Matematici Speciale
Tema 1

Problema 1 *Rezolvaţi următoarele ecuaţii cu variabile separabile.*

1. $(1+t^2)x' - 2tx = 0$.
2. $\dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{x+2}\cos t$, *cu condiţia* $x(\pi) = 0$.

Problema 2 *Rezolvaţi următoarele ecuaţii liniare*

1. $x' = -2x + 3e^{4t}$.
2. $x' = x - t^2$.
3. $tx' = x - \ln t$.

Problema 3 *Rezolvaţi următoarele ecuaţii Bernoulli.*

1. $t^2x' - x^3 = tx$.
2. $x' + x = 2tx^2$.

Problema 4 *Rezolvaţi următoarele ecuaţii Riccati.*

1. $x' = (x-t)^2 + 1$, *fiind dată soluţia particulară* $\varphi(t) = t$.
2. $x' = x^2 - \dfrac{x}{t} - \dfrac{1}{t^2}$, *ştiind că admite o soluţie particulară de forma* $\varphi(t) = \dfrac{A}{t}$, *care trebuie determinată.*

Problema 5 *Rezolvaţi următoarele ecuaţii cu diferenţiale exacte.*

1. $(t^3 + x)dt + tdx = 0$. *Poate fi rezolvată şi ca ecuaţie liniară?*
2. $2txdt + (t^2 - x^2)dx = 0$.

Problema 6 *Rezolvaţi următoarele ecuaţii omogene*

1. $x' = \dfrac{t^2 + x^2}{tx}$, $t > 0$.
2. $x' = \dfrac{x}{t} + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2$, $t > 0$, *cu condiţia* $x(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Problema 7 1. (a) *Demonstraţi că*

$$S = \{x_1(t) = 2\sin t + 3\cos t, x_2(t) = 3\sin t + 4\cos t\}$$

reprezintă o bază în spaţiul soluţiilor ecuaţiei $x'' + x = 0$.

(b) *Demonstraţi că*

$$S = \{x_1(t) = e^t + \sin t, x_2(t) = e^t + \cos t, x_3(t) = \sin t + \cos t\}$$

reprezintă o bază în spaţiul soluţiilor ecuaţiei $x''' - x'' + x' - x = 0$.

Problema 8 1. *Rezolvaţi următoarele ecuaţii ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi neomogene*

(a) $x'' - 4x' + 3x = 4e^{2t}$.

(b) $x'' - 6x' + 8x = 3e^{2t}$.

(c) $x'' - 3x' - 4x = t + 1$.

(d) $x'' + 6x' + 10x = 2t - 1$.

Problema 9 1. *Rezolvaţi următoarele ecuaţii ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi neomogene*

(a) $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 12e^{4t} + t + 2$.

Problema 10 1. *Rezolvaţi următoarele ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi neomogene*

(a) $x'' + x = \dfrac{1}{\sin t}$, $t \in (0, \pi)$.

(b) $x'' + x = 6\sin^2 t$.

Problema 11 *Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi omogene folosind metoda eliminării*

1.
$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -4x + 3y \end{cases} \quad \text{cu condiţiile iniţiale} \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + 2z \\ y' = 2x + 2y + 2z \\ z' = -3x - 6y - 6z \end{cases}$$

Problema 12 *Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi omogene folosind metoda matriceală*

1.

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1' = 3x_2 - 4x_3 \\ x_2' = -x_3 \\ x_3' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Problema 13 *Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi omogene*

1.

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$$

Problema 14 *Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi omogene*

1.

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 3z \\ y' = x + y + 2z \\ z' = x - y + 4z \end{cases}$$

Problema 15 *Rezolvaţi următoarele sisteme*

1.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + e^{-2t} \\ x_2' = 4x_1 - x_2 \end{cases}.$$

2.

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 2e^t \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 14e^t \end{cases}.$$

3.

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^t \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + t \end{cases}.$$