

Matematici Speciale

Tema 1

Problema 1 Determinați valorile următoarelor integrale pe domenii paralelipipedice

1. $\iiint_{[0,1] \times [1,2] \times [0,\frac{\pi}{2}]} xy^2 e^{y^3} \cos z dx dy dz.$

2. $\iiint_{[1,e] \times [2,3] \times [0,1]} \frac{\ln x}{x} ye^z dx dy dz.$

3. $\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{4}] \times [0,1]} \sin x \cos y dx dy dz.$

Problema 2 Folosind eventual reducerea la integrale iterate, calculați

1. $\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}]} \cos(x+y+z) dx dy dz.$

Problema 3 Cu ajutorul coordonatelor cilindrice, determinați

1. $\iiint_V z dx dy dz, V = \{(x, y, z); 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq z \leq 2\}.$

2. $\iiint_V (x+y)z dx dy dz, V = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0, 0 \leq z \leq 3\}.$

3. $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, V = \{(x, y, z); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \leq 0, 1 \leq z \leq 3\}.$

Problema 4 Cu ajutorul coordonatelor sferice, determinați

1. $\iiint_V z dx dy dz, V = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$

2. $\iiint_V xyz dx dy dz, V = \{(x, y, z); 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x, y, z \geq 0\}.$

3. $\iiint_V \sqrt{3 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz, unde V este bila sferică cu centrul în origine și rază 1.$

Problema 5 Determinați volumul domeniului spațial V mărginit de paraboloidul (PB) : $x^2 + y^2 = 4z$ și planul (P) : $z = 4$.

Problema 6 Determinați $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, unde V este domeniul spațial delimitat de sfera (S) : $x^2 + y^2 + z^2 = 20$ și de paraboloidul (PB) : $z = x^2 + y^2$.$

Problema 7 Rezolvați următoarele ecuații

1. $x'' = 0$, cu condițiile $x(2) = 3, x'(2) = 1$.

2. $x^{(3)} = 0$, cu condițiile $x(1) = 3, x'(1) = -1, x''(1) = 1$.

Problema 8 Rezolvați ecuația $x'' = \sin t, t \in \mathbb{R}$, știind că $x(0) = 1, x'(0) = 2$.

Problema 9 Rezolvați următoarele ecuații cu variabile separabile.

1. $(1 + t^3)x' - 3t^2x = 0$.

2. $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x+2} \sin t$, cu condiția $x(\pi) = 0$.

Problema 10 Rezolvați următoarele ecuații liniare

1. $x' = -2x + 5e^{4t}$.

2. $x' = x - t$.

3. $tx' = x - 2 \ln t$.

Problema 11 Rezolvați următoarele ecuații Bernoulli

1. $t^2x' - x^3 = tx$.

2. $x' + x = 2tx^2$.

Problema 12 Rezolvați următoarele ecuații Riccati

1. $x' = (x + t)^2 - 1$, fiind dată soluția particulară $\varphi(t) = -t$.

2. $x' = x^2 - \frac{x}{t} - \frac{1}{t^2}$, știind că admite o soluție particulară de forma $\varphi(t) = \frac{A}{t}$, care trebuie determinată.

Problema 13 Rezolvați următoarele ecuații cu diferențiale exacte

1. $(t^3 + x)dt + tdx = 0$. Poate fi rezolvată și ca ecuație liniară?

2. $2txdt + (t^2 + 3x^2)dx = 0$.

Problema 14 Rezolvați următoarele ecuații omogene

1. $x' = \frac{2t^2 + x^2}{tx}, t > 0.$

2. $x' = \frac{x}{t} + 2\left(\frac{x}{t}\right)^2, t > 0, \text{ cu condiția } x(1) = -1.$

Problema 15 1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale cu coeficienți constanți neomogene

(a) $x'' - 4x' + 3x = 2e^{2t}.$

(b) $x'' - 6x' + 8x = 3e^{2t}.$

(c) $x'' - 3x' - 4x = t + 2.$

(d) $x'' + 6x' + 10x = 2t + 1.$

Problema 16 1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale cu coeficienți constanți neomogene

(a) $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 12e^{4t} + t + 1.$

Problema 17 1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale cu coeficienți constanți neomogene

(a) $x'' + x = \frac{1}{\sin t}, t \in (0, \pi).$

(b) $x'' + x = 6 \sin^2 t.$