x'(t_0) \\ y = y_0 + \lambda \cdot y'(t_0) \\ z = z_0 + \lambda \cdot z'(t) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

şi apoi ecuaţiile sale canonice:

$$(t) : \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Ecuaţia planului normal la curbă în M_0 este

$$(P_n) : x'(t_0) \cdot (x - x(t_0)) + y'(t_0) \cdot (y - y(t_0)) + z'(t_0) \cdot (z - z(t_0)) = 0.$$

Dacă (γ) este dată explicit prin $(\gamma) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$, $x \in I$, atunci are ecuaţiile parametrice

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = f(t) \\ z = z(t) = g(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Atunci, în punctul ordinar al curbei $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\gamma)$ (unde $x_0 = t_0$) avem $x'(t_0) = 1$, $y'(t_0) = f'(t_0) = f'(x_0)$ şi $z'(t_0) = g'(t_0)$, deci ecuaţiile canonice ale tangentei (t) sunt:

$$(t) : x - x_0 = \frac{y - y_0}{f'(x_0)} = \frac{z - z_0}{g'(x_0)},$$

iar vectorul său normal este $\bar{v} = \bar{r}'(x_0) = \bar{i} + f'(x_0) \cdot \bar{j} + g'(x_0) \cdot \bar{k}$. Acesta este şi vectorul normal al planului normal în punctul M_0 şi, astfel, ecuaţia acestuia va fi

$$(P_n) : x - x_0 + f'(x_0) \cdot (y - y_0) + g'(x_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Acum presupunem că (γ) este determinată implicit

$$(\gamma) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

şi că în punctul ordinar al curbei $M(x_0, y_0, z_0)$ avem

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) = \left| \begin{array}{cc} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{array} \right|_0 = \left| \begin{array}{cc} F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ G_y(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{array} \right| \neq 0$$

(M_0 fiind punct ordinar avem oricum $(\nabla F \times \nabla G)(x_0, y_0, z_0) \neq \bar{0}$). Conform teoremei funcţiilor implicite rezultă că pe o vecinătate a punctului M_0 curba poate fi reprezentată explicit $(\gamma) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, x \in I$, unde $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^n, iar I este un interval deschis $I \subset \mathbb{R}$ centrat în x_0, şi, în plus, $F(x, f(x), g(x)) = 0$, $G(x, f(x), g(x)) = 0$, pentru $x \in I$. Derivând în raport cu x aceste ultime două ecuaţii, avem:

$$\begin{cases} F_x(x, y, z) + F_y(x, y, z) f'(x) + F_z(x, y, z) g'(x) = 0 \\ G_x(x, y, z) + G_y(x, y, z) f'(x) + G_z(x, y, z) g'(x) = 0 \end{cases}.$$

În punctul M_0, obţinem

$$f'(x_0) = -\frac{\left| \begin{array}{cc} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{array} \right|_0}{\left| \begin{array}{cc} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{array} \right|_0} \quad \text{şi} \quad g'(x_0) = \frac{\left| \begin{array}{cc} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{array} \right|_0}{\left| \begin{array}{cc} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{array} \right|_0},$$

şi atunci ecuaţiile canonice ale tangentei în M_0 la curba (γ) sunt

$$(t) : \frac{x - x_0}{\left| \begin{array}{cc} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{array} \right|_0} = \frac{y - y_0}{\left| \begin{array}{cc} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{array} \right|_0} = \frac{z - z_0}{\left| \begin{array}{cc} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{array} \right|_0},$$

iar ecuaţia planului normal la curbă în M_0 este

$$(P_n) : \left| \begin{array}{cc} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{array} \right|_0 (x - x_0) + \left| \begin{array}{cc} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{array} \right|_0 (y - y_0) + \left| \begin{array}{cc} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{array} \right|_0 (z - z_0) = 0.$$

Exemplul 9.14. Să se determine ecuaţiile dreptelor tangente şi ecuaţia planului normal la curbele următoare în punctele precizate:

$$(1)\ (\gamma):\begin{cases} x=t\\ y=t^2\\ z=t^3\end{cases},\ t\in\mathbb{R},\ M_0(1)=M_0(1,1,1)\in(\gamma);$$

$$(2)\ (\gamma):\begin{cases} y=x^2+1\\ z=e^x\end{cases},\ M_0(0,1,1)\in(\gamma);$$

$$(3)\ (\gamma):\begin{cases} x^2-2y^2+z^2=0\\ x+y=0\end{cases},\ M_0(1,-1,1)\in(\gamma).$$

(1) Avem funcţiile $x,y,z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x(t)=t$, $y(t)=t^2$, $z(t)=t^3$, cu $x'(t)=1$, $y'(t)=2t$, $z'(t)=3t^2$, de unde rezultă $x'(1)=1$, $y'(t)=2$ şi $z'(t)=3$. Atunci dreapta tangentă la curbă în punctul $M_0(1,1,1)$ este dată de ecuaţiile canonice

$$(t):\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3},$$

iar planul normal în M_0 are ecuaţia

$$(P_n):(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0\Leftrightarrow(P_n):x+2y+3z-6=0.$$

(2) Definim funţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin $f(x)=x^2+1$ şi $g(x)=e^x$. Rezultă $f'(x)=2x$, $g'(x)=e^x$, deci în $x=0$ obţinem $f'(0)=0$ şi $g'(0)=1$. Astfel ecuaţiile tangentei la (γ) prin punctul $M_0(0,1,1)$ sunt

$$(t):\begin{cases} x=z-1\\ y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow(t):\begin{cases} x-z+1=0\\ y-1=0\end{cases}.$$

Ecuaţia planului normal în M_0 la curbă este

$$(P_n):x+z-1=0.$$

(3) Avem aplicaţiile $F,G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2$, $G(x,y,z)=x+y$, care definesc curba (γ). Atunci gradienţii acestor aplicaţii sunt

$$\nabla F(x,y,z)=F_x\cdot\bar{i}+F_y\cdot\bar{j}+F_z\cdot\bar{k}=2x\cdot\bar{i}-4y\cdot\bar{j}+2z\cdot\bar{k}$$

şi, respectiv,

$$\nabla G(x,y,z)=G_x\cdot\bar{i}+G_y\cdot\bar{j}+G_z\cdot\bar{k}=\bar{i}+\bar{j}.$$

Astfel, obţinem, în punctul $M_0(1,-1,1)$,

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(1,-1,1)=\begin{vmatrix} F_y(1,-1,1) & F_z(1,-1,1)\\ G_y(1,-1,1) & G_z(1,-1,1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Avem şi

$$\begin{vmatrix} F_z(1,-1,1) & F_x(1,-1,1)\\ G_z(1,-1,1) & G_x(1,-1,1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} F_x(1,-1,1) & F_y(1,-1,1)\\ G_x(1,-1,1) & G_y(1,-1,1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2.$$

Ecuaţiile canonice ale tangentei la curbă în M_0 sunt

$$(t):\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2},$$

iar ecuaţia planului normal în M_0 este

$$(P_n):-2(x-1)+2(y+1)-2(z-1)=0\Leftrightarrow(P_n):-2x+2y-2z+6=0.$$

3.2. Lungimea unui arc de curbă în spaţiu. Parametrizarea naturală a unei curbe. Fie curba simplă de clasă C^n, $n \geq 1$, dată prin ecuaţiile explicite

$$(\gamma) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, \quad x \in I.$$

Pentru deducerea formulei de calcul a lungimii unui arc de curbă în spaţiu folosim acelaşi procedeu ca în cazul curbelor plane. Pentru început considerăm arcul de curbă

$$(\widehat{AB}) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, \quad x \in [a, b] \subset I,$$

unde $A(a, f(a), g(a))$ şi $B(b, f(b), g(b))$, şi fie diviziunea

$$\Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$$

a intervalului $[a, b]$ şi punctele corespunzătoare

$$A = A_0(x_0, f(x_0), g(x_0)),\ A_1(x_1, f(x_1), g(x_1)), \ldots,\ A_n(x_n, f(x_n), g(x_n)) = B$$

de pe arcul de curbă. Norma diviziunii Δ este

$$\|\Delta\| = \max_{k=\overline{0,n-1}} |x_{k+1} - x_k|,$$

iar lungimea arcului de curbă va fi dată de

$$l_{\widehat{AB}} = \lim_{n\to\infty, \|\Delta\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{A_k A_{k+1}}\|. \tag{9.6}$$

Pentru orice $k = \overline{0, n-1}$, avem

$$\|\overrightarrow{A_k A_{k+1}}\| = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2 + (g(x_{k+1}) - g(x_k))^2}$$

şi, conform teoremei lui Lagrange aplicată funcţiilor f şi g pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$,

$$\exists\ \xi_k \in (x_k, x_{k+1}) \quad \text{astfel încât} \quad f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

şi

$$\exists\ \eta_k \in (x_k, x_{k+1}) \quad \text{astfel încât} \quad g(x_{k+1}) - g(x_k) = g'(\eta_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Pe de altă parte, dacă $\|\Delta\| \to 0$ atunci $|\eta_k - \xi_k| \to 0$, $\forall k \in \overline{0, n-1}$, şi, cum funcţia g' este continuă pe intervalul deschis (a, b), rezultă $|g'(\eta_k) - g'(\xi_k)| \to 0$, $\forall k \in \overline{0, n-1}$. Prin urmare, putem scrie

$$l_{\widehat{AB}} = \lim_{n\to\infty, \|\Delta\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2 + (g'(\xi_k))} \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

Definim funcţia continuă $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ prin $h(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2 + (g'(x))^2}$. Atunci suma Riemann asociată funcţiei h, diviziunii Δ a intervalului $[a, b]$ şi sistemului de puncte $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ este

$$\begin{aligned} S(h, \Delta, \xi) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} h(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2 + (g'(\xi_k))^2} \cdot (x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

Deoarece funcţia h este integrabilă pe intervalul $[a,b]$ avem

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2+(g'(x))^2}dx = \lim_{n\to\infty, \|\Delta\|\to 0} S(g,\Delta,\xi).$$

Astfel formula de calcul pentru lungimea arcului de curbă $(\widehat{AB}) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$, $x \in [a,b]$, este

$$l_{(\widehat{AB})} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2+(g'(x))^2}dx.$$

Definiţia 9.31. Definim *elementul de arc* al curbei (γ) prin

$$ds = \sqrt{1+(f'(x))^2+(g'(x))^2}dx.$$

Observaţia 9.29. Formula lungimii arcului de curbă $(\widehat{AB})$ se poate scrie cu ajutorul unei integrale curbilinii de speţa I astfel:

$$l_{(\widehat{AB})} = \int_{(\widehat{AB})} ds.$$

Exemplul 9.15. Să se calculeze lungimea arcului de curbă

$$(\widehat{AB}) : \begin{cases} y = \sin\ x \\ z = \cos x \end{cases}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Avem

$$\begin{aligned} l_{\widehat{AB}} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(f'(x))^2+(g'(x))^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x + \sin^2 x}dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi. \end{aligned}$$

Mai departe, să presupunem că (γ) este dată prin ecuaţiile sale parametrice

$$(\widehat{AB}) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [t_1, t_2],$$

unde $x(t_1) = a$ şi $x(t_2) = b$. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $x'(t) \neq 0$, $t \in [t_1, t_2]$, şi atunci putem trece la reprezentarea explicită a curbei. Avem, pentru arcul de curbă:

$$(\widehat{AB}) : \begin{cases} y = f(x) = (y \circ t)(x) \\ z = g(x) = (z \circ t)(x) \end{cases}, \quad x \in [a,b],$$

unde $t : [a,b] \to [t_1, t_2]$ este inversa funcţiei $x : [t_1, t_2] \to [a,b]$, despre care ştim că există, conform teoremei de inversare locală. Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$f'(x) = \frac{dy}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

şi

$$g'(x) = \frac{dz}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x) = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}(t) = \frac{z'(t)}{x'(t)},$$

pentru $x = x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Cum diferenţiala funcţiei $x : [t_1, t_2] \to [a, b]$ este $dx = x'(t)dt$, atunci elementul de arc al curbei (γ) va fi dat de

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + (f'(x))^2 + (g'(x))^2}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2 + \left(\frac{z'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t)dt \\ &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt, \end{aligned}$$

iar lungimea arcului de curbă este

$$l_{(\widehat{AB})} = \int_{(\widehat{AB})} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Dacă $\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}$ este vectorul de poziţie al unui punct oarecare de pe arcul de curbă, atunci

$$l_{(\widehat{AB})} = \int_{t_1}^{t_2} \|\bar{r}'(t)\| dt$$

şi $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\bar{r}^2$, ca şi în cazul curbelor în plan.

Exemplul 9.16. Să se determine lungimea arcului de curbă

$$(\widehat{AB}) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Avem $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$, $z'(t) = 1$, de unde obţinem elementul de arc al curbei: $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}dt = \sqrt{2}dt$, iar lungimea arcului de curbă este $l_{(\widehat{AB})} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

Dacă (γ) este reprezentată implicit, atunci

$$(\widehat{AB}) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}, \quad x \in [a, b].$$

Presupunem că $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x, y, z) = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{(x,y,z)} \neq 0$, pentru orice punct $M(x, y, z) \in (\widehat{AB})$ şi, conform teoremei funcţiilor implicite, putem trece la reprezentarea explicită a arcului de curbă

$$(\widehat{AB}) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, \quad x \in [a, b],$$

cu $F(x, f(x), g(x)) = 0$ şi $G(x, f(x), g(x)) = 0$. La fel ca în secţiunea precedentă, obţinem

$$f'(x) = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{(x,y,z)}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{(x,y,z)}} \quad \text{şi} \quad g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{(x,y,z)}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{(x,y,z)}}.$$

Elementul de arc al curbei este

$$ds = \frac{\sqrt{\left(\left|\begin{array}{cc} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{array}\right|_{(x)}\right)^2 + \left(\left|\begin{array}{cc} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{array}\right|_{(x)}\right)^2 + \left(\left|\begin{array}{cc} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{array}\right|_{(x)}\right)^2}}{\left|\left|\begin{array}{cc} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{array}\right|_{(x)}\right|} dx,$$

unde am folosit notaţia $\left|\begin{array}{cc} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{array}\right|_{(x)} = \left|\begin{array}{cc} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{array}\right|_{(x,f(x),g(x))}$ şi notaţiile similare pentru ceilalţi determinanţi funcţionali. Prin urmare, lungimea arcului de curbă este

$$l_{(\widehat{AB})} = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\left|\begin{array}{cc} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{array}\right|_{(x)}\right)^2 + \left(\left|\begin{array}{cc} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{array}\right|_{(x)}\right)^2 + \left(\left|\begin{array}{cc} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{array}\right|_{(x)}\right)^2}}{\left|\left|\begin{array}{cc} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{array}\right|_{(x)}\right|} dx.$$

Ca şi în plan, pentru o curbă simplă de clasă C^n, $n \geq 1$, dată de parametrizarea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, ale cărei ecuaţii parametrice sunt

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t), \quad t \in I \Leftrightarrow (\gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I,$$

putem defini funcţia lungime de arc $s : I \to \mathbb{R}$ prin

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\bar{r}'(u)\| du = \begin{cases} l_{(\widehat{M_0M})} & \text{dacă } t \geq t_0 \\ -l_{(\widehat{M_0M})} & \text{dacă } t < t_0 \end{cases},$$

unde $M_0(t_0)$ este un punct de pe curbă. Elementul de arc al curbei (γ) este $ds = s'(t)dt = \|\bar{r}'(t)\|dt$.

Deoarece $s'(t) = \frac{ds}{dt} = \|\bar{r}'(t)\| \neq 0$, conform teoremei de inversare locală, există, pentru fiecare $t \in I$, un interval $I_0 \subseteq I$ centrat în t astfel încât $s : I_0 \to s(I_0)$ este inversabilă de clasă C^n. Notăm inversa cu $\varphi : s(I_0) \to I_0$ şi rezultă că $\beta = \alpha \circ \varphi$ este o nouă parametrizare a curbei (γ) în care parametrul este lungimea de arc. Am obţinut *parametrizarea naturală* a unei curbe în spaţiu: $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s)$.

Notaţie. Ca şi în cazul curbelor plane, vom nota derivatele aplicaţiilor care definesc curba astfel: $\dot{\bar{r}}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds}$, $\dot{x}(s) = \frac{dx}{ds}$, $\dot{y}(s) = \frac{dy}{ds}$, etc.

Observaţia 9.30. Pentru orice curbă în spaţiu, parametrizată prin lungimea de arc, avem $\|\dot{\bar{r}}(s)\| = \|\frac{d\bar{r}}{ds}(s)\| = 1$.

3.3. Reperul lui Frenet. Formulele lui Frenet. Fie curba simplă de clasă C^n, $n \geq 3$, parametrizată natural

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s), \quad s \in I.$$

Versorul tangent la curbă într-un punct $M(s) \in (\gamma)$ este $\bar{T}(s) = \dot{\bar{r}}(s)$ şi putem defini aplicaţia $T : I \to \mathbb{V}^3$, cu proprietatea $\|\bar{T}(s)\| = 1$, deoarece, aşa cum am văzut anterior, $\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)^2 = 1$. Derivând relaţia $\bar{T}(s) \cdot \bar{T}(s) = 1$, obţinem

$2 \cdot \bar{T}(s) \cdot \dot{\bar{T}}(s) = 0$, adică $T(s) = \dot{\bar{r}}(s) \perp \dot{\bar{T}}(s) = \ddot{\bar{r}}(s)$, oricare ar fi $s \in I$, adică vectorul $\ddot{\bar{r}}(s)$ este normal la curbă.

Definiţia 9.32. Un punct $M(s_0)$ al lui (γ) se numeşte *punct inflexionar* al curbei dacă $\ddot{\bar{r}}(s_0) = \bar{0}$. În caz contrar punctul se numeşte *neinflexionar*.

Observaţia 9.31. Dacă trecem de la parametrizarea naturală la o parametrizare oarecare a curbei $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in J$. Într-un punct oarecare $M(t)$ al curbei, cu $s(t) = s$, avem

$$\ddot{\bar{r}}(s) = \bar{r}''(t) \cdot \left(\frac{dt}{ds}(s)\right)^2 + \bar{r}'(t) \cdot \frac{d^2t}{ds^2}(s),$$

de unde rezultă că $\ddot{\bar{r}}(s) = 0$ dacă şi numai dacă vectorii $\bar{r}'(t)$ şi $\bar{r}''(t)$ sunt coliniari, adică dacă şi numai dacă $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \bar{0}$.

Astfel, dacă o curbă este dată printr-o parametrizare arbitrară, atunci un punct $M(t_0)$ al curbei este punct inflexionar dacă şi numai dacă $\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0) = 0$.

Definiţia 9.33. Funcţia $\kappa : I \to \mathbb{R}$ definită prin $\kappa(s) = \|\ddot{\bar{r}}(s)\|$, de clasă C^{n-2}, se numeşte *funcţia curbură* a curbei (γ), iar valoarea ei într-un punct al curbei se numeşte *curbura* lui (γ) în acel punct.

Observaţia 9.32. În acest subcapitol, pentru simplificarea calculelor, considerăm $\kappa(s) > 0$, $\forall s \in I$. Vom vedea, în continuare, că acest fapt nu reduce generalitatea studiului pe care îl vom efectua.

Definiţia 9.34. Valoarea aplicaţiei $R_\kappa : I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, definită prin $R_\kappa(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$, într-un punct al curbei (γ) se numeşte raza de curbură a curbei în acel punct.

Observaţia 9.33. Este evident că un punct $M(s_0)$ al curbei (γ) este inflexionar dacă şi numai dacă în acest punct funcţia curbură se anulează, adică dacă şi numai dacă $\kappa(s_0) = 0$.

De acum înainte, în această secţiune, vom presupune că pe curba (γ) nu există puncte inflexionare.

Putem defini aplicaţia $\bar{N} : I \to \mathbb{V}^3$, de clasă C^{n-2}, prin $\bar{N}(s) = \frac{1}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|} \cdot \ddot{\bar{r}}(s)$. Rezultă că $\|\bar{N}(s)\| = 1$ şi că $\bar{N}(s)$ este un vector normal la curbă pentru orice $s \in I$.

Definiţia 9.35. Dreapta care trece prin $M(s) \in (\gamma)$ şi are ca vector director pe $\bar{N}(s)$ se numeşte *normala principală* la curbă în punctul M.

Definiţia 9.36. Planul determinat de tangenta şi de normala principală la curba (γ) în punctul $M_0(s_0) \in (\gamma)$ se numeşte *planul osculator* al curbei în M_0.

Propoziţia 9.16. *Ecuaţia planului osculator al curbei (γ) în punctul $M_0(s_0)$ are ecuaţia vectorială*

$$(P_o) : (\bar{r} - \bar{r}(s_0), \dot{\bar{r}}(s_0), \ddot{\bar{r}}(s_0)) = 0.$$

În continuare, considerăm aplicaţia $\bar{B} : I \to \mathbb{V}^3$, de clasă C^{n-2}, definită prin $\bar{B}(s) = \frac{1}{\|\bar{T}(s)\times\bar{N}(s)\|} \cdot (\bar{T}(s) \times \bar{N}(s))$, adică

$$\bar{B}(s) = \frac{1}{\|\dot{\bar{r}}(s) \times \ddot{\bar{r}}(s)\|} \cdot (\dot{\bar{r}}(s) \times \ddot{\bar{r}}(s)) = \frac{1}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|} \cdot (\dot{\bar{r}}(s) \times \ddot{\bar{r}}(s)),$$

deoarece $\|\dot{\bar{r}}(s)\times\ddot{\bar{r}}(s)\| = \|\dot{\bar{r}}(s)\|\cdot\|\ddot{\bar{r}}(s)\|\cdot\sin(\widehat{\dot{\bar{r}}(s), \ddot{\bar{r}}(s)}) = \|\ddot{\bar{r}}(s)\|$. Avem imediat $\|\bar{B}(s)\| = 1$ şi vectorul $\bar{B}(s)$ aparţine planului normal la curbă în punctul $M(s)$, deoarece $\dot{\bar{r}}(s) \cdot (\dot{\bar{r}}(s) \times \ddot{\bar{r}}(s)) = 0$. Mai mult, avem şi $\ddot{\bar{r}}(s) \cdot (\dot{\bar{r}}(s) \times \ddot{\bar{r}}(s)) = 0$, deci $\bar{B}(s)$ este perpendicular şi pe $\bar{N}(s)$.

În concluzie, am obţinut câte un reper cartezian ortonormat orientat pozitiv $(M(s), \{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\})$, în orice punct $M(s)$ al curbei (γ), numit *reperul lui Frenet* în M.

Definiţia 9.37. Dreapta care trece prin $M(s) \in (\gamma)$ şi are ca vector director pe $\bar{B}(s)$ se numeşte *binormala* la curbă în punctul M.

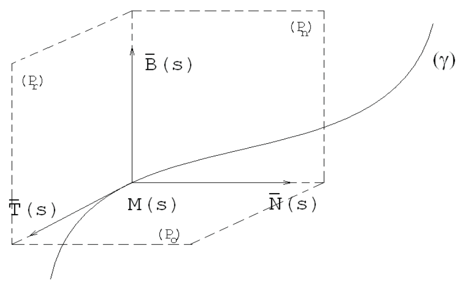
Observaţia 9.34. Versorul binormalei într-un punct al curbei este normal la planul osculator al curbei în acel punct.

Definiţia 9.38. Planul determinat de tangenta şi de binormala la curba (γ) în punctul $M_0(s_0) \in (\gamma)$ se numeşte *planul rectificator* al curbei în M_0.

Observaţia 9.35. Versorul normalei principale la curbă într-un punct al curbei este normal la planul rectificator în acel punct.

Propoziţia 9.17. *Ecuaţia planului rectificator al curbei* (γ) *în punctul* $M_0(s_0)$ *are ecuaţia vectorială*

$$(P_r) : (\bar{r} - \bar{r}(s_0), \dot{\bar{r}}(s_0), \dot{\bar{r}}(s_0) \times \ddot{\bar{r}}(s_0)) = 0.$$



În continuare vom deduce expresiile derivatelor aplicaţiilor $\bar{T}$, $\bar{N}$ şi $\bar{B}$ în baza ortonormată a reperului Frenet pentru curba (γ). Mai întâi avem

$$\dot{\bar{T}}(s) = \ddot{\bar{r}}(t) = \|\ddot{\bar{r}}(s)\| \cdot \bar{N}(s) = \kappa(s) \cdot \bar{N}(s).$$

Fie $\dot{\bar{N}}(s) = n_1(s) \cdot \bar{T}(s) + n_2 \cdot \bar{N}(s) + n_3 \cdot \bar{B}(s)$, unde $n_1(s) = \dot{\bar{N}}(s) \cdot \bar{T}(s)$, $n_2(s) = \dot{\bar{N}}(s) \cdot \bar{N}(s)$, $n_3(s) = \dot{\bar{N}}(s) \cdot \bar{B}$, oricare ar fi $s \in I$, descompunerea vectorului $\dot{\bar{N}}(s)$ în baza reperului lui Frenet în punctul $M(s) \in (\gamma)$. Derivând relaţia $\bar{N}(s) \cdot \bar{N}(s) = 1$, rezultă $2 \cdot \bar{N}(s) \cdot \dot{\bar{N}}(s) = 0$, adică $\dot{\bar{N}}(s) \perp N(s)$, şi $n_2(s) = 0$, $\forall s \in I$. Pe de altă parte, derivând relaţia $\bar{T}(s) \cdot \bar{N}(s) = 0$, obţinem

$$\dot{\bar{T}}(s) \cdot \bar{N}(s) + \bar{T}(s) \cdot \dot{\bar{N}}(s) = 0,$$

de unde urmează

$$\kappa(s) \cdot \bar{N}(s) \cdot \bar{N}(s) + \bar{T}(s) \cdot \dot{\bar{N}}(s) = 0,$$

adică $n_1(s) = \bar{T}(s) \cdot \dot{\bar{N}}(s) = -\kappa(s)$. În final notăm $\tau(s) = n_3(s) = \dot{\bar{N}}(s) \cdot \bar{B}(s)$ şi putem scrie

$$\dot{\bar{N}}(s) = -\kappa(s) \cdot \bar{T}(s) + \tau(s) \cdot \bar{B}(s), \quad \forall s \in I.$$

Definiţia 9.39. Funcţia $\tau : I \to \mathbb{R}$ definită prin $\tau(s) = \dot{\bar{N}}(s) \cdot \bar{B}(s) = -\bar{N}(s) \cdot \dot{\bar{B}}(s)$ se numeşte *funcţia torsiune* a curbei (γ), iar valoarea ei într-un punct al curbei se numeşte *torsiunea* lui (γ) în acel punct.

Propoziţia 9.18. *Funcţia torsiune a curbei* (γ) *este dată de expresia* $\tau(s) = \frac{(\dot{\bar{r}}(s), \ddot{\bar{r}}(s), \dddot{\bar{r}}(s))}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|^2}$.

Demonstraţie. Derivând expresia lui $\bar{N}(s) = \frac{1}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|} \cdot \ddot{\bar{r}}(s)$ obţinem $\dot{\bar{N}}(s) = \frac{1}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|} \cdot \dddot{\bar{r}}(s) - \frac{\ddot{\bar{r}}(s) \cdot \dddot{\bar{r}}(s)}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|^3} \cdot \ddot{\bar{r}}(s)$. Atunci

$$\tau(s) = \dot{\bar{N}}(s) \cdot \bar{B}(s) = \frac{1}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|^2} \cdot \dddot{\bar{r}}(s) \cdot (\dot{\bar{r}}(s) \times \ddot{\bar{r}}(s)) = \frac{(\dot{\bar{r}}(s), \ddot{\bar{r}}(s), \dddot{\bar{r}}(s))}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|^2}.$$

□

Definiţia 9.40. Valoarea aplicaţiei $R_\tau : I \to \mathbb{R}$, definită prin $R_\tau(s) = \frac{1}{\tau(s)}$, într-un punct al curbei (γ), se numeşte *raza de torsiune* a curbei în acel punct.

Vectorul $\dot{\bar{B}}(s)$ se descompune în baza reperului lui Frenet în fiecare punct al curbei astfel: $\dot{\bar{B}}(s) = b_1 \cdot \bar{T}(s) + b_2 \cdot \bar{N}(s) + b_3 \cdot \bar{B}(s)$, unde $b_1 = \dot{\bar{B}}(s) \cdot \bar{T}(s)$, $b_2 = \dot{\bar{B}}(s) \cdot \bar{N}(s)$, $b_3 = \dot{\bar{B}}(s) \cdot \bar{B}(s)$. Din $\bar{T}(s) \cdot \bar{B}(s) = 0$, prin derivare, rezultă

$$\dot{\bar{T}}(s) \cdot \bar{B}(s) + \bar{T}(s) \cdot \dot{\bar{B}}(s) = 0,$$

de unde

$$b_1(s) = \bar{T}(s) \cdot \dot{\bar{B}}(s) = -\dot{\bar{T}}(s) \cdot \bar{B}(s) = -\kappa(s) \cdot \bar{N} \cdot \bar{B} = 0.$$

Prin derivarea relaţiei $\bar{B}(s) \cdot \bar{B}(s) = 1$, obţinem $b_3(s) = \bar{B}(s) \cdot \dot{\bar{B}}(s) = 0$. Ţinând cont de faptul că, aşa cum am văzut mai sus, $b_2(s) = \dot{\bar{B}}(s) \cdot \bar{N}(s) = -\bar{B}(s) \cdot \dot{\bar{N}}(s) = -\tau(s)$, avem

$$\dot{\bar{B}}(s) = -\tau(s) \cdot \bar{N}(s), \quad \forall s \in I.$$

În concluzie, am obţinut *formulele lui Frenet* pentru o curbă în spaţiu:

$$\begin{cases} \dot{\bar{T}}(s) = \kappa(s) \cdot \bar{N}(s) \\ \dot{\bar{N}}(s) = -\kappa(s) \cdot \bar{T}(s) + \tau(s) \cdot \bar{B}(s) \\ \dot{\bar{B}}(s) = -\tau(s) \cdot \bar{N}(s) \end{cases},$$

unde curbura şi torsiunea curbei într-un punct neinflexionar al acesteia sunt date de $\kappa(s) = \|\ddot{\bar{r}}(s)\|$ şi respectiv $\tau(s) = \frac{(\dot{\bar{r}}(s), \ddot{\bar{r}}(s), \dddot{\bar{r}}(s))}{\|\ddot{\bar{r}}(s)\|^2}$.

Avem următoarea teoremă, pe care o vom da fără demonstraţie (pentru demonstraţie vezi [**7**] sau [**10**]).

Teorema 9.19. (Teorema fundamentală a teoriei curbelor în spaţiu)
Fiind date două funcţii $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ continue pe intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, un punct M_0 şi o dreaptă (d_0) care trece prin M_0, atunci există şi este unică o curbă regulată $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s),\ s \in I$, de clasă C^n, $n \geq 3$, parametrizată prin lungimea de arc, astfel încât

(1) *(γ) să treacă prin M_0 şi parametrul pe curbă corespunzător acestui punct să fie $s_0 = 0$;*
(2) *dreapta (d_0) să fie tangentă la curbă în M_0;*
(3) *funcţia curbură a curbei (γ) să fie $\kappa : I \to \mathbb{R}$, iar funcţia torsiune să fie $\tau : I \to \mathbb{R}$.*

Definiţia 9.41. Ecuaţiile $\kappa = \kappa(s)$ şi $\tau = \tau(s)$, $s \in I$, se numesc *ecuaţiile intrinseci* ale curbei (γ).

Observaţia 9.36. Ca şi în cazul curbelor plane, din teorema de mai sus rezultă că funcţiile curbură şi torsiune determină o curbă până la o deplasare (o translaţie compusă cu o rotaţie) în spaţiu.

3.4. Reperul lui Frenet pentru o curbă dată printr-o parametrizare arbitrară. Fie curba simplă de clasă C^n, $n \geq 3$, dată printr-o parametrizare arbitrară

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{j}, \quad t \in J.$$

Am văzut că, în acest caz, punctele inflexionare ale curbei sunt cele pentru care $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \bar{0}$. În continuare presupunem că nu există astfel de puncte pe (γ).

Trecem la parametrizarea naturală a curbei şi avem $\bar{r} = \bar{r}(s),\ s \in I$, unde $s : J \to I$, $s = s(t)$, este funcţia lungime de arc, cu inversa $t : I \to J$, cu proprietatea $\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t)}$, pentru $s = s(t)$. Avem

$$\frac{ds}{dt}(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \|\bar{r}'(t)\|, \quad \frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|},$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}(s) = \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|}\Big) = -\frac{\bar{r}'(t) \cdot \bar{r}''(t)}{\|\bar{r}'(t)\|^4},$$

şi, folosind regula de derivare a funcţiilor compuse, obţinem

$$\dot{\bar{r}}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds}(s) = \frac{d\bar{r}}{dt}(t) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|} \cdot \bar{r}'(t)$$

şi

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{r}}(s) &= \tfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}(t)\cdot\left(\tfrac{dt}{ds}(s)\right)^2+\tfrac{d\bar{r}}{dt}(t)\cdot\tfrac{d^2t}{ds^2}(s)=\tfrac{1}{\|\bar{r}'(t)\|^2}\cdot\bar{r}''(t)-\tfrac{\bar{r}'(t)\cdot\bar{r}''(t)}{\|\bar{r}'(t)\|^4}\cdot\bar{r}'(t)\\ &= \tfrac{1}{\|\bar{r}'(t)\|^4}\cdot[(\bar{r}'(t)\cdot\bar{r}'(t))\cdot\bar{r}''(t)-(\bar{r}'(t)\cdot\bar{r}''(t))\cdot\bar{r}'(t)]\\ &= \tfrac{1}{\|\bar{r}'(t)\|^4}\cdot(\bar{r}'(t)\times(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t))).\end{aligned}$$

Astfel, versorul tangent la curbă, într-o parametrizare arbitrară, este

$$\bar{T}(t)=\frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|}\cdot\bar{r}'(t),$$

versorul normalei principale este

$$\bar{N}(t)=\frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|\cdot\|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)\|}\cdot(\bar{r}'(t)\times(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)),$$

deoarece

$$\|\bar{r}'(t)\times(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t))\|=\|\bar{r}'(t)\|\cdot\|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)\|\cdot\sin(\widehat{\bar{r}'(t),(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)})$$

şi $\bar{r}'(t)\perp(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t))$, iar versorul binormalei este

$$\bar{B}(t)=\bar{T}(t)\times\bar{N}(t)=\frac{1}{\|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)\|}\cdot(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)).$$

Cum versorul $\bar{B}(t_0)$ este normal la planul osculator al curbei în punctul $M_0(t_0)\in(\gamma)$, rezultă că ecuaţia acestui plan poate fi scrisă

$$(P_o):(\bar{r}-\bar{r}(t_0),\bar{r}'(t_0),\bar{r}''(t_0))=0.$$

Ecuaţia planului rectificator al curbei în $M(t_0)$ este

$$(P_r):(\bar{r}-\bar{r}(t_0),\bar{r}'(t_0),\bar{r}'(t_0)\times\bar{r}''(t_0))=0.$$

În continuare vom găsi expresiile funcţiilor curbură $\kappa:J\to\mathbb{R}$ şi torsiune $\tau:J\to\mathbb{R}$ ale curbei. Mai întâi avem

$$\kappa(t)=\frac{\|\bar{r}'(t)\times(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t))\|}{\|\bar{r}'(t)\|^4}=\frac{\|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)\|}{\|\bar{r}'(t)\|^3}.$$

Pentru a obţine funcţia torsiune vom calcula, pentru început,

$$\dddot{\bar{r}}(s)=\bar{r}'''(t)\cdot\left(\frac{dt}{ds}(s)\right)^3+3\cdot\bar{r}''(t)\cdot\frac{dt}{ds}(s)\cdot\frac{d^2t}{ds^2}(s)+\bar{r}'(t)\cdot\frac{d^3t}{ds^3}(s).$$

Apoi avem

$$\dot{\bar{r}}(s)\times\dddot{\bar{r}}(s)=\frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|}\cdot\Big[\Big(\frac{dt}{ds}(s)\Big)^3\cdot(\bar{r}'(t)\times\bar{r}'''(t))+3\cdot\frac{dt}{ds}(s)\cdot\frac{d^2t}{ds^2}(s)\cdot(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t))\Big]$$

şi, folosind expresia lui $\ddot{\bar{r}}(s)$ calculată anterior,

$$\begin{aligned}(\ddot{\bar{r}}(s),\dot{\bar{r}}(s),\dddot{\bar{r}}(s)) &= \ddot{\bar{r}}(s)\cdot(\dot{\bar{r}}(s)\times\dddot{\bar{r}}(s))=\tfrac{1}{\|\bar{r}'(t)\|^6}\cdot[\bar{r}''(t)\cdot(\bar{r}'(t)\times\bar{r}'''(t))]\\ &= \tfrac{1}{\|\bar{r}'(t)\|^6}\cdot(\bar{r}''(t),\bar{r}'(t),\bar{r}'''(t)),\end{aligned}$$

deci $(\dot{\bar{r}}(s), \ddot{\bar{r}}(s), \dddot{\bar{r}}(s)) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|^6} \cdot (\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t))$. Înlocuind în expresia torsiunii din cazul parametrizării naturale şi ţinând cont că $\|\dot{\bar{r}}(s)\| = \frac{\|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)\|}{\|\bar{r}'(t)\|^3}$ obţinem

$$\tau(t) = \frac{(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t))}{\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\|}.$$

Următoarele două rezultate pun în evidenţă interpretările geometrice ale curburii şi torsiunii.

PROPOZIŢIA 9.20. *Funcţia curbură a unei curbe γ se anulează identic dacă şi numai dacă γ este o dreaptă.*

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" Fie curba $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s),\ s \in I$, de clasă C^n, $n \geq 2$, parametrizată prin lungimea de arc, având funcţia curbură $\kappa : I \to \mathbb{R}$, $\kappa(s) = 0$, $\forall s \in I$. Rezultă că $\|\ddot{\bar{r}}(s)\| = 0$, de unde urmează $\ddot{\bar{r}}(s) = \bar{0}$, adică $\bar{T}(s) = \dot{\bar{r}}(s) = \bar{v} = $ constant. Astfel, obţinem ecuaţia vectorială a curbei $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s) = \bar{r}_0 + s \cdot \bar{v},\ s \in I$, unde $\bar{r}_0$ este un vector constant, şi, prin urmare, (γ) este o dreaptă.

"$\Leftarrow$" Dacă avem o dreaptă (γ) dată prin ecuaţia vectorială $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s) = \bar{r}_0 + s \cdot \bar{v}$, unde $\bar{r}_0$ şi $\bar{v}$ sunt vectori constanţi, atunci rezultă imediat $\ddot{\bar{r}}(s) = 0$, deci $\kappa(s) = 0$, $\forall s \in I$. □

PROPOZIŢIA 9.21. *Funcţia torsiune a unei curbe γ se anulează identic dacă şi numai dacă γ este inclusă într-un plan (este o curbă plană).*

DEMONSTRAŢIE. "$\Leftarrow$" Fie (γ) o curbă de clasă C^n, $n \geq 3$, inclusă într-un plan (P). Schimbăm reperul în spaţiu astfel încât planul (P) să fie planul de coordonate $(x'O'y')$ corespunzător noului reper. Atunci ecuaţia vectorială a curbei devine $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j},\ t \in J$, şi avem

$$(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)) = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \\ x'''(t) & y'''(t) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\tau(t) = 0$, $\forall t \in J$.

"$\Rightarrow$" Dacă (γ) este o curbă de clasă C^n, $n \geq 3$, parametrizată prin lungimea de arc, a cărei torsiune se anulează în toate punctele curbei, atunci, din ultima ecuaţie a lui Frenet, avem $\dot{\bar{B}}(s) = 0$ în orice punct al curbei. Astfel versorul binormalei $\bar{B}(s)$ este un vector constant. Cum $\bar{B}(s)$ este normal la planul osculator al curbei în punctul oarecare $M(s)$ al acesteia, rezultă că în orice punct al lui (γ) avem acelaşi plan osculator. În concluzie, curba este inclusă în întregime în acest plan, adică este o curbă plană. □

EXEMPLUL 9.17. Să se determine vectorii reperului lui Frenet şi expresiile curburii şi torsiunii curbei

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t) = e^t \cdot \bar{i} + e^{-t} \cdot \bar{j} + (t^2 + 1) \cdot \bar{k}, \quad t \in \mathbb{R},$$

în punctul $M_0(t_0 = 0) = M_0(1, 1, 1) \in (\gamma)$.

Avem

$$\bar{r}'(t) = e^t \cdot \bar{i} - e^{-t} \cdot \bar{j} + 2t \cdot \bar{k}, \quad \bar{r}''(t) = e^t \cdot \bar{i} + e^{-t} \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}, \quad \bar{r}'''(t) = e^t \cdot \bar{i} - e^{-t} \cdot \bar{j},$$

iar în punctul M_0 obţinem

$$\bar{r}'(0) = \bar{i} - \bar{j}, \quad \bar{r}''(0) = \bar{i} + \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}, \quad \bar{r}'''(0) = \bar{i} - \bar{j}.$$

Mai întâi, deoarece

$$\bar{r}'(0) \times \bar{r}''(0) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k} \neq \bar{0},$$

rezultă că M_0 este un punct neinflexionar al curbei. Versorii reperului lui Frenet sunt

$$\bar{T}(0) = \tfrac{1}{\|\bar{r}'(0)\|} \cdot \bar{r}'(0) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\bar{i} - \bar{j}),$$

$$\bar{N}(0) = \tfrac{1}{\|\bar{r}'(0)\| \cdot \|\bar{r}'(0) \times \bar{r}''(0)\|} \cdot (\bar{r}'(0) \times (\bar{r}'(0) \times \bar{r}''(0)) = \tfrac{\sqrt{6}}{6} \cdot (-\bar{i} - \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}),$$

$$\bar{B}(0) = \bar{T}(0) \times \bar{N}(0) = \tfrac{1}{\|\bar{r}'(0) \times \bar{r}''(0)\|} \cdot (\bar{r}'(0) \times \bar{r}''(0)) = \tfrac{\sqrt{12}}{6} \cdot (-\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}).$$

Ecuaţiile planelor normal, osculator şi rectificator ale curbei în punctul M_0 sunt respectiv:

$$(P_n) : \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (y - 1) = 0,$$

$$(P_o) : (\bar{r} - \bar{r}(0), \bar{r}'(0), \bar{r}''(0)) = 0 \Leftrightarrow (P_o) : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (P_o) : -2(x - 1) - 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

şi

$$(P_r) : (\bar{r} - \bar{r}(0), \bar{r}'(0), \bar{r}'(0) \times \bar{r}''(0)) = 0 \Leftrightarrow (P_r) : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (P_r) : -2(x - 1) - 2(y - 1) - 4(z - 1) = 0.$$

Curbura curbei (γ) în M_0 este

$$\kappa(0) = \frac{\|\bar{r}'(0) \times \bar{r}''(0)\|}{\|\bar{r}'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

iar torsiunea sa este

$$\tau(0) = \frac{(\bar{r}'(0), \bar{r}''(0), \bar{r}'''(0))}{\|\bar{r}'(0) \times \bar{r}''(0)\|} = 0.$$

Se observă că, în orice punct al curbei, avem $(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)) = 0$, deci $\tau(t) = 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Prin urmare, curba (γ) este o curbă plană.

Definiţia 9.42. Dacă funcţia torsiune a unei curbe (γ) se anulează în punctul $M_0(t_0) \in (\gamma)$, atunci M_0 se numeşte *punct planar* al curbei.

3.5. Contactul a două curbe în spaţiu.

Definiţia 9.43. Spunem că două curbe simple (γ_1) şi (γ_2) de clasă C^n, $n \geq 1$, au un contact de ordin mai mare sau egal cu m, unde $m \leq n$, în punctul comun M_0 dacă admit reprezentările parametrice

$$(\gamma_1) : \bar{r} = \bar{r}_1(t) = x_1(t) \cdot \bar{i} + y_1(t) \cdot \bar{j} + z_1(t) \cdot \bar{k}, \quad t \in I,$$

şi

$$(\gamma_2) : \bar{r} = \bar{r}_2(\widetilde{t}) = x_2(\widetilde{t}) \cdot \bar{i} + y_2(\widetilde{t}) \cdot \bar{j} + z_2(\widetilde{t}) \cdot \bar{k}, \quad \widetilde{t} \in J,$$

astfel încât, dacă $t = t_0$ şi $\widetilde{t} = \widetilde{t}_0$ sunt parametrii punctului M_0 pe (γ_1) şi respectiv pe (γ_2), atunci

$$\bar{r}_1(t_0) = \bar{r}_2(\widetilde{t}_0),\ \bar{r}_1'(t_0) = \bar{r}_2'(\widetilde{t}_0),\ \bar{r}_1''(t_0) = \bar{r}_2''(\widetilde{t}_0), \ldots,\ \bar{r}_1^{(m)}(t_0) = \bar{r}_2^{(m)}(\widetilde{t}_0).$$

Observaţia 9.37. Dacă două curbe au un contact de ordin $m \geq 3$ într-un punct comun, atunci ele au în acest punct aceeaşi tangentă, acelaşi plan normal, aceeaşi curbură şi aceeaşi torsiune.

Ca şi în cazul curbelor plane avem următoarele două rezultate imediate.

Propoziţia 9.22. *Două curbe simple de clasă C^n, $n \geq 1$, reprezentate explicit*

$$(\gamma_1) : \begin{cases} y = f_1(x) \\ z = g_1(x) \end{cases} \quad \text{şi} \quad (\gamma_2) : \begin{cases} y = f_2(x) \\ z = g_2(x) \end{cases}$$

au un contact de ordin exact m, cu $m < n$, în punctul comun $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dacă şi numai dacă

$$f_1(x_0) = f_2(x_0),\ f_1'(x_0) = f_2'(x_0), \ldots,\ f_1^{(m)}(x_0) = f_2^{(m)}(x_0),$$

$$g_1(x_0) = g_2(x_0),\ g_1'(x_0) = g_2'(x_0), \ldots,\ g_1^{(m)}(x_0) = g_2^{(m)}(x_0)$$

şi $f_1^{(m+1)}(x_0) \neq f_2^{(m+1)}(x_0)$ sau $g_1^{(m+1)}(x_0) \neq g_2^{(m+1)}(x_0)$.

Propoziţia 9.23. *Două curbe simple de clasă C^n, $n \geq 1$, date prin*

$$(\gamma_1) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad (\gamma_2) : \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k},\ t \in I,$$

au un contact de ordin exact m, cu $m < n$, în punctul comun $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y_0(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, dacă şi numai dacă

$$\phi(t_0) = 0,\ \phi'(t_0) = 0, \ldots,\ \phi^{(m)}(t_0) = 0,\ \phi^{(m+1)}(t_0) \neq 0,$$

unde $\phi : I \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (F \circ \bar{r}, G \circ \bar{r})(t) = (F, G)(x(t), y(t), z(t))$.

3.6. Înfăşurătoarea unei familii de curbe. Deoarece studiul acestei probleme este asemănător cu cel efectuat în cazul curbelor plane nu vom mai demonstra aici rezultatele prezentate.

Fie familia de curbe simple de clasă C^n, $n \geq 1$, reprezentate implicit

$$(\gamma_\lambda) : \begin{cases} F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ G(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}, \quad \lambda \in I \subset \mathbb{R},$$

unde I este un interval deschis, F şi G sunt de clasă cel puţin C^1 în raport cu parametrul λ, iar $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ şi $\frac{\partial G}{\partial \lambda}$ nu se anulează identic de-a lungul nici unei curbe (γ_λ).

Definiţia 9.44. Se numeşte *înfăşurătoarea* familiei de curbe (γ_λ) o curbă (γ), tangentă la toate curbele familiei, astfel încât pentru fiecare punct al lui (γ) există o curbă (γ_λ) care îl conţine.

Observaţia 9.38. Ca şi în cazul curbelor plane, nu toate familiile de curbe din spaţiu admit o înfăşurătoare.

Teorema 9.24. *Dacă familia de curbe*

$$(\gamma_\lambda) : \begin{cases} F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ G(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}, \quad \lambda \in I \subset \mathbb{R},$$

ca mai sus, admite o înfăşurătoare (γ), *atunci coordonatele fiecărui punct al acesteia satisfac sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ G(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \\ G_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}, \tag{9.7}$$

unde am notat $F_\lambda = \frac{\partial F}{\partial \lambda}$, $G_\lambda = \frac{\partial G}{\partial \lambda}$.

Definiţia 9.45. Locul geometric al punctelor care verifică sistemul

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0 \\ G(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \\ G_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \tag{9.8}$$

se numeşte *înfăşurătoarea în sens larg* a familiei de curbe (γ_λ).

Definiţia 9.46. Un punct care verifică (9.8) se numeşte punct caracteristic al familiei de curbe (γ_λ).

Teorema 9.25. *Dacă într-un punct caracteristic* M_0 *al familiei de curbe* (γ_λ) *sunt verificate condiţiile*

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ F_{\lambda x} & F_{\lambda y} & F_{\lambda z} \end{vmatrix}_{|M_0} \neq 0 \quad \text{şi} \quad F_{\lambda\lambda}(M_0) \neq 0,$$

unde aplicaţia F este de clasă C^n, $n \geq 2$, şi unde am folosit notaţiile $F_{\lambda x} = \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial x}$, $F_{\lambda y} = \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial y}$, $F_{\lambda z} = \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial z}$ *şi* $F_{\lambda\lambda} = \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2}$, *sau*

$$\left|\begin{array}{ccc} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ G_{\lambda x} & G_{\lambda y} & G_{\lambda z} \end{array}\right|_{|M_0} \neq 0 \quad \text{şi} \quad G_{\lambda\lambda}(M_0) \neq 0,$$

dacă aplicaţia G este de clasă C^n, $n \geq 2$, atunci există o vecinătate deschisă $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ a lui M_0 pe care sistemul (9.4) *defineşte un arc al înfăşurătorii familiei de curbe.*

Observaţia 9.39. Ca şi în plan, în aplicaţii, ecuaţia înfăşurătorii unei familii de curbe se va determina eliminând λ între ecuaţiile sistemului (9.8).

CAPITOLUL 10

SUPRAFEŢE

Acest ultim capitol al cursului este dedicat studiului geometriei suprafeţelor. Cele prezentate aici constituie doar o foarte scurtă introducere în acest studiu, pentru a cărui aprofundare recomandăm monografia [**7**] şi cursul [**10**].

Pe parcursul întregului capitol vom folosi reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$.

1. Reprezentări analitice ale suprafeţelor

Fie $\alpha : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie de clasă C^n, $n \geq 1$, dată prin $\alpha(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D$, cu $x, y, z : D \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{|(u,v)} = 2, \quad \forall (u,v) \in D,$$

unde am notat $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, etc. Definim aplicaţia $\bar{r} : D \to \mathbb{V}^3$,

$$\bar{r}(u,v) = x(u,v) \cdot \bar{i} + y(u,v) \cdot \bar{j} + z(u,v) \cdot \bar{k}, \quad \forall (u,v) \in D,$$

de clasă C^n, pentru care obţinem imediat

$$(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)(u,v) = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{|(u,v)} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}_{|(u,v)} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{|(u,v)} \cdot \bar{k} \neq \bar{0},$$

pentru orice $(u,v) \in D$, unde $\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$, $\bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$.

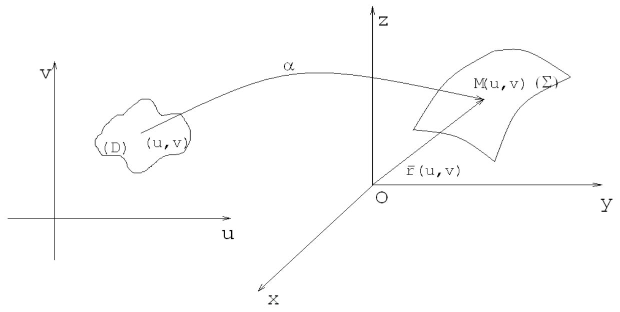
Definiţia 10.1. Se numeşte *suprafaţă regulată de clasă* C^n, $n \geq 1$, o submulţime (Σ) a spaţiului cu proprietatea că există o aplicaţie $\alpha : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ca mai sus astfel încât $\alpha(D) = (\Sigma)$. Aplicaţia α se numeşte *parametrizare* a suprafeţei (Σ).

Definiţia 10.2. Un punct M de pe suprafaţa (Σ) va avea vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM} = \bar{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$. În acest caz, u şi v se numesc *coordonatele parametrice* sau *curbilinii* ale lui M pe suprafaţă.

Definiţia 10.3. Ecuaţia $(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, se numeşte *ecuaţia vectorială parametrică* a suprafeţei (Σ), iar aplicaţia $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$ se numeşte parametrizare a acestei suprafeţe. Ecuaţiile

$$(\Sigma) : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in D,$$

se numesc *ecuaţiile parametrice* ale lui (Σ).



Definiţia 10.4. O suprafaţă regulată se numeşte *suprafaţă simplă* dacă aplicaţia $\bar{r} : D \to \mathbb{V}^3$ este injectivă (sau, echivalent, dacă aplicaţia $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$ este injectivă).

Parametrizarea unei suprafeţe nu este unică. Pentru a vedea acest lucru, avem nevoie mai întâi de următoarea definiţie.

Definiţia 10.5. O aplicaţie $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^2$, unde V şi $\widetilde{V}$ sunt două mulţimi deschise, dată prin $\varphi(u,v) = (\widetilde{u}(u,v), \widetilde{v}(u,v))$, se numeşte *difeomorfism* de clasă C^n dacă:

(1) este o aplicaţie bijectivă;
(2) este o aplicaţie de clasă C^n;
(3) $\frac{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall (u,v) \in V.$

Observaţia 10.1. Din teorema de inversare locală rezultă imediat că aplicaţia inversă a unui difeomorfism de clasă C^n este de asemeni un difeomorfism de clasă C^n.

Acum, fie (Σ) o suprafaţă regulată de clasă C^n, $n \geq 1$, cu parametrizarea $\alpha : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, unde D este o mulţime deschisă, şi fie $\varphi : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to D$, unde Δ este deasemeni o mulţime deschisă, un difeomorfism de clasă C^n. Atunci $\varphi^{-1} : D \to \Delta$ este un difeomorfism de clasă C^n şi se arată uşor că aplicaţia $\beta = \alpha \circ \varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ reprezintă o nouă parametrizare a suprafeţei (Σ).

În continuare, folosind teorema funcţiilor implicite, obţinem următoarele două rezultate.

Propoziţia 10.1. *Fie $F : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o aplicaţie de clasă C^n, $n \geq 1$, astfel încât $\nabla F(x,y,z) \neq \bar{0}$, oricare ar fi $(x,y,z) \in S$, adică $F_x^2(x,y,z) + F_y^2(x,y,z) + F_z(x,y,z) > 0$, $\forall (x,y,z) \in S$. Atunci locul geometric al punctelor $M(x,y,z)$ ale căror coordonate verifică $F(x,y,z) = 0$ este o suprafaţă regulată (Σ) de clasă C^n.*

Definiţia 10.6. Ecuaţia $(\Sigma) : F(x,y,z) = 0$ se numeşte *ecuaţia implicită* a suprafeţei (Σ).

Propoziţia 10.2. *Fie* $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *o aplicaţie de clasă* C^n, $n \geq 1$. *Locul geometric al punctelor* $M(x, y, z)$ *ale căror coordonate verifică* $z = f(x, y)$ *este o suprafaţă regulată de clasă* C^n.

Definiţia 10.7. Ecuaţia $(\Sigma) : z = f(x, y)$ se numeşte *ecuaţia explicită* a suprafeţei (Σ).

Observaţia 10.2. Dacă (Σ) este o suprafaţă regulată de clasă C^n, $n \geq 1$, reprezentată implicit prin $(\Sigma) : F(x, y, z) = 0$ cu $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, unde $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Sigma)$, atunci, din teorema funcţiilor implicite, rezultă că într-o vecinătate a punctului M_0, suprafaţa poate fi dată explicit printr-o ecuaţie de forma $z = f(x, y)$. Dacă $F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ atunci, din condiţia de regularitate $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \bar{0}$, rezultă că $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ sau $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ şi, în acest caz, ecuaţia explicită a lui (Σ) într-o vecinătate a lui M_0 va avea forma $x = g(y, z)$ sau $y = h(x, z)$.

Observaţia 10.3. Reprezentările parametrică, explicită şi implicită ale unei suprafeţe regulate sunt echivalente local.

Observaţia 10.4. Condiţiile de regularitate pentru o suprafaţă dată pe rând în cele trei reprezentări sunt:

- în toate reprezentările aplicaţiile care apar în diversele ecuaţii ale curbei trebuie să fie de clasă C^n;
- în reprezentarea parametrică $(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in D$, trebuie să avem $(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)(u, v) \neq \bar{0}$, $\forall (u, v) \in D$. În plus, pentru ca suprafaţa să fie simplă aplicaţia $\bar{r}$ trebuie să fie injectivă;
- în reprezentarea implicită $(\Sigma) : F(x, y, z) = 0$ derivatele parţiale de ordinul 1 ale lui F trebuie să nu se anuleze simultan în nici un punct al suprafeţei.

În final, fie suprafaţa (Σ) cu ecuaţiile parametrice

$$(\Sigma) : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D.$$

Folosind coordonatele polare în spaţiu ecuaţiile suprafeţei pot fi scrise:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \rho = \rho(u, v) = \sqrt{x^2(u, v) + y^2(u, v) + z^2(u, v)} \\ \theta = \theta(u, v) = \operatorname{arctg} \frac{y(u,v)}{x(u,v)} \\ \varphi = \varphi(u, v) = \arccos \frac{z(u,v)}{\sqrt{x^2(u,v) + y^2(u,v) + z^2(u,v)}} \end{cases}, \quad (u, v) \in D.$$

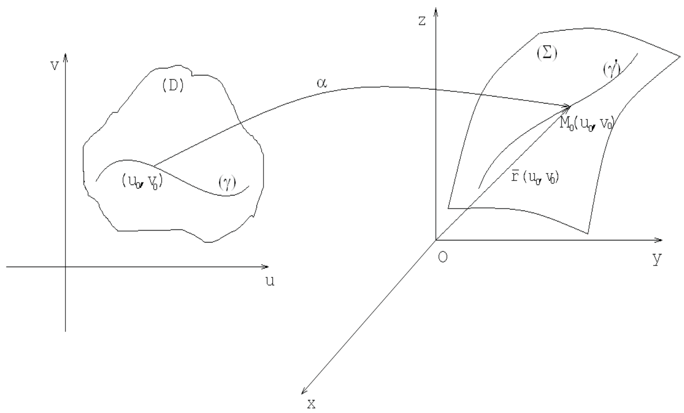
Acestea sunt *ecuaţiile polare parametrice* ale lui (Σ).

2. Curbe pe o suprafaţă. Planul tangent şi normala la o suprafaţă

Fie suprafaţa simplă de clasă C^n, $n \geq 1$, dată cu ajutorul parametrizării $\alpha : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sau, echivalent, prin ecuaţia vectorială parametrică

$$(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

Identificând planul cu $\mathbb{R}^2$, putem considera (γ) o curbă inclusă în D, dată prin ecuaţiile parametrice $(\gamma) : \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$, $t \in I$, $u, v : I \to D$. Atunci imaginea curbei (γ) prin aplicaţia α va fi o curbă în spaţiu $(\gamma') = \alpha(\gamma)$, pe suprafaţa (Σ), a cărei ecuaţie parametrică va fi $(\gamma') : \bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$, $t \in I$.



În continuare, fie $(u_0, v_0) \in D$. Considerând $u = u_0 =$ constant în ecuaţia suprafeţei, obţinem curba

$$(\gamma_1) : \bar{r} = \bar{r}_1(v) = \bar{r}(u_0, v), \quad v \in J \subset \mathbb{R},$$

unde J este un interval deschis astfel încât $\{u_0\} \times J \subset D$. Evident curba (γ) este inclusă în întregime în suprafaţa (Σ). Luând $v = v_0 =$ constant în ecuaţia lui (Σ), obţinem curba

$$(\gamma_2) : \bar{r} = \bar{r}_2(u) = \bar{r}(u, v_0), \quad u \in I \subset \mathbb{R},$$

pe suprafaţă, unde I este un interval deschis astfel încât $I \times \{v_0\} \subset D$. Curbele (γ_1) şi (γ_2) se numesc *linii parametrice* pe suprafaţa (Σ). Avem astfel două familii de linii parametrice pe suprafaţă date de $u =$ constant şi respectiv de $v =$ constant cu următoarele proprietăţi:

(1) prin orice punct $M_0(u_0, v_0) \in (\Sigma)$ trece o linie parametrică dată de $u = u_0$ şi o linie parametrică dată de $v = v_0$;
(2) două linii parametrice din aceeaşi familie nu au nici un punct comun, datorită injectivităţii aplicaţiei $\bar{r}$.

Spunem că aceste două familii de linii parametrice formează o *reţea de curbe* pe suprafaţă.

Vectorii tangenţi la curbele (γ_1) şi (γ_2) în punctul $M_0(u_0, v_0)$ sunt

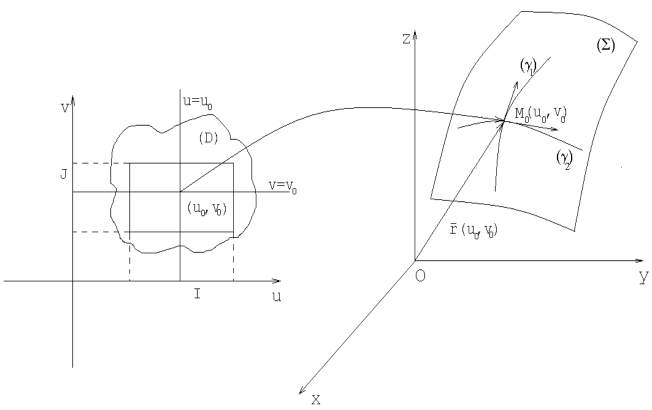
$$\bar{r}_1'(v_0) = \bar{r}_v(u_0, v_0) \quad \text{şi respectiv} \quad \bar{r}_2'(u_0) = \bar{r}_u(u_0, v_0),$$

unde am notat $\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ şi $\bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$. Din condiţia de regularitate

$$(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)(u, v) \neq \bar{0}, \quad \forall (u, v) \in (D),$$

rezultă

$$\bar{r}_u(u_0, v_0) \neq \bar{0}, \quad \bar{r}_v(u_0, v_0) \neq \bar{0} \quad \text{şi} \quad \bar{r}_u(u_0, v_0) \nparallel \bar{r}_v(u_0, v_0),$$



adică cei doi vectori sunt nenuli şi necoliniari, deci determină un subspaţiu liniar bi-dimensional al spaţiului liniar al vectorilor liberi. Acest subspaţiu se numeşte *spaţiul tangent* la suprafaţă în punctul M_0 şi se notează $T_{M_0}\Sigma$.

Definiţia 10.8. Planul (P_0) care conţine punctul $M_0(u_0, v_0) \in (\Sigma)$ şi este paralel cu direcţiile vectorilor $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ se numeşte *planul tangent* la suprafaţa (Σ) în punctul M_0. Dreapta care trece prin M_0 şi este normală la planul (P_0) se numeşte normala la suprafaţă în punctul M_0.

Dacă notăm cu

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 &= x_0 \cdot \bar{i} + y_0 \cdot \bar{j} + z_0 \cdot \bar{k} \\ &= \bar{r}(u_0, v_0) = x(u_0, v_0) \cdot \bar{i} + y(u_0, v_0) \cdot \bar{j} + z(u_0, v_0) \cdot \bar{k} \end{aligned}$$

vectorul de poziţie al punctului $M_0 \in (\Sigma)$, atunci putem scrie ecuaţia vectorială a planului tangent la (Σ) în M_0:

$$(P_0) : (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{r}_u(u_0, v_0), \bar{r}_v(u_0, v_0)) = 0,$$

sau, după calcularea produsului mixt,

$$(P_0) : \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_0 \cdot (x - x_0) - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}_0 \cdot (y - y_0) + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_0 \cdot (z - z_0) = 0,$$

unde am folosit notaţia

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}.$$

Vectorul director al normalei la suprafaţă în punctul M_0 este

$$\bar{N}_0 = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v)(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_0 \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}_0 \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_0 \cdot \bar{k}$$

şi, prin urmare, ecuaţiile canonice ale normalei vor fi:

$$(n_0) : \frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_0} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}_0} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_0}.$$

Să presupunem în continuare că suprafaţa simplă de clasă C^n, $n \geq 1$, este dată explicit:

$$(\Sigma) : z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Putem considera următoarea parametrizare a suprafeţei:

$$(\Sigma) : \begin{cases} x = x(u, v) = u \\ y = y(u, v) = v \\ z = z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) = f(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D.$$

Atunci vectorul de poziţie al unui punct oarecare de pe suprafaţă va fi

$$\bar{r}(u, v) = u \cdot \bar{i} + v \cdot \bar{j} + f(u, v) \cdot \bar{k},$$

cu derivatele parţiale

$$\bar{r}_u(u, v) = \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \cdot \bar{k} \quad \text{şi} \quad \bar{r}_u(u, v) = \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \cdot \bar{k}.$$

Din teorema de derivare a funcţiilor compuse, rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) = M(u_0, v_0, f(u_0, v_0)) = M_0(u_0, v_0)$ de pe suprafaţă.

Astfel, ecuaţia planului (P_0) tangent la suprafaţă în punctul M_0 devine

$$(P_0) : f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - (z - z_0) = 0,$$

unde am notat $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, iar ecuaţiile normalei la suprafaţă în M_0 sunt, în acest caz,

$$(n_0) : \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

În sfârşit, fie suprafaţa (Σ) simplă, de clasă C^n, $n \geq 1$, dată prin ecuaţia implicită $(\Sigma) : F(x, y, z) = 0$ şi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe suprafaţă. Avem $\nabla F \neq \bar{0}$ în orice punct aparţinând lui (Σ) şi putem presupune că $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Atunci, conform teoremei funcţiilor implicite, într-o vecinătate a punctului M_0 putem scrie ecuaţia explicită a suprafaţei $(\Sigma) : z = f(x, y)$ astfel încât $z_0 = f(x_0, y_0)$ şi $F(x, y, f(x, y)) = 0$, pe această vecinătate. Derivând acestă ultimă ecuaţie, după regula de derivare a funcţiilor compuse, obţinem, în M_0,

$$F_x(x_0, y_0, z_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot f_x(x_0, y_0) = 0,$$

dacă derivăm în raport cu x, şi

$$F_y(x_0, y_0, z_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot f_y(x_0, y_0) = 0,$$

dacă derivăm în raport cu y. De aici rezultă

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{şi} \quad f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Acum putem scrie ecuaţia planului (P_0) tangent la suprafaţă în punctul M_0:

$$(P_0) : F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

şi ecuaţiile normalei la suprafaţă în M_0:

$$(n_0) : \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Se observă că vectorul director al normalei este chiar gradientul $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ al aplicaţiei F în punctul M_0.

Exemplul 10.1. Să se determine planele tangente şi normalele la următoarele suprafeţe în punctele precizate:

(1) $(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u, v) = (u^2 + v^2) \cdot \bar{i} + e^u \cdot \bar{j} + v \cdot \bar{k}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $M_0(u_0 = 0, v_0 = 1) \in (\Sigma)$;

(2) $(\Sigma) : z = x^2 + y^2$, $M_0(1, 1, 2) \in (\Sigma)$;

(3) $(\Sigma) : 2x^2 + 4y^2 - z^4 + 4 = 0$, $M_0(2, 1, 2) \in (\Sigma)$.

(1) Vectorul de poziţie al punctului M_0 este $\overrightarrow{OM_0} = \bar{r}(0, 1) = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ adică avem $M_0(1, 1, 1)$.

Mai departe obţinem

$$\bar{r}_u(u, v) = 2u \cdot \bar{i} + e^u \cdot \bar{j} \quad \text{şi} \quad \bar{r}_u(0, 1) = \bar{j},$$

$$\bar{r}_v(u, v) = 2v \cdot \bar{i} + \bar{k} \quad \text{şi} \quad \bar{r}_v(0, 1) = 2 \cdot \bar{i} + \bar{k},$$

de unde rezultă vectorul director al normalei la suprafaţă în punctul M_0;

$$(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)(0, 1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} - 2 \cdot \bar{k}.$$

Astfel, ecuaţiile normalei sunt

$$(n_0) : \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{z-1}{-2} \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (n_0) : \begin{cases} 2x + z - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases},$$

iar cea a planului tangent la (Σ) în M_0 este:

$$(P_0) : x - 1 - 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow (P_0) : x - 2z + 1 = 0.$$

(2) Definim aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, şi avem $f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ şi $f_x(1, 1) = 2$, $f_y(1, 1) = 2$. Putem scrie acum ecuaţia planului tangent la (Σ) în punctul $M_0(1, 1, 2)$:

$$(P_0) : 2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0 \Leftrightarrow (P_0) : 2x + 2y - z - 2 = 0$$

şi ecuaţiile normalei la suprafaţă în M_0:

$$(n_0) : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{-1}.$$

(3) Definim aplicaţia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 - z^4 + 4$, şi avem $F_x(x, y, z) = 4x$, $F_y(x, y, z) = 8y$, $F_z(x, y, z) = -4z^3$ şi $F_x(2, 1, 2) = 8$, $F_y(2, 1, 2) = 8$, $F_z(2, 1, 2) = -32$.

Obţinem ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul $M_0(2, 1, 2)$:

$$(P_0) : 8(x - 2) + 8(y - 1) - 32(z - 2) = 0 \Leftrightarrow (P_0) : x + y - 4z + 5 = 0$$

şi ecuaţiile normalei la (Σ) în M_0:

$$(n_0): \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-2}{-32}.$$

3. Prima formă fundamentală a unei suprafeţe

Fie suprafaţa simplă de clasă C^n, $n \geq 1$, dată parametric:

$$(\Sigma): \bar{r} = \bar{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\bar{i} + y(u,v)\cdot\bar{j} + z(u,v)\cdot\bar{k}, \quad (u,v) \in D.$$

Diferenţiala aplicaţiei $\bar{r}: D \to \mathbb{V}^3$ într-un punct oarecare (u,v) din D este

$$d\bar{r} = d\bar{r}(u,v)(du,dv) = \bar{r}_u(u,v)du + \bar{r}_v(u,v)dv$$

şi putem considera următoarea formă pătratică:

$$\Phi = d\bar{r}^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = \bar{r}_u^2(u,v)du^2 + 2\bar{r}_u(u,v)\cdot\bar{r}_v(u,v)dudv + \bar{r}_v^2(u,v)dv^2.$$

Folosind notaţiile

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= \bar{r}_u^2(u,v) = \bar{r}_u(u,v)\cdot\bar{r}_u(u,v) = x_u^2(u,v) + y_u^2(u,v) + z_u^2(u,v),\\
F(u,v) &= \bar{r}_u(u,v)\cdot\bar{r}_v(u,v)\\
&= x_u(u,v)x_v(u,v) + y_u(u,v)y_v(u,v) + z_u(u,v)z_v(u,v),\\
G(u,v) &= \bar{r}_v^2(u,v) = \bar{r}_v(u,v)\cdot\bar{r}_v(u,v) = x_v^2(u,v) + y_v^2(u,v) + z_v^2(u,v),
\end{aligned}$$

putem scrie

$$\Phi = d\bar{r}^2 = E(u,v)\cdot du^2 + 2F(u,v)\cdot dudv + G(u,v)\cdot dv^2.$$

Pe de altă parte, în orice punct $M(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in (\Sigma)$, avem $d\bar{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, unde ds^2 este pătratul elementului de arc al unei curbe pe (Σ) care trece prin M, de unde rezultă

$$\Phi = d\bar{r}^2 = ds^2 = E(u,v)\cdot du^2 + 2F(u,v)\cdot dudv + G(u,v)\cdot dv^2.$$

Forma pătratică Φ se numeşte *prima formă fundamentală* a suprafeţei (Σ).

Observaţia 10.5. Fie $M_0(u_0,v_0) \in (\Sigma)$ un punct fixat pe suprafaţă şi fie $T_{M_0}\Sigma$ spaţiul tangent la (Σ) în M_0. Considerăm vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ în acest spaţiu. Deoarece $\{\bar{r}_u(u_0,v_0), \bar{r}_v(u_0,v_0)\}$ este o bază în $T_{M_0}\Sigma$ atunci cei doi vectori pot fi scrişi

$$\bar{a} = a_1\cdot\bar{r}_u(u_0,v_0) + a_2\cdot\bar{r}_v(u_0,v_0) \quad \text{şi} \quad \bar{b} = b_1\cdot\bar{r}_u(u_0,v_0) + b_2\cdot\bar{r}_v(u_0,v_0),$$

iar produsul lor scalar este

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = E(u_0,v_0)\cdot a_1b_1 + F(u_0,v_0)\cdot(a_1b_2 + a_2b_1) + G(u_0,v_0)\cdot a_2b_2,$$

adică forma pătratică determinată de produsul scalar indus pe $T_{M_0}\Sigma$ de produsul scalar din $\mathbb{V}^3$ coincide, în punctul M_0, cu prima formă fundamentală a suprafeţei în acest punct.

Observaţia 10.6. Vectorul normal la suprafaţă într-un punct oarecare $M(u,v) \in (\Sigma)$ este $\bar{N}(u,v) = \bar{r}_u(u,v) \times \bar{r}_v(u,v)$ şi, prin calcul direct, obţinem imediat că norma sa este

$$\bar{N}(u,v) = \|\bar{r}_u(u,v) \times \bar{r}_v(u,v)\| = \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}.$$

Dacă suprafaţa (Σ) este dată explicit $(\Sigma) : z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, atunci, la fel ca în subcapitolul precedent, putem considera următoarea parametrizare a lui (Σ):

$$\begin{cases} x = x(u,v) = u \\ y = y(u,v) = v \\ z = f(x(u,v), y(u,v)) = f(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in D,$$

şi obţinem

$$\bar{r}_u(u,v) = x_u(u,v) \cdot \bar{i} + y_u(u,v) \cdot \bar{j} + z_u(u,v) \cdot \bar{k} = \bar{i} + f_u \cdot \bar{k} = \bar{i} + f_x(x,y) \cdot \bar{k},$$

$$\bar{r}_v(u,v) = x_v(u,v) \cdot \bar{i} + y_v(u,v) \cdot \bar{j} + z_v(u,v) \cdot \bar{k} = \bar{j} + f_u \cdot \bar{k} = \bar{i} + f_y(x,y) \cdot \bar{k},$$

într-un punct oarecare $M(u,v) = M(x,y,z)$ de pe suprafaţă. Rezultă

$$E(x,y) = \bar{r}_u^2(u,v) = 1 + f_x^2(x,y),$$

$$F(x,y) = \bar{r}_u(u,v) \cdot \bar{r}_v(u,v) = f_x(x,y) f_y(x,y),$$

$$G(x,y) = \bar{r}_v^2(u,v) = 1 + f_y^2(x,y),$$

şi avem expresia primei forme fundamentale a suprafeţei:

$$\Phi = (1 + f_x^2(x,y))dx^2 + 2f_x(x,y)f_y(x,y)dxdy + (1 + f_y^2(x,y))dy^2.$$

Exemplul 10.2. Fie suprafaţa

$$(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u,v) = (u^2 + v^2) \cdot \bar{i} + (u^2 - v^2) \cdot \bar{j} + uv \cdot \bar{k}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Să se determine:

(1) prima formă fundamentală a suprafeţei;

(2) elementul de arc pentru curbele pe suprafaţă date de

$$(\gamma_1) : \bar{r}_1 = \bar{r}_1(v) = \bar{r}(2,v),\ v \in \mathbb{R}^* \quad \text{şi} \quad (\gamma_1) : \bar{r}_2 = \bar{r}_2(u) = \bar{r}(u,u),\ u \in \mathbb{R}^*;$$

(3) lungimea arcului de curbă al curbei (γ_2) obţinut pentru $u \in [1,2]$.

(1) Avem $\bar{r}_u(u,v) = 2u \cdot \bar{i} + 2u \cdot \bar{j} + v \cdot \bar{k}$ şi $\bar{r}_v(u,v) = 2v \cdot \bar{i} - 2v \cdot \bar{j} + u \cdot \bar{k}$ şi obţinem

$$E(u,v) = \bar{r}_u^2(u,v) = 8u^2 + v^2, \quad F(u,v) = \bar{r}_u(u,v) \cdot \bar{r}_v(u,v) = uv,$$

$$G(u,v) = \bar{r}_u^2(u,v) = 8v^2 + u^2.$$

Prima formă fundamentală a suprafeţei va fi

$$\Phi = d\bar{r}^2 = ds^2 = (8u^2 + v^2) \cdot du^2 + 2uv \cdot dudv + (8v^2 + u^2) \cdot dv^2.$$

(2) Din expresia primei forme fundamentale a lui (Σ), rezultă, pentru $u = 2$, că pătratul elementului de arc al curbei (γ_1) este $ds^2 = (8v^2 + 4)dv^2$, de unde $ds = 2\sqrt{2v^2 + 1}dv$.

Pentru $v = u$ obţinem pătratul elementului de arc al curbei (γ_2): $ds^2 = 9u^2du^2 + 2u^2du^2 + 9u^2du^2 = 20u^2du^2$ şi, mai departe, elementul de arc al curbei: $ds = \sqrt{20}udu$.

(3) Lungimea arcului de curbă $\widehat{AB}$ al curbei (γ_2), determinat de $u \in [1,2]$, se calculează cu ajutorul formulei

$$l_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} ds = \int_1^2 \sqrt{20}udu = \sqrt{20}\frac{u^2}{2}|_1^2 = 30.$$

Exemplul 10.3. Să se determine prima formă fundamentală a suprafeţei $(\Sigma): z = \frac{x^2+x}{2} + \frac{y^3}{4}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Definim aplicaţia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, prin $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4} + x$, şi avem

$$f_x(x,y) = x+1, \quad f_y(x,y) = y^3$$

şi

$$E(x,y) = 1 + f_x^2(x,y) = x^2 + 2x + 2,$$

$$F(x,y) = f_x(x,y)f_y(x,y) = y^3(x+1),$$

$$G(x,y) = 1 + f_y^2(x,y) = y^6 + 1,$$

de unde obţinem expresia primei forme fundamentale

$$\Phi = (x^2 + 2x + 2)dx^2 + 2y^3(x+1)dxdy + (y^6+1)dy^2.$$

În continuare fie suprafaţa regulată (Σ), de clasă C^n, $n \geq 1$, dată prin ecuaţia vectorială parametrică

$$(\Sigma): \bar{r} = \bar{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\bar{i} + y(u,v)\cdot\bar{j} + z(u,v)\cdot\bar{k},$$

şi fie

$$(\gamma_1): \begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_1(t) \end{cases}, \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (\gamma_2): \begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases}, \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

două curbe pe suprafaţa (Σ), care se intersectează într-un punct M_0.

Definiţia 10.9. Prin definiţie unghiul dintre curbele (γ_1) şi (γ_2) în punctul M_0 este unghiul făcut de vectorii tangenţi la cele două curbe în acest punct.

Privind curbele (γ_1) şi (γ_2) ca fiind curbe în spaţiu ecuaţiile lor se scriu

$$\begin{aligned} (\gamma_1): \bar{r}_1 &= \bar{r}_1(t) = \bar{r}(u_1(t), v_1(t)) \\ &= x(u_1(t),v_1(t))\cdot\bar{i} + y(u_1(t),v_1(t))\cdot\bar{j} + z(u_1(t),v_1(t))\cdot\bar{k}, \\ (\gamma_2): \bar{r}_2 &= \bar{r}_2(t) = \bar{r}(u_2(t), v_2(t)) \\ &= x(u_2(t),v_2(t))\cdot\bar{i} + y(u_2(t),v_2(t))\cdot\bar{j} + z(u_2(t),v_2(t))\cdot\bar{k}, \end{aligned}$$

iar vectorii lor tangenţi într-un punct oarecare sunt

$$\bar{T}_1(t) = \bar{r}_1'(t) = \bar{r}_u(u_1(t),v_1(t))\cdot u_1'(t) + \bar{r}_v(u_1(t),v_1(t))\cdot v_1'(t)$$

şi respectiv

$$\bar{T}_2(t) = \bar{r}_2'(t) = \bar{r}_u(u_2(t),v_2(t))\cdot u_2'(t) + \bar{r}_v(u_2(t),v_2(t))\cdot v_2'(t).$$

Punctul de intersecţie al celor două curbe este $M_0(u_0, v_0) \in (\Sigma)$, unde $u_0 = u_1(t_0) = u_2(t_0)$, $v_0 = v_1(t_0) = v_2(t_0)$, iar unghiul φ făcut de cei doi vectori tangenţi la curbe în acest punct, care, conform definiţiei, este unghiul dintre (γ_1) şi (γ_2), este dat de

$$\cos\varphi = \frac{\bar{T}_1(t_0) \cdot \bar{T}_2(t_0)}{\|\bar{T}_1(t_0)\| \cdot \|\bar{T}_2(t_0)\|},$$

adică

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= (E_0 \cdot u'_{10}u'_{20} + F_0 \cdot (u'_{10} \cdot v'_{20} + u'_{20} \cdot v'_{10}) + G_0 \cdot v'_{10} \cdot v'_{20}) \\ &\cdot \frac{1}{\sqrt{E_0 \cdot (u'_{10})^2 + 2F_0 \cdot u'_{10} \cdot v'_{10} + G_0 \cdot (v'_{10})^2} \cdot \sqrt{E_0 \cdot (u'_{20})^2 + 2F_0 \cdot u'_{20} \cdot v'_{20} + G_0 \cdot (v'_{20})^2}},\end{aligned}$$

unde am notat $E_0 = E(u_0, v_0)$, $F_0 = F(u_0, v_0)$, $G_0 = G(u_0, v_0)$ şi $u'_{10} = u'_1(t_0)$, $u'_{20} = u'_2(t_0)$, $v'_{10} = v'_1(t_0)$, $v'_{20} = v'_2(t_0)$.

Am obţinut astfel şi *condiţia de ortogonalitate* a curbelor (γ_1) şi (γ_2):

$$E_0 \cdot u'_{10}u'_{20} + F_0 \cdot (u'_{10} \cdot v'_{20} + u'_{20} \cdot v'_{10}) + G_0 \cdot v'_{10} \cdot v'_{20} = 0.$$

Acum, considerăm cazul particular când (γ_1) şi (γ_2) sunt două linii parametrice pe suprafaţa (Σ) date de $u = \text{constant}$ şi respectiv de $v = \text{constant}$, care se intersectează în punctul $M_0 \in (\Sigma)$. Aşa cum am văzut, vectorii tangenţi la curbe în M_0 sunt $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ şi respectiv $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ şi atunci unghiul dintre (γ_1) şi (γ_2) va fi dat de

$$\cos\varphi = \frac{F_0}{\sqrt{E_0G_0}} \quad \text{şi} \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{E_0G_0 - F_0^2}{E_0G_0}},$$

unde am folosit aceleaşi notaţii ca mai sus.

Exemplul 10.4. Să se determine unghiul făcut de curbele $(\gamma_1) : u - v = 0$ şi $(\gamma_2) : 2u + v = 0$ de pe suprafaţa

$$(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u, v) = (u + v) \cdot \bar{i} + (u^2 + v^2 + u) \cdot \bar{j} + (u^3 + v^3) \cdot \bar{k}.$$

Putem parametriza curbele (γ_1) şi (γ_2) astfel:

$$(\gamma_1) : \begin{cases} u = u_1(t) = t \\ v = v_1(t) = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\gamma_1) : \bar{r}_1 = \bar{r}_1(t) = \bar{r}(u_1(t), v_1(t)) = 2t \cdot \bar{i} + (2t^2 + t) \cdot \bar{j} + 2t^3 \cdot \bar{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

şi

$$(\gamma_2) : \begin{cases} u = u_2(t) = t \\ v = v_2(t) = -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\gamma_1) : \bar{r}_2 = \bar{r}_2(t) = \bar{r}(u_2(t), v_2(t)) = -t \cdot \bar{i} + (5t^2 + t) \cdot \bar{j} + 9t^3 \cdot \bar{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obţinem din aceste ecuaţii că singurul punct de intersecţie al celor două curbe este punctul $M_0(0, 0, 0)$, ale cărui coordonate curbilinii pe suprafaţă sunt $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, iar coordonata pe curbele (γ_1) şi (γ_2) este $t_0 = 0$.

Pe de altă parte, avem

$$\bar{r}_u(u, v) = \bar{i} + (2u + 1) \cdot \bar{j} + 3u^2 \cdot \bar{k}, \quad \bar{r}_v(u, v) = \bar{i} + 2v \cdot \bar{j} + 3v^2 \cdot \bar{k}$$

şi

$$\bar{r}_u(0,0) = \bar{i} + \bar{j}, \quad \bar{r}_v(0,0) = \bar{i},$$

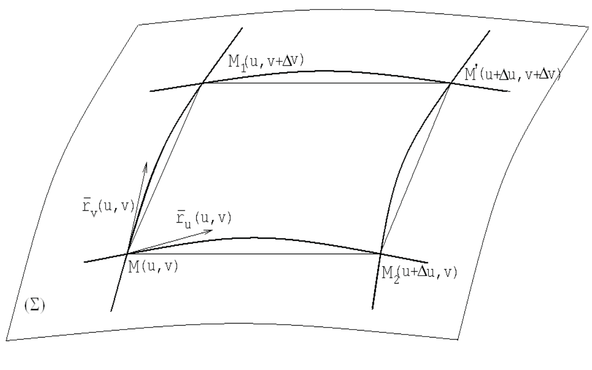
de unde urmează $E(0,0) = \bar{r}_u^2(0,0) = 1$, $F(0,0) = \bar{r}_u(0,0) \cdot \bar{r}_v(0,0) = 1$ şi $G(0,0) = \bar{r}_v^2(0,0) = 2$.

Avem şi $u_1'(t) = 1$, $v_1'(t) = 1$, $u_2'(t) = 1$, $v_2'(t) = -2$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Înlocuind în expresia cosinusului unghiului φ făcut de cele două curbe, rezultă $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$, adică acest unghi este $\varphi = \arccos(-\frac{4}{5})$.

4. Elementul de arie. Aria unei suprafeţe

Fie suprafaţa simplă (Σ) de clasă C^n, $n \geq 1$, cu ecuaţia vectorială parametrică $(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Considerăm liniile parametrice pe suprafaţă care trec prin punctele $M(u,v) \in (\Sigma)$ şi $M(u',v') \in (\Sigma)$. Este evident că putem scrie coordonatele punctului M astfel: $u' = u + u' - u = u + \Delta u$ şi $v' = v + v' - v = v + \Delta v$. Porţiunea de suprafaţă mărginită de aceste linii parametrice se numeşte *paralelogram curbiliniu.* Vârfurile acestui paralelogram curbiliniu vor fi punctele de pe suprafaţă $M(u,v)$, $M_1(u, v+\Delta v)$, $M'(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $M_2(u+\Delta u, v)$, iar aria sa $\mathcal{A}$ o vom aproxima prin aria paralelogramului $MM_1M'M_2$. Este evident că aproximarea este cu atât mai bună cu cât Δu şi Δv au valori mai mici.



Definiţia 10.10. Se numeşte *element de arie* pe (Σ) limita $d\sigma$ a ariei $\mathcal{A}$ a paralelogramului curbiliniu definit mai sus atunci când punctul M' tinde spre punctul M, adică avem

$$d\sigma = \lim_{\Delta u \to 0, \Delta v \to 0} \mathcal{A}.$$

Din definiţia de mai sus obţinem

$$d\sigma = \lim_{\Delta u \to 0, \Delta v \to 0} \mathcal{A} = \lim_{\Delta u \to 0, \Delta v \to 0} \mathcal{A}_{MM_1M'M_2} = \lim_{\Delta u \to 0, \Delta v \to 0} \|\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2}\|.$$

Avem

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \bar{r}(u, v+\Delta v) - \bar{r}(u,v),$$
$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = \bar{r}(u+\Delta u, v) - \bar{r}(u,v)$$

şi putem scrie

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{MM_1}\times\overrightarrow{MM_2}\| &= \|(\bar r(u,v+\Delta v)-\bar r(u,v))\times(\bar r(u+\Delta u,v)-\bar r(u,v))\| \\ &= \|\tfrac{\bar r(u+\Delta u,v)-\bar r(u,v)}{\Delta u}\times\tfrac{\bar r(u,v+\Delta v)-\bar r(u,v)}{\Delta v}\|\Delta u\Delta v,\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} d\sigma &= \lim_{\Delta u\to 0,\Delta v\to 0}\|\overrightarrow{MM_1}\times\overrightarrow{MM_2}\| \\ &= \lim_{\Delta u\to 0,\Delta v\to 0}\|\tfrac{\bar r(u+\Delta u,v)-\bar r(u,v)}{\Delta u}\times\tfrac{\bar r(u,v+\Delta v)-\bar r(u,v)}{\Delta v}\|\Delta u\Delta v \\ &= \|\bar r_u(u,v)\times\bar r_v(u,v)\|dudv.\end{aligned}$$

Aşa cum am văzut (observaţia 10.6), avem

$$\|\bar r_u(u,v)\times\bar r_v(u,v)\|=\sqrt{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)}$$

şi elementul de arie poate fi scris

$$d\sigma=\sqrt{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)}dudv.$$

Observaţia 10.7. Din definiţia integralei de suprafaţă de speţa I (vezi [**8**]), rezultă că aria suprafeţei (Σ) este dată de

$$\mathcal{A}_{(\Sigma)}=\iint_{(\Sigma)}d\sigma=\iint_D\sqrt{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)}dudv.$$

Mai departe, dacă suprafaţa (Σ) este dată explicit

$$(\Sigma): z=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

atunci, aşa cum am văzut în subcapitolul precendent, avem $E(x,y)=1+f_x^2(x,y)$, $F(x,y)=f_x(x,y)f_y(x,y)$, $G(x,y)=1+f_y^2(x,y)$, într-un punct oarecare $M(x,y,z)$ de pe suprafaţă, şi astfel elementul de arie va fi

$$d\sigma=\sqrt{E(x,y)G(x,y)-F^2(x,y)}dxdy=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y(x,y)^2}dxdy.$$

Exemplul 10.5. Să se determine elementul de arie pentru următoarele suprafeţe:

(1) $(\Sigma):\bar r=\bar r(u,v)=(u+v)\cdot\bar i+(u-v)\cdot\bar j+(u^2-v^2)\cdot\bar k$;
(2) $(\Sigma): z=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}$.

(1) Avem $\bar r_u(u,v)=\bar i+\bar j+2u\cdot\bar k$ şi $\bar r_v(u,v)=\bar i-\bar j-2v\cdot\bar k$, de unde rezultă

$$E(u,v)=\bar r_u^2(u,v)=2+4u^2,\quad F(u,v)=\bar r_u(u,v)\cdot\bar r_v(u,v)=-4uv,$$

$$G(u,v)=\bar r_v^2(u,v)=2+4v^2.$$

Elementul de arie al suprafaţei (Σ) este

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)}dudv \\ &= \sqrt{(2+4u^2)(2+4v^2)-16u^2v^2}dudv=2\sqrt{2u^2+2v^2+1}dudv\end{aligned}$$

(2) Definim aplicaţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}$ şi rezultă
$$f_x(x,y)=\frac{2}{9}x,\quad f_y(x,y)=-\frac{1}{2}y,$$
de unde obţinem elementul de arie
$$d\sigma=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y(x,y)^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{4}{81}x^2+\frac{1}{4}y^2}dxdy.$$

Exemplul 10.6. Să se calculeze aria suprafeţei
$$(\Sigma):\bar{r}=\bar{r}(u,v)=u\cos v\cdot\bar{i}+u\sin v\cdot\bar{j}+u\cdot\bar{k},\quad (u,v)\in D=[0,1]\times[0,1].$$

Pentru început avem
$$\bar{r}_u(u,v)=\cos v\cdot\bar{i}+\sin v\cdot\bar{j}+\bar{k},\quad \bar{r}_v=-u\sin v\cdot\bar{i}+u\cos v\cdot\bar{j}$$
şi, prin urmare,
$$E(u,v)=\bar{r}_u^2(u,v)=2,\quad F(u,v)=\bar{r}_u(u,v)\cdot\bar{r}_v(u,v)=0,$$
$$G(u,v)=\bar{r}_v^2(u,v)=u^2.$$
Astfel, elementul de arie al suprafeţei (Σ) este
$$d\sigma=\sqrt{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)}dudv=\sqrt{2u^2}dudv,$$
iar aria sa este dată de
$$\mathcal{A}_{(\Sigma)}=\iint_\Sigma d\sigma=\iint_D\sqrt{2u^2}dudv=\int_0^1\sqrt{2u^2}du\cdot\int_0^1 dv=\sqrt{2}\frac{u^2}{2}|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Contactul dintre o curbă şi o suprafaţă. Sfera osculatoare şi cercul osculator ale unei curbe în spaţiu

Fie suprafaţa simplă de clasă C^n, $n\geq 1$, dată implicit $(\Sigma):F(x,y,z)=0$ şi curba simplă de clasă C^n dată prin ecuaţia parametrică
$$(\gamma):\bar{r}=\bar{r}(t)=x(t)\cdot\bar{i}+y(t)\cdot\bar{j}+z(t)\cdot\bar{k},\quad t\in I\subset\mathbb{R}.$$

Punctele de intersecţie dintre curbă şi suprafaţă sunt date de soluţiile sistemului format din ecuaţia suprafeţei şi ecuaţiile curbei:
$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases},$$
sau, echivalent, de ecuaţia
$$\phi(t)=(F\circ\bar{r})(t)=F(x(t),y(t),z(t))=0. \tag{10.1}$$
Funcţia $\phi:I\to\mathbb{R}$ definită mai sus se numeşte *funcţia de contact* dintre curba (γ) şi suprafaţa (Σ).

Definiţia 10.11. Spunem că (γ) şi (Σ) au un contact de ordin mai mare sau egal cu $m\leq n$ în punctul comun $M_0(t_0)=M_0(x_0,y_0,z_0)\in(\gamma)\cap(\Sigma)$, unde $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$, dacă t_0 este o rădăcină de ordin cel puţin $m+1$ a ecuaţiei (10.1).

PROPOZIŢIA 10.3. *Curba* (γ) *şi suprafaţa* (Σ) *au în punctul comun* $M_0(t_0) = M(x_0, y_0, z_0)$ *un contact de ordin exact* $m < n$ *dacă şi numai dacă*

$$\phi(t_0) = 0, \quad \phi'(t_0) = 0, \ldots, \quad \phi^{(m)}(t_0) = 0, \quad \phi^{(m+1)}(t_0) \neq 0.$$

EXEMPLUL 10.7. Să se determine ordinul contactului dintre curba

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t) = te^t \cdot \bar{i} + e^t \cdot \bar{j} + t \cdot \bar{k}, \quad t \in \mathbb{R},$$

şi suprafaţa

$$(\Sigma) : x - 2\ln y + e^z - 1 = 0, \quad x, z \in \mathbb{R},\ y > 0,$$

în punctul comun $M_0(0, 1, 0)$.

Coordonata lui M_0 pe curbă este $t_0 = 0$. Ecuaţiile parametrice ale lui (γ) sunt

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x(t) = te^t \\ y = y(t) = e^t \\ z = z(t) = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

iar funcţia de contact dintre curbă şi suprafaţă este $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = x(t) - 2\ln y(t) + e^{z(t)} - 1 = te^t - 2t + e^t - 1 = (t + 1)e^t - 2t - 1.$$

Avem $\phi(0) = 0$, $\phi'(t) = (t+2)e^t - 2$, $\phi'(0) = 0$, $\phi''(t) = (t+3)e^t$, $\phi''(0) = 3 \neq 0$, deci (γ) şi (Σ) au în punctul M_0 un contact de ordinul $m = 1$.

PROPOZIŢIA 10.4. *Fie* $M_0(t_0) \in (\gamma)$ *un punct neinflexionar al curbei simple* $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, *de clasă* C^n, $n \geq 2$. *Atunci planul osculator al curbei în acest punct are un contact de ordin* $m \geq 2$ *cu* (γ).

DEMONSTRAŢIE. Reamintim că ecuaţia planului osculator al curbei în punctul $M_0(t_0)$ este

$$(P_o) : (\bar{r} - \bar{r}(t_0), \bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)) = 0,$$

adică

$$(P_o) : \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

de unde obţinem

$$(P_o) : \begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} \cdot (x - x(t_0)) - \begin{vmatrix} x'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} \cdot (y - y(t_0))$$

$$+ \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} \cdot (z - z(t_0)) = 0.$$

Funcţia de contact dintre curbă şi planul osculator va fi $\phi : I \to \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} (x(t) - x(t_0)) - \begin{vmatrix} x'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} (y(t) - y(t_0))$$

$$+ \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} (z(t) - z(t_0)) = 0.$$

Evident, avem $\phi(t_0) = 0$ şi, apoi,

$$\phi'(t_0) = \begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} \cdot x'(t_0) - \begin{vmatrix} x'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} \cdot y'(t_0)$$

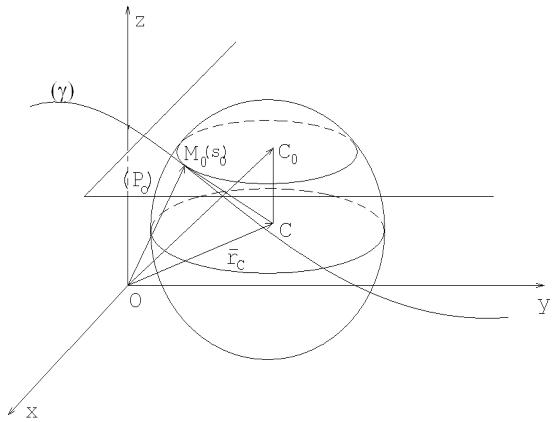
$$+ \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} \cdot z'(t_0) = \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\phi''(t_0) = \begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} \cdot x''(t_0) - \begin{vmatrix} x'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} \cdot y''(t_0)$$

$$+ \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} \cdot z''(t_0) = \begin{vmatrix} x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

adică planul şi curba au un contact de ordin cel puţin 2 în punctul $M_0(t_0)$. □

Definiţia 10.12. Fie (γ) o curbă simplă de clasă C^n, $n \geq 3$, şi punctul $M_0 \in (\gamma)$. Se numeşte *sfera osculatoare* a curbei în M_0 o sferă care are în acest punct un contact de ordin $m \geq 3$ cu (γ).



Teorema 10.5. *În fiecare punct neplanar $M_0(s_0)$ al curbei simple de clasă C^n, $n \geq 3$, parametrizată prin lungimea de arc,*

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s) = x(s) \cdot \bar{i} + y(s) \cdot \bar{j} + z(s) \cdot \bar{k}, \quad s \in I,$$

există şi este unică sfera osculatoare cu centrul C având vectorul de poziţie

$$\bar{r}_C = \bar{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa^2(s_0)} \cdot \ddot{\bar{r}}(s_0) - \frac{\dot{\kappa}(s_0)}{\kappa^3(s_0)\tau(s_0)} \cdot (\dot{\bar{r}}(s_0) \times \ddot{\bar{r}}(s_0))$$

şi raza dată de

$$R^2 = \frac{1}{\kappa^2(s_0)} + \frac{\dot{\kappa}^2(s_0)}{\kappa^4(s_0)\tau^2(s_0)},$$

unde $\kappa(s_0)$ şi $\tau(s_0)$ sunt curbura şi respectiv torsiunea lui (γ) în punctul $M_0(s_0)$.

Demonstraţie. Căutăm ecuaţia sferei osculatoare sub forma vectorială:

$$(\mathcal{S}) : (\bar{r} - \bar{r}_C) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_C) - R^2 = 0,$$

şi avem funcţia de contact dintre curba (γ) şi sfera (S):

$$\phi : I \to \mathbb{R}, \quad \phi(s) = (\bar{r}(s) - \bar{r}_C)^2 - R^2.$$

Pentru a avea un contact de ordin mai mare sau egal cu 3 între curbă şi sferă în punctul $M_0(s_0)$ trebuie să fie îndeplinite condiţiile:

$$\phi(s_0) = 0, \quad \phi'(s_0) = 0, \quad \phi''(s_0) = 0 \quad \text{şi} \quad \phi'''(0) = 0.$$

Folosind formulele lui Frenet în punctul $M_0(s_0)$ obţinem, prin calcul direct,

$$\phi(s_0) = (\bar{r}(s_0) - \bar{r}_C)^2 - R^2 = 0,$$

$$\phi'(s_0) = 2(\bar{r}(s_0) - \bar{r}_C) \cdot \bar{T}(s_0) = 0,$$

$$\phi''(s_0) = 2[\bar{T}^2(s_0) + (\bar{r}(s_0) - \bar{r}_C)\kappa(s_0)\bar{N}(s_0)] = 0,$$

$$\begin{aligned} \phi'''(s_0) &= 2(\bar{r}(s_0) - \bar{r}_C) \cdot (-\kappa^2(s_0)\bar{T}(s_0) + \dot{\kappa}(s_0)\bar{N}(s_0) \\ &\quad + \kappa(s_0)\tau(s_0)\bar{B}(s_0)) = 0, \end{aligned}$$

unde $\bar{T}(s_0) = \dot{\bar{r}}(s_0)$, $\bar{N}(s) = \frac{1}{\|\ddot{\bar{r}}(s_0)\|}\ddot{\bar{r}}(s_0)$ şi $\bar{B}(s_0) = \frac{1}{\|\ddot{\bar{r}}(s_0)\|}(\dot{\bar{r}}(s_0) \times \ddot{\bar{r}}(s_0))$ sunt versorii reperului lui Frenet în punctul M_0. Din a doua ecuaţie rezultă $(\bar{r}(s_0) - \bar{r}_C) \perp \bar{T}(s_0)$, adică vectorul $\bar{r}(s_0) - \bar{r}_C$ se află în planul determinat de vectorii $\bar{N}(s_0)$ şi $\bar{B}(s_0)$, deci există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\bar{r}(s_0) - \bar{r}_C = \alpha \cdot \bar{N}(s_0) + \beta \cdot \bar{B}(s_0).$$

Înlocuind în ultimele două ecuaţii obţinem imediat

$$\alpha = -\frac{1}{\kappa(s_0)} \quad \text{şi} \quad \beta = \frac{\dot{\kappa}(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)},$$

şi, mai departe, expresia vectorului de poziţie al centrului sferei osculatoare. Acum, din prima ecuaţie, rezultă

$$R^2 = \frac{1}{\kappa^2(s_0)} + \frac{\dot{\kappa}^2(s_0)}{\kappa^4(s_0)\tau^2(s_0)},$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Observaţia 10.8. Vectorul de poziţie al centrului sferei osculatoare a curbei (γ) în punctul $M_0(s_0)$ se poate scrie cu ajutorul versorilor reperului lui Frenet în M_0 astfel:

$$\bar{r}_C = \bar{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \cdot \bar{N}(s_0) - \frac{\dot{\kappa}(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)} \cdot \bar{B}(s_0).$$

Observaţia 10.9. Dacă avem curba (γ) dată printr-o parametrizare arbitrară $(\gamma): \bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in J$, atunci versorii $\bar{N}$ şi $\bar{B}$ din reperul lui Frenet într-un punct oarecare al curbei vor fi

$$\bar{N}(t) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\| \cdot \|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\|} \cdot (\bar{r}'(t) \times (\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)),$$

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\|} \cdot (\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)).$$

Avem şi

$$\dot{\kappa}(s_0) = \frac{d\kappa}{ds}(s_0) = \frac{d\kappa}{dt}(t_0) \cdot \frac{dt}{ds}(s_0) = \frac{\kappa'(t_0)}{s'(t_0)} = \frac{\kappa'(t_0)}{\|\bar{r}'(t_0)\|}$$

în punctul $M_0(s_0) = M_0(t_0)$ de pe curbă.

Centrul sferei osculatoare în M_0 va avea vectorul de poziţie

$$\begin{aligned} \bar{r}_C &= \bar{r}(t_0) + \tfrac{1}{\kappa(t_0)} \cdot \bar{N}(t_0) - \tfrac{\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0) \cdot \tau(t_0) \cdot \|\bar{r}'(t_0)\|} \cdot \bar{B}(t_0) \\ &= \bar{r}(t_0) + \tfrac{1}{\kappa(t_0) \cdot \|\bar{r}'(t_0)\| \cdot \|\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0)\|} \cdot (\bar{r}'(t_0) \times (\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0)) \\ &\quad - \tfrac{\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0) \cdot \tau(t_0) \cdot \|\bar{r}'(t_0)\| \cdot \|\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0)\|} \cdot (\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0)), \end{aligned}$$

iar raza sferei este dată de

$$R^2 = \frac{1}{\kappa^2(t_0)} + \frac{\kappa'^2(s_0)}{\kappa^4(t_0) \cdot \tau^2(t_0) \cdot \|\bar{r}'(t_0)\|^2}.$$

Observaţia 10.10. Dacă punctul $M_0(s_0)$ este un punct planar al curbei, adică dacă avem $\tau(s_0) = 0$ în acest punct, atunci, intuitiv, sfera osculatoare coincide cu planul osculator.

Teorema 10.6. *Fie o curbă (γ) ca în teorema 10.5. Atunci, într-un punct neplanar $M_0(s_0)$ al lui (γ), intersecţia dintre planul osculator al curbei şi sfera sa osculatoare este un cerc al cărui centru C_0 are vectorul de poziţie*

$$\bar{r}_{C_0} = \bar{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa^2(s_0)} \ddot{\bar{r}}(s_0),$$

iar raza sa este $R_0 = \frac{1}{\kappa(s_0)}$. Acest cerc se numeşte ***cercul osculator*** *al curbei în punctul M_0.*

Demonstraţie. Aşa cum ştim din capitolul dedicat studiului sferei, vectorul $\overrightarrow{CC_0}$ este normal la planul de secţiune, adică, în cazul nostru, la planul osculator. Dar versorul normal la acest plan este versorul director al binormalei la curbă $\bar{B}(s_0) = \frac{1}{\|\ddot{\bar{r}}(s_0)\|}(\dot{\bar{r}}(s_0) \times \ddot{\bar{r}}(s_0))$ şi, prin urmare, $\overrightarrow{CC_0} \parallel \bar{B}(s_0)$, iar ecuaţia dreptei (CC_0) va fi

$$(CC_0): \bar{r} = \bar{r}_C + \alpha \cdot \bar{B}(s_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Astfel vectorul de poziţie al punctului C_0 va fi $\bar{r}_{C_0} = \bar{r}_C \pm \alpha_0 \cdot \bar{B}(s_0)$, unde α_0 este distanţa de la centrul sferei osculatoare la planul osculator. De aici obţinem

$$\bar{r}_{C_0} = \bar{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \cdot \bar{N}(s_0) + \Big(- \frac{\dot{\kappa}(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)} \pm \alpha_0 \Big) \cdot \bar{B}(s_0).$$

Deoarece punctele M_0 şi C_0 aparţin planului osculator atunci şi vectorul $\bar{r}_{C_0} - \bar{r}(s_0)$ aparţine acestui plan, deci este ortogonal pe versorul $\bar{B}(s_0)$. Rezultă

$$(\bar{r}_{C_0} - \bar{r}(s_0)) \cdot \bar{B}(s_0) = -\frac{\dot{\kappa}(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)} \pm \alpha_0 = 0,$$

iar vectorul de poziţie al lui C_0 este

$$\bar{r}_{C_0} = \bar{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)\|\ddot{\bar{r}}(s_0)\|} \cdot \ddot{\bar{r}}(s_0).$$

Raza cercului de secţiune este

$$R_0 = \|\overrightarrow{CM_0}\| = \Big\| \frac{1}{\kappa(s_0)\|\ddot{\bar{r}}(s_0)\|} \cdot \ddot{\bar{r}}(s_0) \Big\| = \frac{1}{\kappa(s_0)}.$$

□

Observaţia 10.11. Dacă punctul M_0 este un punct inflexionar, atunci, ca şi în plan, intuitiv, cercul osculator se confundă cu tangenta la curbă în M_0.

Exemplul 10.8. Să se determine sfera osculatoare şi cercul osculator ale curbei parametrizate prin lungimea de arc

$$(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s) = e^s \cdot \bar{i} + (s+1) \cdot \bar{j} + (s^2 + s) \cdot \bar{k}, \quad s \in \mathbb{R},$$

în punctul $M_0(s_0 = 0) \in (\gamma)$.

Avem

$$\dot{\bar{r}}(s) = e^s \cdot \bar{i} + \bar{j} + (2s+1) \cdot \bar{k}, \quad \ddot{\bar{r}}(s) = e^s \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{k} \quad \text{şi} \quad \dddot{\bar{r}}(s) = e^s \cdot \bar{i}$$

şi, prin urmare,

$$\dot{\bar{r}}(0) = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}, \quad \ddot{\bar{r}}(0) = \bar{i} + 2 \cdot \bar{k} \quad \text{şi} \quad \dddot{\bar{r}}(0) = \bar{i}.$$

Putem calcula curbura şi torsiunea curbei în punctul $M_0(0)$:

$$\kappa(0) = \|\ddot{\bar{r}}(0)\| = \sqrt{5} \quad \text{şi} \quad \tau(0) = \frac{(\dot{\bar{r}}(0), \ddot{\bar{r}}(0), \dddot{\bar{r}}(0))}{\|\ddot{\bar{r}}(0)\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Într-un punct oarecare $M(s)$ al curbei (γ) curbura este dată de expresia

$$\kappa(s) = \|\ddot{\bar{r}}(s)\| = \sqrt{4 + e^{2s}},$$

deci derivata funcţiei curbură este $\kappa'(s) = -\frac{e^{2s}}{\sqrt{4+e^{2s}}}$. Astfel, în $M_0(0)$ avem $\kappa'(0) = -\frac{1}{5}$.

Tinând cont şi de

$$\dot{\bar{r}}(0) \times \ddot{\bar{r}}(0) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \bar{i} + \bar{j} - \bar{k},$$

conform teoremei 10.5, vectorul de poziţie al centrului sferei osculatoare a lui (γ) în punctul M_0 este

$$\begin{aligned}\bar{r}_C &= \bar{r}(0) + \tfrac{1}{\kappa^2(0)} \cdot \ddot{\bar{r}}(0) - \tfrac{\dot{\kappa}(0)}{\kappa^3(0)\tau(0)} \cdot (\dot{\bar{r}}(0) \times \ddot{\bar{r}}(0)) \\ &= \tfrac{31}{25} \cdot \bar{i} + \tfrac{51}{50} \cdot \bar{j} - \tfrac{1}{50} \cdot \bar{k},\end{aligned}$$

adică avem $C(\frac{31}{25}, \frac{51}{50}, -\frac{1}{50})$, iar raza sferei osculatoare este

$$R = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2(0)} + \frac{\dot{\kappa}^2(0)}{\kappa^4(0)\tau^2(0)}} = \frac{26\sqrt{5}}{25}.$$

Vectorul de poziţie al centrului cercului osculator al curbei în M_0 este

$$\bar{r}_{C_0} = \bar{r}(0) + \frac{1}{\kappa^2(0)}\ddot{\bar{r}}(0) = \frac{6}{5} \cdot \bar{i} + \bar{j} + \frac{2}{5} \cdot \bar{k},$$

deci avem $C_0(\frac{6}{5}, 1, \frac{2}{5})$, iar raza cercului osculator este $R = \frac{1}{\|\kappa(0)\|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

6. Înfăşurătoarea unei familii de suprafeţe

Fie familia de suprafeţe simple de clasă C^n, $n \geq 2$,

$$(\Sigma_\lambda) : F(x, y, z, \lambda) = 0, \quad \lambda \in I \subset \mathbb{R},$$

reprezentate implicit, unde I este un interval deschis, F este de clasă cel puţin C^2 în raport cu parametrul λ, iar $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ nu se anulează identic pe nici o suprafaţă (Σ_λ).

Definiţia 10.13. Se numeşte *înfăşurătoarea* familiei de suprafeţe (Σ_λ) o suprafaţă regulată (Σ) care este tangentă la toate componentele familiei, astfel încât orice punct al lui (Σ) se află şi pe o suprafaţă (Σ_λ).

Observaţia 10.12. Nu toate familiile de suprafeţe admit o înfăşurătoare.

Teorema 10.7. *Dacă familia de suprafeţe*

$$(\gamma_\lambda) : F(x, y, z, \lambda) = 0, \quad \lambda \in I \subset \mathbb{R},$$

ca mai sus, admite o înfăşurătoare (Σ), *atunci punctele acesteia verifică sistemul de ecuaţii*

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \end{array} \right., \tag{10.2}$$

unde am notat $F_\lambda = \frac{\partial F}{\partial \lambda}$.

Demonstraţie. Fie

$$(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \bar{i} + y(u, v) \cdot \bar{j} + z(u, v) \cdot \bar{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

înfăşurătoarea familiei de suprafeţe (Σ_λ). Ecuaţia planului tangent la suprafaţa (Σ) într-un punct oarecare $M(u, v)$ al acesteia este

$$(P) : (\bar{r} - \bar{r}(u, v), \bar{r}_u(u, v), \bar{r}_v(u, v)) = 0.$$

Din definiţia înfăşurătorii rezultă că, pentru fiecare $M(u,v) \in (\Sigma)$, există $\lambda = \lambda(u,v) \in I$ astfel încât $M \in (\Sigma_\lambda)$, iar planul (P) este tangent la (Σ_λ) în M. Putem defini aplicaţia $\phi : D \to \mathbb{R}$, prin

$$\phi(u,v) = F(x(u,v), y(u,v), z(u,v), \lambda(u,v)),$$

şi, din $M \in (\Sigma) \cap (\Sigma_\lambda)$ obţinem $\phi(u,v) = 0$, de unde, derivând în raport cu u, urmează

$$\nabla(x,y,z,\lambda) \cdot \bar{r}_u(u,v) + F_\lambda(x,y,z,\lambda) \cdot \lambda_u(u,v) = 0,$$

şi, derivând în raport cu v, avem

$$\nabla(x,y,z,\lambda) \cdot \bar{r}_v(u,v) + F_\lambda(x,y,z,\lambda) \cdot \lambda_v(u,v) = 0.$$

Cum vectorul $\bar{N} = \nabla F(x,y,z,\lambda)$ este normal la planul (P), rezultă

$$\nabla F(x,y,z,\lambda) \perp \bar{r}_u(u,v), \quad \nabla F(x,y,z,\lambda) \perp \bar{r}_v(u,v),$$

adică

$$\nabla F(x,y,z,\lambda) \cdot \bar{r}_u(u,v) = 0 \quad \text{şi} \quad \nabla F(x,y,z,\lambda) \cdot \bar{r}_v(u,v) = 0.$$

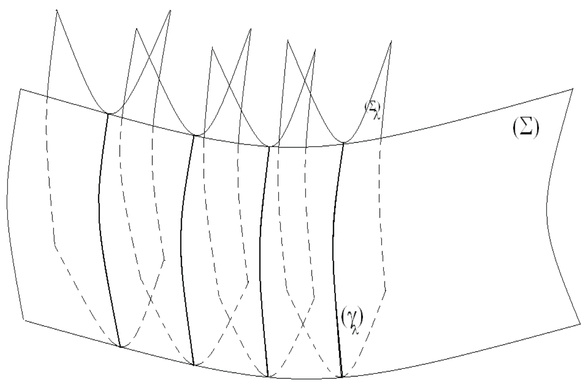
Astfel

$$F_\lambda(x,y,z,\lambda) \cdot \lambda_u(u,v) = 0 \quad \text{şi} \quad F_\lambda(x,y,z,\lambda) \cdot \lambda_v(u,v) = 0.$$

Dacă $F_\lambda(x,y,z,\lambda) \neq 0$ atunci $\lambda_u(u,v) = \lambda_v(u,v) = 0$, deci $\lambda =$ constant pe o vecinătate a lui (u,v) inclusă în D, ceea ce implică faptul că (Σ) şi (Σ_λ) au în comun o porţiune de suprafaţă. Cum aceasta este o contradicţie, urmează că $F_\lambda(x,y,z,\lambda) = 0$. □

Definiţia 10.14. Punctele care satisfac sistemul (10.2) se numesc *puncte caracteristice* ale familiei (Σ_λ) iar mulţimea acestor puncte se numeşte *înfăşurătoarea în sens larg* a familiei.

Observaţia 10.13. Pentru fiecare $\lambda \in I$ ecuaţia $F_\lambda(x,y,z,\lambda) = 0$ determină o suprafaţă şi, astfel, sistemul (10.2) determină o curbă (γ_λ) situată pe (Σ_λ) şi pe (Σ). Aceste curbe se numesc *curbele caracteristice* ale familiei de suprafeţe (Σ_λ).



Observaţia 10.14. Dacă de-a lungul unei curbe caracteristice (γ_λ) avem $\nabla F \times \nabla F_\lambda \neq 0$, atunci (γ_λ) este o curbă regulată şi în fiecare punct al ei (γ_λ) şi (Σ) au aceleaşi plane tangente.

Curbele caracteristice ale unei familii de suprafeţe formează o familie de curbe în spaţiu dată de ecuaţiile

$$(\gamma_\lambda) : \begin{cases} F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda) = 0 \end{cases}, \quad \lambda \in I.$$

Definiţia 10.15. Înfăşurătoarea familiei de curbe caracteristice (γ_λ) ale familiei de suprafeţe (Σ_λ), dacă există, se numeşte *muchia cuspidală* a familiei (Σ_λ).

Observaţia 10.15. Coordonatele punctelor muchiei cuspidale, dacă aceasta există, satisfac sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda) = 0 \\ F_{\lambda\lambda}(x,y,z,\lambda) = 0 \end{cases}.$$

Din teorema 9.25 obţinem următorul rezultat.

Teorema 10.8. *Dacă într-un punct caracteristic M_0 al familiei de suprafeţe (γ_λ) sunt verificate condiţiile*

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ F_{\lambda x} & F_{\lambda y} & F_{\lambda z} \\ F_{\lambda\lambda x} & F_{\lambda\lambda y} & F_{\lambda\lambda z} \end{vmatrix}_{|M_0} \neq 0 \quad \text{şi} \quad F_{\lambda\lambda\lambda}(M_0) \neq 0,$$

unde aplicaţia F este de clasă C^n, $n \geq 3$, atunci există o vecinătate deschisă $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ a lui M_0 pe care există muchia cuspidală a familiei de suprafeţe.

Exemplul 10.9. În [**10**] este determinată înfăşurătoarea familiei de plane normale ale unei curbe simple (γ) de clasă C^n, $n \geq 3$, şi muchia cuspidală a acestei familii.

Se arată că, dacă (γ) este parametrizată prin lungimea de arc $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s)$, atunci înfăşurătoarea familiei de plane normale are ecuaţia

$$(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(s,v) = \bar{r}(s) + \frac{1}{\kappa^2(s)}\ddot{\bar{r}}(s) + \frac{v}{\kappa(s)}(\dot{\bar{r}}(s) \times \ddot{\bar{r}}(s)),$$

unde κ este funcţia curbură a lui (γ).

Ecuaţia muchiei cuspidale este

$$(\Gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s) + \frac{1}{\kappa^2(s)} \cdot \ddot{\bar{r}}(s) - \frac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^3(s)\tau(s)} \cdot (\dot{\bar{r}}(s) \times \ddot{\bar{r}}(s)),$$

adică (Γ) este locul geometric al centrelor sferelor osculatoare ale lui (γ).

Exemplul 10.10. În continuare vom determina înfăşurătoarea familiei de plane osculatoare ale unei curbe simple (γ) de clasă C^n, $n \geq 3$, fără puncte planare sau inflexionare, şi muchia cuspidală a acestei familii.

Considerăm curba (γ) parametrizată natural $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(s),\ s \in I$, şi avem ecuaţia planului osculator într-un punct oarecare al curbei

$$(P_s) : (\bar{r} - \bar{r}(s), \dot{\bar{r}}(s), \ddot{\bar{r}}(s)) = 0,$$

care, folosind versorii $\bar{T}(s)$, $\bar{N}(s)$ şi $\bar{B}(s)$ ai reperului lui Frenet, poate fi scrisă sub formele

$$(P_s) : F(x, y, z, s) = (\bar{r} - \bar{r}(s)) \cdot \bar{B}(s) = 0,$$

unde $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$, sau

$$(P_s) : \bar{r} = \bar{r}(s) + u \cdot \bar{T}(s) + v \cdot \bar{N}(s). \tag{10.3}$$

Folosind a treia ecuaţie a lui Frenet, rezultă că înfăşurătoarea familiei planelor osculatoare este dată de

$$\begin{cases} F(x, y, z, s) = F(x, y, z, s) = (\bar{r} - \bar{r}(s)) \cdot \bar{B}(s) = 0 \\ F_s(x, y, z, s) = (\bar{r} - \bar{r}(s)) \cdot \dot{\bar{B}}(s) = (\bar{r} - \bar{r}(s)) \cdot (-\tau(s)\bar{N}(s)) = 0 \end{cases},$$

unde τ este funcţia torsiune a curbei (γ). Din a doua ecuaţie, rezultă

$$(u \cdot \bar{T}(s) + v \cdot \bar{N}(s)) \cdot (-\tau(s)\bar{N}(s)) = -v\tau(s) = 0,$$

de unde avem $v = 0$, deoarece $\tau(s) \neq 0$ în orice punct al curbei. Acum, înlocuind în ecuaţia (10.3) (care este echivalentă cu prima ecuaţie a sistemului), obţinem ecuaţia înfăşurătorii:

$$(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u, s) = \bar{r}(s) + u \cdot \bar{T}(s) = \bar{r}(s) + u \cdot \dot{\bar{r}}(s). \tag{10.4}$$

Ecuaţia muchiei cuspidale va fi dată de următorul sistem de ecuaţii, obţinut folosind formulele lui Frenet,

$$\begin{cases} F(x, y, z, s) & = & (\bar{r} - \bar{r}(s)) \cdot \bar{B}(s) = 0 \\ F_s(x, y, z, s) & = & (\bar{r} - \bar{r}(s)) \cdot (-\tau(s)\bar{N}(s)) = 0 \\ F_{ss}(x, y, z, s) & = & (\bar{r} - \bar{r}(s)) \cdot (-\dot{\tau}(s)\bar{N}(s) - \tau(s)\dot{\bar{N}}(s)) \\ & = & (\bar{r} - \bar{r}(s)) \cdot (-\kappa(s)\tau(s)\bar{T}(s) - \dot{\tau}(s)\bar{N}(s) + \tau^2(s)\bar{B}(s)) \end{cases}.$$

Aşa cum am văzut, din primele două ecuaţii rezultă (10.4) şi, înlocuind în a treia ecuaţie, avem

$$u \cdot \bar{T}(s) \cdot (-\kappa(s)\tau(s)\bar{T}(s) - \dot{\tau}(s)\bar{N}(s) + \tau^2(s)\bar{B}(s)) = 0,$$

de unde $-u\kappa(s)\tau(s) = 0$, adică $u = 0$. Acum, înlocuind $u = 0$ în (10.4), obţinem ecuaţia muchiei cuspidale: $\bar{r} = \bar{r}(s)$. Astfel muchia cuspidală este chiar curba (γ).

7. Generări de suprafeţe

7.1. Suprafeţe riglate.

Definiţia 10.16. O suprafaţă se numeşte *suprafaţă riglată* dacă există o familie de drepte cu următoarele proprietăţi:

(1) orice dreaptă din familie este situată pe suprafaţă;
(2) prin orice punct al suprafeţei trece cel puţin o dreaptă din familie.

O familie de drepte cu aceste proprietăţi se numeşte *sistem de generatoare rectilinii* pentru suprafaţă.

Aşa cum am văzut în capitolul *Cuadrice*, hiperboloidul cu o pânză şi paraboloidul hiperbolic sunt suprafeţe riglate. În cele ce urmează vom prezenta alte trei tipuri de astfel de suprafeţe.

7.1.1. *Suprafeţe cilindrice.*

DEFINIŢIA 10.17. Fie o dreaptă (d) şi o curbă (γ) în spaţiu. Locul geometric al punctelor situate pe dreptele paralele cu (d) care intersectează (γ) se numeşte *suprafaţă cilindrică*. Curba (γ) se numeşte *curba directoare* a acestei suprafeţe.

Dacă ecuaţia vectorială parametrică a dreptei (d) este $(d) : \bar{r} = \bar{r}(v) = \bar{r}_0 + v \cdot \bar{a}$, unde $\bar{r}_0$ este vectorul de poziţie al unui punct de pe dreaptă şi vectorul constant $\bar{a}$ este vectorul său director, iar ecuaţia vectorială parametrică a curbei directoare este $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(u)$, atunci obţinem imediat ecuaţia suprafeţei cilindrice:

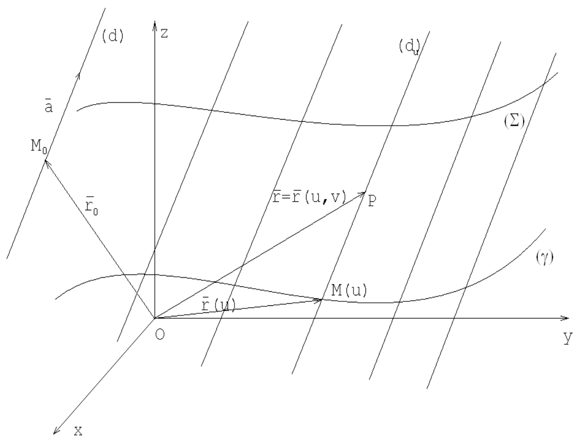
$$(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u, v) = \bar{r}(u) + v \cdot \bar{a}.$$

Avem $\bar{r}_u(u, v) = \bar{r}'(u)$ şi $\bar{r}_v(u, v) = \bar{a}$, deci planul tangent al unei astfel de suprafeţe într-un punct oarecare $P(u, v)$ al lui (Σ) va fi dat de ecuaţia

$$(\pi) : (\bar{r} - \bar{r}(u, v), \bar{r}'(u), \bar{a}) = 0 \Leftrightarrow (P) : (\bar{r} - \bar{r}(u), \bar{r}'(u), \bar{a}) = 0,$$

deoarece $\bar{a} \perp (\bar{r}'(u) \times \bar{a})$, iar normala la suprafaţă în acest punct este $\bar{N}(u, v) = \bar{r}'(u) \times \bar{a}$.

OBSERVAŢIA 10.16. Se observă că în toate punctele situate pe fiecare dreaptă (d_u) determinată de punctele cu vectorii de poziţie $\bar{r}_0$ şi $\bar{r}(u)$, cu u fixat, avem acelaşi plan tangent şi aceeaşi normală la suprafaţă.



Dacă dreapta (d) este dată cu ajutorul ecuaţiilor generale

$$(d) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

iar curba directoare este dată implicit

$$(\gamma) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

atunci dreptele paralele cu (d) vor avea ecuaţiile de forma

$$(d_{\lambda,\mu})\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = \lambda \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \mu \end{cases},$$

unde λ şi μ sunt parametri reali, şi condiţia ca o astfel de dreaptă să intersecteze (γ) este ca sistemul

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z = \lambda \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \mu \end{cases}$$

să fie compatibil. Eliminând x, y şi z între aceste ecuaţii obţinem condiţia de compatibilitate a sa, de forma $\phi(\lambda,\mu) = 0$. Înlocuind λ şi μ în această condiţie, rezultă ecuaţia implicită a suprafeţei cilindrice:

$$(\Sigma) : \Psi(x,y,z) = \phi(A_1x + B_1y + C_1z, A_2x + B_2y + C_2z) = 0.$$

Exemplul 10.11. Cilindrii pătratici, adică cilindrul eliptic:

$$(CE) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

cilindrul hiperbolic:

$$(CH) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

şi cilindrul parabolic:

$$(CPb) : y^2 = 2px, \quad x > 0,$$

studiaţi în capitolul *Cuadrice* sunt exemple de suprafeţe cilindrice. Cum aceste suprafeţe sunt date în reperul considerat prin ecuaţiile lor canonice, atunci avem curbele lor directoare: elipsa $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, hiperbola $(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ şi respectiv parabola $(P) : y^2 = 2px,\ x > 0$, situate în planul de coordonate (xOy), iar dreapta (d) este, în toate cazurile, axa (Oz).

Exemplul 10.12. Să se determine ecuaţia suprafeţei cilindrice determinată de dreapta

$$(d) : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

şi curba directoare

$$(\gamma) : \begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Dreptele paralele cu (d) sunt date de

$$(d_{\lambda,\mu})\begin{cases} x - 2y = \lambda \\ x + z = \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

şi avem sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2y = \lambda \\ x + z = \mu \end{cases}.$$

Din ultimele trei ecuaţii rezultă $x = \lambda - 2\mu$, $y = -\mu$, $z = 3\mu - \lambda$ şi, înlocuind în prima ecuaţie, obţinem condiţia de compatibilitate a sistemului:

$$\phi(\lambda, \mu) = (\lambda - 2\mu)^2 - \mu^2 - (3\mu - \lambda)^2 - 1 = 0,$$

adică

$$\phi(\lambda, \mu) = 2\lambda\mu - 6\lambda^2 - 1 = 0.$$

Ecuaţia suprafeţei cilindrice va fi

$$(\Sigma) : \Psi(x, y, z) = \phi(x - 2y, x + z) = -5x^2 - 24y^2 + 20xy + 2xz - 4yz - 1 = 0.$$

7.1.2. *Suprafeţe conice.*

DEFINIŢIA 10.18. Fie un punct V şi o curbă (γ) în spaţiu. Locul geometric al punctelor situate pe dreptele care trec prin V şi intersectează (γ) se numeşte *suprafaţă conică*. Curba (γ) se numeşte *curba directoare* a acestei suprafeţe.

Dacă vectorul de poziţie al punctului V este $\bar{r}_0$, iar ecuaţia vectorială parametrică a curbei directoare este $(\gamma) : \bar{r} = \bar{r}(u)$, atunci o dreaptă care trece prin V şi intersectează (γ) în punctul $M(u) \in (\gamma)$ are vectorul director $\bar{r}(u) - \bar{r}_0$, iar vectorul de poziţie al unui punct de pe această dreaptă (sau, echivalent, ecuaţia suprafeţei conice) va fi:

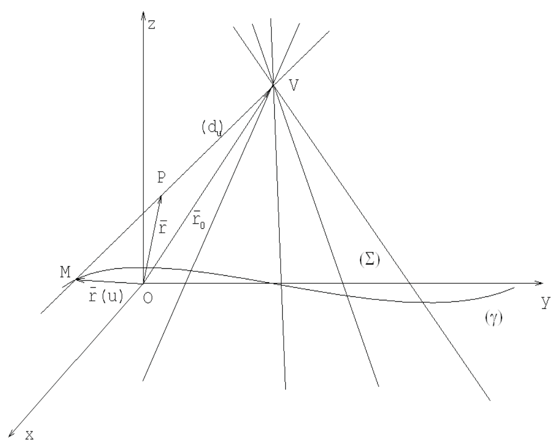
$$(\Sigma) : \bar{r} = \bar{r}(u, v) = \bar{r}_0 + v \cdot (\bar{r}(u) - \bar{r}_0) = (1 - v) \cdot \bar{r}_0 + v \cdot \bar{r}(u).$$

Avem $\bar{r}_u(u, v) = v \cdot \bar{r}'(u)$ şi $\bar{r}_v(u, v) = \bar{r}(u) - \bar{r}_0$, deci planul tangent la (Σ) într-un punct oarecare $P(u, v)$ de pe suprafaţă este

$$(\pi) : (\bar{r} - \bar{r}(u, v), v \cdot \bar{r}'(u), \bar{r}(u) - \bar{r}_0) = 0 \Leftrightarrow (P) : (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{r}'(u), \bar{r}(u) - \bar{r}_0) = 0,$$

deoarece $(\bar{r}(u) - \bar{r}_0) \perp (\bar{r}'(u) \times (\bar{r}(u) - \bar{r}_0)$, iar normala la suprafaţă în acest punct este $\bar{N}(u, v) = \bar{r}'(u) \times (\bar{r}(u) - \bar{r}_0)$.

OBSERVAŢIA 10.17. Ca şi în cazul suprafeţelor cilindrice, în toate punctele situate pe fiecare dreaptă (d_u) determinată de punctele V şi $M(u) \in (\gamma)$, cu u fixat, avem acelaşi plan tangent şi aceeaşi normală la suprafaţă.



Dacă avem $V(x_0, y_0, z_0)$ atunci V poate fi privit ca fiind punctul de intersecţie al planelor $(P_1) : x - x_0 = 0$, $(P_2) : y - y_0 = 0$ şi $(P_3) : z - z_0 = 0$. Astfel obţinem ecuaţia unei drepte oarecare din fasciculul de drepte care trec prin V:

$$(d_{\lambda,\mu}) : \begin{cases} x - x_0 = \lambda(y - y_0) \\ z - z_0 = \mu(y - y_0) \end{cases},$$

unde λ şi μ sunt parametri reali. Pentru ca o dreaptă din fascicul să intersecteze curba (γ), dată prin ecuaţiile implicite $(\gamma) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \\ x - x_0 = \lambda(y - y_0) \\ z - z_0 = \mu(y - y_0) \end{cases}$$

să fie compatibil. Determinând x, y şi z în funcţie de λ şi μ din trei dintre ecuaţii şi apoi înlocuind în ecuaţia rămasă obţinem condiţia de compatibilitate de forma $\phi(\lambda, \mu) = 0$, de unde rezultă ecuaţia implicită a suprafeţei conice:

$$(\Sigma) : \Psi(x, y, z) = \phi\Big(\frac{x - x_0}{y - y_0}, \frac{z - z_0}{y - y_0}\Big) = 0.$$

Exemplul 10.13. Conul pătratic

$$(CP) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

este, aşa cum rezultă din studiul efectuat în capitolul *Cuadrice*, o suprafaţă conică pentru care punctul V coincide cu originea O a reperului considerat, iar curba directoare este elipsa $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 0$, situată în planul de ecuaţie $z = h \neq 0$.

Exemplul 10.14. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice determinată de punctul $V(1, 0, 1)$ şi curba directoare

$$(\gamma) : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Privit ca intersecţia a trei plane punctul V este dat de $V : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$, iar dreptele care trec prin punct sunt, prin urmare, date de

$$(d_{\lambda,\mu}) : \begin{cases} x - 1 = \lambda y \\ z - 1 = \mu y \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

O astfel de dreaptă intersectează curba (γ) dacă sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x - 1 = \lambda y \\ z - 1 = \mu y \end{cases}$$

este compatibil. Din ultimele trei ecuaţii rezultă $x = \frac{-2\lambda+2\mu+2}{\lambda+2\mu+2}$, $y = -\frac{3}{\lambda+2\mu+2}$ şi $z = \frac{\lambda-\mu+2}{\lambda+2\mu+2}$, şi apoi, înlocuind în prima ecuaţie avem condiţia de compatibilitate a sistemului

$$\phi(\lambda,\mu) = \Big(\frac{-2\lambda+2\mu+2}{\lambda+2\mu+2}\Big)^2 + \Big(\frac{3}{\lambda+2\mu+2}\Big)^2 - \frac{2\lambda-2\mu+4}{\lambda+2\mu+2} = 0,$$

adică

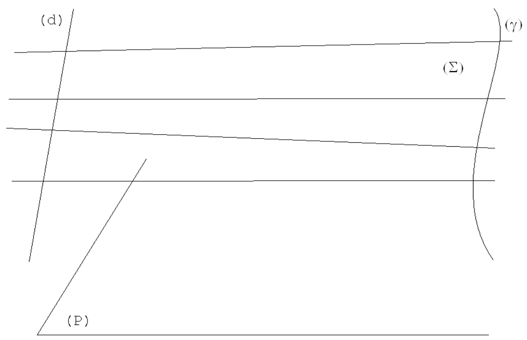
$$\phi(\lambda,\mu) = 2\lambda^2 + 8\mu^2 - 10\lambda\mu - 16\lambda - 20\mu + 5 = 0.$$

Ecuaţia suprafeţei conice este

$$\begin{aligned}(\Sigma) : \Psi(x,y,z) &= \phi\Big(\tfrac{x-1}{y}, \tfrac{z-1}{y}\Big)\\ &= 2x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 16xy - 10xz - 20yz\\ &\quad +6x + 36y - 6z = 0.\end{aligned}$$

7.1.3. *Conoizi cu plan director.*

Definiţia 10.19. Fie o dreaptă (d), un plan (P) şi o curbă (γ) în spaţiu. Locul geometric al punctelor situate pe dreptele paralele cu (P) care intersectează dreapta (d) şi curba (γ) se numeşte *conoid cu plan director*. Curba (γ) se numeşte *curba directoare* a acestei suprafeţe.



În continuare, presupunem că dreapta (d) este dată de ecuaţiile

$$(d) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

curba (γ) de ecuaţiile

$$(\gamma) : \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases},$$

iar planul (P) este dat de

$$(P) : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Un plan din fasciculul de plane cu axa (d), diferit de planul (P_2), va avea ecuaţia

$$(P_\lambda) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2),$$

unde λ este un parametru real. Astfel, o dreaptă care intersectează pe (d) şi este paralelă cu planul (P) va avea ecuaţiile de forma

$$(d_{\lambda,\mu}) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \\ Ax + By + Cz = \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

O astfel de dreaptă intersectează curba (γ) dacă şi numai dacă sistemul

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \\ Ax + By + Cz = \mu \end{cases}$$

este compatibil. Eliminând x, y şi z între ecuaţiile acestui sistem rezultă condiţia de compatibilitate de forma $\phi(\lambda, \mu) = 0$. De aici se obţine ecuaţia implicită a conoidului cu plan director:

$$(\Sigma) : \Psi(x, y, z) = \phi\Big(\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}, Ax + By + Cz\Big) = 0.$$

Exemplul 10.15. Să se determine ecuaţia conoidului cu plan director determinat de dreapta

$$(d) : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

planul $(P) : x + y + z = 0$ şi curba directoare

$$(\gamma) : \begin{cases} x^2 + 2y^2 + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

Ecuaţia unei drepte care intersectează dreapta (d) şi este paralelă cu planul (P) va fi

$$(d_{\lambda,\mu}) : \begin{cases} x - y = \lambda z \\ x + y + z = \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

O dreaptă dată prin ecuaţiile de mai sus intersectează curba directoare (γ) dacă şi numai dacă sistemul

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = \lambda z \\ x + y + z = \mu \end{cases}$$

este compatibil. Din ultimele trei ecuaţii rezultă $x = z = \frac{\mu}{3-\lambda}$, $y = \frac{(1-\lambda)\mu}{3-\lambda}$ şi, înlocuind în prima ecuaţie, obţinem condiţia de compatibilitate:

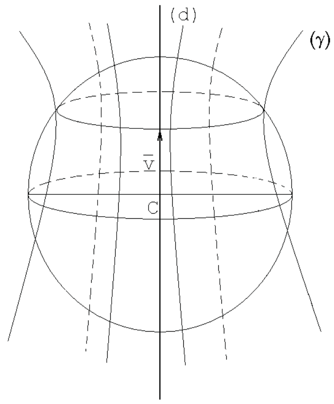
$$\phi(\lambda, \mu) = \lambda^2\mu - 4\lambda\mu - \lambda + 3\mu + 3 = 0$$

şi apoi ecuaţia conoidului cu plan director

$$\begin{aligned} (\Sigma) : \Psi(x, y, z) &= \phi\Big(\tfrac{x-y}{z}, x + y + z\Big) \\ &= x^3 + y^3 + 3z^4 + 3z^3 - x^2y - 3x^2z \\ &\quad -xy^2 - 2xyz + 5y^2z - 5xz^2 + 5yz^2 + 3xz^3 + 3yz^3 = 0 \end{aligned}$$

7.2. Suprafeţe de rotaţie.

DEFINIŢIA 10.20. Suprafaţa generată de o curbă (γ) care execută o mişcare de rotaţie în jurul unei drepte fixe (d) se numeşte *suprafaţă de rotaţie*. Dreapta (d) se numeşte *axa de rotaţie* a suprafeţei.



OBSERVAŢIA 10.18. O suprafaţă de rotaţie poate fi gândită şi ca locul geometric al punctelor situate pe cercurile situate în plane perpendiculare pe dreapta (d), cu centrul pe această dreaptă, care intersectează curba (γ).

În aplicaţii vom determina ecuaţia unei suprafeţe de rotaţie în modul sugerat de observaţia de mai sus. Astfel, dacă axa de rotaţie trece printr-un punct $C(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul director $\bar{v}(a, b, c)$, atunci un cerc cu centrul pe (d), situat într-un plan (P) perpendicular pe dreaptă, va fi cercul de secţiune al unei sfere cu centrul C şi de rază variabilă, cu planul (P), iar ecuaţiile sale vor avea forma

$$(\mathcal{C}_{\lambda,\mu}) : \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ ax + by + cz = \mu \end{cases},$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali. Pentru ca aceste cercuri să intersecteze curba $(\gamma) : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, sistemul

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ ax + by + cz = \mu \end{cases}$$

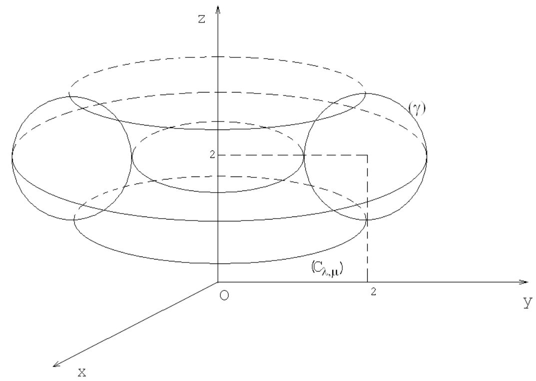
trebuie să fie compatibil. Eliminând x, y şi z între ecuaţiile sistemului obţinem condic tia de compatibilitate de forma $\phi(\lambda, \mu) = 0$, de unde urmează ecuaţia suprafeţei de rotaţie:

$$(\Sigma) : \Psi(x, y, z) = \phi(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, ax + by + cz) = 0.$$

Exemplul 10.16. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie având axa de rotaţie (Oz) şi având drept curbă generatoare cercul

$$(\gamma):\begin{cases} x^2+(y-2)^2+(z-2)^2-1=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Această suprafaţă se numeşte *tor circular*.



Un punct de pe dreapta (Oz) este punctul $O(0,0,0)$, iar vectorul director al dreptei este $\bar{v}=\bar{k}=(0,0,1)$. Astfel, ecuaţiile unui cerc cu centrul pe (Oz), situat intr-un plan perpendicular pe (Oz), vor fi

$$(\mathcal{C}_{\lambda,\mu}):\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ z=\mu \end{cases},\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Sistemul format din ecuaţiile curbei (γ) şi ecuaţiile unui cerc $(\mathcal{C}_{\lambda,\mu})$ este

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2+(z-2)^2-1=0 \\ x=0 \\ x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ z=\mu \end{cases}.$$

Din ultimele trei ecuaţii avem $x=0$, $y=\sqrt{\lambda^2-\mu^2}$ şi $z=\mu$. Înlocuind în prima ecuaţie, obţinem condiţia de compatibilitate a acestui sistem:

$$\phi(\lambda,\mu)=(\sqrt{\lambda^2-\mu^2}-2)^2+(\mu-2)^2-1=0$$

şi, de aici, ecuaţia torului

$$(\Sigma):\Psi(x,y,z)=\phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2},z)=x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+y^2}-4z+7=0.$$

Glosar

Bibliografie

[1] M. Anastasiei şi M. Crâşmăreanu. *Lecţii de geometrie (Curbe şi suprafeţe)*. Editura TehnoPress. Iaşi, 2005.

[2] A. Cărăuşu. *Vector algebra, analytic and differential geometry*. Editura PIM. Iaşi, 2003.

[3] V. Cruceanu. *Elemente de algebră liniară şi geometrie*. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, 1973.

[4] M. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Pretince Hall. 1976.

[5] A. Gray. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press. Boca Raton, Florida, 1999.

[6] R. Miron. *Geometrie analitică*. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, 1976.

[7] S. Montiel şi A. Ros. *Curves and Surfaces*. American Mathematical Society. Real Sociedad Matemática Española. Graduate Studies in Mathematics. Volume 69. Providence, Rhode Island, 2005.

[8] V. Murgescu. *Curs de analiză matematică şi matematici speciale*. Volumul 2. Rotaprint I.P. Iaşi. Iaşi, 1980.

[9] V. Murgescu. *Algebră liniară şi geometrie analitică*. Partea I. Rotaprint I.P. Iaşi. Iaşi, 1980.

[10] A. Neagu. *Geometrie*. Rotaprint Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" din Iaşi. Iaşi, 1996.

[11] C. Niţescu. *Algebre lineaire*. Geometry Balkan Press. Bucureşti, 2000.

[12] C. Oniciuc. *Lecţii de geometria diferenţială a curbelor şi suprafeţelor* (versiune electronică). `www.math.uaic.ro/ oniciucc/dfcs1.pdf`

[13] V. Oproiu. *Geometrie diferenţială*. Editura Universităţii "Al.I. Cuza" Iaşi. Iaşi, 2002.

[14] N. Papaghiuc şi C. Călin. *Algebră liniară şi geometrie*. Editura Performantica. Iaşi, 2003.

[15] D. Papuc. *Geometrie diferenţială*. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, 1982.

[16] A.L. Pletea, A. Corduneanu şi M. Lupan. *Lecţii de algebră liniară*. Editura Politehnium. Iaşi, 2005.

[17] I. Pop şi Gh. Neagu. *Algebră liniară şi geometrie analitică în plan şi în spaţiu*. Editura Plumb. Bacău, 1996.

[18] C. Popovici. *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială. Utilizare MATLAB*. Editura Politehnium. Iaşi, 2008.

[19] A. Precupanu. *Bazele analizei matematice*. Editura Canova. Iaşi, 1995.

[20] G. Teodoru. *Algebră liniară şi geometrie analitică*. Partea a II-a. Rotaprint I.P. Iaşi. Iaşi, 1980.

[21] G. Teodoru şi D. Fetcu. *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială. Culegere de probleme*. Rotaprint Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi. Iaşi, 2004.

[22] C. Udrişte. *Algebră liniară. Geometrie analitică*. Geometry Balkan Press. Bucureşti, 1996.