ELEMENTE DE CALCUL DIFERENŢIAL

(manual universitar)

Paul GEORGESCU

Cuprins

Capitolul 1

NOŢIUNI GENERALE

1.1 Teoria mulţimilor

Dacă A este o mulţime, vom nota prin $x \in A$ faptul ca x este un element al mulţimii A (sau x *aparţine* lui A), respectiv prin $x \notin A$ faptul că x nu este un element al mulţimii A (sau x *nu aparţine* lui A). Mulţimea care nu conţine niciun element se va numi *mulţimea vidă* şi se va nota $\emptyset$.

Submulţimi, supramulţimi

Fiind date două mulţimi A şi B, vom spune că A este o *submulţime* a lui B (şi vom nota $A \subseteq B$), sau B este o *supramulţime* a lui A (şi vom nota $B \supseteq A$) dacă orice element al lui A este şi un element al lui B. Desigur, $\emptyset \subseteq A$ pentru orice mulţime A. Daca A este o submulţime a lui B, dar $A \neq B$, atunci A se numeşte *submulţime proprie* a lui B, ceea ce se notează $A \subsetneq B$. Dată o mulţime A, se va nota cu $\mathcal{P}(A)$ *mulţimea submulţimilor* (*părţilor*) sale. Se observă că $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

Egalitatea a două mulţimi

Două mulţimi A, B vor fi numite *egale* dacă au aceleaşi elemente, acest lucru fiind notat $A = B$. Se observă că $A = B$ dacă şi numai dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$, această caracterizare fiind utilă pentru demonstrarea practică a multor egalităţi de mulţimi. Dacă A şi B nu sunt egale, acest lucru se notează $A \neq B$, ceea ce revine, conform observaţiei anterioare, fie la $A \nsubseteq B$, fie la $B \nsubseteq A$.

Operaţii cu mulţimi

Fie X o mulţime şi $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Definim mulţimile

$$A \cup B = \{x \in X; x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in X; x \in A \wedge x \in B\},$$

numite *reuniunea*, respectiv *intersecţia* lui A şi B. Dacă $A \cap B = \emptyset$, A şi B se numesc *disjuncte*.

Aceste operaţii cu mulţimi au următoarele proprietăţi

$$\begin{aligned} A \cup A = A, &\quad A \cap A = A \\ A \cup B = B \cup A, &\quad A \cap B = B \cap A \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), &\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), &\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

(*idempotenţă*, *comutativitate*, *asociativitate*, respectiv *distributivitate*). Proprietăţile de asociativitate asigură faptul ca scrierile $A \cup B \cup C$ şi $A \cap B \cap C$ nu sunt ambigue.

Operaţiile de reuniune şi intersecţie se pot extinde la familii nu neapărat finite de mulţimi. În acest sens, dată o familie $(A_i)_{i \in I}$, unde I este o mulţime oarecare de indici, finită sau nu, iar $A_i \in \mathcal{P}(X)$ pentru orice $i \in I$, vom defini

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X; \text{ există } i \in I \text{ astfel ca } x \in A_i\},$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X; x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.$$

Mulţimile

$$A \backslash B = \{x \in X; x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

se numesc *diferenţa*, respectiv *diferenţa simetrică* a mulţimilor A şi B. Mulţimea

$$c_X A = \{x \in X; x \notin A\}$$

se numeşte *complementara* lui A faţă de X; dacă nu există pericol de confuzie, $c_X A$ se notează cA. Se observă atunci că

$$A \backslash B = A \cap cB$$

şi au loc următoarele proprietăţi, numite *formulele lui de Morgan*

$$c\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} cA_i$$
$$c\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} cA_i.$$

Vom numi *produs cartezian* al mulţimilor A şi B (în această ordine) mulţimea tuturor perechilor ordonate (x, y), cu $x \in A$, iar $y \in B$, adică

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \wedge y \in B\}.$$

În general, $A \times B \neq B \times A$. Două elemente (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) ale produsului cartezian $A \times B$ sunt egale dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.

Date mulţimile A_1, $A_2, \ldots, A_n$, numim *produs cartezian* al acestora mulţimea tuturor perechilor ordonate cu n elemente (denumite şi *n-uple*) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, cu $a_i \in A_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, adică

$$A_1 \times A_2 \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in A_i \text{ pentru orice } 1 \leq i \leq n\}.$$

Dacă $A_i = A$ pentru $1 \leq i \leq n$, se utilizează notaţia prescurtată

$$A \times A \times \ldots \times A = A^n.$$

Mulţimi de numere

În cele ce urmează, vom presupune cunoscute proprietăţile următoarelor mulţimi de numere:

$\mathbb{N}$ $=\{0, 1, 2, \ldots\}$ - mulţimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z}$ $=\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ - mulţimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q}$ $=\left\{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ - mulţimea numerelor raţionale.

Între acestea au loc următoarele relaţii de incluziune

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Pentru $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$, se notează cu $A^* = A \setminus \{0\}$ mulţimea numerelor nenule din A.

1.2 Construcţia axiomatică a mulţimii numerelor reale

Intuitiv, mulţimea numerelor reale poate fi înţeleasă ca mulţimea tuturor fracţiilor zecimale infinite, sub forma

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{\overline{r, r_1 r_2 \ldots r_n \ldots}; r \in \mathbb{Z}, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}\} \\ &= \left\{ r + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \cdots + \frac{r_n}{10^n} + \cdots \right\}.\end{aligned}$$

Definiţia de mai sus (îndeajuns de explicită, dar totuşi pur algebrică) este însă greu de folosit în analiza matematică, necesitând unele completări. Din punctul de vedere al analizei matematice, mulţimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$, va fi un corp comutativ total ordonat, a cărui relaţie de ordine este compatibilă cu operaţiile de adunare şi înmulţire şi care în plus satisface o anumită axiomă de completitudine. Aceste proprietăţi, ce vor fi clarificate în cele de mai jos, sunt motivate de necesitatea de a efectua operaţiile elementare cu numere (structura de corp), necesitatea de a putea compara numere şi de a putea lucra convenabil cu inegalităţile rezultate (structura de ordine, împreună cu relaţiile de compatibilitate cu operaţiile), precum şi de a diferenţia mulţimea numerelor reale de mulţimea numerelor raţionale (axioma de completitudine).

Vom numi mulţimea numerelor reale o mulţime $\mathbb{R}$ înzestrată cu două operaţii algebrice „$+$" (adunarea) şi „$\cdot$" (înmulţirea) precum şi cu o relaţie de ordine „$\leq$" care satisfac grupurile de axiome (I), (II) şi (III) de mai jos.

Axiomele structurii algebrice

(I) $\mathbb{R}$ este un corp comutativ, adică

(I.1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(asociativitatea adunării)

(I.2) $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
(comutativitatea adunării)

(I.3) Există $0 \in \mathbb{R}$ astfel ca $0 + x = x + 0 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
(existenţa elementului neutru la adunare)

(I.4) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $-x \in \mathbb{R}$ astfel ca $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
(existenţa simetricului oricărui element în raport cu adunarea)

(I.5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(asociativitatea înmulţirii)

(I.6) $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
(comutativitatea înmulţirii)

(I.7) Există $1 \in \mathbb{R}$ astfel ca $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
(existenţa elementului neutru la înmulţire)

(I.8) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, există $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ astfel ca $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$.
(existenţa simetricului (inversului) oricărui element nenul în raport cu înmulţirea)

(I.9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(distributivitatea înmulţirii faţă de adunare)

(II) $\mathbb{R}$ este total ordonat, adică

(II.1) $x \leq x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(II.2) $x \leq y$ şi $y \leq x \implies x = y$.

(II.3) $x \leq y$ şi $y \leq z \implies x \leq z$.
(„$\leq$" este o relaţie de ordine pe $\mathbb{R}$)

(II.4) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, are loc fie $x \leq y$, fie $y \leq x$.
(relaţia de ordine este totală, adică oricare două elemente x, y se pot compara)

(II.5) Dacă $x \leq y$, atunci $x + z \leq y + z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.
(relaţia de ordine este compatibilă cu operaţia de adunare)

(II.6) Dacă $x \leq y$ iar $0 \leq z$, atunci $x \cdot z \leq y \cdot z$.
(relaţia de ordine este compatibilă cu operaţia de înmulţire)

Proprietăţile de mai sus definesc structura algebrică a lui $\mathbb{R}$. Pentru a enunţa cea de-a treia axiomă, care face posibilă demonstrarea rezultatelor specifice analizei matematice, vor fi făcute mai întâi câteva preparative suplimentare.

1.2.1 Minoranţi, majoranţi

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Spunem că A este *minorată* dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel că $m \leq x$ pentru orice $x \in A$. Un astfel de element m (care nu este unic determinat) se va numi *minorant* al mulţimii A. Similar, spunem că A este *majorată* dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $x \leq M$ pentru orice $x \in A$, un astfel de element M (care de asemenea nu este unic determinat) numindu-se *majorant* al mulţimii A. Minoranţii şi majoranţii unei mulţimi A nu aparţin neapărat acestei mulţimi.

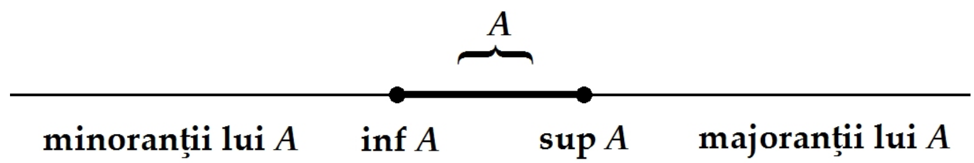


Figura 1.1: Majoranţii şi minoranţii unei mulţimi A.

Exemplu. Fie $A = \left\{x = \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Atunci A este majorată, 1 fiind un majorant al lui A, deoarece $x \leq 1$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 1 nu este element al mulţimii A, întrucât toate elementele lui A sunt subunitare, iar orice $y \in \mathbb{R}$ pentru care $1 \leq y$ este de asemenea un majorant al mulţimii A. În particular, $2, 3, \ldots$ sunt majoranţi ai mulţimii A.

Similar, A este minorată, 0 fiind un minorant al lui A, deoarece $0 \leq x$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 0 nu este element al mulţimii A, deoarece toate elementele lui A sunt strict pozitive, iar orice $y \in \mathbb{R}$ pentru care $y \leq 0$ este de asemenea un minorant al lui A. În particular, $-1, -2, \ldots$ sunt minoranţi ai mulţimii A.

Margine inferioară, margine superioară

Se observă că dacă o mulţime A este minorată, nu există un cel mai mic minorant al lui A, deoarece se pot preciza minoranţi oricât de mici. Similar, dacă o mulţime A este majorată, nu există un cel mai mare majorant, întrucât se pot preciza majoranţi oricât de mari.

În schimb, dacă A este minorată şi există un cel mai mare minorant al lui A, acesta se va numi *margine inferioară* a lui A, notată $\inf A$, iar dacă A este majorată şi există un cel mai mic majorant al lui A, acesta se va numi *margine superioară* a lui A, notată $\sup A$. Dacă marginea inferioară, respectiv marginea superioară a unei mulţimi A există, atunci acestea sunt unice, unicitatea derivând din caracterul acestora de a fi „cea mai mare", respectiv „cea mai mică".

Axioma de completitudine

În aceste condiţii, se poate enunţa cea de-a treia axiomă, numită *axioma de completitudine*, sau *axioma Cantor-Dedekind*.

(III) Orice submulţime nevidă majorată A a lui $\mathbb{R}$ admite o margine superioară în $\mathbb{R}$.

Se poate demonstra că proprietăţile de mai sus definesc existenţa şi unicitatea (până la un izomorfism de corpuri total ordonate) lui $\mathbb{R}$. Elementele mulţimii $\mathbb{R}$ astfel definite se numesc *numere reale*. Elementele mulţimii $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ se vor numi *numere iraţionale*.

Notaţii

Vom preciza în cele ce urmează câteva notaţii utilizate în calculul cu numere reale. Mai întâi, este utilă introducerea notaţiei „$x < y$" (ordonarea strictă ataşată relaţiei de ordine „$\leq$") dacă x, y satisfac $x \leq y$ şi $x \neq y$. De asemenea, vom scrie relaţia $x \leq y$ şi sub forma $y \geq x$, iar relaţia $x < y$ şi sub forma $y > x$.

Numerele reale a pentru care $a \geq 0$ (respectiv $a \leq 0$) vor fi numite *numere pozitive* (respectiv *numere negative*), iar numerele reale a pentru care $a > 0$ (respectiv $a < 0$) vor fi numite *numere strict pozitive* (respectiv *strict negative*). În cele ce urmează, în loc de $x + (-y)$ vom nota $x - y$, în loc de $x \cdot y$ vom nota xy, iar în loc de $x \cdot \frac{1}{y}$ vom nota $\frac{x}{y}$.

Dreapta reală

Pentru ilustrarea geometrică a unor concepte ale analizei matematice, este util ca numerele reale să poată fi reprezentate pe o dreaptă.

Fie o dreaptă d, un punct $O \in d$ şi un vector director $\vec{u}$ al dreptei d. Perechea $\mathcal{R} = (O, \vec{u})$ se numeşte *reper cartezian* al dreptei d. Definim

$$\Phi : \mathbb{R} \to d, \quad \Phi(x) = P, \text{ unde } \overrightarrow{OP} = x\vec{u}$$

(fiecărui $x \in \mathbb{R}$ i se asociază punctul P de pe dreaptă pentru care $\overrightarrow{OP}$ are coordonata x în raport cu reperul $\mathcal{R}$). Se poate demonstra că funcţia Φ este bine definită şi stabileşte o corespondenţă bijectivă între mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale şi mulţimea punctelor dreptei d. Datorită acestei corespondenţe (numită şi *bijecţia lui Descartes*), mulţimea $\mathbb{R}$ va putea fi numită şi *dreapta (axa) reală*, iar numerele reale vor fi numite şi *puncte*.

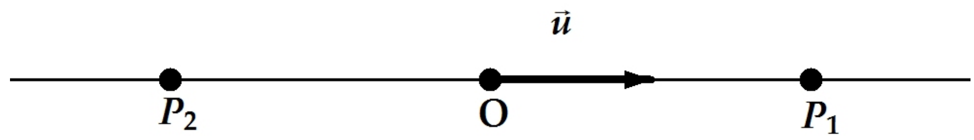


Figura 1.2: Bijecţia lui Descartes. $\Phi(2) = P_1$, unde $\overrightarrow{OP_1} = 2\vec{u}$, $\Phi(-2) = P_2$, unde $\overrightarrow{OP_2} = -2\vec{u}$

1.2.2 Mulţimi mărginite

În aceste condiţii, o mulţime nevidă A care este majorată se va numi *mărginită superior*, iar o mulţime nevidă A care este minorată se va numi *mărginită inferior*. Dacă A este atât mărginită superior cât şi mărginită inferior, ea se va numi *mărginită*. Conform acestei definiţii, o mulţime A este mărginită dacă există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$m \leq x \leq M \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

Caracterizări analitice pentru marginea superioară şi marginea inferioară a unei mulţimi

Cu notaţiile de mai sus, are loc următoarea *teoremă de caracterizare a marginii superioare a unei mulţimi*, care descrie caracteristica marginii superioare de a fi cel mai mic majorant prin intermediul a două inegalităţi, cea dintâi precizând faptul că marginea superioară este majorant, iar cea de-a doua precizând faptul că niciun număr mai mic decât marginea superioară nu este majorant.

Teorema 1.1. *Fie $A \neq \emptyset$. Un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ este margine superioară a mulţimii A dacă şi numai dacă*

1. *$x \leq \alpha$ pentru orice $x \in A$.*
2. *Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.*

În mod absolut similar se obţine urmatoarea *teoremă de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi*.

Teorema 1.2. *Fie $A \neq \emptyset$. Un număr $\beta \in \mathbb{R}$ este margine inferioară a mulţimii A dacă şi numai dacă*

1. *$\beta \leq x$ pentru orice $x \in A$.*

2. *Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.*

Proprietatea lui Arhimede şi consecinţe ale sale

O consecinţă importantă a teoremei de caracterizare a marginii superioare este următorul rezultat, numit *proprietatea lui Arhimede*.

Teorema 1.3. *Fie x, y numere reale fixate, cu $x > 0$. Există atunci $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $nx > y$.*

Parte întreagă, parte fracţionară

Printre consecinţele proprietăţii lui Arhimede menţionăm urmatoarele rezultate utile.

Corolar 1.3.1. *Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{Z}$ unic determinat astfel ca*

$$n \leq x < n + 1.$$

Pentru $x \in \mathbb{R}$ dat, numărul întreg n definit mai sus se numeşte *partea întreagă* a lui x şi se notează $[x]$. Notând cu $\{x\} = x - [x]$ *partea fracţionară* a lui x, următoarele proprietăţi sunt adevărate pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad [x] + \{x\} = x, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Corolar 1.3.2. *Dacă a, b sunt numere reale fixate, $a < b$, există atunci un număr raţional r astfel ca $a < r < b$.*

Teorema de mai sus afirmă faptul că mulţimea $\mathbb{Q}$ este *densă* în $\mathbb{R}$, în sensul că între orice două numere reale se află măcar un număr raţional. Folosind noţiuni de aşa-numita *teorie a numerelor cardinale* (vezi Capitolul 4), se poate demonstra că $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ este de asemenea densă în $\mathbb{R}$, adică între orice două numere reale se află şi un număr iraţional.

Maxim, minim, signum

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, definim *maximul* elementelor x, y prin

$$\max(x,y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq y \\ y, & \text{dacă } x < y, \end{cases}$$

respectiv *minimul* elementelor x, y prin

$$\min(x,y) = \begin{cases} y, & \text{dacă } x \geq y \\ x, & \text{dacă } x < y. \end{cases}$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim *semnul* său, notat $\operatorname{sgn} x$ prin

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Modulul unui număr real

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim *modulul* sau *valoarea absolută* a lui x, notat $|x|$ prin

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Sunt atunci adevărate următoarele proprietăţi de calcul:

M1 $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

M2 $||x|| = |x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

M3 $|xy| = |x||y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M4 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

M5 $|x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M6 $|x - y| \geq ||x| - |y||$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M7 $|x| \leq M \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

M7′ $|x| < M \Leftrightarrow -M < x < M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Are loc şi egalitatea

$$|x| = x \operatorname{sgn} x \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea,

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right), \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right).$$

Funcţia modul astfel definită poate fi folosită pentru a caracteriza mărginirea unei mulţimi.

Teorema 1.4. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Au loc următoarele afirmaţii:*

1. *A este mărginită $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|x| \leq M$ pentru orice $x \in A$.*
2. *A este nemărginită $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists x_M \in A$ astfel ca $|x_M| > M$.*

Demonstraţie. 1. „$\Rightarrow$" Dacă A este mărginită, există m, $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq x \leq M$ pentru orice $x \in A$, de unde $|x| \leq \max(|m|, |M|)$.

„$\Leftarrow$" Dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|x| \leq M$ pentru orice $x \in A$, atunci $-M \leq x \leq M$ pentru orice $x \in A$, deci A este mărginită.

2. Rezultă prin aplicarea operatorului de negare logică primei proprietăţi. ■

1.3 Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$

În analiza matematică, pe lângă numere reale, se utilizează şi două simboluri cu sens aparte, $+\infty$ (plus infinit, notat prescurtat şi ∞) şi $-\infty$ (minus infinit), cu proprietatea că

$$-\infty < x < \infty \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Vom nota

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

şi vom numi această mulţime *dreapta reală încheiată*, observând că ea este de asemenea total ordonată.

Operaţiile aritmetice se extind (parţial) la $\overline{\mathbb{R}}$ în următorul mod:

$$x + \infty = x - (-\infty) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$
\begin{aligned}
x + (-\infty) = x - \infty = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};\\
x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};\\
x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};\\
\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};
\end{aligned}
$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
\infty + \infty &= \infty;\\
(-\infty) + (-\infty) &= (-\infty);\\
\infty \cdot \infty &= (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;\\
\infty \cdot (-\infty) &= -\infty.
\end{aligned}
$$

Operaţiilor $0 \cdot (\pm\infty)$, $\infty - \infty$, $-\infty - (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ nu li se atribuie niciun sens.

1.3.1 Intervale în $\mathbb{R}$ şi $\overline{\mathbb{R}}$

Intervale în $\mathbb{R}$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Numim *intervale* în $\mathbb{R}$ mulţimi de forma

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ (interval închis);

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ (interval deschis);

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$; (interval semideschis; interval închis la dreapta şi deschis la stânga)

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ (interval semideschis; interval deschis la dreapta şi închis la stânga);

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < \infty\}$ (interval deschis nemărginit la dreapta; semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta);

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < a\}$ (interval deschis nemărginit la stânga; semidreaptă deschisă nemărginită la stânga);

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < \infty\}$ (semidreaptă închisă nemărginită la dreapta);

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq a\}$ (semidreaptă închisă nemărginită la stânga);

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (axa reală).

Intervale centrate

Numim *intervale centrate* intervalele simetrice faţă de un punct a de pe axa reală, de forma $[a-r, a+r]$ şi $(a-r, a+r)$. Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcţiei modul sub forma

$$[a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq \varepsilon\};$$
$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| < \varepsilon\}.$$

Intervale în $\overline{\mathbb{R}}$

Dacă $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, putem extinde notaţiile pentru intervale definite mai sus şi obţine

$$[a,b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}}; a \leq x \leq b\right\}, \quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\};$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\},$$

păstrând denumirile de intervale închise, deschise, respectiv semideschise. De asemenea

$$[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}} \quad \text{(dreapta reală încheiată)}.$$

Conform proprietăţilor de densitate ale lui $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, se va observa că nici $\mathbb{Q}$ nici $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nu conţin intervale.

Supremumul şi infimumul unei mulţimi în $\overline{\mathbb{R}}$

Fie $A \neq \emptyset$. Cu aceste notaţii, vom spune că

$$\sup A = +\infty \quad \text{dacă } A \text{ nu este majorată (este nemărginită superior)}$$

respectiv

$$\inf A = -\infty \quad \text{dacă } A \text{ nu este minorată (este nemărginită inferior).}$$

şi vom observa că în $\overline{\mathbb{R}}$ orice mulţime nevidă admite un supremum şi un infimum.

Exemple. $\sup \mathbb{N} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$;

$A = \{x; x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită superior, deci $\sup A = +\infty$.

$A = \{x; x = -n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită inferior, deci $\inf A = -\infty$.

1.3.2 Vecinătăţi în $\overline{\mathbb{R}}$

1. Numim *vecinătate* a unui punct $x \in \mathbb{R}$ orice mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval deschis incluzându-l pe x, adică pentru care există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$x \in (a, b) \subseteq V.$$

2. Numim *vecinătate* a lui $+\infty$ orice mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(a, \infty]$, cu $a \in \mathbb{R}$.

3. Numim *vecinătate* a lui $-\infty$ orice mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $[-\infty, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

Exemple. Mulţimile $(-2, 4]$, $(0, 6]$, $(-\infty, 2]$, $(-2, 5] \cup (6, \infty)$ sunt vecinătăţi ale lui $x = 1$ deoarece conţin intervalul deschis $(0, 2)$ care-l include pe 1.

Mulţimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece ea nu conţine intervale.

Mulţimea $B = [1, 3]$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece nu există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $1 \in (a, b) \subseteq B$ (ar trebui ca $a < 1$ şi atunci $(a, b) \not\subseteq B$).

Teorema 1.5. *Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este o vecinătate a lui x dacă şi numai dacă ea conţine un interval deschis centrat în x, adică există $\varepsilon > 0$ astfel ca*

$$x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq V.$$

Demonstraţie. „$\Leftarrow$" Se poate lua $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$.

„$\Rightarrow$" Se poate lua $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. ■

Dacă V este o vecinătate a lui $x \in \overline{\mathbb{R}}$, notăm acest lucru prin $V \in \mathcal{V}(x)$. Mulţimea $\mathcal{V}(x)$ se numeşte *mulţimea tuturor vecinătăţilor* punctului x. Această mulţime are următoarele proprietăţi:

(V1) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Atunci $x \in V$.

(V2) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$ şi $W \supset V$. Atunci $W \in \mathcal{V}(x)$.

(V3) Fie $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$. Atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(V4) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Există atunci $W \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $V \in \mathcal{V}(y)$ pentru orice $y \in W$.

Conform (**V1**), dacă V este vecinătate a lui x, atunci V îl conţine pe x. Datorită (**V2**), orice mulţime care conţine o vecinătate a lui x este de asemenea o vecinătate a lui x. Conform (**V3**), intersecţia a două vecinătăţi ale lui x este de asemenea o vecinătate a lui x, (**V4**) reprezentând faptul că dacă V este o vecinătate a lui x, atunci V este de fapt o vecinătate nu doar pentru x, ci şi pentru toate punctele dintr-o mulţime W, care la rândul ei este o vecinătate a lui x.

Proprietatea de separaţie Hausdorff

Orice două puncte $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ pot fi separate prin vecinătaţi. În acest sens, are loc următoarea proprietate, numită *proprietatea de separaţie Hausdorff*.

Teorema 1.6. *Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Există atunci $V_a \in \mathcal{V}(a)$ şi $V_b \in \mathcal{V}(b)$ astfel ca $V_a \cap V_b = \emptyset$.*

A fost menţionat anterior că axioma de completitudine deosebeşte $\mathbb{R}$ de mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale. Acest lucru se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$. Evident, $A \neq \emptyset$, deoarece $0 \in A$. Ca submulţime a lui $\mathbb{R}$, ea este majorată (de exemplu de 2), având deci, conform axiomei de completitudine, un cel mai mic majorant $\sup A$. În acest sens, se poate arăta că $\sup A = \sqrt{2}$. Ca submulţime a lui $\mathbb{Q}$, A este de asemenea majorată, de exemplu de 2 şi de oricare altă aproximare zecimală prin adaus a lui $\sqrt{2}$: 1.42, 1.415, 1.4143, ş.a.m.d. Totuşi, niciun număr raţional q mai mic decât $\sqrt{2}$ nu poate fi nici măcar majorant datorită definiţiei mulţimii A, care va conţine o aproximare zecimală prin lipsă a lui $\sqrt{2}$ mai bună decât q, iar niciun număr raţional mai mare decât $\sqrt{2}$ nu poate fi cel mai mic majorant, întrucât va exista o aproximare zecimală prin adaus a lui $\sqrt{2}$ mai bună decât q.

1.4 Inegalităţi între numere reale

Inegalitatea mediilor

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive. Definim

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}, \end{aligned}$$

A_n, G_n, H_n numindu-se respectiv *media aritmetică*, *media geometrică* şi *media armonică* a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Are loc atunci inegalitatea

$$A_n \geq G_n \geq H_n,$$

numită *inegalitatea mediilor*, egalităţile atingându-se doar dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale. Atunci

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 \left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n\right)^2,$$

egalitatea atingându-se doar dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt proporţionale, adică există $k \in \mathbb{R}$ astfel ca $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, $\ldots a_n = kb_n$.

Pentru $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, se obţine că

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2,$$

egalitatea atingându-se doar dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Inegalitatea Bernoulli

Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

1.5 Funcţii

Fie $X, Y \neq \emptyset$. Numim *funcţie* definită pe mulţimea X cu valori în mulţimea Y o corespondenţă (notată de exemplu f) prin care oricărui element din mulţimea X i se asociază un singur element din mulţimea Y. În această situaţie, se notează $f : X \to Y$, X numindu-se *domeniul de definiţie* al funcţiei f, notat şi $\mathrm{Dom}\, f$, iar Y *codomeniul* acesteia. Dacă lui $x \in X$ îi corespunde prin funcţia f elementul $y \in Y$, acest lucru se va nota $y = f(x)$ sau $x \overset{f}{\mapsto} y$. În acest caz, y se numeşte *imaginea* lui x prin funcţia f, sau *valoarea* lui f în x, iar x se numeşte *argumentul* funcţiei. Mulţimea tuturor funcţiilor definite pe X cu valori în Y se va nota $\mathcal{F}(X, Y)$.

Egalitatea a două funcţii

O funcţie f trebuie concepută ca un ansamblu format din domeniul de definiţie X, codomeniul Y şi corespondenţa propriu-zisă între argumente şi imagini. În acest sens, două funcţii $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ vor fi *egale* dacă $A = C$ şi $B = D$ (domeniile, respectiv codomeniile funcţiilor sunt egale), iar $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$, adică oricărui x din domeniul comun de definiţie i se asociază prin f şi g un acelaşi element.

Grafic, funcţie identică

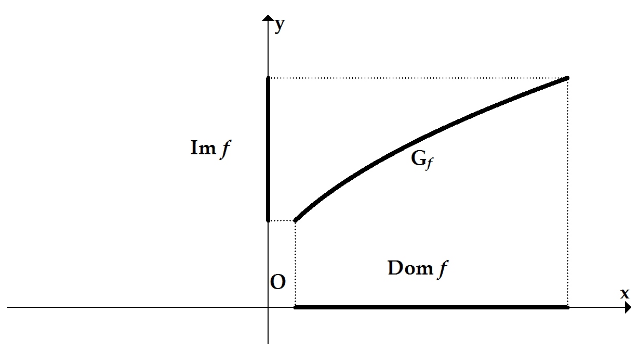


Figura 1.3: Imaginea, domeniul şi graficul unei funcţii f

Mulţimea

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$$

se va numi *graficul* funcţiei f. Fiind dată o mulţime A, funcţia $1_A : A \to A$ definită prin $1_A(x) = x \; \forall x \in A$ se va numi *funcţia identică* a mulţimii A.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Vom determina $\operatorname{Im} f$. Fie $y \in \mathbb{R}$ astfel ca $y = f(x)$, cu $x \in \mathbb{R}$, adică $y = x^2 - 2x + 3$. Urmează că $x^2 - 2x + 3 - y = 0$. Conditia de existenţă a lui x este $\Delta = (-2)^2 - 4(3 - y) \geq 0$, de unde $y \geq 2$. Urmează că $\operatorname{Im} f = [2, +\infty)$.

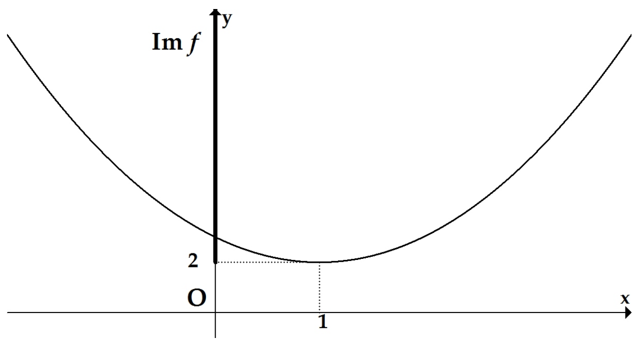


Figura 1.4: Imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Restricţia şi prelungirea unei funcţii

Dacă $f : X \to Y$ este o funcţie, iar $A \subseteq X$, numim *restricţia* funcţiei f la mulţimea A funcţia notată $f|_A$ cu domeniul A şi codomeniul Y care păstrează pe A corespondenţa definită de f, adică $f|_A(x) = f(x)\ \forall x \in A$. Dacă $g : A \to Y$ este o funcţie dată, iar $A \subseteq X$, orice funcţie $f : X \to Y$ pentru care $f|_A = g$ se numeşte *prelungirea* lui g la X.

Exemplu. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Atunci g este o prelungire a lui f (respectiv f este o restricţie a lui g), deoarece $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, iar $f(x) = g(x) = x$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

Imagine şi contraimagine

Fie funcţia $f : X \to Y$. Dacă $A \subseteq X$, notăm

$$f(A) = \{y \in B; \exists x \in A \text{ astfel ca } f(x) = y\}$$

imaginea mulţimii A prin funcţia f. Mulţimea $f(X)$ se va numi *imaginea funcţiei f* şi se va nota $\operatorname{Im} f$.

Dacă $B \subseteq Y$, notăm

$$f^{-1}(B) = \{x \in A; f(x) \in B\}$$

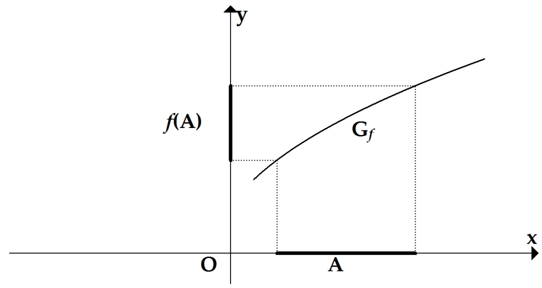


Figura 1.5: Imaginea $f(A)$ a unei mulţimi A

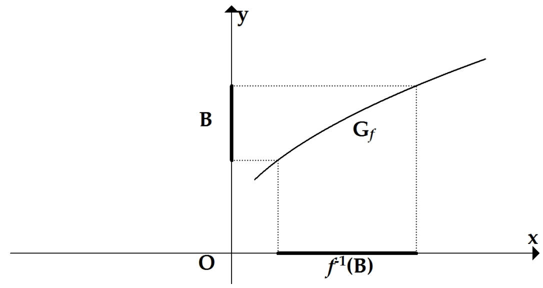


Figura 1.6: Contraimaginea $f^{-1}(B)$ a unei mulţimi B

contraimaginea (*imaginea inversă*, *preimaginea*) mulţimii B prin funcţia f. Dacă $B = \{y\}$, se foloseşte notaţia $f^{-1}(y)$ în loc de $f^{-1}(\{y\})$. Cum mulţimea $f^{-1}(y)$ poate să fie mulţimea vidă sau să conţină mai mult de un element, simbolul f^{-1} nu defineşte în general o funcţie.

Funcţii injective, funcţii surjective, funcţii bijective

O funcţie $f : X \to Y$ se numeşte *injectivă* dacă

$$\forall x, y \in X, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

(la argumente diferite x, y corespund prin f imagini diferite), ceea ce este echivalent cu

$$\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \implies x = y$$

(dacă imaginile $f(x)$ şi $f(y)$ sunt egale, atunci sunt egale şi argumentele corespunzătoare x şi y). Aceasta conduce la faptul că f este injectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(y)$ conţine cel mult un element pentru orice $y \in B$.

O funcţie $f : X \to Y$ se numeşte *surjectivă* dacă $f(X) = Y$, adică orice element y din codomeniul Y al funcţiei este imaginea cel puţin a unui argument x. Aceasta conduce la faptul că f este surjectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(y)$ conţine cel puţin un element pentru orice $y \in B$.

O funcţie $f : X \to Y$ se numeşte *bijectivă* dacă ea este atât injectivă cât şi surjectivă. Din cele de mai sus, se observă că f este bijectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(y)$ conţine exact un element pentru orice $y \in B$. În aceste condiţii, simbolul f^{-1} defineşte o funcţie $f^{-1} : Y \to X$ prin $f^{-1}(y) = x$, unde x, y sunt în aşa fel încât $y = f(x)$. Funcţia f^{-1} astfel definită se numeşte funcţia *inversă* a funcţiei f, iar f se numeşte *inversabilă*.

Compunerea a două funcţii

Fie funcţiile $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Funcţia $g \circ f : X \to Z$ definită prin $g \circ f(x) = g(f(x))\ \forall x \in X$ se numeşte *compunerea* funcţiilor g şi f, în această ordine. Se poate observa că operaţia de compunere a funcţiilor nu este comutativă, dar este asociativă, în sensul că dacă $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to M$, atunci $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Funcţii numerice

O funcţie $f : E \to F$ se va numi *funcţie numerică* (*funcţie reală de variabilă reală*) dacă $E, F \subseteq \mathbb{R}$.

Funcţii pare, funcţii impare

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o *mulţime simetrică*, adică o mulţime pentru care $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$.

O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *pară* dacă $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in D$. Deoarece

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow b = f(-a) \Leftrightarrow (-a, b) \in G_f,$$

urmează că G_f este simetric faţă de Oy.

O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in D$. Deoarece

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow -b = f(-a) \Leftrightarrow (-a, -b) \in G_f,$$

urmează că G_f este simetric faţă de O.

> **Exemplu.** Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$ este pară, deoarece $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$, în timp ce funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2n+1}$ este impară, deoarece $g(-x) = (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1} = -g(x)$.

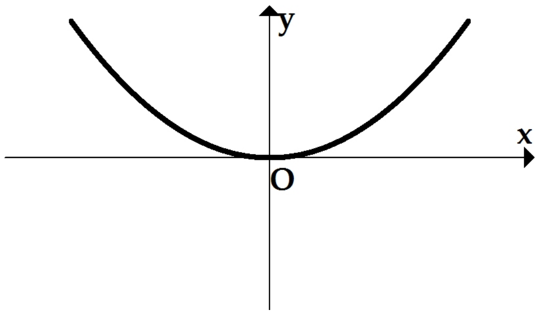


Figura 1.7: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$ (funcţie pară, grafic simetric faţă de Oy)

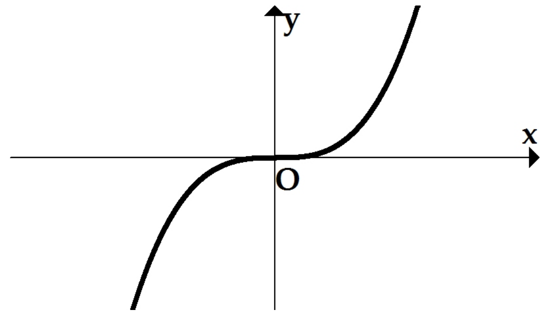


Figura 1.8: Graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2n+1}$ (funcţie impară, grafic simetric faţă de O).

Funcţii periodice

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$. O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *periodică* dacă există $T \in \mathbb{R}^*$ astfel încât pentru orice $x \in D$ urmează că $x + T, x - T \in D$, iar $f(x + T) = f(x)$. Orice astfel de T se numeşte *perioadă* a funcţiei f. Se observă că dacă T este o perioadă a funcţiei f, atunci şi nT, $n \in \mathbb{Z}^*$ (adică orice multiplu întreg al perioadei T) este de asemenea o perioadă a funcţiei f. Dacă există o cea mai mică perioadă pozitivă T_0 a funcţiei f, atunci aceasta se numeşte *perioadă principală* a funcţiei f. Pentru a studia comportarea unei funcţii periodice de perioadă T, este suficient să se analizeze comportarea acestei funcţii pe intervalul $[0, T]$.

Exemplu. Funcţia $f : R \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$, este periodică, de perioadă principală 1.

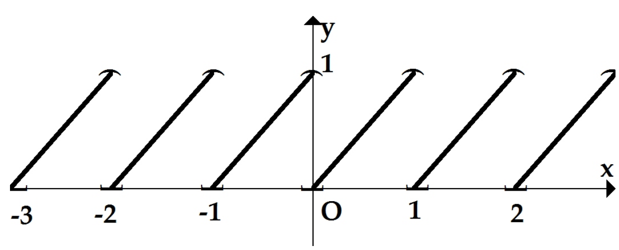


Figura 1.9: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$

Funcţii mărginite

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci

f se numeşte *mărginită superior* dacă $f(D)$ este majorată, adică există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) \leq M$ pentru orice $x \in D$.

f se numeşte *mărginită inferior* dacă $f(D)$ este minorată, adică există $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq f(x)$ pentru orice $x \in D$.

Dacă f este atât mărginită inferior cât şi mărginită superior, adică există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in D$, sau, echivalent $\operatorname{Im} f$ este mărginită, atunci f se numeşte *mărginită*.

Conform caracterizării mulţimilor mărginite cu ajutorul funcţiei modul (Teorema 1.4), f este mărginită dacă şi numai dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in D$.

Exemple. $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ este mărginită, deoarece

$$3 \leq f(x) \leq 5 \quad \text{pentru orice } x \in [1,2].$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 3\sin x$ este mărginită, deoarece

$$|f(x)| \leq 2 + 3|\sin x| \leq 5 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Funcţii monotone

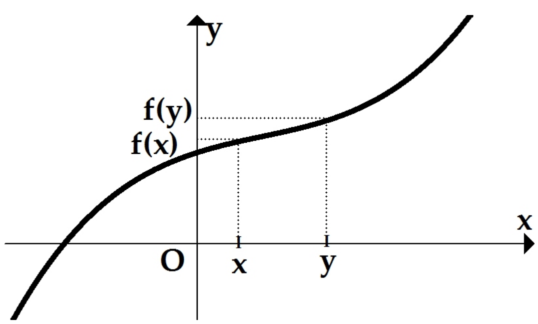


Figura 1.10: Graficul unei funcţii crescătoare

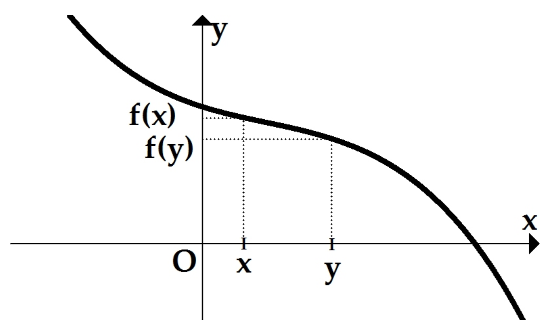


Figura 1.11: Graficul unei funcţii descrescătoare

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci

f se numeşte *crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

f se numeşte *strict crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) < f(y).$$

f se numeşte *descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

f se numeşte *strict descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) > f(y).$$

Se obervă că f este crescătoare dacă şi numai dacă

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0 \quad \text{pentru orice } x, y \in D,$$

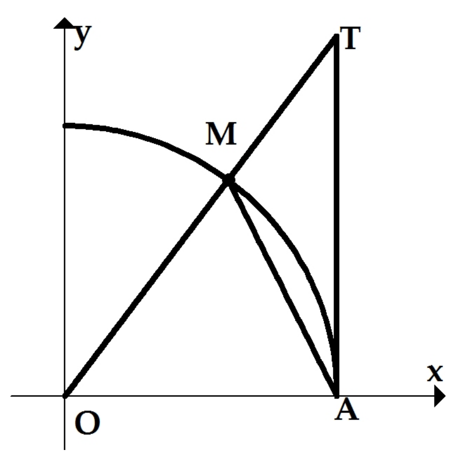
respectiv strict crescătoare dacă şi numai dacă

$$(f(x) - f(y))(x - y) > 0 \quad \text{pentru orice } x, y \in D, x \neq y,$$

proprietăţi analoage având loc şi pentru funcţii descrescătoare, respectiv strict descrescătoare. De asemenea, se poate observa că dacă f este strict monotonă, atunci f este injectivă.

Vom demonstra acum o inegalitate care prezintă un interes de sine stătător, anume

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{pentru orice } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$



În acest sens, fie un cerc cu centrul în origine şi de rază 1 şi fie un unghi la centru $\widehat{AOM}$ de măsură în radiani x ca în figură. Fie de asemenea T intersecţia dintre dreapta OM şi tangenta în A la cerc. Atunci

$$\text{aria } \triangle AOM < \text{aria sector } AOM < \text{aria } \triangle AOT$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Graficele unor funcţii elementare

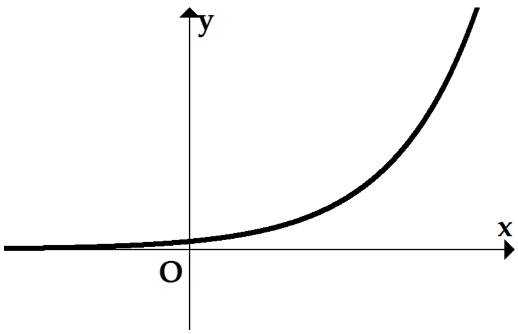


Figura 1.12: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 1$

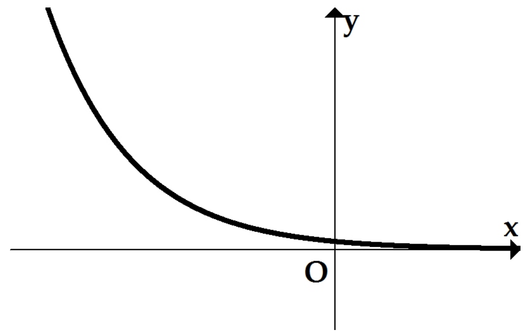


Figura 1.13: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a \in (0, 1)$

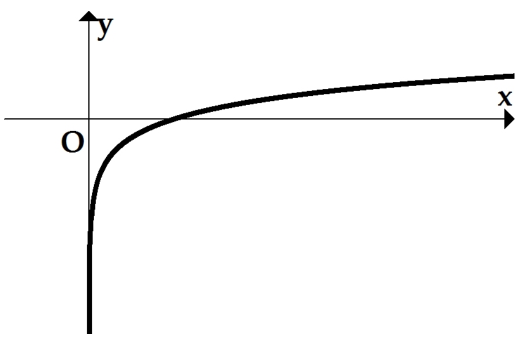


Figura 1.14: Graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 1$

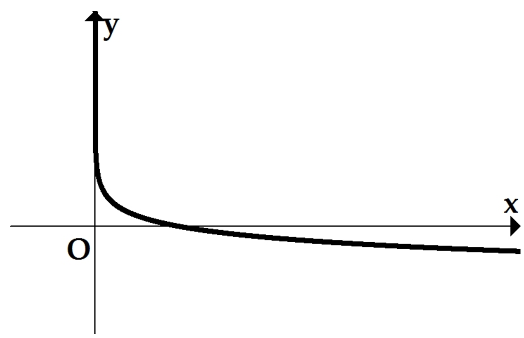


Figura 1.15: Graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, 1)$

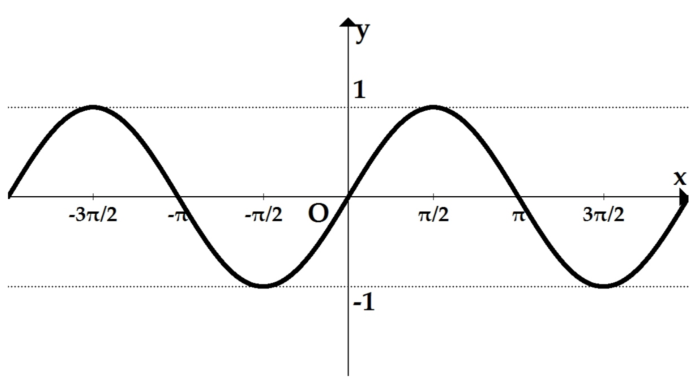


Figura 1.16: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

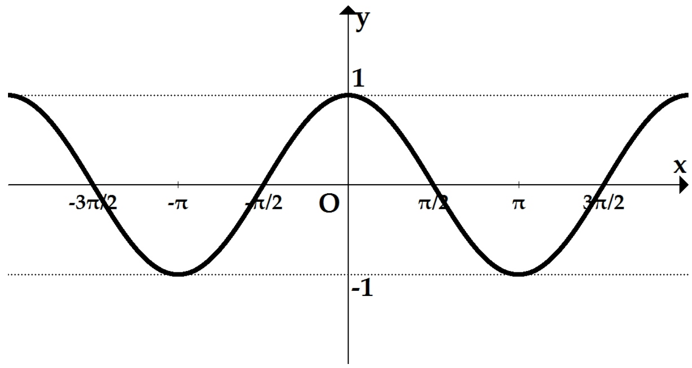


Figura 1.17: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$

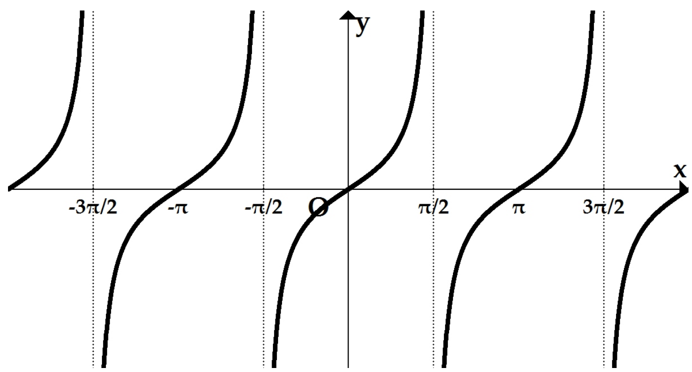


Figura 1.18: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

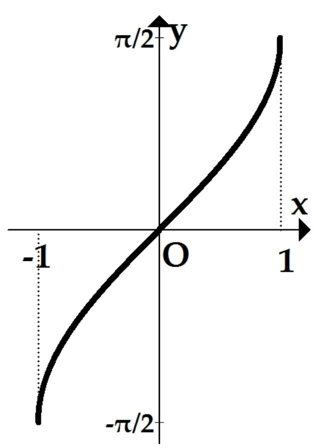


Figura 1.19: Graficul funcţiei $f : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$

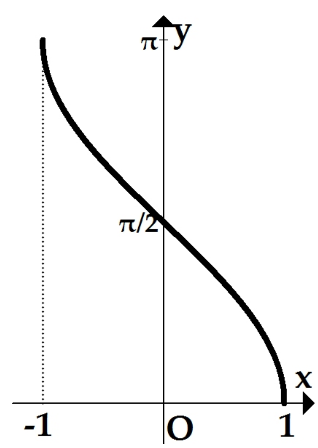


Figura 1.20: Graficul funcţiei $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$

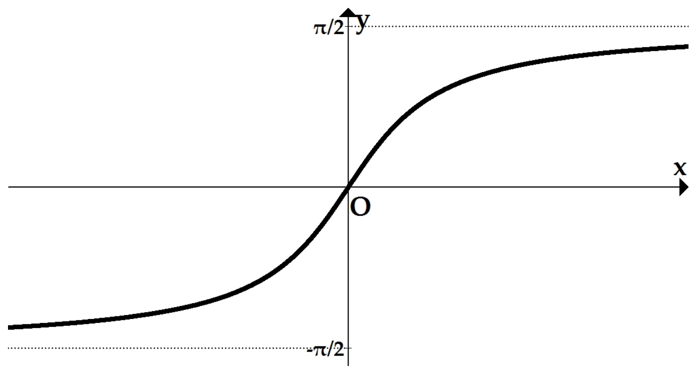


Figura 1.21: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Aplicaţii

1.1. *Fie* $a \in \mathbb{R}$. *Arătaţi că* $\max(a, -a) = |a|$.

1.2. *Dacă* $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$, *arătaţi că* $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

1.3. *Demonstraţi că* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *este număr iraţional.*

1.4. *Dacă* $a, b \in \mathbb{Q}$, *iar* $a + b\sqrt{2} = 0$, *atunci* $a = b = 0$.

1.5. *Dacă* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$, *iar* $a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2}$, *atunci* $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

1.6. *Rezolvaţi ecuaţia* $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

1.7. *Rezolvaţi sistemul*

$$\begin{cases} |x-1| + |y+2| = 6 \\ x = 1 + |y+2| \end{cases}.$$

1.8. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca sistemul* $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ *să aibă exact patru soluţii.*

1.9. *Dacă* $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y + \varepsilon$ *pentru orice* $\varepsilon > 0$, *atunci* $x \leq y$.

1.10. *Dacă* $a, b, c, d \in (0, \infty)$, *atunci* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a} \geq 4$.

1.11. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in (0, \infty)$, *atunci*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

1.12. *Dacă* $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in (0, \infty)$, *atunci*

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}.$$

1.13. *Fie* $a, b \in (0, 1)$. *Demonstraţi că*

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

1.14. *Determinaţi* $m \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + m \geq 0 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

1.15. *Dacă* $A \subseteq \mathbb{R}$ *este mărginită, arătaţi că orice submulţime a lui* A *este mărginită.*

1.16. *Dacă* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *sunt mărginite, arătaţi că* $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ *sunt mărginite.*

1.17. *Arătaţi că* A *este mărginită, unde:*

1. $A = [0, 1) \cup (2, 5]$;
2. $A = \left\{x; x = 2 + u^2, u \in [-1, 3]\right\}$;
3. $A = \left\{x; x = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$;
4. $A = \left\{x; x = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;
5. $A = \{x; x = \sin u + \cos(2u), u \in \mathbb{R}\}$.

1.18. *Fie* $A = \{\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 2, \operatorname{tg} 3, \operatorname{tg} 4\}$. *Precizaţi* $\min A$, $\max A$.

1.19. *Fie* $A = \left\{\sin \frac{n\pi}{4}; n \in \mathbb{N}\right\}$. *Precizaţi* $\min A$, $\max A$.

1.20. *Fie* $A = \left\{\frac{6+x^2}{6-x^2}; x \in [-2, 1]\right\}$. *Determinaţi* $\inf A$, $\sup A$.

1.21. *Fie* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. *Arătaţi că* d *are următoarele proprietăţi:*

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1.22. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. *Determinaţi* $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $f(x)^2$.

1.23. *Determinaţi valorile minime ale următoarelor funcţii:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x^2+2x+3}$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-3}$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

1.24. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie oarecare.*

1. *Dacă* f *este simultan monoton crescătoare şi monoton descrescătoare, atunci ea este constantă.*
2. *Dacă* f *este simultan pară şi impară, atunci ea este funcţia nulă.*

1.25. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. *Dacă* f, g *sunt (strict) crescătoare, atunci* $f + g$, $f \circ g$ *sunt (strict) crescătoare.*
2. *Dacă* f, g *sunt (strict) descrescătoare, atunci* $f + g$ *este (strict) descrescătoare, iar* $f \circ g$ *este (strict) crescătoare.*

1.26. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$.

1. *Demonstraţi că* f *este strict crescătoare pe* $(-\infty, 0]$ *şi strict descrescătoare pe* $[0, \infty)$.
2. *Determinaţi* $f([-2, -1])$, $f([3, 4])$, $f([-1, 1])$.

1.27. *Determinaţi care dintre următoarele funcţii sunt pare sau impare:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^3$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + \cos x$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + |x| - \sqrt{x^2 + 1}$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin^2 x$;
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 2x + \cos x$.
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1.28. *Determinaţi $f \circ g$ şi $g \circ f$ pentru $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin:*

1. $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$;

2. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 1$.

1.29. *Determinaţi două funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca $h = f \circ g$, dacă*

1. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(x^2 + 1)$;

2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}^3$.

1.30. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$. Arătaţi că orice număr raţional este perioadă a lui f, dar niciun număr iraţional nu este perioadă a lui f. Are f perioadă principală?*

1.31. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x^2)$. Demonstraţi că f nu este periodică.*

1.32. *Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2ax + 1$. Demonstraţi că*

1. *f nu este injectivă pentru nicio valoare a lui $a \in \mathbb{Q}$.*

2. *f este injectivă pentru orice $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.*

1.33. *Demonstraţi că următoarele funcţii sunt bijective şi precizaţi inversele acestora*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 1}$;

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

1.34. *Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel ca funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + a, & x < 2 \end{cases}$ să fie*

1) injectivă; 2) surjectivă; 3) bijectivă.

1.35. *Demonstraţi că graficele funcţiilor $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax^2 + x + 2 - 4a$, $a \in \mathbb{R}$, trec printr-un punct care nu depinde de a.*

1.36. *Demonstraţi că următoarele funcţii sunt mărginite*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$;

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1.37. *Fie $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Demonstraţi că f este strict crescătoare şi surjectivă, iar inversa sa este $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.*

Capitolul 2

ŞIRURI DE NUMERE REALE

2.1 Proprietăţi generale

Fie $A \neq \emptyset$ o mulţime dată. Se numeşte *şir de elemente din A* o funcţie $f : \mathbb{N} \to A$. Dacă $A = \mathbb{R}$, şirul respectiv se va numi *şir de numere reale*, *şir numeric* sau, mai simplu, *şir*. Fiind dat un şir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, se vor numi *termeni ai şirului* numerele $f(0), f(1), f(2), \ldots$, notate de obicei cu ajutorul unui indice sub forma

$$f(0) = x_0,\ f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ \ldots,\ f(n) = x_n,\ \ldots,$$

x_n numindu-se *termenul general al şirului*, sau *termenul de rang n*. Un şir cu termenul general x_n se va nota şi $(x_n)_{n \geq 0}$. Dacă primii k termeni $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nu sunt definiţi (ceea ce corespunde unei funcţii $f : \{k, k+1, \ldots\} \to \mathbb{R}$), vom nota şirul sub forma $(x_n)_{n \geq k}$.

2.1.1 Moduri de definire a unui şir

Un şir poate fi definit precizând formula termenului general, prin intermediul unei recurenţe sau în mod descriptiv.

Exemple. *Şiruri definite prin formula termenului general:*

$(x_n)_{n \geq 0} : x_n = 3n + 1; \qquad x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 7, \ldots$

$(x_n)_{n \geq 0} : x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}; \qquad x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots.$

Şiruri definite prin intermediul unei recurenţe

Dacă pentru un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ se cunosc primii k termeni $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, fiind dată de asemenea o relaţie prin care termenul general x_n se exprimă în funcţie de $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}$ pentru orice $n \geq k$, se spune că $(x_n)_{n\geq 0}$ este definit printr-o *recurenţă de ordinul k.*
Şiruri definite în mod descriptiv.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, x_n=*aproximarea prin lipsa cu n zecimale exacte a lui* $\sqrt{2}$ este definit în mod descriptiv. Se obţine că $x_1 = 1.4$, $x_2 = 1.41$, $x_3 = 1.414$, ş.a.m.d.

Progresii aritmetice

Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin recurenţa de ordinul întâi dată de

$$x_0 = a \text{ şi } x_{n+1} = x_n + r,\ n \geq 0,$$

a şi $r \in \mathbb{R}$ fiind date, se numeşte *progresie aritmetică*, r numindu-se *raţia progresiei* (din orice termen al şirului se obţine termenul care-l succede prin adăugirea raţiei). Se obţine că formula termenului general este $x_n = a + nr$, $n \geq 0$, iar $x_m = x_n + (m-n)r$, $m, n \geq 0$. De asemenea, suma primilor $n+1$ termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \ldots + x_n \\ &= a + (a+r) + \ldots + (a+nr) \\ &= (n+1)a + (r + 2r + \ldots + nr) \\ &= (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}r. \end{aligned}$$

Din cele de mai sus, se observă şi că

$$S_n = \frac{n(a_0 + a_n)}{2}.$$

Progresii geometrice

Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin recurenţa de ordinul întâi dată de

$$x_0 = b \text{ şi } x_{n+1} = x_n q,\ n \geq 0,$$

b şi $q \in \mathbb{R}$ fiind date, se numeşte *progresie geometrică*, q numindu-se *raţia progresiei* (din orice termen al şirului se obţine termenul care-l succede prin înmulţirea cu raţia). Se obţine că formula termenului general este $x_n = bq^n$, $n \geq 0$, iar $x_m = x_n q^{m-n}$, $m, n \geq 0$. De asemenea, suma primilor $n+1$ termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \ldots + x_n \\ &= b + bq + \ldots bq^n \\ &= b(1 + q + \ldots + q^n) \\ &= b\frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \text{ dacă } q \neq 1, \end{aligned}$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = (n+1)b$.

Exerciţiu. Determinaţi termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin

$$1)\ x_{n+1} = 2x_n - 1, n \geq 0,\ x_0 = 2; \quad 2)\ x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, n \geq 0,\ x_0 = 1.$$

Soluţie. 1) Relaţia de recurenţă este asemănătoare celei care defineşte o progresie geometrică, diferenţa fiind dată de prezenţa termenului liber -1. Acest termen liber va fi eliminat prin scăderea a două relaţii de recurenţă scrise pentru indici succesivi.

Punând $n = 0$ în relaţia de recurenţă se obţine că $x_1 = 3$. Scriind relaţia de recurenţă pentru $n = k+1$, respectiv $n = k$, şi scăzând cele două relaţii obţinute se deduce că $x_{k+2} - x_{k+1} = 2(x_{k+1} - x_k)$. Notând $y_n = x_{n+1} - x_n$, observăm că $y_{k+1} = 2y_k$, deci $(y_k)_{k\geq 0}$ este o progresie geometrică cu raţie 2. Deoarece $y_0 = x_1 - x_0 = 1$, se deduce că $y_n = y_0 2^n = 2^n$.

Cum $y_k = x_{k+1} - x_k$, urmează că $x_{k+1} - x_k = 2^k$. Punând succesiv $k = 0, k = 1, \ldots, k = n-1$ şi sumând relaţiile obţinute deducem că

$$x_n - x_0 = 1 + 2 + \ldots + 2^n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1,$$

deci $x_n = x_0 + 2^n - 1 = 2^n + 1$.

Similar, putem determina $c \in \mathbb{R}$ astfel ca $(x_n + c)_{n\geq 0}$ să fie progresie geometrică. În acest scop, adunăm mai întâi c în ambii membri ai relaţiei de recurenţă. Obţinem că

$$x_{n+1} + c = 2x_n - 1 + c = 2(x_n + \frac{c-1}{2}).$$

În concluzie, pentru $c = \frac{c-1}{2}$, adică pentru $c = -1$, urmează că $(x_n + c)_{n\geq 0}$ este progresie geometrică de raţie 2. De aici,

$$x_n - 1 = 2^n(x_0 - 1) = 2^n,$$

de unde $x_n = 2^n + 1$.

2) Punând $n = 0$ în relaţia de recurenţă se obţine că $x_1 = \sqrt{3}$. Prin logaritmarea relaţiei de recurenţă se obţine că

$$\ln x_{n+1} = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln x_{n+1}.$$

Cu notaţia $z_n = \ln x_n$, se obţine că $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n + \frac{1}{2} \ln 3$, $z_1 = \ln x_1 = \frac{1}{2} \ln 3$, $z_0 = \ln x_0 = 0$.

Scriind relaţia de recurenţă pentru $n = k + 1$, respectiv $n = k$, şi scăzând cele două relaţii obţinute se deduce că $z_{k+2} - z_{k+1} = \frac{1}{2}(z_{k+1} - z_k)$. Notând $y_n = z_{n+1} - z_n$, observăm că $y_{k+1} = \frac{1}{2} y_k$, deci $(y_k)_{k \geq 0}$ este o progresie geometrică cu raţie $\frac{1}{2}$. Deoarece $y_0 = z_1 - z_0 = \frac{1}{2} \ln 3$, se deduce că $y_n = y_0 \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln 3$.

Cum $y_k = z_{k+1} - z_k$, urmează că $z_{k+1} - z_k = \frac{1}{2^{k+1}} \ln 3$. Punând succesiv $k = 0, k = 1, \ldots, k = n - 1$ şi sumând relaţiile obţinute deducem că

$$\begin{aligned} z_n - z_0 &= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2^2} \ln 3 + \ldots + \frac{1}{2^n} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ln 3. \end{aligned}$$

deci $z_n = z_0 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ln 3 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ln 3$. Cum $z_n = \ln x_n$, urmează că

$$x_n = e^{z_n} = e^{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ln 3} = e^{\ln 3^{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}} = 3^{1 - \frac{1}{2^n}}.$$

2.1.2 Subşiruri ale unui şir dat

Numim *subşir* al şirului $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ ai cărui termeni sunt elemente ale mulţimii termenilor şirului $(x_n)_{n \geq 0}$, $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, cu $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n \ldots$.

Cum un subşir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ nu conţine neapărat toţi termenii şirului iniţial $(x_n)_{n \geq 0}$, urmează că $k_n \geq n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 0}$. Atunci subşirul $(x_{2n})_{n \geq 0}$: $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$ se numeşte *subşirul termenilor de rang par ai şirului*. Subşirul $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$: $x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n+1}, \ldots$ se numeşte *subşirul termenilor de rang impar ai şirului*. Un alt subşir este $(x_{n+3})_{n \geq 0}$: $x_3, x_4, x_5, \ldots$, obţinut prin eliminarea primilor trei termeni ai şirului.

Cum pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ putem construi şirul $(x_{kn})_{n \geq 0}$: $x_0, x_k, x_{2k}, \ldots, x_{kn}, \ldots$

al termenilor de rang divizibil cu k, urmează că orice şir are o infinitate de subşiruri.

2.1.3 Şiruri mărginite

Fie un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale şi $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ mulţimea termenilor săi. Vom spune că $(x_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *mărginit* dacă A este mărginită, respectiv că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *mărginit superior* (respectiv *mărginit inferior*) dacă A este majorată (respectiv minorată). Un şir care nu este mărginit (respectiv nu este mărginit superior sau nu este mărginit inferior) se numeşte *nemărginit* (respectiv *nemărginit superior* sau *nemărginit inferior*).

Conform caracterizării mulţimilor mărginite, aplicată mulţimii A a termenilor şirului, se obţin următoarele proprietăţi.

Teorema 2.1. *Fie şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 0}$.

1. $(x_n)_{n\geq 0}$ *este mărginit superior dacă şi numai dacă există* $b \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $x_n \leq b$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

2. $(x_n)_{n\geq 0}$ *este mărginit inferior dacă şi numai dacă există* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $a \leq x_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

3. $(x_n)_{n\geq 0}$ *este mărginit dacă şi numai dacă există* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $a \leq x_n \leq b$ *pentru orice* $n \geq 0$, *ceea ce este echivalent cu faptul că există* $M > 0$ *astfel ca* $|x_n| \leq M$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Exemple.

1. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ este mărginit, deoarece $|x_n| \leq 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \frac{n}{3^n}$ este mărginit, deoarece conform inegalităţii lui Bernoulli, $3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n$, deci $\frac{n}{3^n} < \frac{1}{2}$. Se obţine că $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

4. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = (-1)^n n$ nu este mărginit, nefiind nici mărginit inferior,

nici mărginit superior.

Aplicând operatorul de negaţie logică afirmaţiilor din teorema de mai sus obţinem următoarea teoremă de caracterizare a şirurilor nemărginite.

Teorema 2.2. *Fie şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 0}$.

1. $(x_n)_{n\geq 0}$ *este nemărginit superior dacă şi numai dacă pentru orice* $b \in \mathbb{R}$ *există un rang* $n_b \in \mathbb{N}$ *astfel ca* $x_{n_b} > b$.

2. $(x_n)_{n\geq 0}$ *este nemărginit inferior dacă şi numai dacă pentru orice* $a \in \mathbb{R}$ *există un rang* $n_a \in \mathbb{N}$ *astfel ca* $x_{n_a} < a$.

2.1.4 Şiruri monotone

Fie un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *crescător* (respectiv *strict crescător*) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al şirului este mai mic (respectiv strict mai mic) decât termenul care-i succede.

De asemenea, spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *descrescător* (respectiv *strict descrescător*) dacă $x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al şirului este mai mare (respectiv strict mai mare) decât termenul care-i succede.

Un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ crescător sau descrescător se va numi şir *monoton*, iar un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ strict crescător sau strict descrescător se va numi şir *strict monoton*. Desigur, orice şir strict monoton este şi monoton; nu şi reciproc.

Pentru a preciza monotonia unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ se pot folosi următoarele metode.

Studierea semnului diferenţei $x_{n+1} - x_n$.

- Dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător.
- Dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător.

Compararea raportului $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ *cu 1, dacă* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este un şir cu termeni strict pozitivi.*

- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător.
- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător.

Folosind inegalităţi stricte în locul inegalităţilor nestricte se obţin criteriile corespunzătoare de monotonie strictă.

Legătura între monotonia şi mărginirea unui şir

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir crescător, atunci

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots,$$

deci $x_0 \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior de primul termen x_0.

Similar, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir descrescător, atunci

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots,$$

deci $x_0 \geq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior de primul termen x_0. Au loc atunci următoarele proprietăţi.

Teorema 2.3. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir.*

1. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător, atunci el este mărginit inferior.*
2. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, atunci el este mărginit superior.*

2.2 Şiruri cu limită

Noţiunea de limită a unui şir este unul dintre cele mai importante concepte ale analizei matematice, precizând tendinţa termenilor unui şir de a se apropia de un anumit număr (cazul şirurilor cu limită finită), sau de a deveni oricât de mari, respectiv oricât de mici (cazul şirurilor cu limită infinită).

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ *are limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ lasă în afara ei cel mult un număr finit de termeni ai şirului, adică există un rang $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$ (altfel spus, vecinătatea V conţine toţi termenii şirului de la rangul n_V încolo). În acest caz, vom nota $x_n \to l$ *pentru* $n \to \infty$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, spunându-se şi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ (sau termenul său general x_n) *tinde* la l.

Se poate observa că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai şirului nu-i schimbă acestuia natura de a avea sau nu limită şi nici limita, dacă aceasta există, putându-se modifica doar rangul începând cu care termenii şirului aparţin unei vecinătăţi date.

Exemple. 1. Un şir constant $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, este convergent la c, întrucât orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(c)$ conţine toţi termenii şirului.

2. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n$ are limita $+\infty$. Pentru a demonstra acest lucru, observăm că orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ conţine un interval de forma $(M_V, +\infty]$. Fie $n_V = [M_V] + 1$. Atunci $n_V > M$, deci $x_{n_V} \in (M, +\infty] \subseteq V$. Analog, $x_n \in V$ pentru orice $n > n_V$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$.

3. În mod asemănător se poate demonstra că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = -n$ are limita $-\infty$.

Unicitatea limitei unui şir

În cele ce urmează, se va observa mai întâi că limita unui şir, dacă există, este unică.

Teorema 2.4. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $l_1 = l_2$.*

Subşiruri ale unui şir cu limită

Este uşor de observat că proprietăţile de monotonie şi mărginire se transmit de la un şir către subşirurile sale. Astfel, dacă un şir este monoton, orice subşir al său este de asemenea monoton, cu acelaşi sens de monotonie, iar dacă un şir este mărginit, orice subşir al său este de asemenea mărginit, mulţimea termenilor subşirului fiind inclusă în mulţimea (mărginită) a termenilor şirului. Pe aceeaşi linie de gândire, proprietatea unui şir de a avea limită se transmite de asemenea către subşirurile sale.

Teorema 2.5. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci orice subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ al său are aceeaşi limită.*

Condiţie suficientă ca un şir să nu aibă limită

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are două subşiruri care tind la limite diferite, atunci el nu are limită, deoarece dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ ar avea limita l, atunci şi cele două subşiruri ar avea aceeaşi limită l.

Exemplu. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu are limită, deoarece subşirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_{2n} = 1$ şi subşirul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$.

2.2.1 Şiruri convergente

Un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ cu limită finită l se numeşte *şir convergent*, spunându-se şi că $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent către l*. Orice şir care nu este convergent se numeşte *divergent*.

În acest sens, şirurile divergente pot fi deci şiruri cu limită infinită sau şiruri fără limită. În plus, orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită ca şi şirul iniţial, conform Teoremei 2.5. De aici, dacă un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir cu limită infinită, sau două subşiruri cu limite diferite, atunci el este divergent.

Exemplu. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}n$ este divergent, deoarece subşirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_{2n} = 2n$ are limita $+\infty$.

Caracterizarea analitică a limitei unui şir

Definiţia cu vecinătăţi a limitei unui şir, deşi utilă teoretic, este greu de verificat sau folosit în aplicaţii. Vom prezenta în cele ce urmează câteva caracterizări echivalente cu un pronunţat aspect numeric, utile pentru demonstrarea unor proprietăţi verificabile practic. Mai întâi, este abordată situaţia şirurilor convergente.

Teorema 2.6. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $l \in \mathbb{R}$. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent către l dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.*

De fapt, proprietatea din enunţul Teoremei 2.6 este echivalentă cu proprietatea de definiţie a şirurilor convergente, putând fi folosită în locul acesteia pentru definirea noţiunii de şir convergent.

Exerciţiu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2n+5}{n+2}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Soluţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Au loc relaţiile

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$$

cu condiţia ca

$$\frac{1}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

Atunci

$$n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon} - 2] + 1 = [\frac{1}{\varepsilon}] - 1,$$

iar pentru $n \geq n_\varepsilon$, $|x_n - 2| < \varepsilon$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

> **Exerciţiu.** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere întregi. Arătaţi că $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant de la un rang încolo.

Soluţie. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Pentru $\varepsilon = \frac{1}{4}$, există $n_\varepsilon \in N$ astfel ca $|x_n - l| < \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, deci $x_n \in (l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Cum intervalul $(l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$ are lungime $\frac{1}{2}$, el nu poate conţine decât un singur număr întreg, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant începând cu rangul n_ε, termenii săi fiind egali cu numărul întreg respectiv.

Şiruri cu limită infinită (1)

În continuare, este abordată situaţia şirurilor cu limită infinită, observându-se că şirurile cu limita $+\infty$ au termeni „oricât de mari" de la un rang încolo, respectiv şirurile cu limita $-\infty$ au termeni „oricât de mici" de la un rang încolo.

Teorema 2.7. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci*

1. *$(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$.*
2. *$(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n < -M$ pentru orice $n \geq n_M$.*

> **Exerciţiu.** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n^2+2n+3}{n+1}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Soluţie. Fie $M > 0$ arbitrar. Au loc relaţiile

$$x_n = n + 1 + \frac{2}{n+1} > M$$

cu condiţia ca

$$n + 1 > M \Leftrightarrow n > M - 1.$$

Atunci $n_M = [M-1]+1 = [M]$, iar pentru $n \geq n_M$, $x_n > M$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Şiruri cu limita 0

În aceste condiţii, studiul şirurilor convergente cărora le este cunoscută limita poate fi redus la studiul unor şiruri convergente la 0, observându-se că un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $l \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă diferenţa dintre şir şi limita sa tinde la 0; acesta este doar un alt fel de a spune că termenii unui şir convergent devin „apropiaţi" de limita şirului de la un rang încolo.

Teorema 2.8. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - l) = 0$.*

Demonstraţie. Conform teoremei de caracterizare a şirurilor convergente (Teorema 2.6),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = l &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |x_n - l| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |(x_n - l) - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - l) = 0.\end{aligned}$$

■

Proprietatea de păstrare a semnului

Se poate observa că termenii unui şir cu limită au, cu excepţia eventuală a unui număr finit dintre ei, acelaşi semn cu limita şirului.

Teorema 2.9. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale cu limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Dacă $l > 0$, atunci toţi termenii şirului sunt strict pozitivi de la un rang încolo.*

2. *Dacă $l < 0$, atunci toţi termenii şirului sunt strict negativi de la un rang încolo.*

3. *Dacă $l \neq 0$, atunci toţi termenii şirului sunt nenuli de la un rang încolo.*

Şiruri cu limită infinită (2)

Teorema 2.10. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*), atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.
2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$*, iar* $x_n > 0$ *(respectiv* $x_n < 0$*) de la un rang încolo, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$*).*

Rezulatele teoremei de mai sus pot fi prezentate sub forma prescurtată

$$\frac{\mathbf{1}}{+\infty} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{1}}{-\infty} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}+} = +\infty, \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}-} = -\infty.$$

Cu ajutorul Teoremei 2.6, se poate acum obţine următorul rezultat frecvent folosit în aplicaţii.

Teorema 2.11. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton crescător de numere reale care este nemărginit superior. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Cu un raţionament asemănător, se poate demonstra şi următoarea teoremă complementară celei de mai sus.

Teorema 2.12. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton descrescător de numere reale care este nemărginit inferior. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Exemple. Pentru $k \in (0, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Pentru $q > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{q^n} = 0$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

Pentru $q \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (deoarece $p = \frac{1}{q} > 1$, iar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} (= \lim_{n\to\infty} q^n) = 0$).

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} = 0$.

Criterii de majorare-minorare

Conform teoremei anterioare, pentru a arăta că limita unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferenţa dintre termenii şirului şi limita acestuia. Teorema următoare afirmă faptul că dacă această diferenţă poate fi estimată potrivit, cu valori din ce în ce mai mici (α_n de mai jos poate fi înţeles ca o eroare de aproximare), atunci într-adevăr şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita l.

Teorema 2.13. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $l \in \mathbb{R}$. Dacă există un şir $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ de numere reale pozitive şi un rang oarecare $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$|x_n - l| \leq \alpha_n \text{ pentru orice } n \geq n_0, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0, urmează că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. De aici, $|x_n - l| \leq \alpha_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geq \max(n_0, n_\varepsilon)$, iar $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. ■

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Soluţie. Are loc relaţia

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+1}, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = n+1$ este un şir crescător şi nemărginit superior. De aici, $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{\sin n}{n}$. Demonstraţi că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Au loc relaţiile

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n}, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

deci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Se va observa acum că dacă termenii unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ pot fi minoraţi cu termeni „oricât de mari" ai unui şir $(a_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mari" (i.e. $(x_n)_{n\geq 0}$ are tot limita $+\infty$). De asemenea, dacă termenii unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ pot fi majoraţi cu termeni „oricât de mici" ai unui şir $(b_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $(b_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mici" (i.e. $(x_n)_{n\geq 0}$ are tot limita $-\infty$).

Teorema 2.14. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.*

1. *Dacă există un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi un rang $n_a \in N$ astfel ca $a_n \leq x_n$ pentru orice $n \geq n_a$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*
2. *Dacă există un şir de numere reale $(b_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ şi un rang $n_b \in N$ astfel ca $x_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq n_b$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.*

Demonstraţie. 1. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi fie $M > 0$ arbitrar. Există atunci un rang n_M astfel ca $a_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$. De aici, $x_n \geq a_n > M$ pentru orice $n \geq \max(n_a, n_M)$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Demonstraţia celei de-a două proprietăţi este asemănătoare. ■

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n + (-1)^n$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Soluţie. Are loc inegalitatea $x_n \geq n - 1$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = \infty$, de unde concluzia.

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Soluţie. Mai întâi, să observăm că

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \text{ pentru orice } k \geq 1,$$

deci, prin sumare după k de la 1 la n,

$$x_n > 2(\sqrt{n+1}-1) \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar cum $\lim\limits_{n\to\infty} 2(\sqrt{n+1}-1) = \infty$, urmează concluzia.

Şiruri conţinând funcţia modul

Prezentăm în continuare câteva consecinţe ale Teoremei 2.13, exprimând faptul că funcţia modul păstrează convergenţa şirurilor.

Teorema 2.15. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci*

1. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, iar $l \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |l|$.*
2. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.*
3. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Se va observa că reciproca primei afirmaţii nu este adevărată. În acest sens, fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$. Atunci $|x_n| \to 1$ pentru $n \to \infty$, dar $(x_n)_{n\geq 0}$ nu are limită. În plus, afirmaţiile 2. şi 3. pot fi cumulate sub forma

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

De asemenea, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, cu un raţionament asemănător celui de mai sus.

Limita şirului $(q^n)_{n\geq 0}$

Din cele de mai sus, se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

Acest lucru a fost observat deja pentru $q \in (0, 1)$, conform Teoremei 2.11. Pentru $q \in (-1, 0)$, $|q^n| = |q|^n$, iar $|q| \in (0, 1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, conform celei de-a treia proprietăţi de mai sus. În fine, proprietatea este evidentă pentru $q = 0$.

Fie acum $q \in (-\infty, -1)$. Cum $q^{2n} \to \infty$ iar $q^{2n+1} \to -\infty$, urmează că nu există $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$. Se observă în mod analog ca nu există $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ nici pentru $q = -1$.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu există,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ 0, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1 \end{cases}.$$

2.2.2 Proprietăţi ale şirurilor cu limită

Teorema ce urmează, numită şi *teorema de trecere la limită în inegalităţi* exprimă faptul că inegalităţile (nestricte) dintre termenii a două şiruri se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 2.16. *Fie două şiruri* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *cu proprietăţile*

1. *Există un rang* n_0 *astfel ca* $x_n \leq y_n$ *pentru* $n \geq n_0$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $x \leq y$.

Inegalităţile nestricte dintre termenii a două şiruri nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{1}{n+2}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = \frac{1}{n+1}$, pentru care $x_n < y_n$ pentru orice $n \geq 0$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Teorema de mai jos, numită şi *teorema cleştelui*, ne permite să calculăm limita unui şir care poate fi încadrat între alte două şiruri având aceeaşi limită.

Teorema 2.17. *Fie trei şiruri de numere reale* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(x_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *cu proprietăţile*

1. *Există un rang* n_0 *astfel ca* $a_n \leq x_n \leq b_n$ *pentru* $n \geq n_0$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *iar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Observăm că dintre cei n termeni conţinuţi în suma care defineşte x_n, $\frac{1}{n^2+n}$ este cel mai mic, iar $\frac{1}{n^2+1}$ este cel mai mare. Urmează că $n \cdot \frac{1}{n^2+n} \leq x_n \leq n \cdot \frac{1}{n^2+1}$, deci

$$\frac{1}{n+1} \leq x_n \leq \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n},$$

iar deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, urmează că de asemenea $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $(x_n)_{n\geq 1}$ fiind încadrat între şirurile $(\frac{1}{n+1})_{n\geq 1}$, $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ cu limita 0.

2.2.3 Relaţii între convergenţă, monotonie şi mărginire

În cele ce urmează, vom studia relaţiile dintre proprietăţile de monotonie, mărginire şi convergenţă.

Teorema 2.18. *Orice şir convergent este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Punând $\varepsilon = 1$ în Teorema 2.6, obţinem că există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < 1$ pentru orice $n \geq n_1$, sau $l - 1 < x_n < l + 1$ pentru orice $n \geq n_1$. Pentru a obţine inegalităţi valabile şi pentru $x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}$, observăm că, pentru orice $n \geq 0$,

$$\min(x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}, l-1) \leq x_n \leq \max(x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}, l+1)$$

deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. ■

Teorema 2.19. *Orice şir nemărginit este divergent.*

Demonstraţie. Se aplică operatorul de negaţie logică propoziţiei de mai sus. ■

Exemple.

1. *Nu orice şir mărginit este convergent.*
   Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu este convergent, deoarece subşirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_{2n} = 1$ şi subşirul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$. În schimb, $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$.

2. *Nu orice şir convergent este monoton.*
   Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ este convergent la 0, deoarece $|x_n| = \frac{1}{n}$, iar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât şi negative.

3. *Nu orice şir monoton este mărginit.*
   Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = 2n + 1$ este monoton, dar nu este mărginit, fiind nemărginit superior.

4. *Nu orice şir mărginit este monoton.*
   Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ este mărginit, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât şi negative.

Teorema 2.20. *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Din cele de mai sus, se observă de asemenea că toţi termenii unui şir monoton crescător şi mărginit superior $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt mai mici sau egali cu valoarea l a limitei şirului. Similar, toţi termenii unui şir monoton descrescător şi mărginit inferior $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt mai mari sau egali cu valoarea limitei şirului.

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Arătaţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluţie. Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit. În acest scop, să observăm că, deoarece $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci şi mărginit inferior. De asemenea, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 2$, deci

$$x_n < \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 2,$$

iar $(x_n)_{n\geq 1}$ este şi mărginit superior. Fiind monoton şi mărginit, $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Combinând Teorema 2.11, Teorema 2.12 şi Teorema 2.20, obţinem următorul rezultat, care precizează existenţa limitei unui şir monoton.

Teorema 2.21. *Orice şir monoton $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită, finită sau nu.*

2.2.4 Operaţii cu şiruri convergente

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unor şiruri de a fi convergente se păstrează după efectuarea operaţiilor uzuale de sumă, diferenţă, produs cu o constantă, produs termen cu termen, iar în anumite condiţii se păstrează şi după efectuarea inverselor sau a raportului termen cu termen.

Teorema 2.22. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci şirul sumă $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$, şirul produs cu o constantă $(cx_n)_{n\geq 0}$, $c \in \mathbb{R}$, şi şirul produs $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente, iar dacă $x \neq 0$ şi $x_n \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci şi şirul inverselor $(\frac{1}{x_n})_{n\geq 0}$ este convergent. În plus, au loc relaţiile*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x + y$
(limita sumei este egală cu suma limitelor).

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = cx$
(operaţia de înmulţire cu o constantă comută cu operaţia de calculare a limitei).

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = xy$
(limita produsului este egală cu produsul limitelor).

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{x}$, *dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$
(limita inverselor este egală cu inversa limitei).

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Soluţie. Mai întâi, se observă că $x_1 = -\frac{1}{2} < x_0$. În plus,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n - 1 - \frac{1}{2}x_{n-1} + 1 = \frac{1}{2}\left(x_n - x_{n-1}\right),$$

deci

$$\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \operatorname{sgn}\left(x_n - x_{n-1}\right) = \ldots = \operatorname{sgn}(x_1 - x_0).$$

Cum $x_1 < x_0$, urmează că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, deci şi mărginit superior de $x_0 = 1$.

Deoarece $x_{n+1} < x_n$, urmează că $x_n > \frac{1}{2}x_n - 1$, deci $x_n > -2$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este şi mărginit inferior. Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit, el este convergent. Fie l limita sa; atunci şirul $(\frac{1}{2}x_n)_{n\geq 0}$ are limita $\frac{1}{2}l$, iar şirul $(x_{n+1})_{n\geq 0}$ are tot limita l. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem că $l = \frac{1}{2}l - 1$, deci $l = -2$.

Proprietăţile de mai sus se pot extinde în mod asemănător la operaţii cu un număr mai mare (dar constant) de şiruri. De exemplu, dacă $(x_n^1)_{n\geq 0}$, $(x_n^2)_{n\geq 0}, \ldots,$

$(x_n^k)_{n\geq 0}$ sunt şiruri convergente, cu limitele respectiv $l_1, l_2, \ldots, l_k$, atunci şirul sumă $(x_n^1 + x_n^2 + \ldots + x_n^k)_{n\geq 0}$ este convergent, iar

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^1 + x_n^2 + \ldots + x_n^k\right) = \lim_{n\to\infty} x_n^1 + \lim_{n\to\infty} x_n^2 + \ldots + \lim_{n\to\infty} x_n^k.$$

Cazul operaţiilor cu un număr variabil de şiruri trebuie tratat cu atenţie, aşa cum se observă din următorul exemplu

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \ldots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

diferenţa provenind din faptul că paranteza $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}\right)$ conţine un număr de n şiruri, n fiind variabil.

Teorema 2.23. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci şirul diferenţă $(x_n - y_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar dacă $y \neq 0$ şi $y_n \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci şi şirul raport $(\frac{x_n}{y_n})_{n\geq 0}$ este convergent. În plus, au loc relaţiile*

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = x - y$
   (limita diferenţei este egală cu diferenţa limitelor).

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{x}{y}$, *dacă* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$
   (limita raportului este egală cu raportul limitelor).

Demonstraţie. 1. Deoarece $x_n - y_n = x_n + (-1)y_n$, iar $((-1)y_n)_{n\geq 0}$ este convergent cu limita $-y$ (din Teorema 2.22), urmează că

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty}((-1)y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2. Ca mai sus, şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este bine definit, cu excepţia eventuală a unui număr finit de termeni. Deoarece $(\frac{1}{y_n})_{n\geq 0}$ este convergent cu limita $\frac{1}{y}$, urmează că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

■

Se poate demonstra de asemenea următorul rezultat.

Teorema 2.24. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri convergente de numere reale astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$, $x_n > 0$ *pentru orice* $n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. *Atunci şirul putere* $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$ *este convergent. În plus, are loc relaţia*

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^{y_n}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ *(limita puterii se distribuie atât bazei şi exponentului).*

Alegând şirurile constante $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, respectiv $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, se obţine următoarea consecinţă a teoremei de mai sus.

Corolar 2.24.1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir convergent de numere reale astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$, $x_n > 0$ *pentru orice* $n \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. *Atunci*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^k = x^k$ *(limita puterii este egală cu puterea limitei).*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \sqrt[p]{x}$ *(limita radicalului este egală cu radicalul limitei).*

Analizăm acum cazul în care $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita 0.

Teorema 2.25. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir convergent de numere reale strict pozitive astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *şi fie* $(y_n)_{n\geq 0}$ *un şir convergent de numere reale astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \neq 0$. *Atunci*

1. *Dacă* $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^{y_n}) = 0$.

2. *Dacă* $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^{y_n}) = +\infty$.

Consideraţii asemănătoare se pot formula în cazul în care $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir convergent de numere reale strict negative cu limita 0, sau măcar conţine termeni negativi, cu rezerva ca $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$ trebuie mai întâi sa fie bine definit. De exemplu, pentru $x_n = -\frac{1}{n}$ şi $y_n = \frac{1}{2n}$, $x_n^{y_n} = \sqrt[2n]{-\frac{1}{n}}$ nu este definit pentru nicio valoare a lui n.

Totuşi, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ au ambele limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergenţa sau divergenţa şirului $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$, spunându-se că 0^0 este un *caz de nedeterminare*. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă $x_n = \frac{1}{2^n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

- Dacă $x_n = \frac{1}{2^{n^2}}$, $y_n = -\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^n \to +\infty$.
- Dacă $x_n = \frac{1}{2^n}$, $y_n = -\frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$ nici măcar nu are limită.

2.2.5 Operaţii cu şiruri cu limită infinită

Teorema 2.26. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.*
2. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$.*

Rezutatul Teoremei 2.26 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\infty + \mathbf{c} = \infty, \quad \infty + \infty = \infty,$$
$$-\infty + \mathbf{c} = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \mathbf{c} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.27. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.*
2. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.*
3. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.*
4. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.*

Rezutatul Teoremei 2.27 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\mathbf{c.p.} \cdot +\infty = +\infty, \quad \mathbf{c.n.} \cdot +\infty = -\infty,$$
$$\mathbf{c.p.} \cdot -\infty = -\infty, \quad \mathbf{c.n.} \cdot -\infty = +\infty,$$

unde prin **c.p.** şi **c.p.** înţelegem „constantă reală strict pozitivă" şi respectiv „constantă reală strict negativă".

Teorema 2.28. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.
2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.
3. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.
4. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

Rezutatul Teoremei 2.28 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\frac{\infty}{\mathbf{c.p.}} = \infty, \quad \frac{\infty}{\mathbf{c.n.}} = -\infty,$$
$$\frac{-\infty}{\mathbf{c.p.}} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{\mathbf{c.n.}} = \infty.$$

Teorema 2.29. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale.*
Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \{-\infty, +\infty\}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Rezutatul Teoremei 2.29 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\frac{\mathbf{c}}{\infty} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{c}}{\infty} = \mathbf{0}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.30. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = +\infty$.
2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.

Rezutatul Teoremei 2.30 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\infty^{\mathbf{c.p.}} = \infty, \quad \infty^{\mathbf{c.n.}} = \mathbf{0}.$$

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita ∞ iar $(y_n)_{n\geq 0}$ are limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergenţa sau divergenţa şirului $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$, spunându-se că ∞^0 este un *caz de nedeterminare*. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă $x_n = 2^n$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2 \to 2$.
- Dacă $x_n = 2^{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^n \to +\infty$.
- Dacă $x_n = 2^n$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$ nici măcar nu are limită.

În general, nu se poate afirma nimic despre convergenţa sau divergenţa produsului dintre un şir convergent şi un alt şir care nu are neapărat limită. Totuşi, sub ipoteze adiţionale, are loc următorul rezultat.

Teorema 2.31. *Produsul dintre un şir mărginit $(x_n)_{n\geq 0}$ şi un şir $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent la 0 este un şir convergent la 0.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, există $M > 0$ astfel că $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir convergent la 0, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0. ■

Exemplu. Dacă $(y_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0, atunci $((-1)^n y_n)_{n\geq 0}$ este de asemenea convergent la 0.

Demonstraţie. Este suficient să alegem $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$, care este mărginit. ■

2.2.6 Calculul unor limite fundamentale

Limitele funcţiilor polinomiale

Fie P o funcţie polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = P(n)$. Pentru calculul limitei şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se va scoate factor comun forţat n^k ($k =$ grad P). Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} n^k \left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right) \\ &= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{n\to\infty} a_k n^k = \infty \cdot a_k = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui $P(n)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P.*

Exemple.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^3 - 2n^2 + n - 1\right) = +\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^3 este pozitiv.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^4 + 3n^3 - \sqrt{2}n + 5) = -\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^4 este negativ

Limitele funcţiilor raţionale

Fie P, Q două funcţii polinomiale de grad k, respectiv l, unde $k, l \geq 1$,

$$\begin{aligned} &P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0, \\ &Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0. \end{aligned}$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, presupunând că $Q(n) \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$. Pentru calculul limitei şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se va scoate factor comun forţat n^k de la numărător ($k = \text{grad } P$), respectiv n^l de la numitor ($l = \text{grad } Q$). Se obţine că

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \ldots + b_1 n + b_0} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right)}{n^l \left(b_l + b_{l-1}\frac{1}{n} + \ldots + b_1 \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \frac{1}{n^l} \right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}. \end{aligned}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n\to\infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui* P *şi* Q.

De asemenea, dacă $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$, deci *dacă gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului, atunci limita lui* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *este 0.*

Dacă $\operatorname{grad} P = \operatorname{grad} Q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k}{b_l}$, deci *dacă gradul numitorului este egal cu gradul numărătorului, atunci limita lui* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *este raportul coeficienţilor termenilor dominanţi.*

Dacă $\operatorname{grad} P > \operatorname{grad} Q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = +\infty \frac{a_k}{b_l}$, deci *dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, atunci limita lui* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *este* $+\infty$ *dacă coeficienţii termenilor dominanţi au acelaşi semn, respectiv* $-\infty$ *dacă coeficienţii termenilor dominanţi au semne opuse.*

Exemple. 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 6n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2})}{n^2(3 + 6\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})} = \frac{2}{3}.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 4n^2 - n + 2}{2n^2 - 3n + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1 + 4\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3})}{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 7\frac{1}{n^2})} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 3n - 6}{n^3 + 4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(5 + 3\frac{1}{n} - \frac{6}{n^2})}{n^3(1 + 4\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = 0 \cdot 5 = 0.$$

Subşiruri ale şirurilor mărginite şi nemărginite

A fost deja observat că nu orice şir monoton este convergent. Totuşi, cu ajutorul teoremei de convergenţă a şirurilor monotone, putem arăta că din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent, acest lucru reprezentând obiectul următorului rezultat, numit şi *Lema lui Césaro*.

Teorema 2.32. *Orice şir mărginit $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir convergent.*

În mod asemănător, putem observa că şirurile nemărginite conţin subşiruri cu limită infinită.

Teorema 2.33. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir.*

1. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, atunci el conţine un subşir cu limita $+\infty$.*
2. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci el conţine un subşir cu limita $-\infty$.*

2.2.7 Puncte limită ale unui şir

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir dat. Vom numi *mulţimea punctelor limită* ale şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$, mulţimea tuturor limitelor de subşiruri ale lui $(x_n)_{n\geq 0}$.

Mai întâi se observă că mulţimea punctelor limită ale unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ dat este totdeauna nevidă. Mai precis, dacă şirul este mărginit, atunci el conţine un subşir convergent (Teorema 2.32), cu o limită oarecare l, iar în această situaţie $l \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$. Dacă şirul este nemărginit superior (respectiv superior), atunci $+\infty \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$ (respectiv $-\infty \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$), conform Teoremei 2.33.

Exemplu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$. Atunci $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n = \{-1, 1\}$. În acest scop, se observă că orice subşir cu limită (care este în mod necesar finită, deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit) $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant de la un rang încolo, fiind un şir convergent de numere întregi. Fiind constant de la un rang încolo, termenii săi sunt toţi egali cu 1 sau -1 începând cu acel rang, iar $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ poate avea fie limita 1, fie limita -1.

Conform definiţiei, se pot observa următoarele proprietăţi.

1. Dacă o infinitate de termeni ai unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt egali cu un acelaşi număr real x, atunci putem construi un subşir convergent la x cu termenii în cauză, deci $x \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$.
2. Dacă un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita l, finită sau nu, atunci $l \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$, pe post de subşir convergent la l putând lua chiar şirul $(x_n)_{n\geq 0}$.

3. Există şiruri care au o infinitate de puncte limită. De exemplu, pentru

$$(x_n)_{n\geq 0} : 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots,$$

orice număr natural este punct limită, întrucât $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine toate numerele naturale, repetate de o infinitate de ori.

4. Dacă $l \in \underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}\, x_n$, atunci orice vecinătate V a lui l conţine o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, deoarece există un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ care este convergent la l şi deci V conţine toţi termenii subşirului $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ de la un rang încolo.

Teorema 2.34. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă şi numai dacă $\underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}\, x_n$ se reduce la un singur element.*

Limita superioară şi limita inferioară a unui şir

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi fie şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$a_n = \inf_{k\geq n} x_k = \inf \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$
$$b_n = \sup_{k\geq n} x_k = \sup \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Cum $\{x_{n+1}, \ldots\} \subseteq \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, urmează că $a_n \leq a_{n+1}$ şi $b_n \geq b_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$, deci $(a_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător, iar $(b_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător. Cum $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt monotone, ele admit limite. De asemenea, se observă că $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$.

Vom numi atunci *limită superioară* a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, limita şirului $(b_n)_{n\geq 0}$. Similar, vom numi *limită inferioară* a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, limita şirului $(a_n)_{n\geq 0}$. Deoarece $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Exemplu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = 2\sin\frac{n\pi}{3} + (-1)^n$. Pentru $n = 6k$, $k \geq 0$, urmează că $x_{6k} = \sin(2k\pi) + 1 = 1$. Similar, $x_{6k+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$, $x_{6k+2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $x_{6k+3} = -1$, $x_{6k+4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $x_{6k+5} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. Cum fiecare dintre aceste subşiruri este convergent, fiind constant, urmează că

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_n \leq M$ pentru orice $n \geq 0$. Urmează că de asemenea $b_n \leq M$ pentru orice $n \geq 0$, deci $\limsup_{n\to\infty} x_n (= \lim_{n\to\infty} b_n)$ este finită. Similar, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior, atunci $\liminf_{n\to\infty} x_n$ este finită. De asemenea, conform Teoremei 2.33, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, atunci $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$, iar dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Fie acum $l \in \operatorname{LIM}_{n\to\infty} x_n$. Există atunci un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = l$. Cum

$$\inf_{l\geq k_n} x_l \leq x_{k_n} \leq \sup_{l\geq k_n} x_l \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

urmează că

$$a_{k_n} \leq x_{k_n} \leq b_{k_n} \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

iar trecând la limită în aceste inegalităţi obţinem că

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq l \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Mai mult, se poate demonstra că $\limsup_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{LIM}_{n\to\infty} x_n$ şi $\limsup_{n\to\infty} x_n$ este cel mai mare punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Similar, $\liminf_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{LIM}_{n\to\infty} x_n$ şi $\liminf_{n\to\infty} x_n$ este cel mai mic punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. În plus, deoarece

$$a_n = \inf_{k\geq n} x_k \geq \inf_{k\geq 0} x_k, \quad b_n = \sup_{k\geq n} x_k \leq \sup_{k\geq 0} x_k,$$

urmează că

$$\inf_{k\geq 0} x_k \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \sup_{k\geq 0} x_k,$$

deci $\operatorname{LIM}_{n\to\infty} x_n$ este cuprinsă între marginea inferioară şi marginea superioară a termenilor şirului. Teorema 2.34 se poate reformula atunci sub forma următoare.

Teorema 2.35. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă* *şi numai dacă* $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$. *În această situaţie,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Exemplul următor indică faptul că, dat fiind un şir $(x_n)_{n\geq 0}$, nu trebuie confundată $\limsup_{n\to\infty} x_n$ cu $\sup_{n\geq 0} x_n$ şi nici $\liminf_{n\to\infty} x_n$ cu $\inf_{n\geq 0} x_n$. Acest lucru este dealtfel evident din faptul că $\limsup_{n\to\infty} x_n$ şi $\liminf_{n\to\infty} x_n$, fiind puncte limită, nu sunt influenţate de valorile primilor termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, pe când $\sup_{n\geq 0} x_n$ şi $\inf_{n\geq 0} x_n$ sunt.

Exemplu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$. Atunci $x_{2n} = \frac{2n+2}{2n+1}$, care este strict descrescător cu limita 1, iar $x_{2n+1} = -\frac{2n+4}{2n+3}$, care este strict crescător, cu limita -1. Atunci

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = -1, \quad \sup_{n\geq 0} x_n = x_0 = 2, \quad \inf_{n\geq 0} x_n = x_1 = -\frac{3}{2}.$$

Totuşi, $\limsup_{n\to\infty} x_n$ şi $\liminf_{n\to\infty} x_n$ reţin unele proprietăţi de mărginire caracteristice $\sup_{n\geq 0} x_n$ şi $\inf_{n\geq 0} x_n$, chiar dacă într-o formă mai slabă. Aceste proprietăţi sunt cuprinse în următorul rezultat. Reamintim că

$$x_n \leq \sup_{n\geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0, \quad x_n \geq \inf_{n\geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0.$$

Teorema 2.36. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir mărginit şi fie* $\varepsilon > 0$. *Atunci*

1. *Există* $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ *astfel că* $x_n < \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ *pentru orice* $n \geq n_\varepsilon^1$.

2. *Există* $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ *astfel că* $x_n > \liminf_{n\to\infty} x_n - \varepsilon$ *pentru orice* $n \geq n_\varepsilon^2$.

Cu un raţionament asemănător, folosind teoremele de caracterizare analitică a marginii superioare şi marginii inferioare a unei mulţimi, se poate demonstra că marginea superioară şi marginea inferioară a unei mulţimi mărginite se pot obţine ca limite de şiruri cu elemente din acea mulţime.

Teorema 2.37. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime mărginită. Există atunci două şiruri $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ de elemente din A astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf A$.*

2.2.8 Şiruri fundamentale (Cauchy)

În cazurile în care limita unui şir este dificit de intuit sau determinat numeric, poate fi util un criteriu de convergenţă care să nu facă apel la determinarea limitei şirului. Consideraţiile de mai jos permit demonstrarea convergenţei unui şir fără determinarea limitei acestuia.

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *şir fundamental*, sau *şir Cauchy*, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$.

Echivalent, $(x_n)_{n\geq 0}$ este *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_{n+p}| \leq \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \geq 0$. Intuitiv, într-un şir Cauchy toţi termenii sunt apropiaţi unul de celălalt de la un rang încolo.

Teorema 2.38. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir Cauchy. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.*

În particular, fiind mărginit, orice şir Cauchy $(x_n)_{n\geq 0}$ admite un subşir convergent.

Teorema 2.39. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă este convergent.*

Exerciţiu. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este convergent.

Soluţie. Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este şir Cauchy. Să presupunem prin reducere la absurd că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy. Conform definiţiei şirului Cauchy, aplicată pentru $\varepsilon = \frac{1}{3}$, există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{3}$ pentru orice $m, n \geq n_1$. În particular, pentru $m = 2n$, urmează că

$$|x_n - x_{2n}| \leq \frac{1}{3} \text{ pentru orice } n \geq n_1.$$

De asemenea,

$$|x_n - x_{2n}| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

contradicţie. Urmează că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este şir Cauchy, deci nu este nici convergent.

> **Exerciţiu.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{2^n}$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluţie. Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy. Mai întâi, observăm că au loc inegalităţile

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\
&\leq \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}}\right| + \left|\frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}}\right| + \ldots + \left|\frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. De aici,

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0.$$

Urmează că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, deci este convergent.

2.2.9 Criterii de convergenţă utilizând raportul $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

Prezentăm mai întâi o inegalitate între limitele unor şiruri de radicali, respectiv rapoarte, asociate unui şir cu termeni strict pozitivi.

> **Teorema 2.40.** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Are loc inegalitatea*
>
> $$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Conform Teoremei 2.35, din rezultatul de mai sus se poate deduce imediat următorul criteriu de existenţă a limitei radicalului de ordin n al unui şir dat. În acest mod se poate reduce calculul unor limite care conţin radicali de ordin n la calculul unor limite de rapoarte, care pot fi mai simple decât cele dintâi.

Teorema 2.41. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.*

Exerciţiu. Demonstraţi că

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, unde $a > 0$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Soluţie. 1. Fie $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = a$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{a} = 1$, deci de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2. Fie $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, deci de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Convergenţa şi divergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 0}$: $a_n = l^n$, pentru care raportul $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ are valoarea constantă $l \in [0, \infty)$, a fost discutată anterior. În cele ce urmează, vom observa că un şir cu termeni strict pozitivi $(x_n)_{n\geq 0}$ pentru care raportul $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ are limita l, fără a fi neapărat constant, are aceeaşi convergenţă sau divergenţă cu $(a_n)_{n\geq 0}$, cu excepţia eventuală a cazului în care $l = 1$.

Teorema 2.42. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci*

1. *Dacă $l \in [0, 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.*
2. *Dacă $l \in (1, \infty]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*
3. *Dacă $l = 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nu poate fi precizată a priori cu ajutorul limitei raportului (spunem că este un caz de dubiu).*

Exerciţiu. Demonstraţi că

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, unde $a > 0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, unde $a > 1$, $k > 0$.

Soluţie. 1. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

deci de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n^k}{a^n}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \in (0,1),$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cea de-a doua proprietate poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcţia exponenţială creşte mai rapid către $+\infty$ decât funcţia putere.

Exerciţiu. Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}.$$

Soluţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)\cdot (2n+4)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)\cdot (3n+4)}}{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{3n+4} = \frac{2}{3} \in (0,1),$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.2.10 Teoremele Stolz-Césaro

Teoremele următoare, numite şi *Teoremele Stolz-Césaro*, sunt aplicabile limitelor de rapoarte de şiruri de forma $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, care pot fi reduse la calculul unor limite de rapoarte de şiruri de forma $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, posibil mai simple, mai ales dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ şi

$(b_n)_{n\geq 0}$ sunt definite cu ajutorul unor sume. Ele sunt denumite respectiv *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare* $\frac{0}{0}$ şi *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare* $\frac{\infty}{\infty}$ pentru a indica situaţiile uzuale de aplicabilitate, deşi pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ numai limita numitorului este cerută în mod explicit a fi $+\infty$.

Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 2.43. *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale astfel încât*

1. *$(b_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.*
2. *Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Exerciţiu. Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}.$$

Soluţie. Fie

$$(a_n)_{n\geq 0} : a_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}$$
$$(b_n)_{n\geq 0} : b_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}$$

Deoarece $b_{n+1} - b_n = \sqrt{n} > 0$, urmează că $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Urmează că de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, deci valoarea limitei din enunţ este 0.

Exerciţiu. Fie $q \in (0,1)$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$.

Soluţie. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{n\to\infty} nq^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}.$$

Fie $(a_n)_{n\geq 0} : a_n = n$, $(b_n)_{n\geq 0} : b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n$. Deoarece $\frac{1}{q} > 1$ iar $b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right) > 0$, urmează că $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right)} = 0.$$

Urmează că de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, deci valoarea limitei din enunţ este 0.

Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

> **Teorema 2.44.** *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale astfel încât*
>
> 1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
> 2. $(b_n)_{n\geq 0}$ *este strict descrescător şi* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
> 3. *Există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
>
> *Atunci există şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

2.2.11 Şiruri cu limita numărul e

Vom considera în continuare şirul $(x_n)_{n\geq 0} : x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, căruia îi vom demonstra convergenţa.

> **Teorema 2.45.** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător şi mărginit.*

Demonstraţie. *Monotonie*

Folosind formula binomială, observăm că

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$

Cu acelaşi raţionament,

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!}.$$

Comparând factor cu factor, obţinem că

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right),$$

pentru orice $1 \le k \le n$, deci $x_n < x_{n+1}$, iar $(x_n)_{n\ge 0}$ este strict crescător.

Mărginire

Observăm că

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!},$$

iar cum

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \ge 1 \cdot 2 \dots \cdot 2 = 2^{k-1} \text{ pentru } k \ge 2,$$

obţinem că

$$x_n \le 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \le 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Cum $(x_n)_{n\ge 0}$ este monoton crescător, $x_n \ge x_1 = 2$ pentru orice $n \ge 1$. În concluzie

$$2 \le x_n < 3 \text{ pentru orice } n \ge 1,$$

deci $(x_n)_{n\ge 0}$ este mărginit.

Fiind monoton şi mărginit, $(x_n)_{n\ge 0}$ este convergent. Prin convenţie, se notează cu e limita sa, unde $e = 2.71828....$ ■

Din teorema de mai sus se obţine următoarea egalitate importantă

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

De asemenea, se observă că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n}{n-1}}$$
$$= e,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Teorema 2.46. *Şirul* $(y_n)_{n\geq 0}$*:* $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *este strict descrescător şi convergent la e.*

Demonstraţie. *Monotonie*

Pentru a demonstra că $(y_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, observăm că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} > \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n+2}} > \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Aplicând inegalitatea dintre media geometrică şi media armonică numerelor 1, 1,. . . ,1, $\frac{n+1}{n+2}$, obţinem că

$$\sqrt[n+1]{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n+2}} > \frac{n+1}{1+1+\ldots+1+\frac{n+2}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2+2n+2}.$$

Rămâne deci să demonstrăm că

$$\frac{(n+1)^2}{n^2+2n+2} \geq \frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

ceea ce este imediat, deoarece

$$(n^2+2n+2)n(n+2) = [(n+1)^2+1][(n+1)^2-1] = (n+1)^4 - 1 < (n+1)^4.$$

Deoarece $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, el este mărginit superior de y_1. Conform inegalităţii lui Bernoulli,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\frac{1}{n} > 2,$$

deci $(y_n)_{n\geq 1}$ este şi mărginit inferior. Cum $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit, el este convergent. În plus

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$. ■

Cum termenii unui şir strict crescător sunt strict mai mici decât valoarea limitei, respectiv termenii unui şir strict descrescător sunt strict mai mari decât valoarea limitei, obţinem din cele de mai sus că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

de unde, prin logaritmare

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Câteva consecinţe importante ale convergenţei şirurilor de mai sus, motivate de egalităţile deja obţinute, sunt indicate în cele ce urmează.

Teorema 2.47. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Fie* $(p_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale strict pozitive cu* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$.
2. *Fie* $(m_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale strict negative cu* $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = -\infty$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e$.
3. *Fie* $(z_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale nenule cu* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+z_n)^{\frac{1}{z_n}} = e$.

Exemple.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\frac{2}{2n-1}(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n-1}} = e.$$

Aici,

$$(z_n)_{n\geq 1} : z_n = \frac{2}{2n-1} \to 0 \text{ pentru } n\to\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}}\right]^{\frac{-2n}{2n^2+n+1}(n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2-4n}{2n^2+n+1}}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Aici,

$$(z_n)_{n\geq 1} : z_n = \frac{2n}{2n^2+n+1} \to 0 \text{ pentru } n\to\infty.$$

Din Teorema 2.47 se pot deduce de asemenea şi următoarele proprietăţi.

Teorema 2.48. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale nenule cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$ *pentru orice* $a>0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+x_n)^k - 1}{x_n} = k$ *pentru orice* $k \in \mathbb{R}$.

Exerciţiu. Demonstraţi că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0, \quad k > 0.$$

Soluţie. Deoarece $k > 0$, şirul $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = n^k$, este strict crescător cu limita $+\infty$. Aplicând atunci Teorema 2.43 obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1)^k - n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1} \frac{\frac{1}{n}}{n^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1}{\frac{1}{n}}} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^k} = 1 \cdot \frac{1}{k} \cdot 0 = 0.$$

Proprietatea poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcţia putere creşte mai rapid către $+\infty$ decât funcţia logaritmică.

Exemple. 1.

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 2.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}}\right]^{\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{2}-1) + (\sqrt[n]{3}-1)}{2} n}$$

$$= e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right)\frac{1}{2}} = e^{(\ln 2 + \ln 3)\frac{1}{2}} = e^{\ln\sqrt{2\cdot 3}} = \sqrt{6}.$$

Un alt şir cu limita e

Fie acum şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Teorema 2.49. *Şirul $(e_n)_{n\geq 0}$ este convergent cu limita e.*

Demonstraţie. Cum $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $(e_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, deci $e_n \geq e_1 = 2$ pentru orice $n \geq 1$, iar conform inegalităţilor obţinute în Teorema 2.45, $e_n < 3$ pentru orice $n \geq 1$. În concluzie, $(e_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Fiind şi monoton, $(e_n)_{n\geq 0}$ este convergent; să notăm cu e' limita sa. Să notăm de asemenea $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Deoarece $x_n < e_n$, obţinem prin trecere la limită pentru $n \to \infty$ că $e \leq e'$.

Fie acum $1 \leq m < n$ fixat. Atunci

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ în relaţia de mai sus, obţinem că

$$e \leq 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!},$$

adică $e \leq e_m$. Cum această egalitate este valabilă în fapt pentru orice m (restricţia $m < n$ se elimină prin alegerea de la început a unui n suficient de mare), prin trecere la limită se obţine că $e \leq e'$. Cum şi $e' \leq e$, urmează că $e = e'$, iar $(e_n)_{n\geq 0}$ este convergent tot la e. ■

Din cele de mai sus, se obţine următoarea egalitate

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Iraţionalitatea lui e

Teorema 2.50. *Numărul e este iraţional.*

Constanta lui Euler

Fie acum şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Teorema 2.51. *Şirul $(c_n)_{n\geq 0}$ este convergent.*

Demonstraţie. Vom demonstra că $(c_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit.

Monotonie

Observăm că

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

deci $(c_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător.

Mărginire

Cum $(c_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, el este mărginit superior. Observăm că

$$\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k+1}, \text{ pentru } k \geq 1.$$

Sumând inegalităţile obţinute pentru $k = 1, k = 2, \ldots, k = n-1$ obţinem că

$$\ln n > \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \Leftrightarrow c_n < 1 \text{ pentru } n \geq 2,$$

Cum $(c_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit, el este convergent. Prin convenţie, se notează cu γ limita sa, unde $\gamma = 0.57721...$. Numărul γ astfel definit se numeşte *constanta lui Euler*. ■

Exerciţiu. Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

Soluţie. Au loc relaţiile

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln(2n)\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2n-\ln n$$
$$=c_{2n}-c_n+\ln 2.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} c_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \gamma$, urmează că limita din enunţ este $\ln 2$.

Aplicaţii

2.1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n+2}{2n+5}$. *Precizaţi valorile lui n pentru care* $|x_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{9}$.

2.2. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_0 = \frac{4}{3}$.

1. *Demonstraţi că* $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2$.
2. *Determinaţi expresia termenului general* x_n.
3. *Determinaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.3. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+n^3+3n^2-n+5}{3n^3-2n^2+n-6}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln(n^2+2n+3) - \ln(3n^2+n-6)\right)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n+1)}{\ln(n^6+2n+3)}$.

2.4. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+3}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{5\cdot 2^{n+1}+3^{n+2}}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+n-1}{3n^2+2n+1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+0.5+0.5^2+\ldots+0.5^n}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}^2+\ldots+\frac{1}{3}^n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{n+1}-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{n+1}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^n-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^n}$.

2.5. *Dacă* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este un şir cu proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *determinaţi*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n+2}{2x_n+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2}{3x_n+1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n+3}{x_n^3+2}$.

2.6. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+(-1)^n}{2n+3}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}}$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n} - n\right)$.

2.7. *Folosind eventual un criteriu de majorare-minorare, demonstraţi că*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1 + 2\sin 2 + \ldots + n\sin n}{n^3} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n + n\sin\frac{n}{2}\right) = +\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2 + [n]\cos\frac{n\pi}{3}\right) = -\infty$.

2.8. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$*:* $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$*. Demonstraţi că* $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *pentru orice* $n \geq 1$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$*.*

2.9. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$*:* $x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$*. Demonstraţi că* $3 < x_n < 3\sqrt[n]{2}$ *pentru orice* $n \geq 2$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$*.*

2.10. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$*:* $x_n = \sqrt[n]{n}$*. Se notează* $x_n = 1 + \alpha_n$*,* $n \geq 2$*. Demonstraţi că* $0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$*.*

2.11. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$*:* $x_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}$*. Demonstraţi că* $1 < x_n < \sqrt[n]{n}^2$ *pentru orice* $n \geq 2$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$*.*

2.12. *Determinaţi*

1. $$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{3n+2}, \frac{2n+5}{3n+1}\right], \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{3n+2}, \frac{2n+5}{3n+1}\right];$$

2. $$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3n+4}{4n+5}, \frac{3n+8}{4n+9}\right], \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3n+4}{4n+5}, \frac{3n+8}{4n+9}\right].$$

2.13. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n+\sqrt{n}}$*;* *2)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^{n+\ln n}$*;* *3)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3\sqrt{n}+5}{2n+5}\right)^{\sqrt{n}}$*.*

2.14. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$*;* *2)* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$*.*

2.15. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$*;* *2)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$*.*

2.16. *Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{n^2(n+1)^2}$*;* *2)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}\right)$*;*
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$*.*

2.17. *Determinaţi* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *şi* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *în următoarele situaţii:*

1. $(x_n)_{n\geq 0}$*:* $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n^2}}{n^2+1}$*;*

2. $(x_n)_{n\geq 0}$*:* $x_n = \frac{\sin n^2}{n+1}$*;*

3. $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \arcsin(-1)^n + \arccos(-1)^{n+1} + \mathrm{arctg}(-1)^{n+2}$;

4. $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n \sin \frac{n\pi}{3}} + \left(\sqrt{n^2+3n+2} - \sqrt{n^2+2n+3}\right)^n$.

2.18. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = 2 + \frac{n}{n+2}\cos\frac{n\pi}{2}$. *Determinaţi* $\underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}\, x_n$.

2.19. *Fie*$(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere pozitive astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \neq 0$. *Atunci* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n y_n = l \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

2.20. *Determinaţi valoarea limitei:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^1 \cdot e^2 \cdot \ldots \cdot e^n}{n}.$$

2.21. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1+x_n}$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 = 1$.

1. *Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$.

2. *Demonstraţi că şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

3. *Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.

2.22. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 \in (1, 2)$.

1. *Demonstraţi că* $1 < x_n < 2$ *pentru orice* $n \geq 0$.

2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător.*

3. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

2.23. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ radicali}}$.

1. *Determinaţi o relaţie de recurenţă verificată de termenii şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$.

2. *Demonstraţi că* $0 < x_n < 2$ *pentru orice* $n \geq 1$.

3. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător.*

4. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

2.24. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 \in (0, 1)$.

1. *Demonstraţi că* $0 < x_n < 1$ *pentru orice* $n \geq 0$.

2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict descrescător.*

3. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

2.25. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 > 0$.

1. *Demonstraţi că* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \geq 0$.

2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător.*

3. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2.26. *Determinaţi*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

2.27. *Dacă un şir monoton* $(x_n)_{n\geq 0}$ *are un subşir convergent, atunci* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este de asemenea convergent.*

2.28. *Dacă un şir* $(x_n)_{n\geq 0}$ *are o infinitate de subşiruri convergente, rezultă că acesta este convergent?*

2.29. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir şi* $l \in \mathbb{R}$. *Dacă orice vecinătate* V *a lui* l *conţine o infinitate de termeni ai şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$, *rezultă că şirul are limita* l?

2.30. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+4n+3} - an - b\right) = 2.$$

Capitolul 3

SERII NUMERICE

Date fiind numerele reale $x_0, x_1, \ldots, x_n$, în număr finit, suma lor $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ se poate calcula fără dificultate, după regulile uzuale. Extinderea noţiunii de sumă pentru mulţimi infinite de numere nu este însă la fel de imediată. Acest lucru se poate observa încercând să se calculeze suma

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + 1 + (-1) + \ldots$$

(termenii sumei sunt, alternativ, 1 şi -1). Gruparea în modul

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots + (1 + (-1)) + \ldots,$$

în care suma termenilor din fiecare grup este 0, poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 0. De asemenea, gruparea în modul

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \ldots + ((-1) + 1) + \ldots,$$

poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 1; desigur, asocierea a două valori distincte pentru o aceeaşi sumă de numere reale reprezintă o situaţie inacceptabilă. În special, din cele de mai sus se observă faptul că în cazul adunării unui număr infinit de numere reale nu are neapărat loc proprietatea de asociativitate.

În lipsa proprietăţii de asociativitate, singura posibilitate de calcul a unei sume infinite rămâne de a aduna termenii din sumă unul câte unul. În concluzie, pentru a calcula o sumă de forma

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

vom determina

$$S_0 = x_0, \quad S_1 = x_0 + x_1, \quad S_2 = x_0 + x_1 + x_2, \ldots,$$
$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ldots$$

şi vom încerca să extragem informaţii despre comportarea şirului $(S_n)_{n\geq 0}$, utilizând aceste informaţii pentru determinarea sumei.

Numim atunci *serie numerică de termen general* x_n (sau, mai simplu, *serie de termen general* x_n) cuplul $((x_n)_{n\geq 0}, (S_n)_{n\geq 0})$ format din şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ al termenilor seriei şi şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale, definit după regula

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

În această situaţie, x_n se va numi şi *termenul de rang n* sau *indice n* al seriei. Vom nota o serie de termen general x_n prin

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Dacă primii k termeni $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nu sunt definiţi, vom nota seria de termen general x_n prin

$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n + \ldots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

Notaţiile de mai sus sugerează şi denumirea de „sumă infinită" pentru o serie, deşi, conform exemplului anterior, sumele infinite de numere reale nu au neapărat aceleaşi proprietăţi ca şi sumele finite de numere reale, această denumire nefiind deci întrutotul justificată.

Serii convergente, serii divergente

Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent, respectiv că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este *divergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este divergent. Dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ are limită, atunci

$\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *suma* seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ nu are limită nu li se asociază nicio sumă.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Termenul general al acestei serii este $x_n = \frac{1}{2^n}$. Sub formă desfăşurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots.$$

Deoarece

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, iar suma sa este 2.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} n$. Termenul general al acestei serii este $x_n = n$. Sub formă desfăşurată, seria se poate scrie în modul următor

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n + \ldots.$$

Deoarece

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} n$ este divergentă, iar suma sa este $+\infty$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Termenul general al acestei serii este $x_n =$

$(-1)^n$. Sub formă desfăşurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + 1 + (-1) + \ldots$$

Deoarece

$$S_{2n} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots + (1 + (-1)) + 1 = 1,$$

iar

$$S_{2n+1} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) = 0,$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = 0,$$

deci nu există $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ este divergentă, suma sa neputând fi definită.

În cele ce urmează, vom preciza condiţii pentru a stabili dacă o serie dată este sau nu convergentă, acolo unde este posibil determinându-se explicit şi suma seriei.

Sume calculabile exact

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$

Termenul general al acestei serii este $x_n = q^n$. Dacă $q \neq 1$, atunci

$$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = n + 1$.

Urmează atunci că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $q \in (-1, 1)$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ pentru $q \in (-1, 1)$. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

De asemenea, pentru $q = 1$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q = 1.$$

Dacă $q \in (1, +\infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty$ pentru $q \in (1, \infty)$, iar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q \in (1, +\infty).$$

Dacă $q \in (-\infty, -1]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nu există, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}$ nu există pentru $q \in (-\infty, -1]$, iar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, acestei serii neputându-i-se asocia o sumă.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu este definită,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ +\infty, & \text{dacă } q \geq 1 \end{cases}.$$

Exemplu. Fie suma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n}$. Atunci termenul general al acestei serii este

$$x_n = \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \left(\frac{(-1)2^3}{9}\right)^n = \left(-\frac{8}{9}\right)^n,$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{8}{9}\right)} = \frac{9}{17}.$$

Serii telescopice

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie telescopică* dacă există şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, astfel ca

$$x_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

adică există un şir pentru care termenul general al seriei se poate scrie ca diferenţa a doi termeni consecutivi ai acestui şir, primul cu acelaşi indice ca şi indicele termenului general al seriei. În această situaţie,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 - a_{n+1}, \end{aligned}$$

de unde seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă si numai dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent. În această ultimă situaţie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (a_0 - a_{n+1}) = a_0 - l,$$

unde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

Exemplu. Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Observăm că

$$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

Exemplu. Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$. Observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})} \\ &= \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k = \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \ldots + \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) \\ &= \sqrt{n+2}-1, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-1) = +\infty.$$

Proprietăţi generale ale seriilor

Eliminarea termenilor

În Capitolul 2, a fost observat că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai unui şir nu-i modifică acestuia proprietatea de a avea sau nu avea limită. Cum convergenţa unei serii este definită prin intermediul şirului sumelor parţiale, este natural ca nici eliminarea unui număr finit de termeni ai unei serii date să nu modifice natura acesteia. Prin „natură" înţelegem aici proprietatea unei serii de a fi convergentă sau divergentă, iar prin serii „cu aceeaşi natură" înţelegem două serii care sunt ambele convergente sau ambele divergente.

Teorema 3.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Dacă se adaugă sau se elimină un număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială, putându-se modifica în schimb suma sa, dacă seria este convergentă. Dacă suma seriei este* $+\infty$ *sau* $-\infty$*, aceasta nu se modifică.*

Comutativitate (Schimbarea ordinii termenilor)

Este cunoscut că o sumă finită are proprietatea de comutativitate, în sensul că valoarea sumei rămâne aceeaşi după orice schimbare a ordinii termenilor. Cu anumite precauţii (schimbarea ordinii va afecta doar un număr finit de termeni), această proprietate rămâne valabilă şi pentru serii.

Teorema 3.2. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială şi aceeaşi sumă.*

Proprietăţi generale ale seriilor convergente

Asociativitate

S-a observat deja că pentru cazul seriei divergente $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ asocierea termenilor cu ajutorul parantezelor conduce la mai multe valori posibile ale sumei sale. Totuşi, se poate demonstra că prin gruparea termenilor unei serii convergente cu ajutorul parantezelor se obţine tot o serie convergentă, cu aceeaşi sumă ca şi seria iniţială.

Teorema 3.3. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie convergentă. Asocierea termenilor săi cu ajutorul parantezelor conduce la o serie convergentă, cu aceeaşi sumă ca şi seria iniţială.*

Restul de ordin p

Dată fiind seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, vom numi *rest de ordin p* al acesteia seria

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots,$$

obţinută din seria iniţială prin eliminarea termenilor $x_0, x_1, \dots, x_p$, cu indici mai mici sau egali cu p. Se observă atunci că

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S_p + R_p, \quad \text{pentru orice } p \geq 0,$$

unde $(S_n)_{n\geq 0}$ este şirul sumelor parţiale asociat seriei date. Din acest motiv, dacă seria dată este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale tinde la suma seriei, iar şirul resturilor tinde la 0, conform formulei de mai sus. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Teorema 3.4. *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă* R_p*, restul de ordin* p*, este o serie convergentă pentru orice* $p \in \mathbb{N}$*. În plus, dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$.

Criteriul de convergenţă Cauchy

A fost deja demonstrat în Capitolul 2 că un şir este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental (Cauchy). De aici, o serie dată este convergentă dacă şi numai dacă sirul sumelor sale parţiale este şir Cauchy. Acest lucru se reflectă în următorul rezultat.

Teorema 3.5. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un rang* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0.$$

Demonstraţie. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Atunci

$$|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}|, \quad \text{pentru orice } n, p \geq 0.$$

Cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este şir fundamental, adică dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0,$$

rezultă concluzia. ■

Divergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că şirul

$$(S_n)_{n\geq 1} : x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

nu este şir Cauchy. Cum acesta este şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, urmează că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă. Seria de mai sus se numeşte şi *seria armonică*, întrucât fiecare termen al seriei este media armonică a termenilor care-l înconjoară, adică $\frac{1}{n}=\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{n-1}}+\frac{1}{\frac{1}{n+1}}}$ pentru orice $n>1$.

Limita termenului general

Teorema 3.6. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ *o serie dată. Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Demonstraţie. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ o serie convergentă, cu suma l. Deoarece

$$x_n=S_n-S_{n-1} \text{ pentru orice } n\geq 1,$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=l$, urmează concluzia. ■

Se observă de aici că dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ nu există, sau există şi nu este 0, atunci seria dată nu este convergentă. Se obţine deci următorul rezultat.

Corolar 3.6.1. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ *o serie dată. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ *nu există, sau există şi nu este* 0, *atunci seria dată este divergentă.*

Exerciţiu. Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}};\quad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}};\quad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[3]{n}.$$

Soluţie. Putem calcula limita termenului general în fiecare dintre aceste cazuri. Cum

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{3n+\frac{1}{n}}{2n}}=e^{\frac{3}{2}}\neq 0,$$

seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}}$ este divergentă. Se observă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n(\frac{2}{5}^n+1)}{5^{n+1}(\frac{2}{5}^{n+1}+1)}=\frac{1}{5}\neq 0,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}$ este divergentă. De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty \neq 0,$$

deci şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$ este divergentă.

Se poate observa de asemenea faptul că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ nu este o condiţie suficientă pentru convergenţa seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (fiind doar necesară). În acest sens, se poate observa că $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, dar totuşi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Mărginirea şirului sumelor parţiale

Teorema 3.7. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă. Atunci şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale asociate seriei este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă şi fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei. Cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar cum orice şir convergent este mărginit, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. ■

Reciproc, dacă şirul sumelor parţiale asociate unei serii date este nemărginit, atunci seria este divergentă. Se obţine deci următorul rezultat.

Corolar 3.7.1. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată şi fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei. Dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.*

Exerciţiu. Demonstraţi că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă.

Soluţie. Are loc estimarea

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1} = +\infty$, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit, şi atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă.

Operaţii cu serii convergente

Întrucât, aşa cum s-a menţionat anterior, convergenţa unei serii se defineşte prin intermediul convergenţei şirului sumelor sale parţiale, se va observa că proprietatea unor serii de a fi convergente se păstrează după efectuarea operaţiilor uzuale de sumă, diferenţă şi produs cu o constantă.

Teorema 3.8. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *două serii convergente de numere reale astfel ca* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = A$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = B$. *Atunci seria sumă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)$ *şi seria produs cu o constantă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} cx_n$, $c \in \mathbb{R}$, *sunt convergente. În plus, au loc relaţiile*

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n + y_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = A + B;$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} cx_n = c\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = cA.$

Demonstraţia este imediată, utilizând proprietăţile operaţiilor cu şiruri convergente.

Serii cu termeni pozitivi, serii cu termeni negativi, serii alternante, serii cu termeni oarecare

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Spunem că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni pozitivi* dacă toţi termenii săi de la un indice încolo sunt pozitivi, adică există $N_1 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq N_1$. Similar, spunem că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni negativi* dacă toţi termenii săi de la un indice încolo sunt negativi, adică există $N_2 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n \leq 0$ pentru orice $n \geq N_2$.

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *serie cu termeni oarecare* dacă are atât o infinitate de termeni pozitivi, cât şi o infinitate de termeni negativi. Un caz particular de serii cu termeni oarecare sunt *seriile alternante*. O serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *alternantă* dacă termenii săi sunt alternativ pozitivi şi negativi de la un rang încolo, adică există $N_3 \in \mathbb{N}$ pentru care $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir de termeni nenuli cu semn constant. În concluzie, pentru o serie alternantă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, fie $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, fie $x_n = (-1)^{n+1} a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi.

În cele ce urmează, conform faptului că eliminarea unui număr finit de termeni ai seriei nu modifică natura acesteia, vom presupune acolo unde este necesar că proprietatea de pozitivitate (respectiv negativitate, alternanţă) are loc începând cu primul termen al seriei. De asemenea, întrucât înmulţirea cu un număr negativ nu modifică natura unei serii, seriile cu termeni negativi nu vor fi tratate separat, rezultate privind convergenţa acestora putând fi deduse cu uşurinţă din rezultatele corespunzătoare privind convergenţa seriilor cu termeni pozitivi.

3.1 Serii cu termeni pozitivi

Monotonia şirului sumelor parţiale

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Deoarece

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0,$$

urmează că şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător. Acest lucru are consecinţe importante asupra convergenţei unei serii cu termeni pozitivi, deoarece dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este monoton, o condiţie necesară şi suficientă pentru convergenţa sa este ca el să fie mărginit superior. Obţinem deci următorul criteriu de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi.

Teorema 3.9. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale asociate seriei este mărginit superior.*

În plus, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni pozitivi cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$, atunci, deoarece $(S_n)_{n\geq 0}$ tinde monoton crescător către limita sa A, urmează că $S_n \leq A$ pentru orice $n \geq 0$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Deoarece

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{pentru orice } n \geq 2,$$

urmează că

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2, \end{aligned}$$

iar şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ al sumelor parţiale este mărginit superior, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

De asemenea, se poate observa că pentru serii cu termeni pozitivi are loc proprietatea de comutativitate, în care de această dată se pot schimba locurile unui număr infinit de termeni.

Teorema 3.10. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Dacă se schimbă ordinea unor termeni din serie (chiar în număr infinit), seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ astfel obţinută este convergentă şi are aceeaşi sumă.*

3.1.1 Criteriul de condensare

Un criteriu util pentru stabilirea, între altele, a convergenţei aşa-numitei serii armonice generalizate, care va fi folosită ca termen de comparaţie pentru alte serii, este următorul rezultat, numit *criteriul de condensare*.

Teorema 3.11. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton descrescător cu termeni pozitivi. Atunci* *seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ *au aceeaşi natură.*

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Soluţie. Deoarece $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = \left(\frac{1}{n \ln n}\right)_{n\geq 2}$ este un şir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ au aceeaşi natură. Cum $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ este divergentă.

Convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Dacă $p < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă, întrucât termenul său general nu tinde la 0. Similar, pentru $p = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este de asemenea divergentă.

Fie acum $p > 0$. Conform criteriului de condensare, seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ au aceeaşi natură. Cum

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n,$$

iar $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$ pentru $p \in (0, 1]$, respectiv $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ pentru $p > 1$, urmează că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă pentru $p \in (0, 1]$, respectiv convergentă pentru $p > 1$.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ este } \begin{cases} \text{divergentă,} & \text{dacă } p \leq 1 \\ \text{convergentă,} & \text{dacă } p > 1 \end{cases}.$$

Reprezentând o formă mai generală a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se mai numeşte şi *seria armonică generalizată*.

3.1.2 Criterii de comparaţie

În cele ce urmează vom prezenta un set de criterii care permit analiza convergenţei sau divergenţei unei serii cu termeni pozitivi date prin stabilirea unei relaţii între termenii seriei şi termenii unei alte serii a cărei natură este cunoscută (deseori cu seria armonică generalizată). Revenind la faptul că, pentru serii cu termeni pozitivi, convergenţa acestora este echivalentă cu nemărginirea şirului sumelor parţiale, interpretarea următorului rezultat este imediată: o serie ai cărei termeni sunt mai mari decât termenii unei serii „nemărginite" (i.e., divergente) date este de asemenea „nemărginită" (i.e., divergentă), în vreme ce o serie ai cărei termeni sunt mai mici decât termenii unei serii „mărginite" (i.e., convergente) date este de asemenea „mărginită" (i.e., convergentă).

Teorema 3.12. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$x_n \leq y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci au loc următoarele proprietăţi.

1. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*
2. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.*

Date fiind $c \in (0, \infty)$ şi o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, se observă că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ au aceeaşi natură. În aceste condiţii, se poate obţine uşor următorul corolar al teoremei de mai sus, numit *criteriul de comparaţie cu inegalităţi*.

Corolar 3.12.1. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi şi fie $c \in (0, \infty)$. Dacă* *există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$x_n \leq c y_n \text{ pentru orice } n \geq N, \tag{3.1}$$

atunci au loc următoarele proprietăţi.

1. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*
2. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.*

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa următoarelor serii:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

Soluţie. 1) Deoarece $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ este de asemenea convergentă.

2) Deoarece $\frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ este de asemenea convergentă.

3) Deoarece $\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^4}} = \frac{1}{n+1}$, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ este divergentă (este acelaşi lucru cu seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$), urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ este divergentă.

4) Deoarece $n \leq 2^n$ pentru orice $n \geq 2$, urmează că $\sqrt[n]{n} \leq 2$ pentru orice $n \geq 2$, deci $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 2$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, urmează că şi seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ este divergentă.

Informaţii despre îndeplinirea relaţiei (3.1), necesară pentru utilizarea criteriului de comparaţie, se pot obţine studiind comportarea raportului $\frac{x_n}{y_n}$.

În acest sens, să presupunem că $y_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$. Conform Teoremei 2.36, dacă $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, iar $\varepsilon > 0$, atunci există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_n}{y_n} < L + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$. Se obţine că

$$x_n < (L + \varepsilon) y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

Similar, dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, iar $\varepsilon \in (0, l)$, atunci există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_n}{y_n} > l - \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$. De aici,

$$x_n > (l - \varepsilon) y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

Putem atunci obţine următorul rezultat, numit *criteriul de comparaţie cu limite extreme*.

Corolar 3.12.2. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi.*

1. *Dacă* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, *iar* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, *iar* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1) Concluzia se obţine deoarece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă şi există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n < (L + \varepsilon) y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

2) Concluzia se obţine deoarece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă şi există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n > (l - \varepsilon) y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

■

În situaţia în care există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$. În plus, au loc egalităţile

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul de comparaţie cu limită*.

Corolar 3.12.3. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Au loc următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă* $l < \infty$, *iar* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $l > 0$, *iar* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $l \in (0, \infty)$, *atunci seriile* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *au aceeaşi natură.*

În multe situaţii, un bun termen de comparaţie este seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\frac{1}{n^p}$ precizând comportarea „aproximativă" a termenului general al seriei de studiat. De exemplu, în studiul convergenţei seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ este utilă comparaţia cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, întrucât $\frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ are comportarea „aproximativă" a lui $\frac{1}{n^3}$ pentru $n \to \infty$, iar în studiul convergenţei seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ este utilă comparaţia cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, întrucât $\frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ are comportarea „aproximativă" a lui $\frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exemplu. Studiaţi convergenţa seriilor:
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + 6n + 11}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$.

Soluţie. 1) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3 + n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ au aceeaşi natură. Cum cea din urmă este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{3}{2} > 1$, urmează că şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ este convergentă.

2) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n^2+6n+11}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{n^2+6n+11} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}} = 1 \in (0,\infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ au aceeaşi natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind o serie armonică, urmează că şi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ este divergentă.

3) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0,\infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ au aceeaşi natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că şi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ este divergentă.

4) Este deja cunoscut că $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n\right) = c \in (0,1)$. De aici,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} = 0,$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}} = 1 \in (0,\infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ şi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ au aceeaşi natură. Deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$: $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ este un şir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ şi $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{\ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$ au aceeaşi natură. Deoarece $n \leq 2^n$ pentru orice $n \geq 2$, urmează că $2^n \frac{1}{n \ln 2} \geq \frac{1}{\ln 2}$, deci termenul general al seriei $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$ nu tinde la 0, aceasta fiind în concluzie divergentă. Urmează că şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$ este divergentă.

Vom preciza în cele ce urmează un alt criteriu, numit şi *criteriul de comparaţie cu rapoarte*, prin care convergenţa sau divergenţa unei serii se poate stabili prin intermediul comparaţiei cu o serie a cărei natură este cunoscută, ce poate fi dedus cu ajutorul Corolarului 3.12.1.

Teorema 3.13. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *două serii cu termeni strict pozitivi. Dacă există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N, \tag{3.2}$$

atunci au loc următoarele proprietăţi.

1. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Cu ajutorul (3.2) se deduce că

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{x_N}{y_N} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Cu notaţia $\frac{x_N}{y_N} = c$, urmează că

$$\frac{x_n}{y_n} \leq c \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde concluzia urmează conform Corolarului 3.12.1. ■

3.1.3 Criterii ale radicalului

Un dezavantaj al criteriilor de comparaţie este că utilizarea acestora necesită construcţia unor serii ajutătoare, alegerea acestora din urmă nefiind totdeauna imediată. Următorul criteriu, numit şi *criteriul radicalului cu inegalităţi*, este utilizat îndeosebi pentru studierea convergenţei unor serii pentru care termenul general conţine puterea de ordin n a unui alt şir şi nu necesită construcţia unei serii ajutătoare.

Teorema 3.14. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă există* $q < 1$ *şi* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*
$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă*
$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$
atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1. Dacă
$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
urmează că
$$x_n \leq q^n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
iar cum $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă se obţine că şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Deoarece
$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$
se obţine că $x_n \geq 1$ pentru o infinitate de valori ale lui n, deci şirul termenilor generali $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este convergent la 0, iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Se poate obţine atunci următorul *criteriu al radicalului cu limite extreme*.

Teorema 3.15. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului radicalului cu limite extreme (spunem că este un caz de dubiu).*

În situaţia în care există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, iar

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

Teorema de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul radicalului cu limită*.

Corolar 3.15.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăţi:

1. *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $l > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $l = 1$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului radicalului cu limită.*

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1}\right)^n$.

Soluţie. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \left(\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1}\right)^n$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$=\frac{3}{2}>1$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1}\right)^n$ este divergentă.

Exerciţiu. Discutaţi natura seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{an+1}{n+2}\right)^n$, unde $a>0$.

Soluţie. Termenul general al seriei este $x_n = \left(\dfrac{an+1}{n+2}\right)^n$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{an+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(a+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = a.$$

De aici, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{an+1}{n+2}\right)^n$ este convergentă dacă $a\in(0,1)$, respectiv divergentă dacă $a>1$.

Dacă $a=1$, urmează că $x_n=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$, deci

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{-\frac{n}{n+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Urmează că $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este convergent la 0, iar $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$ este divergentă.

3.1.4 Criterii ale raportului

Un alt criteriu util pentru studiul convergenţei unor serii cu termeni pozitivi, în special a acelora pentru care termenul general conţine produse, este *criteriul raportului cu inegalităţi*, indicat mai jos. De asemenea, acesta nu necesită construcţia unei serii ajutătoare.

Teorema 3.16. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă există* $q < 1$ *şi* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1. Deoarece
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
urmează că
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
iar deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă, se obţine cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul de comparaţie cu rapoarte) că şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Se observă că
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1^{n+1}}{1^n} \text{ pentru orice } n \geq N,$$
iar cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ este divergentă, se obţine cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul de comparaţie cu rapoarte) că şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Se poate obţine atunci următorul *criteriu al raportului cu limite extreme*.

Teorema 3.17. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului cu limite extreme.*

În situaţia în care există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. În plus, au loc egalităţile

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul raportului cu limită*.

Corolar 3.17.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăţi:

1. *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $l > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $l = 1$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului cu limită.*

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa seriilor
1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$.

Soluţie. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$
$$= \frac{2}{e} < 1,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ este convergentă.

2) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n+2)(3n+5)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)(2n+3)}}{\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n+2)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$ este divergentă.

În ceea ce priveşte relaţia între domeniile de aplicabilitate ale criteriilor raportului şi radicalului, să notăm că dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi atunci, aşa cum reiese din Teorema 2.40, are loc inegalitatea

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Se observă de aici că dacă $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ atunci şi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, iar dacă $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci şi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$. De aici, dacă sunt îndeplinite condiţiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limite extreme, atunci sunt îndeplinite şi condiţiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limite extreme, obţinându-se aceleaşi rezultate. De asemenea, dacă există limita $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci există şi limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ există şi are aceeaşi valoare, deci dacă sunt îndeplinite condiţiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limită, atunci sunt îndeplinite şi condiţiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limită, obţinându-se acelaşi rezultat.

În plus, există situaţii în care criteriile raportului nu sunt aplicabile, fiind aplicabile în schimb criterii ale radicalului. Un exemplu în acest sens este seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$. Deoarece termenul general este $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n}$, urmează că $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} \cdot \frac{1}{2}$, de unde

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{2} > 1; \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{6} < 1,$$

deci criteriul raportului cu limite extreme nu este aplicabil. Totuşi, $\frac{1}{2^n} \leq x_n \leq \frac{3}{2^n}$, de unde $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$, iar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{2} < 1$, conform criteriului cleştelui. De aici, criteriul radicalului cu limită (şi de fapt şi cel cu limite extreme) este aplicabil, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$ este convergentă. Se poate deci concluziona faptul că sus-menţionatele criterii ale radicalului au o arie de aplicabilitate mai largă decât criteriile corespunzătoare ale raportului.

3.1.5 Criteriul Raabe-Duhamel

Diversele variante are criteriului Raabe-Duhamel, menţionate în cele ce urmează, sunt în general utilizate atunci când aplicarea criteriul raportului conduce la un caz de dubiu. Vom prezenta mai întâi *criteriul Raabe-Duhamel cu inegalităţi*; a se remarca faptul că utilizarea raportului inversat ($\frac{x_n}{x_{n+1}}$, în contrast cu raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ utilizat în cadrul criteriului raportului) conduce la obţinerea unor situaţii inverse de convergenţă faţă de cele obţinute în criteriul raportului, respectiv „$\geq q > 1$" pentru convergenţă (în loc de „$\leq q < 1$" pentru criteriul raportului) şi „≤ 1" pentru divergenţă (în loc de „≥ 1" pentru criteriul raportului).

Teorema 3.18. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă există* $q > 1$ *şi* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq q \quad \textit{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \quad \textit{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Se poate obţine atunci următorul *criteriu Raabe-Duhamel cu limite extreme*.

Teorema 3.19. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă* $\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq 1 \geq \liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limite extreme.*

În situaţia în care există limita $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi limitele $\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$, $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$. În plus, au loc egalităţile

$$\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul Raabe-Duhamel cu limită*.

Corolar 3.19.1. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăţi:

1. *Dacă* $l > 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $l = 1$, *atunci natura seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limită.*

Exerciţiu. Demonstraţi că seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$, respectiv divergentă pentru $p < 1$.

Soluţie. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1}{n^p}$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p.$$

Concluzia urmează atunci conform criteriului Raabe-Duhamel cu limită.

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$.

Soluţie. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$, de unde

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n\cdot(2n+2)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n\cdot(2n+2)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}.
\end{aligned}$$

Urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, deci aplicarea criteriul raportului conduce la un caz de dubiu. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria dată este divergentă.

3.2 Serii cu termeni oarecare

Comparativ cu situaţia seriilor cu termenilor pozitivi, pentru care studiul convergenţei se reduce la studiul mărginirii şirului sumelor parţiale, deoarece monotonia acestuia este asigurată *a priori*, situaţia seriilor cu termeni oarecare este mult mai complicată, întrucât această cale de abordare se pierde, şirul sumelor parţiale nemaifiind monoton. În concluzie, nici criteriile de convergenţă obţinute anterior (criteriile de comparaţie, ale raportului şi radicalului, ş. a. m. d.) nu mai sunt valabile.

Principala strategie de demonstrare a convergenţei seriilor cu termeni oarecare va fi acum scrierea termenului general ca un produs de doi factori, construirea seriei care are ca termen general unul din factori şi a şirului care are ca termen general pe cel de-al doilea factor şi determinarea unor proprietăţi de convergenţă, monotonie şi mărginire pentru acestea care vor conduce la convergenţa seriei iniţiale. În situaţia în care seria care are ca termen general modulului termenului general al seriei iniţiale este convergentă, convergenţa seriei iniţiale se va obţine din convergenţa acesteia din urmă; desigur, convergenţa celei de-a doua serii este mult mai simplu de obţinut, fiind vorba despre o serie cu termeni pozitivi. În fine, pentru cazul particular al seriilor alternante, convergenţa acestora se poate obţine demonstrând monotonia şirului obţinut prin eliminarea factorului alternant.

3.2.1 Criteriul lui Dirichlet

În situaţia în care $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie nu neapărat convergentă, dar cu şirul sumelor parţiale mărginit, înmulţirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui şir cu valori „mici" (monoton descrescător şi convergent la 0) „îmbunătăţeşte" convergenţa seriei, în sensul că seria rezultat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Dirichlet*.

Teorema 3.20. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o serie cu şirul sumelor parţiale mărginit, iar* $(y_n)_{n\geq 0}$ *este un şir monoton descrescător şi convergent la* 0*, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ *este convergentă.*

Exerciţiu. Demonstraţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Mai întâi, fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Fie $(S_n)_{n\geq 1}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,

$$S_n = \sin 0x + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

Să observăm că

$$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{2}{2|\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

dacă $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ (adică $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), respectiv

$$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = |0 + 0 + \ldots + 0| = 0,$$

dacă $\sin \frac{x}{2} = 0$ (adică $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), deci în orice caz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit . Cum $(y_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, urmează concluzia.

3.2.2 Criteriul lui Abel

Dacă se porneşte de această dată de la o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, înmulţirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui şir cu proprietăţi suficient de bune (i.e. monoton şi mărginit) păstrează convergenţa seriei, în sensul că seria rezultat $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este de asemenea convergentă. Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Abel*.

Teorema 3.21. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o serie convergentă, iar* $(y_n)_{n\geq 0}$ *este un şir monoton şi mărginit, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ *este convergentă.*

Exerciţiu. Demonstraţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n}$ este convergentă.

Soluţie. Observăm mai întâi că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos(\frac{1}{n}).$$

A fost deja demonstrat că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$, deci, pentru $x = 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ este convergentă. Cum şirul $(y_n)_{n\geq 1}$: $y_n = \frac{1}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, luând valori între 0 şi 1, iar funcţia cosinus este descrescătoare pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, urmează că $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. În plus, $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, deoarece funcţia cosinus este mărginită. Urmează că seria din enunţ este convergentă, conform criteriului lui Abel.

3.2.3 Serii alternante. Criteriul Leibniz

Pentru cazul particular al seriilor alternante, se poate observa cu ajutorul criteriului lui Dirichlet că pornindu-se de la seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, cu şirul sumelor parţiale mărginit, prin înmulţirea termenului general $(-1)^n$ cu termenul general y_n al unui şir cu valori monoton descrescător şi convergent la 0 se obţine o serie convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *criteriul lui Leibniz*.

Teorema 3.22. *Dacă* $(y_n)_{n\geq 0}$ *este un şir monoton descrescător şi convergent la* 0, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Deoarece $S_{2k} = 1$, $S_{2k+1} = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet, urmează că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ este convergentă. ■

Exerciţiu. Demonstraţi că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă.

Soluţie. Se observă că

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = \frac{1}{n+2}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, urmează că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Atunci şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, fiind obţinută prin înmulţirea seriei convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$ cu constanta -1.

Monotonia unor subşiruri ale şirului sumelor parţiale

Să presupunem acum că $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ este o serie alternantă, în condiţiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz, adică $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton descrescător şi convergent la 0. Fie deasemenea $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$. Se observă atunci că $(S_{2k})_{k\geq 0}$ este monoton descrescător iar $(S_{2k+1})_{k\geq 0}$ este monoton crescător. În plus, are loc relaţia

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

Într-adevăr,

$$S_{2(k+1)} - S_{2k} = (-1)^{2k+1} a_{2k+1} + (-1)^{2k+2} a_{2k+2} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$$

deci $(S_{2k})_{k \geq 0}$ este monoton descrescător. Similar,

$$S_{2(k+1)+1} - S_{2k+1} = (-1)^{2k+2} a_{2k+2} + (-1)^{2k+3} a_{2k+3} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0,$$

deci $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$ este monoton crescător. Deoarece orice termen al unui şir crescător este mai mic sau egal cu limita şirului, respectiv orice termen al unui şir descrescător este mai mare sau egal cu limita şirului, urmează că

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

3.2.4 Serii absolut convergente

Cu ajutorul criteriului lui Leibniz, se poate observă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă. Totuşi, seria asociată a modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. În acelaşi timp, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este convergentă, iar seria asociată a modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este de asemenea convergentă.

Aceste exemple sugerează o posibilă clasificare a seriilor convergente în serii pentru care seria asociată a modulelor este convergentă, respectiv divergentă. În acest sens, o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă se va numi *absolut convergentă*, în vreme ce o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este divergentă se va numi *condiţionat convergentă* sau *semiconvergentă*. Din cele de mai sus, se observă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este absolut convergentă, în vreme ce seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu este convergentă (este condiţionat convergentă, sau semiconvergentă).

Se observă de asemenea că pentru serii cu termeni pozitivi noţiunile de convergenţă şi absolută convergenţă coincid, deoarece modulul unui număr pozitiv este chiar numărul în cauză. În general, pentru serii cu termeni oarecare, convergenţa nu implică absolută convergenţă, după cum se poate deduce din exemplul seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de mai sus. Totuşi, are loc implicaţia inversă, în sensul că orice serie absolut convergentă este convergentă.

Teorema 3.23. *Dacă o serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este absolut convergentă, atunci ea este şi convergentă.*

Deoarece seria modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este o serie cu termeni pozitivi, pentru studierea convergenţei acesteia se pot utiliza criteriile de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi stabilite anterior. Acest lucru sugerează faptul că se poate obţine convergenţa unei serii cu termeni oarecare demonstrând mai întâi convergenţa seriei modulelor cu ajutorul unui criteriu oarecare de convergenţă, convergenţa seriei date fiind atunci o consecinţă a absolutei ei convergenţe.

Exerciţiu. Studiaţi absoluta convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Cum

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = 2 > 1$, urmează că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|$ este convergentă, conform criteriului de comparaţie cu inegalităţi. De aici, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ este absolut convergentă.

Exerciţiu. Studiaţi absoluta convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Soluţie. Deoarece
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},$$
iar $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nu este absolut convergentă. Ea este doar convergentă, conform criteriului lui Leibniz.

3.2.5 Produsul după Cauchy a două serii

Fie seriile cu termeni oarecare $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Vom numi *seria produs după Cauchy* a celor două serii seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ definită prin
$$c_n = x_0y_n + x_1y_{n-1} + \ldots + x_ny_0 = \sum_{k=0}^{n} x_ky_{n-k},$$
pentru care c_n, termenul de ordin n, conţine suma tuturor produselor de forma x_ky_l în care suma indicilor celor doi factori x_k şi y_l este n.

Se observă că, definită în acest mod, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ conţine într-adevăr toate produsele de forma x_ky_l, $k, l \in \mathbb{N}$, câte o singură dată, un astfel de produs fiind un termen al sumei prin care este definit c_{k+l} şi numai al acesteia.

Totuşi, acest procedeu de sumare nu asigură proprietatea de păstrare a convergenţei a două serii. Mai precis, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt două serii convergente, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nu este neapărat convergentă. În acest sens, să considerăm exemplul seriilor
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n,\ \sum_{n=0}^{\infty} y_n,\ \text{ cu } x_n = y_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 0.$$
În primul rând, se observă cu ajutorul criteriului lui Leibniz că aceste serii sunt convergente. În plus,
$$c_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}}(-1)^{n-k}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

Cum
$$\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \sqrt{(n+1)(n+1)} = n+1,$$
urmează că
$$|c_n| = \left| (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \right| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1,$$
deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este divergentă, întrucât termenul general c_n nu tinde la 0.

Totuşi, convergenţa seriei produs după Cauchy este asigurată dacă măcar una dintre cele două serii $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este absolut convergentă. În acest sens, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Mertens*.

Teorema 3.24. *Dacă seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, măcar una dintre ele fiind şi absolut convergentă, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este şi ea convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii, adică*
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right).$$

În situaţia în care se îmbunătăţeşte convergenţa seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, în sensul că ambele serii sunt asumate a fi absolut convergente, se îmbunătăţeşte şi convergenţa seriei produs după Cauchy, în sensul că seria produs devine şi ea absolut convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Cauchy*.

Teorema 3.25. *Dacă seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este şi ea absolut convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

Cum pentru cazul seriilor cu termeni pozitivi proprietăţile de convergenţă şi absolută convergenţă coincid, are loc următoarea consecinţă.

Corolar 3.25.1. *Dacă seriile cu termeni pozitivi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, atunci şi seria produs după Cauchy a celor două serii este convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

În fine, în situaţia în care $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ şi seria produs după Cauchy a celor două serii $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sunt toate convergente, acest lucru este suficient pentru a arăta că suma seriei produs este produsul sumelor celor două serii. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Abel*.

Teorema 3.26. *Dacă seriile* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, cu* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$, *iar seria produs după Cauchy a celor două serii* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *este de asemenea convergentă, cu* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$, *atunci* $C = AB$.

3.3 Estimarea restului de ordin p

Din punct de vedere practic, pentru calculul aproximativ al sumei unei serii convergente, este important să se cunoască o estimare a restului de ordin p al seriei, această estimare reprezintând de fapt o estimare a erorii cu care S_p, suma parţială de ordin p, aproximează suma S a seriei.

Pentru serii cu termeni pozitivi, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condiţiile de aplicare ale criteriului radicalului, respectiv criteriului raportului.

Teorema 3.27. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Dacă*

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq \frac{q^{p+1}}{1-q} \quad \textit{pentru orice } p \geq N.$$

Demonstraţie. Se observă că

$$R_p = x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots \geq 0 \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

Deoarece $\sqrt[n]{x_n} \leq q$ pentru orice $n \geq N$, urmează că $x_n \leq q^n$ pentru orice $n \geq N$. Atunci

$$\begin{aligned} R_p &= x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots \\ &\leq q^{p+1} + q^{p+2} + \ldots \\ &\leq q^{p+1}(1 + q + q^2 + \ldots) \\ &\leq \frac{q^{p+1}}{1-q}, \quad \text{pentru orice } p \geq N, \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Teorema 3.28. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Dacă*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \quad \textit{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq x_N \frac{q^{p-N+1}}{1-q} \quad \textit{pentru orice } p \geq N.$$

Pentru serii alternante, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condiţiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz.

Teorema 3.29. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ *o serie alternantă, unde* $(y_n)_{n \geq 0}$ *este un şir monoton descrescător şi convergent la* 0. *Atunci*

$$|R_p| \leq y_{p+1} \quad \textit{pentru orice } p \geq 0.$$

Aplicaţii

3.1. *Determinaţi sumele următoarelor serii folosind formula de sumare a progresiei geometrice*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{7^n}$; *2)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}}$; *3)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}$; *4)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^{2n}}$;
5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}$; *6)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{[3+(-1)^n]^n}$.

3.2. *Ţinând seama de relaţia*

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!}, \quad n \geq 0,$$

determinaţi suma seriei telescopice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

3.3. *Ţinând seama de relaţia*

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{n+1} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{n}, \quad n \geq 1,$$

determinaţi suma seriei telescopice $\sum_{n=1}^{\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

3.4. *Ţinând seama de relaţia*

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1,$$

determinaţi suma seriei telescopice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3.5. *Ţinând seama de relaţia*

$$\frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}, \quad n \geq 1,$$

determinaţi suma seriei telescopice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

3.6. *Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente analizând comportarea termenului general*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; *2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$; *3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{1+3^n}$; *4)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{5}-1\right)$;
5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$; *6)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(e^n+2)}{n}$; *7)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n)$.

3.7. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, $x_0 \in (0,1)$.

1. *Demonstraţi că* $x_n \in (0,1)$ *pentru orice* $n \geq 0$.
2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict descrescător.*
3. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
4. *Demonstraţi că seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă.*

3.8. *Demonstraţi că nu există şiruri* $(x_n)_{n\geq 0}$ *astfel ca seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (|x_n-2|+|3-x_n|)$ *să fie convergentă.*

3.9. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Demonstraţi, folosind eventual criteriul de convergenţă Cauchy, că dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă, rezultă neapărat că* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă?*

3.10. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie convergentă cu termeni strict pozitivi. Demonstraţi că seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_n+x_{n+1}}{2}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_{n+1}}}$ *sunt de asemenea convergente.*

3.11. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului de condensare*
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; *2)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n \ln(\ln n)}$; *3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n(\ln n)^2}$.

3.12. *Demonstraţi cu ajutorul criteriului de condensare că seria* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ *este convergentă dacă* $p > 1$, *respectiv divergentă dacă* $p \leq 1$.

3.13. 1. *Determinaţi* $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$;

2. *Studiaţi convergenţa seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}$, *folosind eventual un criteriu de comparaţie.*

3.14. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparaţie*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin n}{n}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;
5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+(-1)^n)^2}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+4}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+n+2}$;
9) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)^2$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\frac{3}{n}}}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$;
13) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{2n}+1}$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

3.15. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al raportului*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$;
9) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3}-\sqrt[3]{3})(\sqrt{3}-\sqrt[5]{3})\ldots(\sqrt{3}-\sqrt[2n+1]{3})$.

3.16. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al radicalului*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n+2}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^{n\ln n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^{n^2}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$;
9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; 10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$; 12) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3n+5)^n}$;
13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{n+1}}{(2n+3)^n}$; 14) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^n$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)^n$.

3.17. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 7\cdot \ldots \cdot (4n-1)}{4\cdot 8\cdot \ldots \cdot 4n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\ldots(3+\sqrt{n})}$;

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\cdot\frac{3n+2}{3n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\cdot 12\cdot \ldots \cdot 6n}{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n-1)}\cdot\frac{1}{2^n+1}$.

3.18. *Discutaţi convergenţa următoarelor serii în funcţie de valorile parametrilor $a>0$ şi $p\in\mathbb{R}$*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a\frac{n^2-n+2}{n^2}\right)^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+a^2+\ldots+a^n)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\ldots(na+1)}{n^n}$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$.

3.19. *Discutaţi convergenţa următoarelor serii în funcţie de valorile parametrilor $a,b>0$*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+(n-1))}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+(n-1))}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n+b^n}$.

3.20. *Discutaţi convergenţa seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$ *în funcţie de valorile parametrilor* $a,b,c,d>0$.

3.21. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Dirichlet*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x\in\mathbb{R}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{\ln(n+1)}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\ln(n+2)}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)\sin 2n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sin n}{n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx\cos x}{n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\sin n^2}{n^3}$; 10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\sin n^2}{\sqrt[4]{n}}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sin^2 n}{n}$;

13) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\sin nx\cos nx,\ n\in\mathbb{R}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin(n+\frac{1}{2})$.

3.22. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Abel*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \sin \frac{1}{n}$; *2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$; *3)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \sqrt[n]{n}$; *4)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} n$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$; *6)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n+2}} \sin \frac{1}{n}$; *7)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{n}$.

3.23. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz*
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; *2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n + \ln n}$; *3)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(\sqrt[n]{3} - 1)$; *4)* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}$;
5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{6^n}$; *6)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$; *7)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+3)}}$; *8)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \ln^2 n}$;
9) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+3} \left(\frac{3n+2}{6n+1}\right)^n$.

3.24. *Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente*
1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + \cos n}$; *2)* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2^n + 3)}{\ln(3^n + 2)}$; *3)* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+4)}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$.

3.25. *Studiaţi convergenţa absolută a următoarelor serii*
1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + n + 1}$; *2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{n\sqrt{n}}$; *3)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!}{n \ln^2 n}$; *4)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2n^2 + \sin n}$; *6)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(-1)^n}}{n^2 + (-1)^n}$.

3.26. *Discutaţi convergenţa următoarelor serii în funcţie de valorile parametrului* $a \in \mathbb{R}$.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{a+1}}$; *2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$; *3)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + 2^n}$; *4)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n} + 1}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n^2 + 1} - an)$; *6)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a+3}{2a+1}\right)^n$; *7)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n + \sqrt{n}}$.

3.27. *Demonstraţi că seria* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$, *unde*

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

este divergentă.

Capitolul 4

PROPRIETĂŢI TOPOLOGICE ŞI DE NUMĂRARE ALE LUI $\overline{\mathbb{R}}$

În cele ce urmează, vom studia unele proprietăţi ale mulţimilor din $\overline{\mathbb{R}}$. Astfel, vom caracteriza „locul" unui punct în cadrul unei mulţimi (în limba greacă, „topos" înseamnă „loc") sau „apropierea" unui punct de o mulţime dată, clasificând de asemenea submulţimile lui $\mathbb{R}$ cu un număr infinit de elemente după cum aceste elemente pot fi numărate sau nu.

4.1 Proprietăţi topologice ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

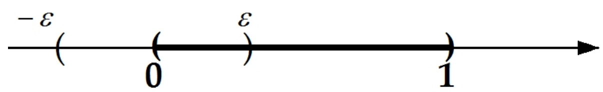
4.1.1 Puncte de acumulare

Fie o mulţime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct de acumulare* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a lui a conţine puncte ale lui A diferite de a, adică

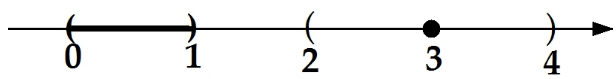
$$\forall V \in \mathcal{V}(a), \big(V \setminus \{a\}\big) \cap A \neq \emptyset.$$

Exemple. 1. $a = 0$ este punct de acumulare al mulţimii $A = (0, 1)$ deoarece orice vecinătate V a lui 0 conţine un interval $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, deci şi puncte ale lui $(0, 1)$ diferite de 0. Altfel spus,

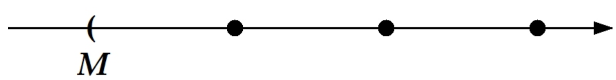
$$\big(V \setminus \{0\}\big) \cap A \supset (0, \varepsilon) \neq \emptyset.$$



2. $a = 3$ nu este punct de acumulare al mulţimii $A = (0,1) \cup \{3\}$ deoarece vecinătatea $V = (2,4)$ a lui 3 nu conţine puncte ale lui A diferite de 3. Altfel spus,
$$\big(V \setminus \{3\}\big) \cap A = \emptyset.$$



3. $a = +\infty$ este punct de acumulare al mulţimii $A = \mathbb{N}$ deoarece orice vecinătate V a lui $+\infty$ conţine un interval $I = (M, +\infty]$, $M > 0$, deci şi puncte ale lui $\mathbb{N}$ diferite de $+\infty$. Altfel spus,
$$\big(V \setminus \{+\infty\}\big) \cap A = \{[M]+1, [M]+2, \ldots\} \neq \emptyset.$$



Din exemplele de mai sus se deduc câteva consecinţe privind localizarea punctelor de acumulare. Mai întâi, un punct de acumulare al unei mulţimi A poate să nu fie element al acelei mulţimi (exemplul 1). De asemenea, nu orice element al unei mulţimi A este neapărat punct de acumulare al acelei mulţimi (exemplul 2). Din cel de-al treilea exemplu, se poate observa că punctele de acumulare ale unei mulţimi pot fi şi la infinit.

Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale mulţimii A se numeşte atunci *mulţimea derivată* a lui A şi se notează A', în vreme ce un element al unei mulţimi A care nu este punct de acumulare al acelei mulţimi se numeşte *punct izolat* al lui A. De aici se poate observa că $a \in A$ este punct izolat al lui A dacă există o vecinătate V a lui A care nu conţine puncte din A.

Exemple. 1. Dacă $A = (0,3) \cup \{5\}$, atunci $A' = [0,3]$, iar 5 este punct izolat al lui A.

2. Dacă $A = \{0, 1, 2\}$, atunci $A' = \emptyset$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

3. Dacă $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, atunci $A' = \{0\}$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

Alegând în mod potrivit în definiţia unui punct de acumulare vecinătăţi V din ce în ce mai mici se obţin puncte ale lui A diferite de a care sunt din ce în ce mai aproape de a. În acest mod se poate obţine următoarea caracterizare echivalentă a unui punct de acumulare cu ajutorul şirurilor, exprimând faptul că o mulţime care are un punct de acumulare a conţine elemente „oricât de apropiate" de a şi diferite de a.

Teorema 4.1. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al lui A dacă şi numai dacă există un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de elemente ale lui A, diferite de a, cu limita a.*

Din cele de mai sus, observând că şirul $\{a_n\}_{n\geq 0}$ poate fi ales cu termenii diferiţi între ei, deducem că o mulţime A care are un punct de acumulare a este în mod necesar infinită. În particular, o mulţime finită nu are puncte de acumulare, toate elementele sale fiind deci puncte izolate.

De asemenea, din aceeaşi observaţie se obţine în mod imediat următorul rezultat.

Corolar 4.1.1. *Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al unei mulţimi $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ conţine o infinitate de elemente ale lui A.*

Pot fi demonstrate cu ajutorul celor de mai sus următoarele proprietăţi de calcul.

Teorema 4.2. *Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă $A \subseteq B$, atunci $A' \subseteq B'$.*

2. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

3. $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

Faptul că $(A \cap B)'$ şi $A' \cap B'$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ şi $B = (1, 2)$. Atunci $A' = [0, 1]$ şi $B' = [1, 2]$, deci $A' \cap B' = \{1\}$. Totuşi, $A \cap B = \emptyset$, deci $(A \cap B)' = \emptyset$, iar $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

4.1.2 Puncte aderente

Fie o mulţime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct aderent* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a lui a conţine puncte ale lui A, adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset.$$

Cum definiţia unui punct aderent este mai puţin restrictivă decat definiţia unui punct de acumulare (este necesar ca $V \cap A \neq \emptyset$, în loc de $\big(V \setminus \{a\}\big) \cap A \neq \emptyset$, când cea din urmă relaţie este satisfăcută, fiind satisfăcută în mod evident şi cea dintâi), urmează că orice punct de acumulare al unei mulţimi A este în acelaşi timp şi punct aderent al acelei mulţimi.

De asemenea, deoarece $a \in V$ pentru orice $V \in \mathcal{V}(a)$, urmează că $a \in V \cap A$ pentru orice $a \in A$ şi orice $V \in \mathcal{V}(a)$, deci $V \cap A \neq \emptyset$. De aici, orice $a \in A$ este punct aderent al lui A.

Mulţimea tuturor punctelor aderente ale mulţimii A se numeşte atunci *aderenţa* sau *închiderea* mulţimii A şi se notează $\overline{A}$. Din cele de mai sus se observă că $A \subseteq \overline{A}$ şi $A' \subseteq \overline{A}$.

În mod analog Teoremei 4.1 se poate demonstra următorul rezultat, care afirmă faptul că A conţine, pe lângă elementele din A, şi limitele de şiruri cu termeni din A.

Teorema 4.3. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct aderent al lui A dacă şi numai dacă există un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de elemente ale lui A, cu limita a.*

Exemple. 1. Dacă $A = \{0, 1, \ldots, n\}$, atunci $\overline{A} = A$.

2. Dacă $A = (0, 1)$, atunci $\overline{A} = [0, 1]$.

3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$, deoarece orice număr real este limita unui şir de numere raţionale, $+\infty$ este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n \in \mathbb{Q}$, iar $-\infty$ este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = -n \in \mathbb{Q}$.

Cu ajutorul celor de mai sus se pot demonstra următoarele proprietăţi de calcul.

Teorema 4.4. *Fie* $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\overline{A} = A \cup A'$.
2. *Dacă* $A \subseteq B$, *atunci* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Faptul că $\overline{A \cap B}$ şi $\overline{A} \cap \overline{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0,1)$ şi $B = (1,2)$. Atunci $\overline{A} = [0,1]$, $\overline{B} = [1,2]$, deci $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Totuşi, $A \cap B = \emptyset$, deci $\overline{A \cap B} = \emptyset$, iar $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

4.1.3 Puncte interioare

Fie o mulţime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct interior* al mulţimii A dacă A este vecinătate pentru a. Deoarece A este vecinătate pentru a, rezultă că $a \in A$, adică un punct interior al unei mulţimi aparţine în mod necesar acelei mulţimi.

Conform definiţiei vecinătăţii unui punct, urmează că $a \in \mathbb{R}$ este punct interior al lui A dacă există (c, d) astfel ca $a \in (c, d) \subseteq A$, respectiv $+\infty$ este punct interior lui A dacă există $(c, \infty]$ astfel ca $+\infty \in (c, \infty] \subseteq A$, iar $-\infty$ este punct interior lui A dacă există $[-\infty, d)$ astfel ca $-\infty \in [-\infty, d) \subseteq A$. De asemenea, dacă A nu conţine intervale, atunci A nu are puncte interioare, neputând fi vecinătate pentru niciun punct al său. În cele ce urmează, prin „interval deschis I" vom înţelege un interval de tip (c, d), $(c, \infty]$ sau $[-\infty, d)$, potrivit cu situaţia în care este utilizat.

Exemple.

1. $a = \frac{1}{2}$ este punct interior al mulţimii $A = [0,1) \cup 2$ deoarece $a \in (0,1) \subseteq A$, dar $a = 0$ şi $a = 2$ nu sunt puncte interioare ale lui A, întrucât A nu conţine intervale deschise în care se află 0 şi 2, neconţinând nici numere negative, nici numere mai mari ca 2.
2. $A = \mathbb{Q}$ nu are puncte interioare deoarece nu conţine intervale.

Mulţimea tuturor punctelor interioare ale mulţimii A se numeşte atunci *interiorul* mulţimii A şi se notează $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.5. *Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.
2. *Dacă* $A \subseteq B$, *atunci* $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.
3. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Faptul că $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ şi $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0,1)$ şi $B = [1,2)$. Atunci $\overset{\circ}{A} = (0,1)$, $\overset{\circ}{B} = (1,2)$, deci $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = (0,1) \cup (1,2)$. Totuşi, $A \cup B = (0,2)$, deci $A \overset{\circ}{\cup} B = (0,2)$, iar $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Un alt tip de legătură între aderenţa şi interiorul unei mulţimi, exprimat cu ajutorul mulţimilor complementare, este precizat în teorema următoare. În cele ce urmează, pentru o mulţime M dată, prin cM se va înţelege complementara mulţimii M în raport cu $\overline{\mathbb{R}}$, adică mulţimea $\overline{\mathbb{R}} \backslash M$. De asemenea, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *punct exterior* al mulţimii M dacă cM este vecinătate pentru a.

Teorema 4.6. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalităţile*

1. $c\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{cA}}$;
2. $c\overset{\circ}{A} = \overline{cA}$.

Corolar 4.6.1. *Fie $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalităţile*

1. $\overline{B} = c\left(\overset{\circ}{\widehat{cB}}\right)$;
2. $\overset{\circ}{B} = c\left(\overline{cB}\right)$.

Demonstraţie. Demonstraţiile celor două egalităţi se obţin în mod imediat punând $B = cA$ în Teorema 4.6, ţinând seama că $c(cB) = B$. ■

4.1.4 Puncte de frontieră

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct de frontieră* al lui A dacă $a \in \overline{A} \cap \overline{cA}$.

Din definiţia de mai sus se observă că un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de frontieră al lui A dacă este limita atât a unui şir de elemente din A cât şi a unui şir de elemente din cA, adică există două şiruri $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq A$ şi $(b_n)_{n\geq 0} \subseteq cA$ astfel ca $a_n \to a$ şi $b_n \to a$ pentru $n \to \infty$.

Mulţimea tuturor punctelor de frontieră ale lui A se numeşte atunci *frontiera* lui A şi se notează $\mathrm{Fr}\, A$ sau ∂A.

Are loc de asemenea următoarea proprietate de calcul, utilă în determinarea frontierei unei mulţimi.

Teorema 4.7. *Fie* $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci* $\mathrm{Fr}\, A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Demonstraţie. Au loc relaţiile

$$\mathrm{Fr}\, A = \overline{A} \cap \overline{cA} = \overline{A} \cap c\overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A},$$

de unde concluzia. ■

Exemple. 1. Dacă $A = (0,1)$, atunci $\overline{A} = [0,1]$, $\overset{\circ}{A} = (0,1)$, deci $\mathrm{Fr}\, A = \{0,1\}$.

2. Dacă $A = \{1,2,\ldots,n\}$, atunci $\overline{A} = A$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ (deoarece A nu conţine intervale), deci $\mathrm{Fr}\, A = A$.

3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, deci $\mathrm{Fr}\, A = \overline{\mathbb{R}}$.

4.1.5 Mulţimi deschise, mulţimi închise, mulţimi compacte

Mulţimi deschise

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *deschisă* dacă este mulţimea vidă sau este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemple.

1. Dacă $A = (0,1)$, atunci ea este deschisă, fiind vecinătate pentru orice $a \in (0,1)$.
2. Dacă $A = [0,2)$, atunci A nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru $a = 0$.
3. Dacă $A = \mathbb{N}$, atunci A nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru niciun punct al său, neconţinând intervale.
4. Dacă $A = \emptyset$, ea este deschisă prin definiţie. Dacă $A = \mathbb{R}$, atunci pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \in (a-1, a+1) \subseteq \mathbb{R}$, deci $\mathbb{R}$ este vecinătate pentru a. Cum a este arbitrar, $\mathbb{R}$ este deschisă. Dacă $A = \overline{\mathbb{R}}$, la observaţia anterioară se adaugă faptul că $+\infty \in (0,\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, iar $-\infty \subseteq [-\infty, 0) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, deci $\overline{\mathbb{R}}$ este de asemenea deschisă.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulţimilor deschise prin intermediul interiorului acestora.

Teorema 4.8. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este deschisă dacă şi numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$.*

În particular, din rezultatul de mai sus se obţine uşor faptul că $I_1 = (c,d)$, $I_2 = (c,+\infty)$, $I_3 = (c,+\infty]$, $I_4 = [-\infty, d]$ şi $I_5 = (-\infty, d)$ sunt mulţimi deschise pentru orice $c, d \in \mathbb{R}$.

Se va observa în cele ce urmează că interiorul unei mulţimi A este mulţime deschisă şi este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în A, în sensul că oricare altă mulţime deschisă inclusă în A este conţinută în $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.9. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\overset{\circ}{A}$ este o mulţime deschisă, iar $\overset{\circ}{\overset{\frown}{\overset{\circ}{A}}} = \overset{\circ}{A}$. Mai mult, dacă $B \subseteq A$ este o altă mulţime deschisă, atunci $B \subseteq \overset{\circ}{A}$.*

Operaţii cu mulţimi deschise

Teorema 4.10. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Orice reuniune de mulţimi deschise este mulţime deschisă.*

2. *Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este mulţime deschisă.*

Se poate observa că o intersecţie infinită de mulţimi deschise nu este neapărat mulţime deschisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i\geq 1} : A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$. Atunci A_i este deschisă pentru orice $i \geq 1$, dar $\bigcap\limits_{i\geq 1} A_i = \{0\}$, care nu este mulţime deschisă.

Exemplu. $A = (0,1) \cup (2,4)$ este deschisă, ca reuniune a mulţimilor deschise $(0,1)$ şi $(2,4)$.

Mulţimi închise

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *închisă* dacă cA este deschisă.

Se poate observa imediat că are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulţimilor închise prin intermediul aderenţei acestora.

Teorema 4.11. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$.*

Demonstraţie. Au loc următoarele echivalenţe

A închisă $\Leftrightarrow cA$ deschisă $\Leftrightarrow cA = \overset{\circ}{\widehat{cA}} \Leftrightarrow cA = c\overline{A} \Leftrightarrow A = \overline{A}$. ■

Din teorema de mai sus şi din teorema de caracterizare a mulţimilor închise cu ajutorul limitelor de şiruri (Teorema 4.3) se poate observa că $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este închisă dacă si numai dacă ea conţine limitele tuturor şirurilor cu elemente din A.

Exemple. 1. $A = [0,1]$ este mulţime închisă, deoarece $\overline{A} = A$. Altfel, $cA = [-\infty, 0) \cup (0, \infty]$, care este mulţime deschisă, fiind reuniunea mulţimilor deschise $[-\infty, 0)$ şi $(0, \infty]$.

2. $A = \mathbb{R}$ nu este mulţime închisă, deoarece $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}} \neq A$. Altfel, A nu conţine $+\infty$, care este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0} : x_n = n$ cu elemente din A.

3. $A = (-\infty, 0]$ nu este mulţime închisă, deoarece $cA = \{-\infty\} \cup (0, \infty]$, care nu este mulţime deschisă, întrucât nu este vecinătate a lui $+\infty$. Altfel, $\overline{A} = [-\infty, 0] \neq A$, sau A nu conţine $-\infty$, care este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0} : x_n = -n$ cu elemente din A.

4. $\emptyset$ este mulţime închisă deoarece $c\emptyset = \overline{\mathbb{R}}$, care este mulţime deschisă.

De asemenea, $\overline{\mathbb{R}}$ este mulţime închisă, deoarece $c\overline{\mathbb{R}} = \emptyset$, care este mulţime deschisă.

Din exemplele de mai sus se poate observa că $\emptyset$ şi $\overline{\mathbb{R}}$ sunt atât mulţimi deschise, cât şi închise. Se poate demonstra că aceste mulţimi sunt singurele care au simultan cele două proprietăţi.

Prin analogie cu Teorema 4.9, se va observa că aderenţa unei mulţimi date A este mulţime închisă şi este cea mai mică mulţime închisă care include pe A, în sensul că oricare altă mulţime închisă care include pe A, conţine şi $\overline{A}$.

Teorema 4.12. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\overline{A}$ este o mulţime închisă, iar $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Mai mult, dacă $B \supset A$ este o altă mulţime închisă, atunci $B \supset \overline{A}$.*

Operaţii cu mulţimi închise

Teorema 4.13. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Orice reuniune finită de mulţimi închise este mulţime închisă.*

2. *Orice intersecţie de mulţimi închise este mulţime închisă.*

Se poate observa că o reuniune infinită de mulţimi închise nu este neapărat mulţime închisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i\geq 0} : A_i = [-i, i]$. Atunci A_i este închisă pentru orice $i \geq 0$, dar $\bigcup\limits_{i\geq 0} A_i = \mathbb{R}$, care nu este mulţime închisă.

Exemplu. $A = [-1, 2] \cup [4, 5]$ este închisă, ca reuniune a mulţimilor închise $[-1, 2]$ şi $[4, 5]$.

Mulţimi compacte

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *compactă* dacă este închisă şi mărginită.

Exemple.

1. $A = [0, 1]$ este compactă, fiind închisă şi mărginită.

2. $A = [0, 2] \cup [4, 6]$ este compactă, fiind închisă (ca reuniune finită de mulţimi închise) şi mărginită.

3. $A = [0, \infty]$ nu este compactă, nefiind mărginită.

4. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ nu este compactă, nefiind închisă, deoarece limita şirului $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ este 0, element neconţinut în mulţimea A.

Operaţii cu mulţimi compacte

Teorema 4.14. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Orice reuniune finită de mulţimi compacte este mulţime compactă.*
2. *Orice intersecţie de mulţimi compacte este mulţime compactă.*

Teorema 4.15. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este compactă dacă şi numai dacă din orice şir de elemente din A se poate extrage un subşir convergent la un element din A.*

Mulţimi dense

Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *densă în* B dacă orice element al lui B este limita unui şir cu elemente din A, adică $B \subseteq \overline{A}$. Dacă $B = \overline{\mathbb{R}}$, adică orice element al lui $\overline{\mathbb{R}}$ este limita unui şir cu elemente din A, atunci A se numeşte *densă*.

Din definiţia de mai sus, se observă că dacă A este densă, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$. Într-adevăr, conform definiţiei, $\overline{\mathbb{R}} \subseteq \overline{A}$, iar cum $\overline{A} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, urmează că $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$. De asemenea, pentru a se demonstra că A este densă este suficient să se arate că $\overline{A} \supset \mathbb{R}$. În acest sens, dacă $\overline{A} \supset \mathbb{R}$, atunci $\overline{\overline{A}} \supset \overline{\mathbb{R}}$, iar cum $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, urmează că $\overline{A} \supset \overline{\mathbb{R}}$.

Exemple.

1. $\mathbb{Q}$ este densă, deoarece orice număr real este limita unui şir de numere raţionale.

2. $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ este de asemenea densă, deoarece orice număr real este limita unui şir de numere iraţionale. Altfel,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} &= \overline{\overline{\mathbb{R}}\backslash(\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\})} = \overline{c(\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\})} \\ &= c\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\}}} = c\emptyset = \overline{\mathbb{R}},\end{aligned}$$

deci $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ este densă. S-a folosit faptul că $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\}}} = \emptyset$, deoarece $\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\}$ nu conţine intervale.

3. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ este densă în $[0,1]$, deoarece $\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{[0,1]} = \overline{\mathbb{R}} \cap [0,1] = [0,1]$.

4. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ nu este densă în $[0,1]$, deoarece $\overline{A} = A \cup \{0\} \not\supset [0,1]$.

Denumirea de mulţime densă este justificată de următoarea teoremă, care afirmă faptul că pentru oricare două numere reale date, o mulţime densă conţine măcar un element situat între acestea.

Teorema 4.16. *Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este densă dacă şi numai dacă pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$, $x < y$, există $a \in A$ astfel ca $x < a < y$.*

Exemple. 1. $\mathbb{Z}$ nu este densă, deoarece nu conţine niciun punct situat între 0 şi 1.

2. $(\mathbb{Q} \cap (-\infty, -1]) \cup (\mathbb{Q} \cap [1, \infty))$ nu este densă, deoarece nu conţine niciun punct situat între -1 şi 1.

4.2 Proprietăţi de numărare ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

4.2.1 Numere cardinale

Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A, B *au acelaşi cardinal* şi vom nota $A \sim B$ dacă există o funcţie bijectivă $f : A \to B$. Se observă că relaţia „$\sim$" astfel definită între mulţimi este relaţie de echivalenţă, întrucât este

1. reflexivă, deoarece $A \sim A$, cu $f : A \to A$, $f(x) = x$.

2. simetrică, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \to B$ bijectivă, atunci şi $B \sim A$, cu $f^{-1} : B \to A$ bijectivă.

3. tranzitivă, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \to B$ bijectivă, iar $B \sim C$, cu $g : B \to C$ bijectivă, atunci $A \sim C$, cu $g \circ f : A \to C$ bijectivă.

Mulţimi finite

O mulţime A va fi numită *finită* dacă este mulţimea vidă (şi atunci are cardinal 0, sau are 0 elemente) sau are acelaşi cardinal cu $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}$ oarecare (şi atunci se spune că are cardinal n, sau are n elemente).

4.2.2 Mulţimi numărabile

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *numărabilă* dacă există o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to A$. În această situaţie, cardinalul mulţimii A se va nota cu $\aleph_0$ (alef zero). O mulţime care nu este numărabilă se va numi *nenumărabilă*.

Dacă notăm $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci se observă că A este numărabilă dacă elementele sale pot fi puse sub forma unui şir cu termeni distincţi, anume

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

O mulţime A se va numi *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă. Se observă atunci că A este cel mult numărabilă dacă şi numai dacă există o funcţie injectivă $f : A \to \mathbb{N}$.

Exemple. 1. $A = \mathbb{N}$ este numărabilă. În acest caz, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n$ este funcţia căutată. Altfel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui şir cu termeni distincţi.

2. $A = \mathbb{Z}$ este numărabilă, deoarece $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui şir cu termeni distincţi. Altfel,

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}.$$

este bijectivă.

Din Exemplul 2, în care s-a construit o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, se observă că o mulţime infinită poate avea acelaşi cardinal ca şi o submulţime proprie a sa. De asemenea,

$$f_1 : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad f_1(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

sunt bijective, deci $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$ şi $(-1, 1)$ au acelaşi cardinal. De fapt, toate intervalele deschise (a, b) au acelaşi cardinal, întrucât au acelaşi cardinal cu $(-1, 1)$, acest lucru observându-se din faptul că

$$f_3 : (a,b) \to (-1,1), \quad f_3(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$$

este bijectivă. Similar, intervalele (a,∞) au acelaşi cardinal cu $(0,\infty)$ întrucât

$$f_4 : (a,\infty) \to (0,\infty), \quad f_4(x) = x - a$$

este bijectivă, iar intervalele $(-\infty,b)$ au acelaşi cardinal cu $(-\infty,0)$ întrucât

$$f_5 : (-\infty,b) \to (-\infty,0), \quad f_5(x) = x - b$$

este bijectivă. Cum $(0,\infty)$ şi $(-\infty,0)$ au acelaşi cardinal, întrucât

$$f_6 : (0,\infty) \to (-\infty,0), \quad f_6(x) = -x$$

este bijectivă, urmează că mulţimile $\mathbb{R}$, (a,∞), $(-\infty,b)$, (a,b) au acelaşi cardinal pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$. Vom demonstra ulterior că aceste mulţimi nu sunt numărabile.

Operaţii cu mulţimi numărabile

Se poate observa că o reuniune finită de mulţimi numărabile este numărabilă. În acest sens, fie $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ o familie finită de mulţimi numărabile. Atunci A_i poate fi pusă sub forma unui şir cu termeni distincţi, $A_i = \left\{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \ldots\right\}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$. De aici,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n, a_1^1, a_1^2, \ldots a_1^n, \ldots\right\}.$$

Eliminând eventualele repetări, elementele mulţimii $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ pot fi scrise sub forma unui şir cu termeni distincţi, iar $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ este numărabilă. Cu un raţionament asemănător, se poate demonstra că dacă F este finită iar A este numărabilă, atunci $A \cup F$ este numărabilă. De asemenea, dacă A este numărabilă, atunci orice submulţime a sa este finită sau numărabilă.

Vom studia acum situaţia în care se face reuniunea unei familii numărabile de mulţimi numărabile.

Teorema 4.17. *Fie* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *o familie de mulţimi numărabile. Atunci* $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ *este numărabilă.*

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra că mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.

Teorema 4.18. $\mathbb{Q}$ *este numărabilă.*

4.2.3 Mulţimi de puterea continuului

Vom demonstra în cele ce urmează că intervalul $[0,1]$ „are mai multe elemente" decât $\mathbb{Q}$, proprietate care nu este evidentă intuitiv, în sensul că elementele lui $\mathbb{Q}$ se pot număra, iar elementele lui $[0,1]$ nu, deşi este evident că ambele mulţimi au un număr infinit de elemente.

Teorema 4.19. *Intervalul* $[0,1]$ *nu este o mulţime numărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $[0,1]$ este o mulţime numărabilă. Atunci

$$[0,1] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\},$$

intervalul $[0,1]$ putându-se pune sub forma unui şir cu termeni distincţi.

Notăm $I_0 = [0,1]$ şi împărţim acest interval în subintervalele $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$ de lungimi egale; fie I_1 un interval dintre acestea care nu-l conţine pe x_0. Împărţim acum I_1 în trei subintervale de lungimi egale şi fie I_2 un interval dintre acestea care nu-l conţine pe x_1. Procedând în mod inductiv, obţinem un şir de intervale $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = [a_n, b_n]$, $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$, astfel ca

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

şi I_n nu conţine x_0, $x_1, \ldots x_{n-1}$. Şirul de intervale $(I_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, cu lungimea tinzând la 0, intersecţia tuturor intervalelor fiind un punct.

Urmează că $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = \{x\}$, iar cum $x \in [0,1]$, $x = x_{n_0}$ pentru $n_0 \in \mathbb{N}$ oarecare, ceea ce este o contradicţie, deoarece atunci $x \notin I_{n_0+1}$, deci $x \notin \bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$. ■

Vom nota cardinalul intervalului $[0,1]$ cu c (*puterea continuului*) , înţelegând că o mulţime cu cardinal c „are mai multe elemente" decât o mulţime numărabilă, de cardinal $\aleph_0$. Cum

$$f:[0,1]\to(0,1),\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{dacă } x=0,\\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\\ x, & \text{în rest}\end{cases}$$

este bijectivă, urmează că $[0,1]$ şi $(0,1)$ au acelaşi cardinal. Cu ajutorul unei construcţii similare se poate demonstra că $[0,1]$ şi $[0,1)$ au acelaşi cardinal. Din consideraţiile enunţate anterior se deduce că atât mulţimea $\mathbb{R}$ cât şi toate intervalele $[a,b]$, (a,b), $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $[a,\infty)$, (a,∞) au acelaşi cardinal c.

Din cele ce urmează se va observa că numerele iraţionale, fiind în număr mai mare decât cele raţionale, sunt „responsabile" pentru faptul că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă.

Corolar 4.19.1. *Mulţimea I a numerelor iraţionale nu este numărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că I este numărabilă. Atunci, deoarece $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup I$, urmează că $\mathbb{R}$ este numărabilă, ca reuniunea unui număr finit de mulţimi numărabile, contradicţie. ■

Aplicaţii

4.1. *Precizaţi interiorul următoarelor mulţimi:*

$A_1=(0,1)\cup[2,3]$; $A_2=[0,2)\cup(4,5]\cup\{6\}$; $A_3=[2,\infty)$; $A_4=[-\infty,5]$; $A_5=\mathbb{Q}\cap[1,2]$; $A_6=(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[2,3]$; $A_7=\{x\in\mathbb{R}; 4\le x<8\}$; $A_8=\mathbb{R}^*$; $A_9=\{0,1,2,\ldots,10\}$.

4.2. *Precizaţi mulţimea derivată şi aderenţa următoarelor mulţimi:*

$A_1=(0,1)\cup(1,2)$; $A_2=(1,2)\cup(3,4)\cup\{7\}$; $A_3=\mathbb{N}$; $A_4=(2,\infty)$; $A_5=\mathbb{Q}\cap(-1,1)$; $A_6=(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap(0,2)$; $A_7=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\right\}$; $A_8=\left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\ldots,\frac{n+1}{n},\ldots\right\}$.

4.3. *Fie $A=[0,1)\cup(1,2]\cup\{6\}$. Determinaţi A', $\overline{A}$, $\mathring{A}$,* Fr *A. Este A deschisă? Dar închisă sau compactă?*

4.4. *Demonstraţi că* $A = \bigcup\limits_{i \geq 0} \left(\frac{2i+1}{i+1}, \frac{2i+3}{i+1} \right)$ *este mulţime deschisă.*

4.5. *Demonstraţi că* $A = \bigcap\limits_{i=1}^{10} \left[\frac{2n+1}{n+1}, \frac{3n+5}{n+2} \right]$ *este mulţime închisă.*

4.6. *Precizaţi dacă următoarele mulţimi sunt dense în mulţimile precizate:*

$A_1 = \mathbb{Z}$ *în* $B_1 = \mathbb{R}$; $A_2 = \mathbb{N}$ *în* $B_2 = \mathbb{Z}$; $A_3 = [0,1]$ *în* $B_3 = [-1,2]$; $A_4 = \mathbb{Q}^*$ *în* $B_4 = \mathbb{R}$; $A_5 = \{0,1,2,\ldots,10\}$ *în* $B_5 = [0,10]$; $A_6 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ *în* $B_6 = [0,1]$.

4.7. *Precizaţi care dintre următoarele mulţimi sunt numărabile:*

$A_1 = [0,1) \cup (2,3]$; $A_2 = 2\mathbb{Z} = \{x; x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$; $A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$; $A_5 = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$; $A_6 = \mathbb{R}^n$; $A_7 = \mathbb{Q}^n$.

Capitolul 5

LIMITE DE FUNCŢII

5.1 Limita unei funcţii într-un punct

Fie o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ne punem problema de a studia comportarea lui f în apropierea unui punct dat $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, în sensul de a observa dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcţiei se apropie şi ele de o valoare reală fixă sau sunt arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici.

Formulată în acest sens, suficient de intuitiv dar relativ imprecis, problema necesită unele clarificări şi restricţii. Din cele de mai sus, se poate observa faptul că sunt de interes valorile funcţiei f pentru argumente apropiate de x_0 şi nu valoarea $f(x_0)$ însăşi. De fapt, f poate nici să nu fie definită în x_0, adică nu este necesar ca x_0 să aparţină lui D. Totuşi, este necesar ca D să conţină valori x ale argumentului oricât de apropiate de x_0, adică x_0 trebuie să fie punct de acumulare al lui D. Mai mult, nu este necesar ca x_0 să fie finit, el putând fi $-\infty$ sau $+\infty$.

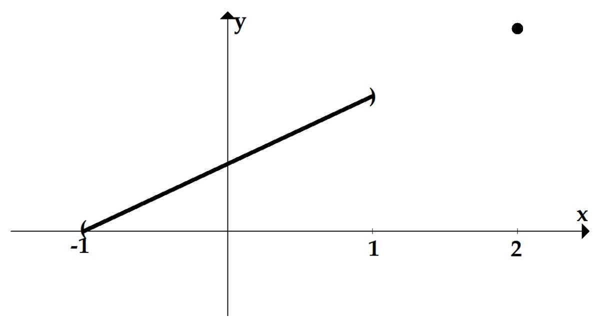
Pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in D'$, vom spune că funcţia *f are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$* în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota *$f(x) \to l$ pentru $x \to x_0$* sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, spunându-se şi că *$f(x)$ tinde la l pentru x tinzând la x_0*.

Se observă că dacă x_0 nu este punct de acumulare al lui D, adică dacă x_0 este punct izolat al lui D sau punct exterior lui D, atunci problema existenţei limitei lui f în D nu are sens, întrucât D nu conţine valori ale argumentului x oricât de apropiate de x_0.

De asemenea, într-un mod similar demonstraţiei rezultatului corespunzător privind limite de şiruri, se poate demonstra că dacă limita unei funcţii există, atunci aceasta este unică.

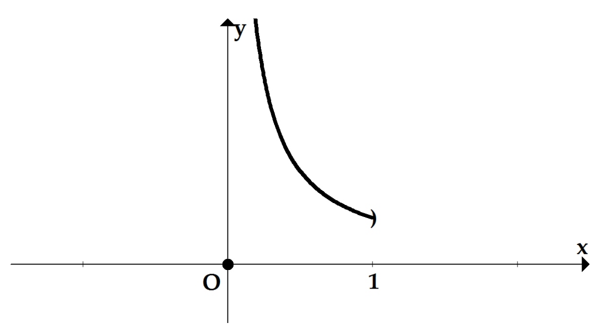
Exemple. 1. Fie $f : (-1,1) \cup \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

Atunci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, iar $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, problema existenţei limitei lui f în $x_0 = 1$ având sens, deoarece acesta este punct de acumulare al domeniului de definiţie, chiar dacă nu aparţine acestuia. În acelaşi timp, problema existenţei limitei lui f în $x_0 = 2$ nu are sens, deoarece acesta este punct izolat al domeniului de definiţie. În mod similar, problema existenţei limitei lui f în $x_0 = 3$ nu are sens, deoarece acesta este punct exterior domeniului de definiţie.



2. Fie $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Atunci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, în timp ce $f(0) = 0$, deci o funcţie poate avea într-un punct dat o limită diferită de valoarea funcţiei în acel punct. În general, dacă $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar $x_0 \in D'$, se poate întâmpla ca $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, adică valoarea limitei unei funcţii într-un punct poate fi diferită de valoarea funcţiei în acel punct. Funcţiile care verifică egalitatea $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ se numesc *funcţii continue în* x_0 şi vor fi studiate în capitolul următor.



5.1.1 Caracterizări analitice

Să presupunem pentru moment că $x_0 \in \mathbb{R}$ şi să considerăm vecinătăţi V ale lui l de tipul $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ dacă l este finit, respectiv $(M, +\infty]$ dacă $l = +\infty$ şi $[-\infty, -M)$ dacă $l = -\infty$. Conform definiţiei de mai sus, obţinem următoarea *teoremă de caracterizare analitică* a limitei unei funcţii într-un punct, numită şi *teorema de caracterizare cu* $\varepsilon - \delta$.

Teorema 5.1. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$. *Atunci au loc următoarele afirmaţii.*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel ca* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *pentru orice* $x \in D$, $x \neq x_0$ *cu proprietatea că* $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) > M$ *pentru orice* $x \in D$, $x \neq x_0$ *cu proprietatea că* $|x - x_0| < \delta_M$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) < -M$ *pentru orice* $x \in D$, $x \neq x_0$ *cu proprietatea că* $|x - x_0| < \delta_M$.

Pentru $x_0 = +\infty$, se obţine în mod similar următoarea caracterizare a funcţiilor cu limită la $+\infty$, un rezultat asemănător având loc şi pentru $x_0 = -\infty$.

Teorema 5.2. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *cu* $+\infty \in D'$. *Atunci au loc următoarele afirmaţii.*

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel ca* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *pentru orice* $x \in D$, $x > \delta_\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) > M$ *pentru orice* $x \in D$, $x > \delta_M$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) < -M$ *pentru orice* $x \in D$, $x > \delta_M$.

5.1.2 Teorema de caracterizare cu şiruri

Teorema următoare, denumită şi *teorema de caracterizare cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct* sau *teorema de caracterizare Heine a limitei unei funcţii într-un punct*, permite transferul unor proprietăţi şi reguli de calcul ale limitelor de şiruri la limite de funcţii.

Teorema 5.3. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$. Atunci f are limita l în x_0 (finită sau infinită) dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita l.*

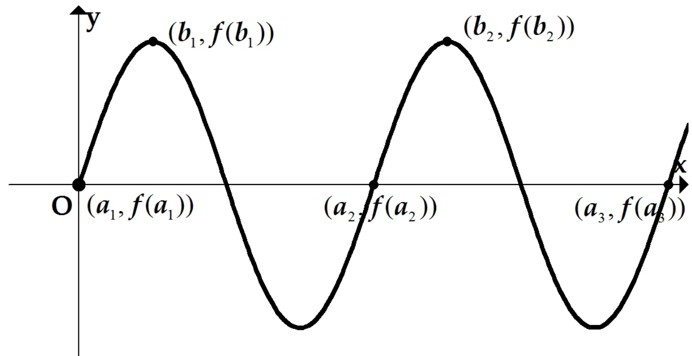
Condiţii suficiente ca o funcţie să nu aibă limită într-un punct

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă este îndeplinită una dintre condiţiile următoare, atunci funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu are limită în $x_0 \in D'$.

1. Există două şiruri $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel ca $a_n, b_n \in D$, $a_n, b_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar şirurile de valori $(f(a_n))_{n\geq 0}$, $(f(b_n))_{n\geq 0}$ au limite diferite l_1 şi l_2.

2. Există un şir $(a_n)_n \geq 0$ cu limita x_0 astfel ca $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ nu are limită.

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu are limită la $+\infty$. În acest sens, să observăm că pentru şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru şirul $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(f(b_n))_{n\geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1.



De fapt, cu un raţionament asemănător se poate observa că are loc următoarea proprietate mai generală.

Teorema 5.4. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică şi neconstantă. Atunci f nu are limită la $+\infty$ sau $-\infty$.*

În particular, teorema de mai sus atestă faptul că funcţiile trigonometrice directe uzuale nu au limită la $\pm\infty$.

5.1.3 Limite laterale

În situaţia în care argumentul x se apropie de punctul x_0 dat doar prin valori mai mici, respectiv mai mari decât x_0, se obţine conceptul de limită laterală.

Pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la stânga al mulţimii D), vom spune că funcţia f *are limita la stânga* $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_s)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x < x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s, \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s, \text{ sau } f(x_0 - 0) = l_s.$$

Similar, vom spune că funcţia f *are limita la dreapta* $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la dreapta al mulţimii D) dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_d)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x > x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d, \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x) = l_d, \text{ sau } f(x_0 + 0) = l_d.$$

Limitele la stânga şi la dreapta ale unei funcţii într-un punct x_0 se mai numesc şi *limite laterale* în x_0.

Caracterizarea cu şiruri a limitelor laterale într-un punct

În mod analog teoremei de caracterizare cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct se poate demonstra următorul rezultat.

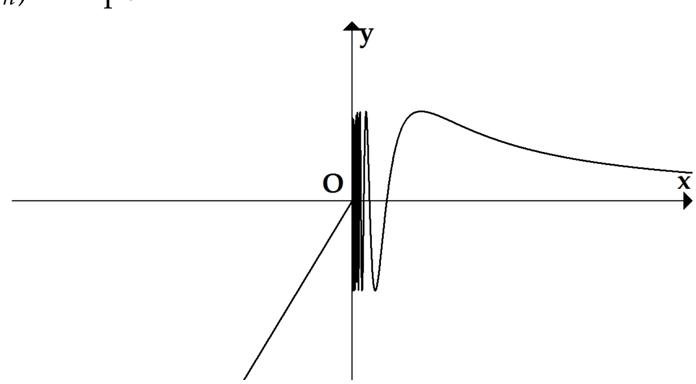
Teorema 5.5. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Au loc următoarele afirmaţii.*

1. *Funcţia f are limita la stânga $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n < x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita l_s.*

2. *Funcţia f are limita la dreapta $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n > x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita l_d.*

Se poate observa că existenţa uneia dintre limitele laterale într-un punct nu antrenează automat şi existenţa celeilalte. În anumite situaţii, se poate întâmpla ca una dintre limitele laterale să existe, în timp ce problema existenţei celelalte nici măcar să nu aibă sens.

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$. Se observă că, pentru $x_0 = 0$, $l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x = 0$. Totuşi, l_d nu există, deoarece pentru $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $a_n \to 0$ pentru $n \to \infty$, $a_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$, deci $f(a_n) \to 0$ pentru $n \to \infty$, în vreme ce pentru $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $b_n \to 0$ pentru $n \to \infty$, $b_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(b_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$, deci $f(b_n) \to 1$ pentru $n \to \infty$.



2. Fie $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Se observă că pentru $x_0 = 0$, $l_d = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$, în vreme ce problema existenţei lui l_s nu are sens, deoarece 0 nu este punct de acumulare la stânga al lui $[0,2]$.

Caracterizarea limitei unei funcţii într-un punct cu ajutorul limitelor laterale

Se poate observa că definiţia limitei într-un punct conţine condiţii mai restrictive decât definiţiile limitelor laterale, fiind necesar ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, nu doar pentru $x \in U \cap D$, $x < x_0$ (respectiv $x > x_0$). Urmează că dacă x_0 este simultan punct de acumulare la stânga şi la dreapta al unei mulţimi D, iar funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita l în x_0, atunci are în mod necesar şi limite laterale în x_0 şi acestea sunt egale tot cu l. Reciproca nu este neapărat adevărată, în sensul că o funcţie poate avea limite laterale într-un punct fără să aibă neapărat limită în acel punct.

Totuşi, se poate demonstra că dacă limitele laterale într-un punct sunt egale, atunci funcţia are limită în acel punct, fapt descris de următoarea teoremă.

Teorema 5.6. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))' \cap (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică x_0 este simultan punct de acumulare la stânga şi la dreapta al mulţimii D). Atunci f are limită în x_0 dacă şi numai dacă f are limite laterale în x_0 şi*

$$l_s = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = l_d.$$

În acest caz, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ este egală cu valoarea comună a limitelor.

Exerciţiu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leq 2 \\ x+3, & x > 2 \end{cases}$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel ca f să aibă limită în $x_0 = 2$.

Soluţie. Cum

$$l_s = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (ax+1) = 2a+1; \qquad l_d = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x+3) = 5,$$

pentru existenţa limitei funcţiei f în $x_0 = 2$ este necesar şi suficient ca $2a+1 = 5$, deci $a = 2$.

5.1.4 Criterii de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct

Criteriu de existenţă a unei limite finite

Ca şi în cazul limitelor de şiruri, pentru a arăta că limita unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în $x_0 \in D'$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferenţa dintre valorile $f(x)$ ale funcţiei pentru x apropiat de x_0 şi limita l. În situaţia în care modulul acestei diferenţe este „mic", în sensul că poate fi majorat cu o funcţie cu limita 0 în x_0, atunci funcţia f are limita l în x_0, fapt observat în următorul rezultat, numit şi *criteriul majorării*.

Teorema 5.7. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ şi $l \in \mathbb{R}$. Dacă există o funcţie $\alpha : D \to [0, \infty)$ şi o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca*

$$|f(x) - l| \leq \alpha(x) \quad \text{pentru orice } x \in V \cap D, x \neq x_0,$$

iar $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exerciţiu. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Demonstraţi că $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Soluţie. Cum $|f(x) - l| = |x \sin \frac{1}{x} - 0| \leq |x|$ pentru orice $x \neq 0$, iar $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, urmează conform celor de mai sus că $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Criteriu de existenţă a unei limite infinite

De asemenea, pentru a arăta că o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ în $x_0 \in D'$, este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt minorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcţii g, cu o expresie posibil mai simplă, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$. Similar, pentru a arăta că o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita $-\infty$ în $x_0 \in D'$ este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt majorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcţii g, cu o expresie posibil mai simplă, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$.

Teorema 5.8. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in D'$.*

1. *Dacă există $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \geq g(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.*
2. *Dacă există $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

Exerciţiu. Demonstraţi că $\lim\limits_{x \to \infty} (-x + \sin x) = -\infty$.

Soluţie. Cum $-x + \sin x \leq -x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $\lim\limits_{x \to \infty} (-x + 1) = -\infty$, urmează conform celor de mai sus că $\lim\limits_{x \to \infty} (-x + \sin x) = -\infty$.

A se nota că, în exemplul de mai sus, $\lim\limits_{x \to \infty} (-x + \sin x)$ există, deşi funcţia sinus, ca funcţie de sine stătătoare, nu are limită la $+\infty$.

Criteriul Cauchy-Bolzano

În cazul şirurilor de numere reale, se putea demonstra că un şir $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent fără a-i cunoaşte limita, arătând că acesta este şir Cauchy. În cazul funcţiilor, se poate obţine un criteriu analog de existenţă a unei limite finite într-un punct, numit *criteriul Cauchy-Bolzano*.

Teorema 5.9. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$. Atunci f are limită finită în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in D$, $x, y \neq x_0$, astfel ca $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$.*

5.1.5 Proprietăţi ale funcţiilor cu limită

În situaţia în care o funcţie are limită finită într-un punct x_0, valorile sale $f(x)$ sunt apropiate de valoarea (finită) a limitei pentru valori x ale argumentului suficient de apropiate de x_0, neputând deveni arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici, pentru aceste valori ale argumentului. Acest lucru este exprimat în următoarea teoremă.

Mărginirea funcţiilor cu limită

Teorema 5.10. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât f are limită finită în x_0. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este mărginită.*

Demonstraţie. Fie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ şi fie $V = (l-1, l+1)$ o vecinătate a lui l. Conform definiţiei limitei, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$. Atunci $|f(x)| < |l| + 1$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, deci f este mărginită pe U. ■

Proprietatea de păstrare a semnului

Teorema 5.11. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât f are limită nenulă în x_0. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f păstrează semnul limitei.*

Trecerea la limită în inegalităţi

Teorema ce urmează, numită şi *teorema de trecere la limită în inegalităţi* exprimă faptul că inegalităţile (nestricte) dintre două funcţii se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 5.12. *Fie două funcţii $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ cu proprietăţile*

1. *Există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca*

$$f(x) \leq g(x) \quad \textit{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $l_1 \leq l_2$.

Inegalităţile nestricte dintre termenii a două funcţii nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând funcţiile $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2}{x}$ pentru care $f(x) < g(x)$ pentru orice $x > 0$, dar $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, inegalitatea strictă dintre valorile lui f şi g transformându-se în egalitate.

Teorema cleştelui

Teorema de mai jos, numită şi *teorema cleştelui* (pentru funcţii), ne permite să calculăm limita într-un punct a unei funcţii care, pe o vecinătate a acelui punct, poate fi încadrată între alte două funcţii având aceeaşi limită.

Teorema 5.13. *Fie trei funcţii $a, f, b : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ cu proprietăţile*

1. *Există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca*

$$a(x) \leq f(x) \leq b(x) \quad \text{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = \lim\limits_{x\to x_0} b(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *iar* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Limita funcţiei compuse

Următoarea teoremă de calcul a *limitei funcţiei compuse* stă la baza calculului limitelor cu ajutorul schimbărilor de variabilă.

Teorema 5.14. *Fie $u : D \subseteq \mathbb{R} \to E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$ şi $u(x) \neq u_0$ pentru $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, unde $V \in \mathcal{V}(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0, iar $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = l$. Atunci funcţia compusă $f \circ u : D \to \mathbb{R}$ are limită în x_0, iar*

$$\lim_{x\to x_0} (f(u(x)) = \lim_{y\to u_0} f(y) = l.$$

Corolar 5.14.1. *Dacă $u : D \subseteq \mathbb{R} \to E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$, iar $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = f(u_0)$, atunci*

$$\lim_{x\to x_0} (f(u(x)) = f(\lim_{x\to x_0} u(x)).$$

Corolar 5.14.2. *Dacă $u : D \subseteq \mathbb{R} \to E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u(x_0)$, iar $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = f(u_0)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$, atunci*

$$\lim_{x\to x_0} (f(u(x)) = f(u(x_0)).$$

Limitele funcţiilor monotone

Pentru cazul şirurilor, s-a demonstrat că orice şir monoton are limită, finită sau nu. Acest lucru va rămâne adevărat şi în cazul funcţiilor monotone, cu precizarea că de această dată este asigurată doar existenţa limitelor laterale. În acest sens, teorema următoare precizează faptul că funcţiile monotone au limite laterale în orice punct de acumulare al domeniului lor de definiţie.

Teorema 5.15. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f monotonă, şi $x_0 \in D'$. Atunci există limitele laterale $l_s = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ şi $l_d = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, finite sau nu.*

Cum limita intr-un punct a unei funcţii este influenţată doar de valorile funcţiei pentru argumente dintr-o vecinătate a acelui punct, se poate observa că în teorema de mai sus este de fapt suficient ca funcţia să fie monotonă doar pe o vecinătate a acelui punct.

Produsul dintre o funcţie cu limita 0 şi o funcţie mărginită

Teorema 5.16. *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$. Dacă f este mărginită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

În teorema de mai sus, trebuie remarcat faptul că nu este necesar ca f să aibă limită în x_0.

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin^2 \frac{1}{x} \right)$.

Soluţie. Deoarece $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$, este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0 = 0$ (de fapt, f este mărginită pe întreg domeniul de definiţie, deoarece $|f(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$), iar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ are limita 0 în $x_0 = 0$, urmează că $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin^2 \frac{1}{x} \right) = 0$, conform celor de mai sus.

5.2 Proprietăţi de calcul ale limitelor de funcţii

5.2.1 Operaţii cu limite de funcţii

Cu ajutorul teoremei de caracterizare cu şiruri a limitelor de funcţii, se pot deduce următoarele proprietăţi ale operaţiilor cu limite de funcţii cu ajutorul proprietăţilor corespunzătoare ale operaţiilor cu limite de şiruri.

Teorema 5.17. *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$.*

1. *Dacă suma $l_1 + l_2$ a limitelor are sens, atunci funcţia sumă $f + g$ are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big) + \big(\lim_{x \to x_0} g(x)\big)$$
(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este $+\infty$ iar cealaltă $-\infty$).

2. *Dacă produsul $l_1 l_2$ al limitelor are sens, atunci funcţia produs fg are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big) \cdot \big(\lim_{x \to x_0} g(x)\big)$$
(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este 0 iar cealaltă este $+\infty$ sau $-\infty$).

3. *αf are limită în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar*
$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha\big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big), \text{ pentru } \alpha \neq 0,$$
iar $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f(x)) = 0$, pentru $\alpha = 0$.

4. *Dacă raportul $\frac{l_1}{l_2}$ al limitelor are sens, iar $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate a lui x_0, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\big)}{\big(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\big)}$$
(cazuri exceptate: l_2 este 0, sau ambele limite l_1, l_2 sunt infinite).

5. *Dacă ${l_1}^{l_2}$ are sens, iar f^g este bine definită pe o vecinătate a lui x_0 atunci f^g are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x \to x_0} (f(x)^{g(x)}) = \big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big)^{\left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right)}$$
(cazuri exceptate: $(l_1, l_2) = (0, 0)$, $(l_1, l_2) = (+\infty, 0)$, $(l_1, l_2) = (1, +\infty)$).

Pentru studiul limitei raportului a două funcţii, se poate observa că are loc si următorul rezultat care completează (parţial) teorema de mai sus pentru cazul în care $l_2 = 0$.

Teorema 5.18. *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \neq 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.*

1. *Dacă $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $g(x) > 0$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi*

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(l_1)$$

2. *Dacă $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $g(x) < 0$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi*

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = -\infty \cdot \operatorname{sgn}(l_1)$$

Cazurile exceptate din teoremele de mai sus, numite, pe scurt, şi *cazuri de nedeterminare*, pot fi exprimate pe scurt sub forma $\boldsymbol{\infty - \infty}$ (pentru sumă), $\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\infty}$ (pentru produs), $\frac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$, $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ (pentru raport), $\mathbf{0^0}$, $\boldsymbol{\infty^0}$, $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$ (pentru exponenţiere).

Se poate de asemenea demonstra prin inducţie matematică faptul că proprietăţile 1 şi 3 din Teorema 5.17 rămân valabile şi pentru mai mult de două funcţii. În speţă, are loc următorul rezultat.

Teorema 5.19. *Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = l_2, \ldots, \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$.*

1. *Dacă suma $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$ a limitelor are sens, atunci funcţia sumă $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ are limită în x_0 şi*

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)) \\ &= \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) + \ldots + \lim_{x\to x_0} f_n(x). \end{aligned}$$

2. *Dacă produsul $l_1 l_2 \dots l_n$ al limitelor are sens, atunci funcţia produs $f_1 f_2 \dots f_n$ are limită în x_0 şi*

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x))\\&\qquad=\big(\lim_{x\to x_0} f_1(x)\big)\cdot\big(\lim_{x\to x_0} f_2(x)\big)\cdot\ldots\cdot\big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\big).\end{aligned}$$

În particular,

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)^n)=\big(\lim_{x\to x_0} f_1(x)\big)^n.$$

5.2.2 Limitele funcţiilor elementare

Limitele funcţiilor polinomiale

Fie P o funcţie polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, P(x)=a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Pentru calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, se observă că, pentru orice $l \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to x_0}\big(a_l x^l\big)=a_l\big(\lim_{x\to x_0} x^l\big)=a_l(\lim_{x\to x_0} x)^l=a_l x_0^l.$$

Se obţine că

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0}\big(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0\big)\\&=\lim_{x\to x_0}\big(a_k x^k\big)+\lim_{x\to x_0}\big(a_{k-1}x^{k-1}\big)+\ldots+\lim_{x\to x_0}\big(a_1 x\big)+a_0\\&=a_k {x_0}^k + a_{k-1}{x_0}^{k-1}+\ldots+a_1x_0+a_0\\&=P(x_0).\end{aligned}$$

De aici, *valoarea limitei funcţiei polinomiale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se obţine calculând valoarea funcţiei polinomiale în acel punct*.

Exemple. 1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+4x+5) = 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 5 = 25.$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(4x^3-2x^2+6) = 4\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 6 = 8.$

La fel ca şi în cazul şirurilor, pentru calculul limitei $\lim_{x\to\infty} P(x)$ se va scoate factor comun forţat x^k ($k = \text{grad } P$). Se obţine că

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} P(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x^k\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{k-1}} + a_0\frac{1}{x^k}\right)\\ &= \infty\cdot a_k = \begin{cases}+\infty, & \text{dacă } a_k > 0\\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0\end{cases}.\end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{x\to\infty} a_k x^k = \infty\cdot a_k = \lim_{x\to\infty} P(x),$$

de unde se poate remarca faptul că *limita la $+\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P.*

Cu un raţionament similar, se poate obţine că

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = (-\infty)^k\cdot a_k$$

deci şi *limita la $-\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P.*

Exemple. 1. $\lim_{x\to+\infty}\left(x^5 + 3x^2 - 2x + 1\right) = (+\infty)^5 = +\infty$.

2. $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x + \sqrt{3}) = -2(-\infty)^3 = +\infty$.

Limitele funcţiilor raţionale

Fie P, Q două funcţii polinomiale de grad k, respectiv l, unde $k, l \geq 1$,

$$\begin{aligned}&P : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0,\\ &Q : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.\end{aligned}$$

Pentru calculul limitei $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$ într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ în care numitorul nu se anulează ($Q(x_0) \neq 0$), se observă că, datorită proprietăţilor operaţiilor cu limite de funcţii şi celor demonstrate mai sus privitoare la limita unui polinom într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

De aici, *valoarea limitei funcţiei raţionale într-un punct* $x_0 \in \mathbb{R}$ *în care nu se anulează numitorul se obţine calculând valoarea funcţiei polinomiale în acel punct*.

Dacă x_0 este rădăcină a lui Q ($Q(x_0) = 0$), atunci

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^p P_1(x)}{(x - x_0)^q Q_1(x)},$$

unde p, q sunt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii x_0 pentru funcţiile polinomiale P, respectiv Q, iar $P_1(x_0) \neq 0$, $Q_1(x_0) \neq 0$. Se obţine că

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \begin{cases} 0, & p > q \\ \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & p = q \\ +\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & q > p, q - p \text{ par} \\ \text{nu există}, & q > p, q - p \text{ impar} \end{cases}.$$

Exemple. 1.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x + 1}{2x^4 - 5x + 9} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2 + 9} = \frac{13}{31}.$$

2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}.$$

3.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{(x-1)(x+2)}.$$

Atunci $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2}$ nu există, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0+) \cdot 3} = -\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0-) \cdot 3} = +\infty$.

Considerăm limita $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$. La fel ca şi în cazul şirurilor, pentru calculul acesteia se va scoate factor comun forţat x^k de la numărător ($k = \text{grad}\, P$), respectiv x^l de la numitor ($l = \text{grad}\, Q$). Se obţine că

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^k\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{k-1}} + a_0\frac{1}{x^k}\right)}{x^l\left(b_l + b_{l-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_1\frac{1}{x^{l-1}} + b_0\frac{1}{x^l}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{k-l}\frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty\frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}.$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_k x^k}{b_l x^l} = \lim_{x\to\infty} x^{k-l}\frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P şi Q*, pentru $x \to +\infty$. Cu un raţionament similar, se poate obţine că acelaşi lucru se întâmplă şi pentru $x \to -\infty$.

Exemple. 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x+2}{2x^2-3x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3+4\frac{1}{x}+2\frac{2}{x^2})}{x^2(2-3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{3}{2}.$$

2.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+3x^2+x-1}{3x^2+4x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(-2+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^2(3+4\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2})}$$
$$= (-\infty)\cdot\frac{-2}{3} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x-2}{4x^3+3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3+4\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^3(4+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} = 0\cdot\frac{3}{4} = 0.$$

Limitele radicalilor

Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ şi n este un număr natural impar, atunci

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to x_0}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{\frac{1}{n}} = x_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_0},$$

iar, cu acelaşi raţionament,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty.$$

În mod similar, dacă $x_0 > 0$ şi n este un număr natural par, $n \geq 2$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Exerciţiu. Determinaţi valoarea limitei

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right).$$

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^3 + x^2 + 1 \right) = +\infty$, urmează, conform teoremei limitei funcţiei compuse şi celor de mai sus, că $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = +\infty$, ceea ce înseamnă că limita de mai sus prezintă o nedeterminare de forma $\boldsymbol{\infty} - \boldsymbol{\infty}$. Pentru înlăturarea acesteia se amplifică cu expresia conjugată celei din enunţ. Urmează că

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right) \\
&\quad = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right) \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2 \right)}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\
&\quad = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\
&\quad = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 (1 + \frac{1}{x^2})}{x^2 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1 \right)} \\
&\quad = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Limitele funcţiilor exponenţiale

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \left(\lim_{x \to x_0} a \right)^{\lim\limits_{x \to x_0} x} = a^{x_0}.$$

Pentru $a > 1$, se observă că f este strict crescătoare, iar

$$a^x \geq a^{[x]} = (1 + (a - 1))^{[x]} \geq 1 + (a - 1)[x],$$

conform inegalităţii lui Bernoulli, de unde urmează conform criteriului majorării că $\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty$. De asemenea,

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{a^u} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu notaţia $u = -x$, conform teoremei limitei funcţiei compuse.

Dacă $a \in (0,1)$, atunci f este strict descrescătoare, iar $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$. Urmează că

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu un raţionament asemănător obţinându-se că $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Adăugând şi cazul $a = 1$, în cazul în care f este identic egală cu 1, discuţia de mai sus se poate sistematiza sub următoarea formă

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (0,1) \end{cases}, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a \in (0,1) \end{cases}.$$

Limitele funcţiilor logaritmice

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, şi fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Mai întâi, se observă că f este strict crescătoare pentru $a > 1$, respectiv strict descrescătoare pentru $a \in (0,1)$.

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci, cum f este strict monotonă, ea are limite laterale în x_0. Mai mult, deoarece $a^{\log_a x} = x$ pentru orice $x \in (0,\infty)$,

$$\lim_{x\to x_0} \left(a^{\log_a x}\right) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \left(a^{\log_a x}\right) = \left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} a\right)^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \left(\log_a x\right)} = a^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \left(\log_a x\right)},$$

urmează că $a^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \left(\log_a x\right)} = x_0$, deci $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \left(\log_a x\right) = \log_a x_0$. În mod similar se demonstrează că $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \left(\log_a x\right) = \log_a x_0$, deci exită $\lim_{x\to x_0} \left(\log_a x\right) = \log_a x_0$, deoarece limitele laterale sunt ambele egale cu această valoare.

Cu un raţionament analog celui realizat pentru $x_0 \in \mathbb{R}$, obţinem că

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & a \in (0,1) \end{cases}, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ \infty, & a \in (0,1) \end{cases}.$$

Limitele unor funcţii trigonometrice

Mai întâi, reamintim inegalitatea

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Ţinând seama că $\sin(-x) = -\sin x$ şi $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, urmează că

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|, \quad \text{pentru } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

De asemenea,

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in (-\infty, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty)$$

deci

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R}.$$

Funcţia sinus

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Se observă că

$$|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin \frac{x - x_0}{2}||\cos \frac{x + x_0}{2}| \leq 2|\frac{x - x_0}{2}| = |x - x_0|,$$

de unde, conform criteriului majorării,

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}.$$

S-a observat deja că funcţia sinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\sin(a_n))_{n\geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru şirul $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, de asemenea cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\sin(b_n))_{n\geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcţia sinus nu are limită la $+\infty$, în mod analog demonstrându-se că funcţia sinus nu are limită nici la $-\infty$.

Funcţia cosinus

În mod similar celor de mai sus se demonstrează că

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce nici funcţia cosinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcţia tangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R}\setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Conform inegalităţilor

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0| \leq \left|\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x_0}{\cos x_0}\right| = \left|\frac{\sin(x - x_0)}{\cos x \cos x_0}\right|,$$

valabile pentru $x, x_0 \in \mathbb{R}\setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\right\}$, urmează că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}\setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+n\pi \\ x<\frac{\pi}{2}+n\pi}} \operatorname{tg} x = \lim_{\substack{u\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}(u + n\pi) = \lim_{\substack{u\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} u = +\infty$$

ţinând seama de teorema limitei funcţiei compuse şi de faptul că funcţia tangentă este periodică de perioadă π. În mod similar se demonstrează că

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+n\pi \\ x>\frac{\pi}{2}+n\pi}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Se poate observa că funcţia tangentă nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Întradevăr, pentru şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = n\pi$, cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\operatorname{tg}(a_n))_{n\geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru şirul $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\operatorname{tg}(b_n))_{n\geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcţia tangentă nu are limită la $+\infty$, în mod analog raţionându-se pentru $x \to -\infty$.

Funcţia cotangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R}\setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Ca mai sus, se obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}\setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x\to n\pi \\ x>n\pi}} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{\substack{x\to n\pi \\ x<n\pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Se poate observa că nici funcţia cotangentă nu are limita nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcţia arcsinus

Fie funcţia $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$. Folosind un raţionament analog celui utilizat pentru a stabili limitele funcţiei logaritmice, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1,1].$$

Funcţia arccosinus

Fie funcţia $f : [-1,1] \to [0,\pi]$, $f(x) = \arcsin x$. Ca mai sus, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1,1].$$

Funcţia arctangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Ca mai sus, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Funcţia arccotangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$. Ca mai sus, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0 \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

5.2.3 Limite fundamentale

Au loc relaţiile:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,

6) $\lim\limits_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e$, $\lim\limits_{y\to-\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p, p\in\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Deoarece $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ pentru $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, urmează că

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad \text{pentru } x\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleştelui, urmează că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=1$. Cu un raţionament asemănător, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=1$, de unde $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

Cu schimbarea de variabilă $\arcsin x=u$, urmează că $x=\sin u$, iar $u\to 0$ pentru $x\to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\sin u}{u}}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

Deoarece $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ pentru $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, urmează că

$$1<\frac{\operatorname{tg} x}{x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{pentru } x\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleştelui, urmează că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Cu un raţionament asemănător, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, de unde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\mathbf{\lim_{x\to 0} \frac{arctg\, x}{x} = 1}$$

Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{arctg} x = u$, urmează că $x = \operatorname{tg} u$, iar $u \to 0$ pentru $x \to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} u}{u}} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u}} = 1.$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$. Fie $x > 0$. Să notăm $n = \left[\frac{1}{x}\right]$. Cum $\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1$, urmează că $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, deci $\frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n+1}$. În concluzie,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

adică

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Cum $n \to \infty$ pentru $x \to 0$, $x > 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$, urmează conform criteriului cleştelui că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. În mod asemănător se demonstrează că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, deci $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, ambele limite laterale fiind egale cu e.

$$\mathbf{\lim_{y\to\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e, \quad \lim_{y\to-\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e}$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, cu notaţia $\frac{1}{x} = y$ urmează că $\lim\limits_{y\to\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e$. Deoarece şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, tot cu notaţia $\frac{1}{x} = y$, urmează că şi $\lim\limits_{y\to-\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e$.

$$\mathbf{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e.}$$

Conform proprietăţilor operaţiilor cu limite de funcţii, urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a\left(\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\right) = \log_a e.$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

Punând $a = e$ în formula de mai sus, obţinem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1$.

$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$$

Cu schimbarea de variabilă $a^x - 1 = u$, urmează că $x = \log_a(1+u)$, iar $u \to 0$ pentru $x \to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(1+u)} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\log_a(1+u)}{u}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Punând $a = e$ în formula de mai sus, obţinem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.

$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p - 1}{x} = p}$$

Cu schimbarea de variabilă $x = e^u - 1$, urmează că $u = \ln(1+x)$, iar $u \to 0$ pentru $x \to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p - 1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{(e^u)^p - 1}{e^u - 1} = \lim_{u\to 0}\frac{\frac{e^{pu}-1}{u}}{\frac{e^u-1}{u}} = \frac{\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^{pu}-1}{pu}\cdot p}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}} = \frac{\ln e\cdot p}{\ln e} = p.$$

Compararea creşterii funcţiilor $\ln x$, x^p ($p > 0$) şi e^x

În cele ce urmează vom studia diferenţele între vitezele de creştere spre $+\infty$ ale funcţiei exponenţiale, funcţiei putere şi funcţiei logaritmice, observând că funcţia exponenţială are cea mai mare viteză de creştere spre $+\infty$, urmată de funcţia putere şi funcţia logaritmică.

Vom demonstra mai întâi că $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$. În acest sens, s-a demonstrat deja că $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0$ pentru orice $p > 0$. Notând $[x] = n$, observăm că $n \leq x < n+1$ şi atunci

$$\frac{\ln n}{(n+1)^p} < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{n^p},$$

adică

$$\frac{\ln n}{n^p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^p}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p,$$

de unde, ţinând seama de cele de mai sus, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$.

Arătăm acum că $\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$. Cu schimbarea de variabilă $x = \ln u$, urmează că $u = e^x$ şi $u \to \infty$ pentru $x \to \infty$. Ţinând seama de teorema funcţiei compuse, se obţine că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{u\to\infty} \frac{(\ln u)^p}{u} = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = \left(\lim_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = 0^p = 0.$$

Pentru o altă demonstraţie a acestor relaţii, să arătăm mai întâi că

$$\ln x < x < e^x, \quad \text{pentru } x > 0,$$

inegalitate care prezintă un interes de sine stătător.

În acest sens, să observăm că

$$e^x \geq e^{[x]} = (1 + (e-1))^{[x]} \geq 1 + (e-1)[x],$$

conform inegalităţii lui Bernoulli. În plus,

$$1 + (e-1)[x] > \{x\} + [x] = x,$$

de unde $e^x > x$, pentru orice $x > 0$. Prin logaritmarea acestei inegalităţi, se obţine că $x > \ln x$, pentru orice $x > 0$, de unde concluzia.

De aici, $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$, pentru orice $x > 0$, iar cum $\ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x$, urmează că $\frac{\frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{x}} < 1$, deci $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, pentru $x > 0$. Atunci

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad \text{pentru } x > 1,$$

de unde urmează conform criteriului cleştelui că $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Arătăm acum că $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, pentru $p > 0$. Într-adevăr, cu schimbarea de variabilă $u = x^p$

şi ţinând seama că $u \to \infty$ când $x \to \infty$, obţinem cu ajutorul teoremei limitei funcţiei compuse că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p}=\lim_{u\to\infty}\frac{\ln\left(u^{\frac{1}{p}}\right)}{u}=\lim_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{p}\ln u}{u}=\frac{1}{p}\lim_{u\to\infty}\frac{\ln u}{u}=0.$$

Faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^x}=0$ se obţine ca mai sus.

În fine, să precizăm câteva consideraţii asupra tratării cazurilor de nedeterminare. Cazurile $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, $\dfrac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$ se tratează cu ajutorul limitelor fundamentale menţionate mai sus, pentru cazul de nedeterminare $\dfrac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$ putându-se da şi factor comun forţat. Cazul $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$ se tratează transformând produsul în raport cu ajutorul formulei $fg=\frac{f}{\frac{1}{g}}$. Cazul $\boldsymbol{\infty}-\boldsymbol{\infty}$ se tratează prin reducere la o nedeterminare de tip $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$ dând factor comun forţat, sau, în unele situaţii în care apar radicali, prin amplificare cu expresii conjugate. Cazurile $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, $\boldsymbol{\infty}^{\mathbf{0}}$, $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$ se tratează prin reducerea nedeterminării la una de tip produs, cu ajutorul formulei $f^g=e^{g\ln f}$, pentru cazul de nedeterminare $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$ putându-se utiliza şi limita $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, numită în continuare şi *limita standard ce defineşte numărul e*.

Exemple. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\sin x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{1}{4}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{3x}\cdot 3x}{\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}\cdot 2x}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}.$$

Exemple. 1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\infty}$, vom transforma mai întâi nedeterminarea într-una de tip raport. Observăm că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Cu notaţia $u = \frac{1}{x}$, ţinând seama că $u \to \infty$ pentru $x \to 0$, $x > 0$, se obţine că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u}}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{-\ln u}{u} = 0,$$

de unde limita căutată este 0.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\mathbf{0^0}$, transformăm mai întâi nedeterminarea într-una de tip produs. Atunci

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x},$$

de unde

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x \ln x} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x} = e^0 = 1,$$

conform exemplului precedent.

Exemple. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{2}{n}\right)^n$

Vom determina valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x}\right)^x$, valoarea limitei din enunţ obţinându-se ca un caz particular. Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\mathbf{1^\infty}$, se va folosi limita standard ce defineşte numărul *e*. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}\right)^x \\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}}\right]^{x\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)} \\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)} \\
&\quad=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{x}}}.
\end{aligned}$$

Cu notaţia $u=\frac{1}{x}$, ţinând seama că $u\to 0$ când $x\to\infty$, urmează că

$$\begin{aligned}
e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{x}}} &= e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{\cos u+\sin^2 2u-1}{u}} = e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}+\sin^2 2u}{u}} = e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{u}+\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin^2 2u}{u}} \\
&= e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{u}+\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin^2 2u}{u}} = e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{u}{2}\right)^2}{u}+\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin^2 2u}{(2u)^2}\cdot\frac{(2u)^2}{u}} \\
&= e^{\lim\limits_{u\to0}-\left(\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2\cdot\frac{u}{2}+\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2\cdot 4u} \\
&= e^{-\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2\cdot\lim\limits_{u\to0}\frac{u}{2}+\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2\cdot\lim\limits_{u\to0}4u} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

Atunci

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}\right)^x=1,$$

de unde limita din enunţ este 1.

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}$

O limită calculată pentru x tinzând la un număr nenul poate transformată într-o limită în care variabila tinde la zero alegând ca nouă variabilă diferenţa dintre x şi acel număr. Cu notaţia $u=x-1$, ţinând seama că $u\to0$ când $x\to1$, urmează că

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}=\lim_{u\to0}\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt[3]{1+u}-2}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^{\frac{1}{2}}-1}{u} + \lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^{\frac{1}{3}}-1}{u}$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Aplicaţii

5.1. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin x}-1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)(3^x-1)}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)^3}{x^3}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x^2+x-1}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx}{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\ldots+\operatorname{tg} nx}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg}(\arcsin x)}$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[(1+3x)^2\right]}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x\arcsin x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{4x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+5^x-2}{3^x+4^x-2}$;
11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\sin 2x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x-\sin x}{x^2}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{4x}$;
14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)}{x}$; 15) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\sin(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq 2$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-1}{x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;
19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)-\sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

5.2. *Fie* $p,q>0$. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p-2^x}{q-3^x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{px})}{\ln(1+e^{qx})}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^p+e^x)}{\ln(x^q+e^x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+p\operatorname{arctg} x}{x+q\operatorname{arcctg} x}$;
5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln\sin px}{\ln\sin qx}$.

5.3. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{4}{\sin^2 x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx))^{\frac{1}{x}}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b>0$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{\arcsin x}+b^{\operatorname{arctg} x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b>0$;
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}\right)^x$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos nx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 9) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi; k\in\mathbb{Z}\}$.

5.4. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 3}{x - \frac{\pi}{4}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x+24} - 3}{x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[p]{x} - 1}{\sqrt[q]{x} - 1}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p, q \geq 2$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \ldots + \sqrt[n]{x} - (n-1)}{x-1}$.

5.5. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln(x+2) - \ln x]$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(x+1)\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+2} - \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}\right)$.

5.6. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\sin\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-\ln x)^{2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

5.7. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\frac{1}{x^2} + \ln x)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln(e^x + e^{-x}) - x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt[n]{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x)$.

5.8. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{arctg} |x|)^{|\operatorname{arctg} x|}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\sin x + x\cos x)^x$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sin\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]^{\frac{\ln x}{x}}$.

5.9. *Fie* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Arătaţi că* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0$.

5.10. *Fie* $a > 0$. *Demonstraţi că*

$$1)\ \lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a} = a^a(1 + \ln a); \quad 2)\ \lim_{x\to a} \frac{x\ln a - a\ln x}{x-a} = \ln a - 1.$$

5.11. *Fie* $p \in (0,1)$. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $\lim\limits_{x\to\infty}((x+1)^p - x^p + a) = p$.

5.12. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$. *Determinaţi punctele* $x_0 \in \mathbb{R}$ *pentru care* f *are limită în* x_0.

5.13.

1. *Demonstraţi că* $\sin(\arccos u) = \sqrt{1-u^2}$ *pentru* $u \in [-1,1]$.
2. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\arccos \frac{2x}{1+x^2}}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. *Demonstraţi că* f *nu are limită în* $x = 1$.

5.14. *Fie* $L_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\cos x \cos 2x \ldots \cos nx}{x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Determinaţi* L_0, L_1.
2. *Demonstraţi că* $L_{n+1} = L_n + \frac{(n+1)^2}{2}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demonstraţi că* $L_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

5.15. *Fie* $L_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\ln(e+x)\ln(e+2x)\ldots\ln(e+nx)}}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Determinaţi* L_1.
2. *Demonstraţi că* $L_{n+1} = L_n - \frac{n+1}{e}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demonstraţi că* $L_n = -\frac{n(n+1)}{2}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

5.16. *Fie* $L_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\ldots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Determinaţi* L_1.
2. *Demonstraţi că* $L_{n+1} = \frac{n+1}{2} L_n$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demonstraţi că* $L_n = \frac{n!}{2^n}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

5.17. *Determinaţi valoarea limitei* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+2x+1} - \sqrt{x^2+2}\right)$ *în funcţie de valorile parametrului real* a, $a > 0$.

5.18. *Determinaţi valorile parametrilor reali* a, b *astfel încât*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1} - ax - b\right) = 1.$$

5.19. *Determinaţi valorile parametrilor reali a, b astfel încât*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - ax - b}{x^2} \in \mathbb{R}.$$

5.20. *Determinaţi valorile parametrilor reali a, b, $a > 0$, astfel încât*

$$\lim_{x\to 0} (a\cos x + b\sin x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

5.21. *Fie $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ astfel ca $f(x) > \frac{1}{x^2+x} > g(x)$ pentru $x > 0$. Demonstraţi că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.*

5.22. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. *Arătaţi că există $\delta_1 > 0$ astfel ca $a\sin x + \cos(bx) > 0$ pentru $x \in (-\delta_1, \delta_1)$.*
2. *Arătaţi că există $\delta_2 > 0$ astfel ca $e^{ax} - bx > 0$ pentru $x \in (\delta_2, +\infty)$.*
3. *Arătaţi că există $\delta_3 > 0$ astfel ca $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{3}{2}$ pentru $x \in (-\delta_3, \delta_3)$.*

5.23. *Demonstraţi că*
1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{[x]}{x} = 1$; *2)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$; *3)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left(\left[\dfrac{1}{x}\right] + \left[\dfrac{2}{x}\right] + \ldots + \left[\dfrac{n}{x}\right]\right) = 1$.

5.24. *Demonstraţi că*
1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x^2-1}\cos x = 0$; *2)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}\cos\dfrac{1}{x} = 0$; *3)* $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

5.25. *Fie $f : \mathbb{R}^* \to (0, \infty)$ astfel ca $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) + \dfrac{1}{f(x)}\right) = 2$. Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.*

5.26. *Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$. Cu ajutorul acestei limite, justificaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.*

5.27. *Calculaţi următoarele limite de şiruri*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} \ln\left(1 + \frac{n}{n^2+2}\right)$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\sin\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}\right)$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{n+1}{n}} - e\right)$.

Capitolul 6

FUNCŢII CONTINUE

6.1 Continuitatea unei funcţii într-un punct

Fie o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. În capitolul precedent s-a studiat comportarea lui f în vecinătatea unui punct dat $x_0 \in D'$, observându-se dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcţiei se apropie şi ele (sau nu) de o valoare fixă, numită limita funcţiei în x_0.

În acest capitol vom pune problema particulară a apropierii acestor valori de valoarea $f(x_0)$ a funcţiei în x_0; desigur, pentru a putea vorbi despre $f(x_0)$ va fi necesar ca x_0 să aparţină domeniului de definiţie D. În plus, faţă de studiul limitei funcţiei în x_0, se va avea în vedere şi cazul în care x_0 este punct izolat al lui D.

Pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in D$, vom spune că funcţia f *este continuă* în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$ urmează că $f(x) \in V$.

Întrucât se pune în fapt o problemă înrudită cu existenţa limitei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, definiţia de mai sus se obţine din definiţia limitei unei funcţii în x_0 înlocuind l cu $f(x_0)$, fiind totuşi necesară înlocuirea condiţiei $x_0 \in D'$ cu condiţia $x_0 \in D$.

Continuitatea într-un punct de acumulare

Se observă atunci că dacă x_0 este punct de acumulare al lui D, atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, iar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right),$$

adică *operaţia de aplicare a funcţiei f comută cu operaţia de calculare a limitei în x_0*.

Intuitiv, cum valorile $f(x)$ ale funcţiei sunt apropiate de valoarea limitei (egală acum cu $f(x_0)$) pentru x apropiat de x_0, funcţiile continue într-un punct x_0 sunt acele funcţii pentru care o schimbare minoră a argumentului de la x_0 la x va produce o schimbare minoră a valorii funcţiei de la $f(x_0)$ la $f(x)$.

Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare atât la dreapta cât şi la stânga pentru D, atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă există ambele limite laterale $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Continuitatea într-un punct izolat

Presupunem acum că x_0 este punct izolat al lui D şi fie $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ o vecinătate a lui $f(x_0)$. Cum x_0 este punct izolat al lui D, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $U \cap D = \{x_0\}$, şi cum $f(x_0) \in V$, urmează că definiţia funcţiei continue în x_0 este satisfăcută pentru acest U. Rezultă de aici că o funcţie este continuă în orice punct izolat al domeniului său de definiţie.

Studiul continuităţii unei funcţii $f : D \to \mathbb{R}$ în $x_0 \in D$ ne conduce deci la una dintre următoarele situaţii

1. $x_0 \in D'$
   (a) f are limită în x_0, cu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Atunci f este continuă în x_0.
   (b) f are limită în x_0, cu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Atunci f nu este continuă în x_0.
   (c) f nu are limită în x_0. Atunci f nu este continuă în x_0.
2. $x_0 \notin D'$. Atunci f este continuă în x_0.

Aspecte grafice ale noţiunii de continuitate

În fapt, conceptul de continuitate îşi are originea în consideraţii privind reprezentarea grafică a funcţiilor. Astfel, din punct de vedere intuitiv, o funcţie este continuă în x_0 dacă graficul său „nu se întrerupe" în x_0. În acest sens, să considerăm exemplele funcţiilor $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

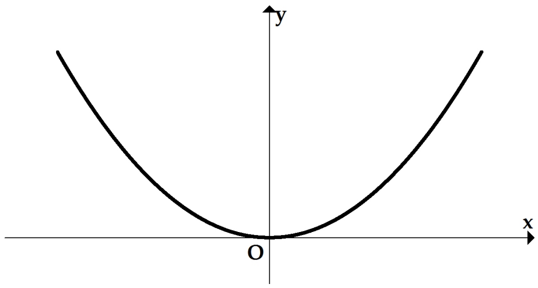


Figura 6.1: Graficul funcţiei f_1

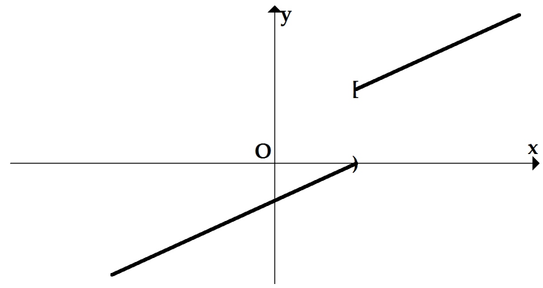


Figura 6.2: Graficul funcţiei f_2

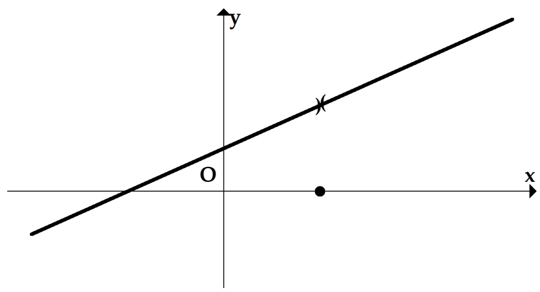


Figura 6.3: Graficul funcţiei f_3

Se observă că f_1 are limită în $x_0 = 1$ şi $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = 1$, iar cum $f_1(1) = 1$, urmează că $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = f_1(1)$, deci f_1 este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, egalitatea $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = f_1(1)$ revine la faptul că graficul lui f_1 „nu se întrerupe" în $x_0 = 1$.

De asemenea, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_2(x) = 0 \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_2(x) = 2$, deci f_2 nu este continuă în $x_0 = 1$, întrucât f_2 nu are limită în acest punct. Geometric, graficul lui f_2 „se întrerupe" la stânga lui $x_0 = 1$ (dar nu şi la dreapta lui $x_0 = 1$).

În plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_3(x) = 2 = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_3(x)$, deci f_3 are limită în $x_0 = 1$. Totuşi, deoarece $f_3(1) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 1} f_3(x)$, urmează că f_3 nu este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, graficul lui f_3 „se întrerupe" atât la stânga cât şi la dreapta lui $x_0 = 1$.

6.1.1 Continuitate laterală

Exemplul funcţiei f_2 de mai sus, pentru care graficul „se întrerupe" doar de o parte a lui $x_0 = 1$, cât şi existenţa noţiunii de limită laterală sugerează introducerea conceptului de *continuitate laterală*.

Pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in D$, vom spune că funcţia f *este continuă la stânga* în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \leq x_0$, urmează că $f(x) \in V$.

Se observă atunci că dacă x_0 este punct de acumulare la stânga al lui D, atunci f este continuă la stânga în x_0 dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0),$$

adică limita la stânga a lui f în x_0 este egală cu $f(x_0)$.

În mod similar se defineşte noţiunea de continuitate la dreapta într-un punct x_0, obţinându-se că dacă x_0 este punct de acumulare la dreapta al lui D, atunci f este continuă la dreapta în x_0 dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Conform celor de mai sus, are loc următoarea proprietate.

Teorema 6.1. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Dacă x_0 este punct de acumulare atât la dreapta cât şi la stânga al lui D, atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă este continuă atât la dreapta cât şi la stânga lui x_0.*

6.1.2 Funcţii continue pe o mulţime

Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă în fiecare punct al unei mulţimi $A \subseteq D$, spunem că *f este continuă pe A*. Dacă f este continuă în orice punct al domeniului său de definiţie, atunci se spune simplu că *f este continuă*. Din ceea ce s-a observat în capitolul anterior, funcţiile elementare sunt continue.

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ este continuă. Într-adevăr, pentru $x_0 < 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = \lim\limits_{x \to x_0} (-x) = -x_0 = |x_0|$, deci f este continuă în x_0. Similar, pentru $x_0 > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0 = |x_0|$. În fine, pentru $x_0 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-x) = 0$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0$, deci $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} |x| = |0|$, iar f este continuă în $x_0 = 0$.

6.1.3 Puncte de discontinuitate

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Dacă f nu este continuă în x_0, se spune că f este *discontinuă* în D, sau că x_0 este *punct de discontinuitate* pentru f.

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de discontinuitate pentru f. Dacă ambele limite laterale $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ ale lui f în x_0 există şi sunt finite, atunci x_0 se numeşte *punct de discontinuitate de specia (speţa) întâi*. În orice altă situaţie (adică dacă măcar una din limitele laterale nu există, sau există, dar nu este finită), x_0 se numeşte *punct de discontinuitate de specia (speţa) a doua*.

Dacă există limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, diferită de $f(x_0)$, atunci x_0 (care este punct de discontinuitate de specia întâi) se mai numeşte şi *discontinuitate înlăturabilă*, întrucât redefinind $f(x_0)$ ca fiind egală cu valoarea limitei în x_0, x_0 se transformă într-un punct de continuitate.

Exemple. 1. Fie $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_1(x) = -1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_1(x) = 1$, ambele fiind finite (dar diferite, 0 nefiind deci punct de continuitate), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speţa întâi.

2. Fie $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Cum $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 1$, iar $f_2(0) = 0 \neq 1$, urmează că 0 este punct de discontinuitate de specia întâi, fiind în fapt o discontinuitate înlăturabilă.

3. Fie $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_3(x) = +\infty$, urmează că 0 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

4. Fie $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_4(x)$ nu există (deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, iar funcţia sinus nu are limită la $+\infty$), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

5. Fie $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Există atunci două şiruri $(a_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{Q}$, $(b_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cu $a_n < x_0$, $b_n < x_0$ pentru $n \geq 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = x_0$. Atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f_5(a_n) = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_5(b_n) = 0$, deci nu există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f_5(x)$, iar x_0 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

Ţinând cont de faptul că funcţiile monotone au limite laterale în fiecare punct al domeniului de definiţie, ele nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o anumită natură. Mai mult, aceste puncte de discontinuitate nu pot fi arbitrar de multe.

Corolar 6.1.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă pe intervalul I. Atunci f nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia întâi pe I, mulţimea tuturor acestor puncte fiind cel mult numărabilă.*

6.1.4 Prelungirea prin continuitate a unei funcţii într-un punct

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă f nu este definită în x_0 (deci $x_0 \notin D$), dar x_0 este punct de acumulare al domeniului D, iar f are limita finită l în x_0, atunci funcţia

$$\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ l, & x = x_0 \end{cases},$$

obţinută prin definirea valorii în x_0 ca fiind egală cu valoarea limitei în acelaşi punct, celelalte valori rămânând neschimbate, se numeşte *prelungirea prin continuitate a lui f în x_0*. Desigur, deoarece

$$\lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l = \tilde{f}(x_0),$$

$\tilde{f}$ este continuă în x_0, ceea ce justifică denumirea de prelungire prin continuitate.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, prelungirea prin continuitate a lui f în 0 este

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

6.1.5 Caracterizarea cu şiruri a continuităţii unei funcţii într-un punct

Teorema următoare, denumită şi *teorema de caracterizare cu şiruri a continuităţii unei funcţii într-un punct* permite studiul continuităţii unei funcţii cu ajutorul limitelor de şiruri.

Teorema 6.2. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita $f(x_0)$.*

Demonstraţia este imediată, cu ajutorul rezultatului corespunzător pentru limite de funcţii, Teorema 5.3. Să observăm şi că teorema de mai sus (ca şi definţia continuităţii, de fapt) nu mai exclude valori ale argumentului diferite de x_0; dacă $a_n = x_0$, atunci $f(a_n) = f(x_0)$, valoare egală cu valoarea limitei.

Teorema de mai sus se poate exprima prin faptul că *funcţiile continue se pot aplica relaţiilor de convergenţă* (adică dacă f este continuă în x_0, iar $a_n \to x_0$ pentru $n \to \infty$, în condiţiile de mai sus, atunci $f(a_n) \to f(x_0)$ pentru $n \to \infty$.)

6.1.6 Caracterizarea cu $\varepsilon - \delta$ a continuităţii unei funcţii într-un punct

Următoarea *teoremă de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$* se poate obţine în mod imediat din rezultatul similar pentru limite de funcţii, Teorema 5.1.

Teorema 6.3. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon,x_0} > 0$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon,x_0}$.*

In teorema de mai sus, $\delta_{\varepsilon,x_0} > 0$ depinde (implicit) şi de punctul x_0 în care se studiază continuitatea funcţiei, pe lângă dependenţa de ε.

6.1.7 Operaţii cu funcţii continue

Se poate observa că operaţiile uzuale cu funcţii continue au ca rezultat funcţii continue, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

Teorema 6.4. *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g continue în x_0. Atunci*

1. *$f + g$, $f - g$ sunt continue în x_0.*
2. *αf este continuă în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.*
3. *fg este continuă în x_0.*
4. *$\frac{f}{g}$ este continuă în x_0 dacă $g(x_0) \neq 0$.*
5. *f^g este continuă în x_0 dacă $f(x_0)^{g(x_0)}$ este bine definită.*

Demonstraţia este imediată, obţinându-se cu ajutorul proprietăţilor operaţiilor cu limite de funcţii. O proprietate asemănătoare se poate formula în mod similar pentru funcţii continue pe întreg domeniul de definiţie.

Exemple.

1. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \log_2 x$ este continuă, fiind suma a două funcţii elementare.
2. $f : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^x$ este continuă, întrucât $f_1 : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + 2$, $f_2 : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x$ sunt continue, iar $f_1^{f_2}$ este bine definită.

Continuitatea funcţiei compuse

S-a observat anterior că operaţiile uzuale cu funcţii continue au ca rezultat tot funcţii continue. Teorema de mai jos exprimă faptul că prin compunerea a două funcţii continue se obţine tot o funcţie continuă.

Teorema 6.5. *Fie $u : D \subseteq \mathbb{R} \to E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ astfel încât u este continuă în x_0, iar f este continuă în $u(x_0)$. Atunci funcţia compusă $f \circ u : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în x_0.*

Demonstraţie. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir astfel ca $a_n \in D$, iar $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Deoarece funcţia u este continuă în x_0, urmează că $\lim_{n\to\infty} u(a_n) = u(x_0)$, conform teoremei de caracterizare cu şiruri. Deoarece şi funcţia f este continuă, $\lim_{n\to\infty} f(u(a_n)) = f(u(x_0))$, de unde concluzia. Cum $(a_n)_{n\geq 0}$ era arbitrar, urmează conform teoremei de caracterizare cu şiruri că $f \circ u$ este continuă în x_0. ■

Exemplu. Funcţia $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ este continuă, deoarece $f = f_1 \circ f_2$, unde $f_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2 : [1,\infty) \to [0,\infty)$, $f_2(x) = x^3 - 1$, sunt continue.

Cum funcţia modul este continuă, se poate demonstra că modulul unei funcţii continue este tot o funcţie continuă, iar maximul, respectiv minimul, a două funcţii sunt de asemenea funcţii continue.

Teorema 6.6. *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g continue în x_0. Atunci*

1. *$|f|$ este continuă în x_0.*
2. *$\min(f,g)$ şi $\max(f,g)$ sunt continue în x_0.*

Demonstraţie. 1. Cum $|f|$ reprezintă compunerea funcţiilor continue $|\cdot|$ şi f, $|f| = |\cdot| \circ f$, ea este continuă în x_0.

2. Este cunoscut că

$$\max(f,g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min(f,g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Cum $f + g$, $f - g$ sunt continue, reprezentând operaţii uzuale cu funcţii continue, iar $|f - g|$ este de asemenea continuă, conform celor de mai sus, urmează că $\max(f,g)$ şi $\min(f,g)$ sunt continue, fiind obţinute prin operaţii uzuale cu funcţii continue. ■

6.1.8 Proprietăţi locale ale funcţiilor continue

Conform unei proprietăţi anterioare, continuitatea unei funcţii într-un punct presupune egalitatea între valoarea limitei şi valoarea funcţiei în punct, funcţiile continue moştenind pe această cale proprietăţile funcţiilor cu limită.

Mărginirea funcţiilor continue

Teorema 6.7. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ astfel încât f este continuă în x_0. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este mărginită.*

Proprietatea de păstrare a semnului

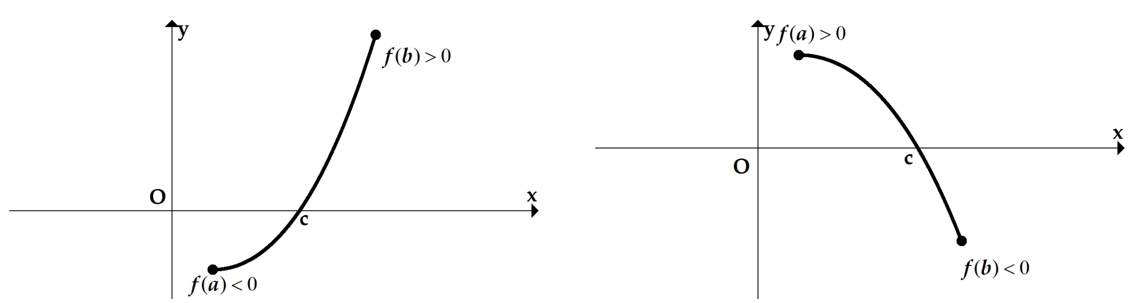
Teorema 6.8. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ astfel încât f este continuă în x_0, iar $f(x_0) \neq 0$. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f păstrează semnul lui $f(x_0)$.*

6.2 Proprietăţi ale funcţiilor continue pe o mulţime

6.2.1 Proprietatea lui Darboux

În cele ce urmează vom demonstra că o proprietate caracteristică a funcţiilor continue este aceea de a nu omite valori. Începem mai întâi prin a demonstra următoarea proprietate, numită *lema lui Bolzano*, ce exprimă faptul că dacă o funcţie continuă are valori de semne opuse la capetele unui interval, atunci ea are o rădăcină în interiorul acestui interval.

Teorema 6.9. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a,b]$, cu proprietatea că $f(a)f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a,b)$ astfel ca $f(c) = 0$.*



Lema lui Bolzano, demonstrată mai sus, este instrumentală în determinarea aproximativă a radăcinilor unor ecuaţii care nu pot fi rezolvate explicit, un exemplu fiind indicat mai jos.

> **Exerciţiu.** Demonstraţi că ecuaţia $e^x = 2\cos x$ are cel puţin o rădăcină în intervalul $(0, \frac{\pi}{3})$.

Soluţie. Ecuaţia $e^x = 2\cos x$ poate fi pusă sub forma $e^x - 2\cos x = 0$. Fie atunci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2\cos x$. Atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{\pi}{3}} - 1 > 0$. Cum f ia valori de semne opuse în capetele intervalului $[0, \frac{\pi}{3}]$, există cel puţin o rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$ în interiorul acestui interval, ceea ce trebuia demonstrat.

> **Exerciţiu.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_1 x + a_0$ o funcţie polinomială de grad impar. Atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină reală.

Soluţie. Deoarece f este o funcţie polinomială de grad impar, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, de unde, conform definiţiei limitei, există $x_1 < 0$ astfel ca $f(x_1) < 0$, deoarece într-o vecinătate a lui $-\infty$ valorile funcţiei f păstrează semnul limitei. Similar, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, de unde există $x_2 > 0$ astfel ca $f(x_2) > 0$. Cum f este continuă, fiind funcţie elementară, iar valorile lui f în capetele intervalului $[x_1, x_2]$ au semne opuse, există măcar o rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$ în interiorul acestui interval.

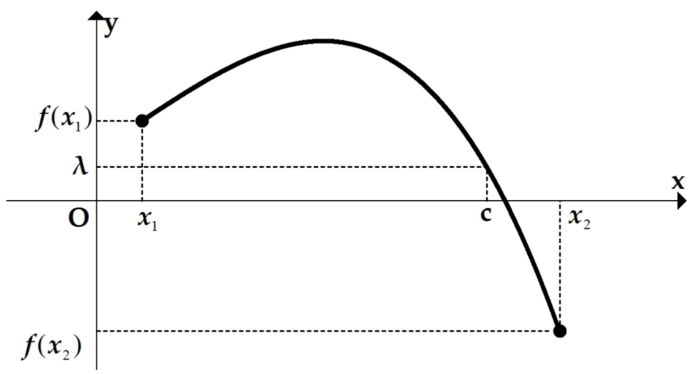
Existenţa rădăcinilor unor ecuaţii

Din cele de mai sus se desprinde următorul procedeu general de localizare a rădăcinilor unei ecuaţii.

Fie o ecuaţie de forma $f(x) = 0$, unde $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe un interval I. Se determină mai întâi două puncte x_1, $x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, astfel încât $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ au semne opuse, adică $f(x_1)f(x_2) < 0$. Deoarece f este continuă pe I, rezultă atunci conform lemei lui Bolzano că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(c) = 0$, adică ecuaţia $f(x) = 0$ are măcar rădăcina c în intervalul (x_1, x_2). Dacă $f(x_1)f(x_2) \leq 0$, ecuaţia $f(x) = 0$ are măcar rădăcina c în intervalul $[x_1, x_2]$. În plus, dacă f este strict monotonă pe intervalul $[x_1, x_2]$ (fiind deci şi injectivă pe acest interval), atunci această rădăcină este unică.

Dacă ecuaţia de rezolvat este prezentată sub forma $f(x) = g(x)$, unde $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continuă pe I, atunci această ecuaţie se pune mai întâi sub forma $f(x) - g(x) = 0$, aplicându-se apoi consideraţiile de mai sus.

Dat un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, vom spune că f *are proprietatea lui Darboux pe* I, sau a *valorii intermediare pe* I dacă pentru orice x_1, $x_2 \in I$ astfel ca $x_1 < x_2$ şi $f(x_1) \neq f(x_2)$ şi orice număr real λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(c) = \lambda$.



Altfel spus, o funcţie f are proprietatea lui Darboux dacă odată cu două valori arbitrare $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ aceasta ia pe intervalul (x_1, x_2) şi orice valori intermediare situate între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ (adică toate valorile din intervalul deschis determinat de $f(x_1$ şi $f(x_2))$. Conform acestei observaţii, rezultă imediat că funcţiile cu proprietatea lui Darboux transformă intervalele în intervale.

Teorema 6.10. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea lui Darboux pe intervalul* $I \subseteq D$. *Atunci* $f(I)$ *este un interval.*

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$. Atunci $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, dar f nu ia pe intervalul $(0, 1)$ şi valoarea intermediară $\frac{1}{2}$, deci f nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Alternativ, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$, deci f nu transformă intervalul deschis $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui Darboux.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$. Atunci $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$, deci f nu transformă $\mathbb{R}$ tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui

Darboux.

Restrângând în mod potrivit intervalul I de mai sus în jurul unui punct x_0 în care o funcţie cu proprietatea lui Darboux are o limită laterală, se obţine imediat următorul rezultat.

Teorema 6.11. *Fie $f : I_1 \to \mathbb{R}$, I_1 fiind un interval pe care f are proprietatea lui Darboux, şi fie $x_0 \in I_1$ astfel încât există o limită laterală a lui f în x_0. Atunci această limită este egală cu $f(x_0)$.*

Conform acestei proprietăţi, funcţiile cu proprietatea Darboux sunt „aproape continue", în sensul că nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o anumită natură.

Corolar 6.11.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea lui Darboux pe intervalul I. Atunci f nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia a doua pe I.*

Vom demonstra în cele ce urmează că funcţiile continue pe un interval au proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Teorema 6.12. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci f are proprietatea lui Darboux pe I.*

Demonstraţie. Fie x_1, $x_2 \in I$ astfel ca $x_1 < x_2$ şi $f(x_1) \neq f(x_2)$ şi fie λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$. Fie deasemenea $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda$.

Atunci g este continuă pe I, iar $g(x_1)g(x_2) = (f(x_1) - \lambda)(f(x_2) - \lambda) < 0$. Conform teoremei Cauchy-Bolzano, există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $g(c) = 0$, de unde $f(c) = \lambda$, iar f are proprietatea lui Darboux pe I. ∎

Corolar 6.12.1. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul $I \subseteq D$. Atunci $f(I)$ este un interval.*

6.2.2 Funcţii uniform continue

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Dacă f este continuă în x_0 atunci, conform teoremei de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon,x_0} > 0$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon,x_0}$. Aşa cum s-a afirmat, δ_{ε,x_0} depinde atât de ε, cât şi de x_0, valoarea sa putând să se schimbe după substituirea lui x_0 cu un alt argument x_1. Când această valoare nu se schimbă indiferent de valoarea argumentului considerat, f se numeşte *uniform continuă*.

În acest sens, vom spune că f este *uniform continuă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in D$ cu proprietatea că $|x - y| < \delta_\varepsilon$.

Definiţia de mai sus exprimă faptul că, pentru o funcţie uniform continuă, dacă diferenţa între două argumente x şi y este suficient de mică, atunci diferenţa dintre valorile $f(x)$ şi $f(y)$ este de asemenea mică indiferent de locul argumentelor x şi y în domeniul de definiţie. Din punct de vedere geometric, imaginea oricărui interval cu o lungime mai mică decât δ_ε este tot un interval, cu lungime mai mică decât ε. Desigur, orice funcţie uniform continuă pe o mulţime este şi continuă pe acea mulţime, definiţia uniformei continuităţi fiind mai restrictivă.

Exemplu.

1. $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este uniform continuă pe $[0, 2]$. Într-adevăr,

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq 4|x - y|,$$

de unde f este uniform continuă, cu $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$.

2. $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0, 1]$. Să presupunem prin reducere la absurd că g este uniform continuă pe $(0, 1]$. Fie atunci $\varepsilon = 1$ şi fie δ_1, $0 < \delta_1 < 1$, astfel ca $|g(x) - g(y)| < 1$ pentru orice $x, y \in (0, 1]$, $|x - y| < \delta_1$. Pentru $x = \delta_1$, $y = \frac{\delta_1}{2}$, urmează că

$$|x - y| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1, \quad |g(x) - g(y)| = \frac{1}{\delta_1} > 1,$$

contradicţie. Urmează că g nu este uniform continuă pe $(0, 1]$

6.2.3 Funcţii Lipschitz. Contracţii

Vom preciză în cele ce urmează o categorie specială de funcţii uniform continue.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă există $L > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ pentru orice $x, y \in D$, atunci f se numeşte *funcţie Lipschitz* (sau *funcţie lipschitziană*) pe D, L numindu-se *constantă Lipschitz* a funcţiei f.

Teorema 6.13. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, f lipschitziană pe D. Atunci f este uniform continuă pe D.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar şi fie $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$, unde L este o constantă Lipschitz a funcţiei f. Atunci

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

pentru orice $x, y \in D$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon$, deci f este uniform continuă pe D. ■

Teorema de punct fix a lui Banach

Fie $T : D \to \mathbb{R}$. Vom spune că $x_0 \in D$ este un *punct fix* al lui T dacă $T(x_0) = x_0$. De asemenea, vom numi *contracţie* o funcţie Lipschitz care admite o constantă Lipschitz $L < 1$. În cele ce urmează vom folosi notaţia simplificată $T(x) = Tx$, iar $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ ori } T}$.

Următoarea teoremă, numită *teorema de punct fix a lui Banach* precizează existenţa şi unicitatea punctului fix al unei contracţii a unei mulţimi închise D în ea însăşi, precizând şi o metodă de obţinere a acestui punct fix, lucru care o face utilă în determinarea aproximativă a soluţiilor unor clase largi de ecuaţii.

Teorema 6.14. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ închisă, iar $T : D \to D$ o contracţie a lui D în ea însăşi. Există atunci un unic punct fix al lui T, iar şirul $(T^n x_0)_{n \geq 0}$ este convergent la acest punct fix pentru orice punct iniţial $x_0 \in D$.*

6.2.4 Funcţii continue definite pe intervale închise şi mărginite

A fost demonstrat deja că funcţiile continue transformă intervalele în intervale. O precizare ce se poate aduce este că funcţiile continue transformă intervalele închise şi mărginite tot în intervale închise şi mărginite. Acest lucru este exprimat în următorul rezultat, numit *teorema lui Weierstrass*.

Teorema 6.15. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe $[a, b]$.*

Deşi s-a observat mai sus că funcţiile continue nu sunt necesar uniform continue, acestea devin totuşi uniform continue atunci când domeniul lor este un interval închis şi mărginit.

Teorema 6.16. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$. Atunci f este uniform continuă pe $[a, b]$.*

Aplicaţii

6.1. *Precizaţi un exemplu de funcţie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ pentru care $|f|$ este continuă fără ca f să fie continuă.*

6.2. *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x^2} - a}{x^2}, & x > 0 \\ 2x^3 - 4x + b, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.*

6.3. *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x-2}, & x \neq 2 \\ ax, & x = 2 \end{cases}$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 2$.*

6.4. *Demonstraţi că funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă în $x_0 = 0$.*

6.5. *Fie funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Determinaţi $p \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.*

6.6. *Fie funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^p \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Determinaţi $p \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.*

6.7. *Precizaţi punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x^2]$ şi natura acestora.*

6.8.

1. *Precizaţi punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$ şi natura acestora.*

2. *Demonstraţi că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, este continuă pe $\mathbb{R}$.*

6.9. *Fie* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$. *Prelungiţi* f *prin continuitate în* $x_0 = 0$.

6.10. *Fie* $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2 \sin \frac{1}{x+2}$. *Prelungiţi* f *prin continuitate în* $x_0 = -2$.

6.11. *Fie* $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 3}{x-1}, & x < 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$. *Demonstraţi că* f *nu poate fi prelungită prin continuitate în* $x_0 = 1$.

6.12. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $|f(x) - x| \leq x^2$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Determinaţi* $f(0)$.
2. *Demonstraţi că* f *este continuă în* 0.

6.13.

1. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue în* $x = 0$ *pentru care* $f(x) = f(2x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Determinaţi funcţiile* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *continue în* $x = 1$ *pentru care* $f(x) = f(x^2)$ *pentru orice* $x \in [0, \infty)$.

6.14. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

1. *Dacă* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{Q}$, *atunci* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Dacă* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *atunci* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.
3. *Dacă* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{Z}$, *rezultă că* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$?

6.15. *Fie* $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f_1, f_2 *continue şi fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. *Atunci* f *este continuă în* $x_0 \in \mathbb{R}$ *dacă şi numai dacă* $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

6.16. *Fie* $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$.

1. *Dacă* f *este continuă în* x_0, *iar* g *este discontinuă în* x_0, *atunci* $f + g$ *este discontinuă în* x_0.
2. *Dacă* f, g *discontinue în* x_0, *rezultă că* $f + g$ *este discontinuă în* x_0?

6.17. 1. *Fie* $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$, f, g *continue în* x_0. *Dacă* $f(x_0) < g(x_0)$, *arătaţi că există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *cu proprietatea că* $f(x) < g(x)$ *pentru orice* $x \in U \cap D$.

2. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$, f *continuă în* x_0. *Dacă* $m, M \in \mathbb{R}$ *sunt astfel încât* $m < f(x_0) < M$, *arătaţi că există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *cu proprietatea că* $m < f(x) < M$ *pentru orice* $x \in U \cap D$.

6.18. *Demonstraţi că ecuaţia* $3^x(x^3 + 1) - 2 = 0$ *are o unică rădăcină în intervalul* $(0, 1)$.

6.19. *Demonstraţi că ecuaţia* $x^5 - 3x^4 - 2x + 1 = 0$ *admite cel puţin o rădăcină reală.*

6.20. *Demonstraţi că dacă* $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci ecuaţia* $x \cos \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x}$ *are măcar o rădăcină în intervalul* $(\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi})$.

6.21. 1. *Demonstraţi că ecuaţia* $x^3 + 2x = 3 + \frac{1}{n}$ *are o unică soluţie reală* x_n *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

2. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

6.22. *Fie* $f : [a, b] \to [a, b]$, f *continuă. Demonstraţi că există* $c \in [a, b]$ *astfel încât* $f(c) = c$.

6.23. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *continuă. Demonstraţi că există* $c \in (a, b)$ *astfel încât* $f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$.

6.24. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *continuă şi fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. *Demonstraţi că există* $c \in [a, b]$ *astfel ca* $f(c) = \frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big)$.

6.25. *Fie* $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2, & x \in [-2, -1) \\ x + a, & x \in [-1, 2] \end{cases}$. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât* f *să aibă proprietatea lui Darboux pe* $[-2, 2]$.

6.26. *Demonstraţi că* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$, *este bijectivă.*

6.27. *Fie* $f : [0, 1] \to [0, 1] \cup [2, 3]$, f *continuă. Demonstraţi că* f *nu este surjectivă.*

6.28. *Fie* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, f *continuă, iar* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *este finită. Atunci* f *este mărginită.*

6.29. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *crescătoare. Demonstraţi că* $\operatorname{Im} f = [f(a), f(b)]$.

6.30. 1. *Folosind eventual inegalitatea* $\sin x < x$ *pentru* $x > 0$, *demonstraţi că* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$ *este uniform continuă pe* $[0, \infty)$.

2. *Folosind eventual inegalitatea* $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ *pentru* $x, y \geq 0$, *demonstraţi că* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, *este uniform continuă pe* $[0, \infty)$.

6.31. 1. *Dacă* $f : D \to \mathbb{R}$ *este uniform continuă pe* D, $D_1 \subseteq D$, *iar* $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ *este o restricţie a lui* f *la* D_1, *atunci* f_1 *este uniform continuă pe* D_1

2. *Demonstraţi că* $f_1 : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$, *este uniform continuă pe* $(0, 1]$.

6.32. 1. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f *continuă. Dacă există limitele* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *şi* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *şi sunt finite, atunci* f *este uniform continuă pe* $\mathbb{R}$.

2. *Demonstraţi că* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, *este uniform continuă pe* $\mathbb{R}$.

3. *Demonstraţi că* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, *este uniform continuă pe* $\mathbb{R}$.

6.33. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuă şi periodică. Atunci* f *este uniform continuă.*

6.34. 1. *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$, f *continuă. Dacă există* $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0} \subseteq D$ *astfel ca* $\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$, *dar* $\lim_{n \to \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, *atunci* f *nu este uniform continuă pe* D.

2. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f *continuă. Dacă există* $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0} \subseteq (a, b)$ *astfel ca* $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = a$ *sau* $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = b$, *dar* $\lim_{n \to \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, *atunci* f *nu este uniform continuă pe* (a, b).

3. *Demonstraţi că* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, *nu este uniform continuă pe* $(0, \infty)$.

4. *Demonstraţi că* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, *nu este uniform continuă pe* $(0, \infty)$.

5. *Demonstraţi că* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$, *nu este uniform continuă pe* $[0, \infty)$.

6.35. 1. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f *uniform continuă. Folosind eventual criteriul Cauchy-Bolzano, arătaţi că există limitele* $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ *şi* $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$ *şi sunt finite.*

2. *Demonstraţi că* $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, *nu este uniform continuă pe* $(0, \frac{\pi}{2})$.

3. *Demonstraţi că* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, *nu este uniform continuă pe* $(0, \infty)$.

Capitolul 7

DERIVATE. DIFERENŢIALE

Noţiunea de *derivată*, elementul fundamental al calculului diferenţial, are o deosebită importanţă în studiul matematic al mărimilor variabile. Problemele principale care au condus la introducerea noţiunii de derivată sunt problema tangentei, respectiv determinarea tangentei la o curbă într-un punct dat, fiind cunoscută ecuaţia curbei, şi problema vitezei, respectiv determinarea vitezei unui punct mobil, fiind cunoscută legea de mişcare a acestuia. În cele ce urmează, vom formula aceste probleme în termeni matematici, cu ajutorul noţiunii de limită.

Problema tangentei

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul I, fie G_f graficul funcţiei f şi fie $A(a, f(a))$ un punct pe G_f. Dorim să determinăm ecuaţia tangentei în A la G_f.

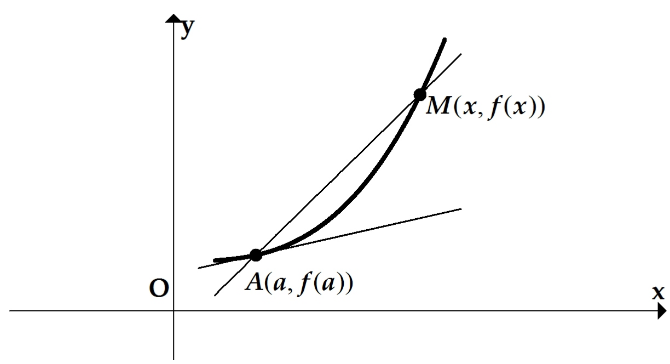


Figura 7.1: Tangenta în A la graficul funcţiei, respectiv secanta AM

Se poate observa că această tangentă poate intersecta G_f şi într-un alt punct decât A, iar dreptele care intersectează G_f doar în A nu sunt neapărat tangente la G_f. Nu putem deci defini această tangentă ca dreapta care are în comun cu G_f doar pe A, aşa cum s-a întâmplat pentru tangenta într-un punct la un cerc.

Fie $M(x, f(x))$ un alt punct pe G_f. Dreapta AM care intersectează G_f cel puţin în A şi M, se va numi dreaptă *secantă*; intuitiv, vom defini tangenta în A la G_f ca poziţia limită a secantei AM atunci când M tinde la A.

Cum panta dreptei AM este $m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (presupunem că AM nu este verticală, deci $x \neq a$), urmează că panta tangentei în A la G_f este $m_{\text{tg}} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. În aceste condiţii, ecuaţia tangentei în A la G_f este

$$y - f(a) = m_{\text{tg}}(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + m_{\text{tg}}(x - a),$$

rămânând a fi interpretate ulterior situaţiile în care m_{tg} (definită ca o limită) nu există, sau există, dar este infinită.

Problema vitezei

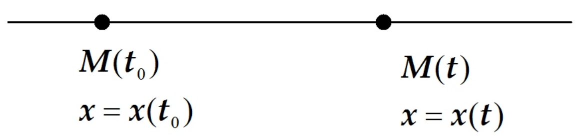


Figura 7.2: Poziţiile punctului M la momentele t_0, respectiv t

Considerăm un punct mobil M în mişcare rectilinie de-a lungul axei Ox, a cărui lege de mişcare este $x = x(t)$, unde t este timpul scurs de la momentul iniţial, iar x este abscisa punctului M.

Fie $[t_0, t]$ un interval de timp, $t > t_0$. În acest interval, M parcurge distanţa $x(t) - x(t_0)$, deci viteza sa medie (viteza pe care ar trebui s-o aibă M pentru a parcurge distanţa $x(t) - x(t_0)$ în timpul $t - t_0$, dacă s-ar mişca uniform) este $v_{[t_0,t]} = \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$. Totuşi, cu cât intervalul de timp $[t_0, t]$ este mai mare, cu atât această viteză oferă mai puţine informaţii despre viteza lui M la momentul t_0. Intuitiv, intervalul $[t_0, t]$ trebuie să fie cât mai mic, iar viteza instantanee a lui M la momentul t_0 este atunci $v(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$.

7.1 Funcţii derivabile. Funcţii diferenţiabile

Derivata unei funcţii într-un punct

Fie o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in D \cap D'$. Vom spune că f *are derivată* în x_0 dacă există limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, numită *derivata funcţiei f în punctul x_0* şi notată

$f'(x_0)$, în vreme ce dacă această limită există şi este finită vom spune că funcţia f este *derivabilă în* x_0.

Raportul $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se numeşte *raport incremental* şi măsoară viteza de variaţie a funcţiei pe intervalul $[x_0, x]$; prin analogie cu problema vitezei indicată mai sus, putem spune că $f'(x_0)$ reprezintă *viteza de variaţie instantanee a funcţiei f în punctul* x_0.

De asemenea, cu notaţia $x = x_0 + h$, obţinem că

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să studiem derivabilitatea funcţiei f în $x_0 = 2$. Observăm că

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} (x + 2) = 4, \end{aligned}$$

deci f este derivabilă în $x_0 = 2$, iar $f'(2) = 4$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Să studiem derivabilitatea funcţiei f în $x_0 = 0$. Observăm că

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

deci f nu este derivabilă în $x_0 = 0$, dar are derivată în acest punct, iar $f'(0) = +\infty$.

Cu ajutorul noţiunii de derivată într-un punct, putem studia rezolvarea problemelor menţionate anterior.

Ecuaţia tangentei într-un punct la graficul unei funcţii

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi fie $a \in D \cap D'$. Conform consideraţiilor de mai sus, obţinem următoarele

1. Dacă f este derivabilă în a, atunci ecuaţia tangentei în $A(a, f(a))$ la G_f este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

observându-se că panta tangentei în $A(a, f(a))$ este valoarea derivatei $f'(a)$.

2. Dacă $f'(a) = +\infty$, sau $f'(a) = -\infty$, atunci tangenta în $A(a, f(a))$ la G_f este verticală, având ecuaţia $x = a$.

Viteza unui punct material în mişcare

Fie un punct mobil M în mişcare rectilinie de-a lungul axei Ox, a cărui abscisă x este dată prin $x = x(t)$, unde t este timpul scurs de la momentul iniţial. Atunci viteza instantanee a lui M la momentul t este $v(t) = x'(t)$.

Derivate laterale

Substituind în definiţia derivatei noţiunea de limită cu noţiunea de limită laterală, obţinem noţiunea de *derivată laterală*.

Astfel, dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare la stânga pentru D, vom spune că $f : D \to \mathbb{R}$ *are derivată la stânga* în x_0 dacă există limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, numită *derivata la stânga a funcţiei f în punctul x_0* şi notată $f'_s(x_0)$, în vreme ce dacă această limită există şi este finită vom spune că funcţia f este *derivabilă la stânga în x_0*. Analog definim noţiunile de *derivată la dreapta*, respectiv *derivabilitate la dreapta*. Cu notaţia $x = x_0 + h$, obţinem că

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$
$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare atât la dreapta cât şi la stânga pentru D, atunci f are derivată în x_0 dacă şi numai dacă există ambele derivate laterale $f'_s(x_0)$ şi $f'_d(x_0)$, iar $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$. În aceste condiţii,

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Să studiem derivabilitatea funcţiei f în $x_0 = 0$. Observăm că

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1.$$

Cum $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, f nu are derivată în $x_0 = 0$, neputând fi deci derivabilă în acest punct.

Semitangente

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$ punct de acumulare la stânga al lui D. Dacă există $f'_s(a)$, spunem că G_f admite *semitangentă la stânga* în $A(a, f(a))$, înţelegând că există o dreaptă tangentă în A la partea din grafic aflată în stânga lui A. Ca mai sus, ecuaţia acestei semitangente este $y - f(a) = f'_s(a)(x - a)$, dacă $f'_s(a)$ este finită, respectiv $x = a$ dacă $f'_s(a) = +\infty$ sau $f'_s(a) = -\infty$. În mod analog se defineşte noţiunea de semitangentă la dreapta.

Puncte unghiulare, puncte de întoarcere

Fie acum $f : I \to \mathbb{R}$, I interval deschis, şi fie $a \in I$ un punct în care f este continuă.

Dacă $f'_s(a)$, $f'_d(a)$ există şi sunt infinite, dar diferite, semitangentele în A la G_f sunt în prelungire, spunându-se că $A(a, f(a))$ este un *punct de întoarcere*.

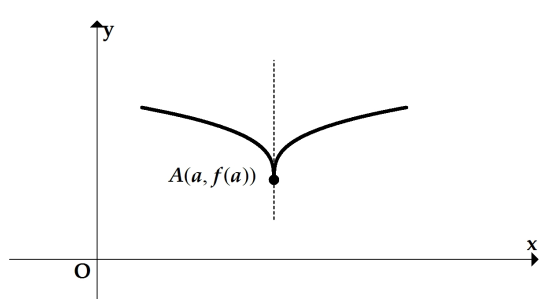


Figura 7.3: $A(a, f(a))$ punct de întoarcere, $f'_s(x_0) = -\infty$, $f'_d(x_0) = +\infty$

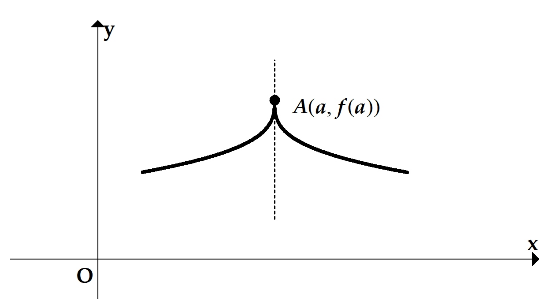


Figura 7.4: $A(a, f(a))$ punct de întoarcere, $f'_s(x_0) = +\infty$, $f'_d(x_0) = -\infty$

Dacă $f'_s(a)$, $f'_d(a)$ există, sunt diferite, şi măcar una dintre ele este finită, semitangentele în A la G_f nu sunt în prelungire, formând un unghi $\alpha \in (0, \pi)$. Se spune atunci că $A(a, f(a))$ este un *punct unghiular*.

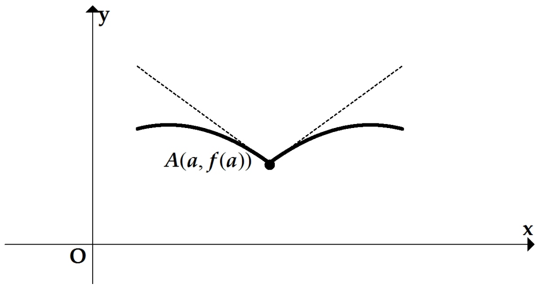


Figura 7.5: $A(a, f(a))$ punct unghiular, $f'_s(x_0)$, $f'_d(x_0)$ finite şi diferite

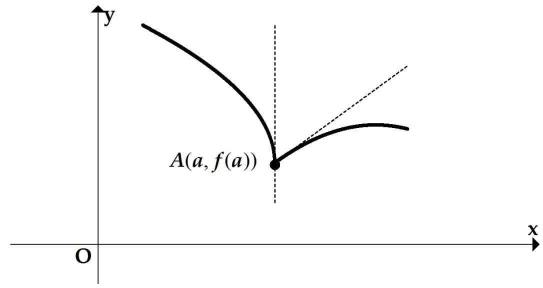


Figura 7.6: $A(a, f(a))$ punct unghiular, $f'_s(x_0) = -\infty$, $f'_d(x_0)$ finită

Din cele de mai sus, se observă că dacă $A(a, f(a))$ este un punct de întoarcere sau un punct unghiular, atunci f nu este derivabilă în a.

Funcţii derivabile pe o mulţime

Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă f este derivabilă în fiecare punct al unei mulţimi $A \subseteq D$, spunem că *f este derivabilă pe A*. Dacă f este derivabilă în orice punct al domeniului său de definiţie, atunci se spune simplu că *f este derivabilă*.

Legătura între derivabilitate şi continuitate

În cele ce urmează, vom demonstra că o funcţie derivabilă într-un punct este neapărat continuă în acel punct.

Teorema 7.1. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi fie $a \in D \cap D'$ astfel încât f este derivabilă în a. Atunci f este continuă în a.*

Demonstraţie. Deoarece

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a), \quad \text{pentru } x \neq a,$$

urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \right) \\ &= f(a) + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 \\ &= f(a), \end{aligned}$$

deci f este continuă în a. ■

În mod similar, se poate arăta că derivabilitatea la stânga (dreapta) a funcţiei f în a antrenează continuitatea la stânga (dreapta) a funcţiei în a.

7.1.1 Operaţii cu funcţii derivabile

Se poate observa că operaţiile uzuale cu funcţii derivabile au ca rezultat funcţii derivabile, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

Teorema 7.2. *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$, f, g derivabile în x_0. Atunci*

1. *$f+g$, $f-g$ sunt derivabile în x_0, iar*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(derivata sumei este egală cu suma derivatelor), respectiv

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

(derivata diferenţei este egală cu diferenţa derivatelor).

2. *αf este derivabilă în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar*

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

(constanta cu care se înmulţeşte trece înaintea derivatei).

3. *fg este derivabilă în x_0, iar*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4. *$\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 dacă $g(x_0) \neq 0$, iar*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Demonstraţie. Vom demonstra doar 4), celelalte formule obţinându-se asemănător. Se observă că

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
&= \frac{1}{g(x_0)^2} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x_0)^2} \left(\lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) \\
&= \frac{1}{g(x_0)^2} \left(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \right),
\end{aligned}
$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Se poate de asemenea demonstra prin inducţie matematică faptul că proprietăţile 1 şi 3 din Teorema 7.3 rămân valabile şi pentru mai mult de două funcţii. În speţă, are loc următorul rezultat.

Teorema 7.3. *Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D' \cap D$ astfel încât $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt derivabile în x_0. Atunci*

1. *Funcţia sumă $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ este derivabilă în x_0 şi*

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \ldots + f_n'(x_0).$$

2. *Funcţia produs $f_1 f_2 \ldots f_n$ este derivabilă în x_0 şi*

$$
\begin{aligned}
(f_1 f_2 \ldots f_n)'(x_0) &= f_1'(x_0) f_2(x_0) \cdots f_n(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0) \cdots f_n(x_0) \\
&\quad + \ldots + f_1(x_0) f_2(x_0) \cdots f_n'(x_0).
\end{aligned}
$$

7.1.2 Derivatele funcţiilor elementare

Vom calcula în cele ce urmeză derivatele unor funcţii uzuale.

Funcţia constantă

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0,$$

deci
$$\mathbf{c' = 0.}$$

Funcţia putere

Fie $n \in N^*$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1})}{h} = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

deci
$$\mathbf{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

Caz particular
$$\mathbf{(x)' = 1.}$$

Cu ajutorul unor raţionamente asemănătoare, se pot deduce formulele corespunzătoare de derivarea unor alte funcţii elementare, după cum urmează.

Funcţia radical

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\mathbf{(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x \neq 0,} \text{ dacă } n \text{ este impar,}$$
$$\mathbf{(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0,} \text{ dacă } n \text{ este par.}$$

Caz particular
$$\mathbf{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.}$$

Funcţia exponenţială cu bază e

$$\mathbf{(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Funcţia exponenţială cu bază oarecare

Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Atunci

$$\mathbf{(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Funcţia sinus

$$\mathbf{(\sin x)' = \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Funcţia cosinus

$$\mathbf{(\cos x)' = -\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Funcţia logaritmică cu bază e

$$\mathbf{(\ln x)' = \frac{1}{x}\,, \quad x > 0.}$$

Funcţia logaritmică cu bază oarecare

Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Atunci

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}\,,\ x > 0$$

deci

$$\mathbf{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\,, \quad x > 0.}$$

Funcţia tangentă

Fie $f : \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Atunci

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

deci

$$\mathbf{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \quad x \neq k\boldsymbol{\pi} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{2},\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Funcţia cotangentă

$$\mathbf{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,, \quad x \neq k\boldsymbol{\pi},\ k \in \mathbb{Z}.}$$

7.1.3 Derivata funcţiei compuse

Teorema 7.4. *Fie I_1, I_2 două intervale din $\mathbb{R}$, $u : I_1 \to I_2$, $f : I_2 \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in I$ astfel încât u este derivabilă în x_0, iar f este derivabilă în $u(x_0)$. Atunci $f \circ u$ este derivabilă în x_0, iar*

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0))u'(x_0)$$

Egalitatea menţionată în enunţul teoremei de mai sus se mai poate pune şi sub forma prescurtată

$$\mathbf{(f(u))' = f'(u) \cdot u',}$$

fiind deosebit de utilă pentru calculul derivatelor unor funcţii care, fără a fi elementare, se pot obţine prin compunerea unor funcţii elementare. În aceste situaţii, u se defineşte adesea cu ajutorul **tuturor** termenilor dintr-o paranteză, de la exponent, de sub radical, de la numitor, ş.a.m.d.. După această înlocuire se identifică apoi f, ţinând cont că funcţia de plecare se scrie ca $f(u)$.

Exemple. 1. $(\sin(x^2 + x + 2))'$.

Putem defini $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + x + 2$ (folosim toţi termenii din paranteză), iar în acest caz f este dată de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, deoarece după înlocuire $f(u) = \sin u$. Atunci

$$\begin{aligned}(\sin(x^2 + x + 2))' &= \sin'(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1).\end{aligned}$$

Echivalent,

$$\begin{aligned}(\sin(x^2 + x + 2))' &= (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1).\end{aligned}$$

2. $((3x + 2)^5)'$

Putem defini $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = 3x + 2$ (folosim toţi termenii din paranteză), iar în acest caz f este dată de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$, deoarece după înlocuire $f(u) = u^5$. Atunci

$$((3x + 2)^5)' = (u^5)' = 5u^4 \cdot u' = 5(3x + 2)^4(3x + 2)' = 15(3x + 2)^4.$$

3. $(\sqrt{x^2+1})'$

Putem defini $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 1$ (folosim toţi termenii de sub radical), iar în acest caz f este dată de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, deoarece după înlocuire $f(u) = \sqrt{u}$. Atunci

$$(\sqrt{x^2+1})' = \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' = \frac{x}{x^2+1}.$$

7.1.4 $(\mathbf{f^g})'$

Formula de derivare a funcţiei compuse se poate aplica cu succes şi pentru derivarea funcţiilor exponenţiale în care atât baza cât şi exponentul conţin variabila. În acest sens, fie I un interval şi fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, unde $f(x) > 0$ pentru orice $x \in D$. Putem defini atunci funcţia $f^g : D \to \mathbb{R}$, $f^g(x) = (f(x))^{g(x)}$.

Deoarece $f(x)^{g(x)} > 0$ pentru orice $x \in D$, au loc relaţiile

$$f^g = e^{\ln\left(f^g\right)} = e^{g \ln f},$$

de unde, ţinând seama că $(e^u)' = e^u \cdot u'$, obţinem că

$$\begin{aligned}\left(f^g\right)' &= \left(e^{g \ln f}\right)' = e^{g \ln f} \cdot \left(g \ln f\right)' = e^{g \ln f}\left(g' \ln f + g\left(\ln f\right)'\right) \\ &= f^g\left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right),\end{aligned}$$

formulă care se poate scrie şi sub forma

$$\boldsymbol{\left(f^g\right)' = f^g \ln f \cdot g' + g f^{g-1} \cdot f'.}$$

Se poate observa că $\left(f^g\right)'$ este suma a doi termeni, primul reprezentând valoarea derivatei atunci când f este privită ca o constantă (iar f^g reprezintă în consecinţă o funcţie exponenţială), iar al doilea reprezentând valoarea derivatei atunci când g este privită ca o constantă (iar f^g reprezintă în consecinţă o funcţie putere).

7.1.5 Derivata unui determinant funcţional

Fie $f_{ij} : D \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, funcţii derivabile pe D. Atunci determinantul funcţional definit cu ajutorul acestor funcţii,

$$F : D \to \mathbb{R}, \quad F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

este la rândul său o funcţie derivabilă pe D şi

$$
\begin{aligned}
F' = &\begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \dots & f'_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \dots & f'_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \dots & f'_{nn} \end{vmatrix}, \\
&= \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n,
\end{aligned}
$$

în determinantul Δ_i din membrul drept, $1 \leq i \leq n$, fiind derivate doar funcţiile de pe linia i. Demonstraţia se poate realiza cu ajutorul formulei de dezvoltare a unui determinant.

Exerciţiu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Conform formulei de mai sus,

$$
\begin{aligned}
f'(x) = &\left(\begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \right)' \\
= &\begin{vmatrix} \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ -\sin(x+a) & -\sin(x+b) & -\sin(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}
$$

deoarece atât determinanţii în care două linii sunt proporţionale cât şi determinanţii în care toate elementele de pe o linie sunt egale cu 0 sunt nuli.

7.1.6 Derivata funcţiei inverse

Fie I, J intervale din $\mathbb{R}$ şi fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Atunci f este inversabilă, având loc relaţiile

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

respectiv
$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{pentru orice } y \in J,$$
iar f^{-1} este de asemenea continuă.

Ne propunem să determinăm transmiterea derivabilităţii de la f la f^{-1}. Derivând (formal, pentru moment) relaţia $f^{-1}(f(x)) = x$ cu ajutorul formulei de derivare a funcţiei compuse, obţinem că $\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x) = 1$, deci
$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$
Rămâne acum sa dăm acestei formule un sens mai riguros.

Teorema 7.5. *Fie I, J intervale din $\mathbb{R}$ şi fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă f este derivabilă în x_0, iar $f'(x_0) \neq 0$, atunci $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$, iar*
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exerciţiu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$. Demonstraţi că f este bijectivă şi calculaţi $(f^{-1})'(3)$.

Soluţie. Mai întâi, să observăm faptul că f este continuă şi strict crescătoare, fiind suma a două funcţii continue şi strict crescătoare. Fiind strict monotonă, f este injectivă. Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, iar f transformă un interval într-un interval, fiind continuă, urmează că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă. Cum f este atât injectivă cât şi surjectivă, urmează că ea este bijectivă, deci şi inversabilă.

Deoarece $f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, urmează că f^{-1} este derivabilă în orice $y = f(x) \in \mathbb{R}$, iar $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Pentru $y = 3$, urmează că $x^3 + 2x = 3$, deci $x = 1$ (cum f este injectivă, soluţia ecuaţiei $f(x) = 3$ este unică). Urmează că $\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$.

7.1.7 Diferenţiala unei funcţii

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval, şi fie $x \in I$. Să presupunem că f este derivabilă în x_0. În acest caz, conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, se obţine că

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$$

Să considerăm atunci funcţia $\alpha : I \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\alpha(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0), & x\neq x_0\\ 0, & x=x_0\end{cases}$$

şi să observăm că

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\alpha(x_0)=0,$$

deci α este continuă în x_0. În plus, pentru $x\neq x_0$, avem că

$$\begin{aligned}&f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\alpha(x)(x-x_0)\\ &\quad=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)(x-x_0)\\ &\quad=0,\end{aligned}$$

această egalitate fiind valabilă şi pentru $x=x_0$. Aceste consideraţii motivează introducerea definiţiei următoare.

Funcţii diferenţiabile într-un punct

Vom spune că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este *diferenţiabilă* în $x_0 \in I$ dacă există numărul $A\in\mathbb{R}$ şi funcţia $\alpha : I\to\mathbb{R}$, continuă şi nulă în x_0, astfel ca

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0).$$

Conform celor de mai sus, dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este diferenţiabilă în x_0, iar $A=f'(x_0)$. Reciproc, să presupunem că f este diferenţiabilă în x_0. Atunci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(A+\alpha(x))=A,$$

deci f este derivabilă în x_0, iar $f'(x_0)=A$. Se obţine de aici următorul rezultat.

Teorema 7.6. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Atunci f este derivabilă în $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă este diferenţiabilă în $x_0 \in I$.*

Conform celor de mai sus, o funcţie derivabilă într-un punct x_0 admite în acel punct următoarea dezvoltare de ordinul întâi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \text{ cu } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

(de fapt, vom vedea ulterior că această dezvoltare reprezintă formula lui Taylor de ordinul întâi asociată funcţiei f în punctul x_0). Cum $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, termenul $\alpha(x)(x - x_0)$ este de ordin mai mic decat $f'(x_0)(x - x_0)$ pentru x apropiat de x_0. Ignorînd acest termen, obţinem următoarea formulă de aproximare

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0,$$

exprimabilă şi sub forma

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x - x_0 \approx 0,$$

sau, cu notaţia $x - x_0 = h$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h, \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în care diferenţa $f(x_0 + h) - f(x_0)$ reprezintă variaţia funcţiei atunci când argumentul variază de la x_0 la $x_0 + h$. Suntem atunci conduşi de considerentele de aproximare de mai sus la a defini următorul concept de diferenţială a unei funcţii.

Diferenţiala unei funcţii într-un punct

Fiind dată o funcţie $f : I \to R$ derivabilă în $x_0 \in I$, vom numi *diferenţială a funcţiei f în x_0* funcţia liniară $df(x_0)$ definită prin

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Urmează atunci că

$$f(x) - f(x_0) \approx df(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în loc de $df(x_0)(h)$ folosindu-se şi notaţia $df(x_0; h)$.

Pentru funcţia identică $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, urmează că

$$dx(x_0)(h) = h, \quad \text{pentru orice } x_0 \in \mathbb{R},$$

iar întrucât $dx(x_0)$ este independent de x_0, se va folosi în cele ce urmează notaţia simplificată dx. Cu notaţiile de mai sus,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)dx(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R},$$

de unde obţinem următoarea egalitate de funcţii liniare

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

care conduce la următoarea notaţie diferenţială alternativă a derivatei unei funcţii într-un punct

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Pentru un punct arbitrar x, obţinem deci

$$df(x) = f'(x)dx, \quad \text{respectiv} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \tag{7.1}$$

7.1.8 Operaţii cu funcţii diferenţiabile

Datorită relaţiei (7.1), regulile de calcul ale derivatelor unor funcţii se transmit şi la diferenţiale.

Teorema 7.7. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$, f, g derivabile în x. Atunci*

1. *$f + g$, $f - g$ sunt diferenţiabile în x, iar*

$$d(f+g)(x) = (f+g)'(x)dx = df(x) + dg(x),$$

respectiv

$$d(f-g)(x) = (f-g)'(x)dx = df(x) - dg(x).$$

2. *αf este diferenţiabilă în x pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar*

$$d(\alpha f)'(x) = (\alpha f)'(x)dx = \alpha df(x).$$

3. *fg este diferenţiabilă în x_0, iar*

$$d(fg)(x) = (fg)'(x)dx = df(x)g(x) + f(x)dg(x).$$

4. *$\frac{f}{g}$ este diferenţiabilă în x dacă $g(x) \neq 0$, iar*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)dx = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g(x)^2}$$

Regulile de calcul de mai sus se mai pot scrie şi sub următoarele forme prescurtate, prin omiterea punctului curent

$$\mathbf{d(f+g) = df + dg, \quad d(f-g) = df - dg, \quad d(\alpha f) = \alpha df,}$$
$$\mathbf{d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}.}$$

Exemple. 1. $d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x dx$.

2. $d(\cos^3 x) = (\cos^3 x)'dx = 3\cos^2 x(\cos x)'dx = -3\cos^2 x \sin x dx$

3. $d(x^2e^x) = (x^2e^x)'dx = (2xe^x + x^2e^x)dx$.

4. $d(x^2e^x) = d(x^2) \cdot e^x + x^2 \cdot d(e^x) = 2xe^x dx + x^2e^x dx = (2x + x^2)e^x dx$.

7.1.9 Diferenţiala funcţiei compuse

Are de asemenea loc şi o formulă de diferenţiere a funcţiei compuse similară celei de derivare.

Teorema 7.8. *Fie I_1, I_2 două intervale din $\mathbb{R}$, $u : I_1 \to I_2$, $f : I_2 \to \mathbb{R}$ şi fie $x \in I_1$ astfel încât u este diferenţiabilă în x, iar f este diferenţiabilă în $u(x)$. Atunci $f \circ u$ este diferenţiabilă în x, iar*

$$d(f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x)dx = f'(u(x))du(x).$$

Prin omiterea punctului curent, regula de mai sus se poate scrie sub următoarea formă prescurtată

$$\mathbf{d(f \circ u) = f'(u)du.}$$

De remarcat faptul că diferenţiala funcţiei compuse se calculează ca şi cum u ar fi variabilă independentă.

Exemple. 1. $d(\cos^3 x) = d(u^3) = 3u^2 du = 3\cos^2 x d(\cos x) = -3\cos^2 x \sin x dx$.

2. $d(e^{\sin x}) = d(e^u) = e^u du = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \cos x dx$.

7.2 Derivate şi diferenţiale de ordin superior

7.2.1 Derivate de ordin superior

Fie I un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe o vecinătate a lui $x_0 \in I$. Dacă f' este la rândul său derivabilă în x_0, vom spune că f este *de două ori derivabilă în* x_0 iar derivata lui f' în x_0 se va numi *derivata a doua a lui* f sau *derivata de ordinul al doilea a lui* f, fiind notată $f''(x_0)$ sau $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$. Conform definiţiei,

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă f este de două ori derivabilă în orice $x \in I$, atunci f se numeşte *de două ori derivabilă pe* I.

În mod inductiv, dacă f este derivabilă de $n-1$ ori pe o vecinătate a lui x_0, iar derivata de ordinul $n-1$ este la rândul său derivabilă în x_0, vom spune că f este de n ori derivabilă în x_0. Derivata de ordinul n a lui f în x_0, notată prin $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$, este definită ca derivată a derivatei de ordinul $n-1$, în sensul că

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Similar, dacă f este de n ori derivabilă în orice $x \in I$, atunci f se numeşte *de n ori derivabilă pe* I.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2+3x}$. Atunci

$$f'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x},$$
$$f''(x) = \left((2x+3)e^{x^2+3x}\right)' = (4x^2+12x+11)e^{x^2+3x}$$

$$f'''(x) = \left((4x^2 + 12x + 11)e^{x^2+3x}\right)' = (8x^3 + 36x^2 + 66x + 45)e^{x^2+3x}.$$

Funcţii de clasă C^k. Difeomorfisme

Vom nota

$$C^n(I) = \left\{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ de } n \text{ ori derivabilă pe } I, f^{(n)} \text{ continuă pe } I\right\}$$
$$C^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ derivabilă de orice ordin pe } I\}.$$

Dacă $f \in C^n(I)$ (respectiv $f \in C^\infty(I)$), atunci f se va numi *de clasă C^n pe I* (respectiv *de clasă C^∞ pe I*, sau *indefinit derivabilă pe I*). Dacă $f : I \to J$, f inversabilă este în aşa fel încât atât f cât şi f^{-1} sunt derivabile pe domeniile lor (respectiv sunt de clasă C^n pe domeniile lor), f se va numi *difeomorfism* (respectiv *C^n-difeomorfism* sau *difeomorfism de clasă C^n*) pe I.

Exemple. 1. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ (funcţia polinomială de gradul al doilea) este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$, $f^{(m)}(x) = 0$ pentru $m \geq 3$.

2. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n-1$, $a_n \in \mathbb{R}^*$ (funcţia polinomială de gradul n) este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f^{(n)}(x) = n!a_n$, $f^{(m)}(x) = 0$ pentru $m > n$.

3. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, putându-se demonstra prin inducţie că $f^{(n)}(x) = e^x$ pentru $x \in \mathbb{R}$ şi $n \geq 1$.

4. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducţie că

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ şi } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\sin^{(4k)}(x) = \sin x, \quad \sin^{(4k+1)}(x) = \cos x$$
$$\sin^{(4k+2)}(x) = -\sin x, \quad \sin^{(4k+3)}(x) = -\cos x$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ şi $k \geq 0$.

5. Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\cos x = \cos(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducţie că

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ şi } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\cos^{(4k)}(x) = \cos x, \quad \cos^{(4k+1)}(x) = -\sin x$$
$$\cos^{(4k+2)}(x) = -\cos x, \quad \cos^{(4k+3)}(x) = \sin x$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ şi $k \geq 0$.

6. Funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f(x) = \frac{1}{x+a}$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$, iar $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(x+a)^3}$, putându-se demonstra prin inducţie că

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\} \text{ şi } n \geq 1.$$

7.2.2 Formula lui Leibniz

Fiind date $f, g : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I, ne propunem să determinăm o formulă pentru derivata de ordinul n a produsului fg al acestora.

Teorema 7.9. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I, $n \in N^*$. Atunci fg este de clasă C^n pe I, iar*

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \ldots + C_n^n f g^{(n)}.$$

Formula de calcul a derivatei de ordinul n a unui produs demonstrată mai sus poartă numele de *formula lui Leibniz*. Remarcăm asemănarea între această formulă şi formula binomială

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n.$$

În aplicaţii, formula se utilizează în special pentru funcţii produs în care unul dintre factori este o funcţie polinomială (şi deci pentru care derivatele de la un anumit ordin încolo sunt nule, micşorând numărul termenilor nenuli din sumă), iar celălalt factor are derivatele de ordin superior uşor de determinat.

Exerciţiu. Determinaţi $(x^2e^{2x})^{(50)}$.

Soluţie. Considerând $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = e^{2x}$, observăm că $f^{(k)}(x) = 0$ pentru orice $k \geq 3$, iar $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ pentru orice $k \geq 0$. Atunci

$$\begin{aligned}(x^2e^{2x})^{(50)} &= C_{50}^{48}(x^2)''(e^{2x})^{(48)} + C_{50}^{49}(x^2)'(e^{2x})^{(49)} + C_{50}^{50}x^2(e^{2x})^{(50)}\\ &= C_{50}^{48}2 \cdot 2^{48}e^{2x} + C_{50}^{49}2x \cdot 2^{49}e^{2x} + C_{50}^{50}x^2 \cdot 2^{50}e^{2x}\\ &= 2^{49}e^{2x}(1225 + 100x + 2x^2).\end{aligned}$$

7.2.3 Diferenţiale de ordin superior

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in I$. Vom spune că f este *de două ori diferenţiabilă în* x_0 dacă f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0, iar f' este diferenţiabilă în x_0. În aceste condiţii, vom numi *diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei* f *în* x_0, notată $d^2f(x_0)$, funcţia de gradul al doilea definită prin

$$d^2f(x_0)(h) = f''(x_0)h^2, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obţinem atunci următoarea egalitate de funcţii de gradul al doilea

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)dx^2,$$

care conduce la următoarea notaţie diferenţială alternativă a derivatei de ordinul al doilea a unei funcţii într-un punct

$$f''(x_0) = \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}.$$

Aici, prin dx^2 se va înţelege $dx \cdot dx$. Inductiv, vom spune că f este *de n ori diferenţiabilă în* x_0 dacă f este derivabilă de $n-1$ ori într-o vecinătate a lui x_0, iar $f^{(n-1)}$ este diferenţiabilă în x_0. În aceste condiţii, vom numi *diferenţiala de ordinul n a funcţiei* f *în* x_0, notată $d^nf(x_0)$, funcţia de gradul n definită prin

$$d^nf(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)h^n, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obţinem atunci următoarea egalitate de funcţii de gradul n

$$d^nf(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n,$$

care conduce la următoarea notaţie diferenţială alternativă a derivatei de ordinul n a unei funcţii într-un punct

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}.$$

Pentru un punct arbitrar x, obţinem deci

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n, \quad \text{respectiv} \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Exemple. 1. $d^n(e^{ax}) = (e^{ax})^{(n)} dx^n = a^n e^{ax} dx^n$, pentru $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

2. $d^n(\ln(ax+b)) = (\ln(ax+b))^{(n)} dx^n = \frac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n} dx^n$, pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $ax + b > 0$.

7.3 Teoremele fundamentale ale calculului diferenţial

În această secţiune vom prezenta câteva proprietăţi importante ale funcţiilor derivabile şi unele aplicaţii ale acestora în studiul monotoniei şi aproximării funcţiilor. Începem prin a defini noţiunea de punct de extrem.

Puncte de minim local. Valori minime locale

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. Vom spune că $x_0 \in I$ este un *punct de minim local* dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$, adică valoarea $f(x_0)$ a lui f în x_0 este cea mai mică valoare a acestei funcţii pe o vecinătate a lui x_0. În aceste condiţii $f(x_0)$ se numeşte *valoare minimă locală*.

Puncte de maxim local. Valori maxime locale

Similar, vom spune că $x_0 \in I$ este un *punct de maxim local* dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$, adică valoarea $f(x_0)$ a lui f în x_0 este cea mai mare valoare a acestei funcţii pe o vecinătate a lui x_0. În aceste condiţii $f(x_0)$ se numeşte *valoare maximă locală*.

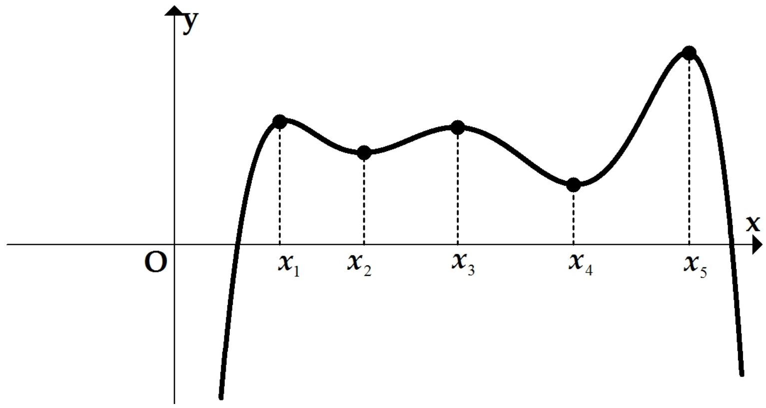


Figura 7.7: x_2, x_4 puncte de minim local, x_1, x_3, x_5 puncte de maxim local

Puncte de extrem local. Valori extreme locale

Dacă x_0 este un punct de minim sau maxim local al funcţiei f, se spune atunci că x_0 este un *punct de extrem local* al funcţiei f, valorile funcţiei f în punctele de extrem local numindu-se *valori extreme locale* ale funcţiei f. De asemenea, dacă x_0 este un punct de minim (maxim) local al funcţiei f, punctul corespunzător $(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcţiei f se numeşte *punct de minim (maxim) local al graficului*.

Puncte de extrem global. Valori extreme globale

Dacă x_0 este în aşa fel încât $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in I$, vom spune că x_0 este *punct de minim global* al lui f, iar dacă $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in I$, vom spune că x_0 este *punct de maxim global* al lui f. Dacă x_0 este un punct de minim sau maxim global al funcţiei f, se spune atunci că x_0 este un *punct de extrem global* al funcţiei f, valorile funcţiei f în punctele de extrem local numindu-se *valori extreme globale* ale funcţiei f. De asemenea, dacă x_0 este un punct de minim (maxim) global al funcţiei f, punctul corespunzător $(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcţiei f se numeşte *punct de minim (maxim) global al graficului*.

Se observă că orice punct de extrem global este şi punct de extrem local, nu însă şi reciproc. De exemplu 2 este punct de minim local al funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)^2$, deoarece $f(2) = 0$, iar pe o vecinătate suficient de mică a sa f ia doar valori pozitive, dar nu este punct de minim global, deoarece f ia şi valori negative (de exemplu, $f(0) = -4$).

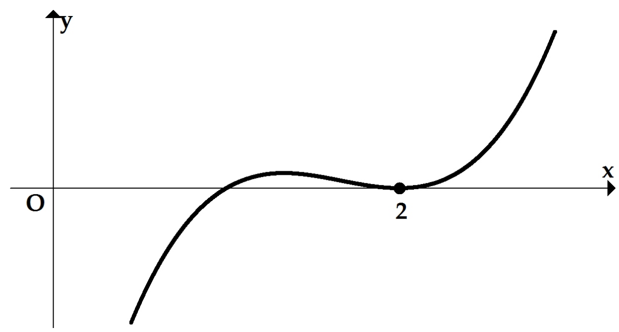


Figura 7.8: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)^2$

Se poate observa că o funcţie f poate admite mai multe puncte de minim sau maxim local, putând exista deasemenea valori minime locale mai mari decât valori maxime locale.

Exemple. 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ are 0 ca punct de minim global, deoarece $f(0) = 0$, iar $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie, 0 este şi punct de minim local. Se observă de asemenea că $f'(0) = 0$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)^2$ are 1 ca punct de maxim local, deoarece $f(1) = 0$, iar $f(x) \leq 0$ pentru x apropiat de 1 şi pe 3 ca punct de minim local, deoarece $f(3) = 0$, iar $f(x) \geq 0$ pentru x apropiat de 3. Totuşi, acestea nu sunt puncte de extrem global, deoarece f ia atât valori strict negative (de exemplu $f(0) = -18$), cât şi valori strict pozitive (de exemplu $f(4) = 18$).

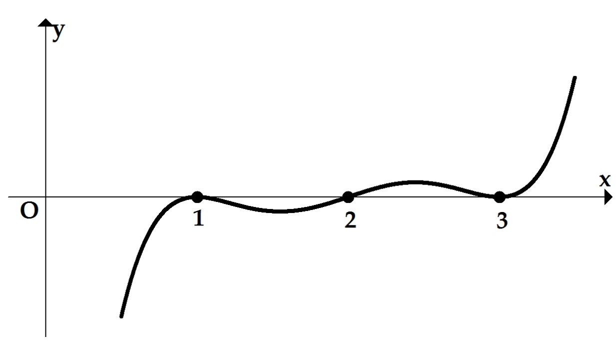


Figura 7.9: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)^2$

7.3.1 Teorema lui Fermat

Vom preciza în cele ce urmează un principiu de localizare a punctelor de extrem ale unei funcţii date, cunoscut sub numele de *teorema lui Fermat*

Teorema 7.10. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie x_0 un punct de extrem interior lui I în care f este derivabilă. Atunci $f'(x_0) = 0$.*

Se poate observa că dacă x_0 este un punct de extrem care nu este interior intervalului I, atunci $f'(x_0)$ poate să nu fie 0. În acest sens, fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Atunci 0 şi 1 sunt puncte de minim global, respectiv de maxim global, deoarece f este strict crescătoare pe $[0,1]$, deci sunt şi puncte de extrem local. Totuşi, $f'(x) = 1 \neq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$.

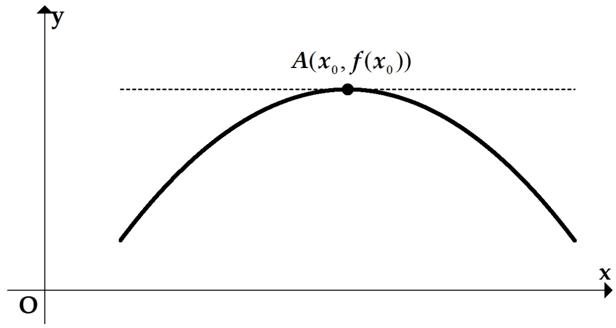
De asemenea, reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată, în sensul că dacă $f'(x_0) = 0$, atunci x_0 nu este neapărat punct de extrem, chiar dacă este interior intervalului I. În acest sens, fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Atunci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 3x^2$, pentru $x \in \mathbb{R}$, deci $f'(0) = 0$. Totuşi, 0 nu este punct de extrem, deoarece $f(0) = 0$, iar f ia în orice vecinătate a lui 0 atât valori strict negative (pentru $x < 0$), cât şi valori strict pozitive (pentru $x > 0$).

În fine, să observăm şi că o funcţie poate avea puncte de extrem în care nu este derivabilă. În acest sens, fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Atunci $0 = f(0) \leq f(x)$ pentru $x \in \mathbb{R}$, deci 0 este punct de minim global, dar $f'_s(0) = -1 \neq f'_d(0) = 1$, deci f nu este derivabilă în 0.

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Fermat.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ şi x_0 este un punct de extrem interior lui I în care f este derivabilă, atunci tangenta la grafic în punctul de extrem corespunzător $A(x_0, f(x_0))$ al graficului, de pantă $f'(x_0) = 0$, este paralelă cu Ox.



Puncte critice

Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Vom spune că x_0 este un *punct critic* al lui f dacă f este derivabilă în x_0, iar $f'(x_0) = 0$.

Altfel spus, punctele critice ale lui f sunt rădăcinile lui f'. Cu această precizare, teorema lui Fermat arată că punctele de extrem ale unei funcţii situate în interiorul domeniului de definiţie şi în care acea funcţie este derivabilă se găsesc printre punctele critice. Totuşi, s-a observat anterior că nu orice punct critic este punct de extrem.

Cu ajutorul teoremei lui Fermat, se poate demonstra şi următorul rezultat.

Teorema 7.11. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, f derivabilă pe I. Atunci f' are proprietatea lui Darboux pe I.*

7.3.2 Teorema lui Rolle

Funcţie Rolle pe un interval

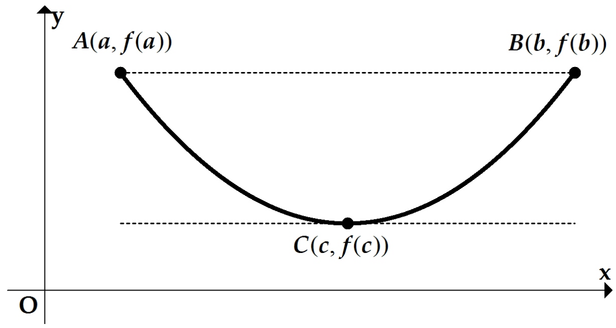
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este *funcţie Rolle* pe $[a, b]$ dacă f este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b). Următorul rezultat poartă numele de *teorema lui Rolle*.

Teorema 7.12. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f funcţie Rolle pe $[a, b]$, pentru care $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.*

Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Rolle.

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie Rolle pe $[a, b]$ pentru care $f(a) = f(b)$, atunci există pe graficul funcţiei f un punct $C(c, f(c))$ în care tangenta la grafic este paralelă cu Ox.



Teorema lui Rolle admite două consecinţe importante privind localizarea unor rădăcini ale derivatei, respectiv ale funcţiei.

Corolar 7.12.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, f derivabilă pe I. Între două rădăcini ale lui f se află cel puţin o rădăcină a lui f'.*

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, astfel că $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Atunci f este funcţie Rolle pe $[x_1, x_2]$ şi aplicând teorema lui Rolle pe acest interval obţinem că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f'(c) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Corolar 7.12.2. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, f derivabilă pe I. Între două rădăcini consecutive ale lui f' se află cel mult o rădăcină a lui f.*

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ rădăcini consecutive ale lui f'. Presupunem prin reducere la absurd că există două rădăcini a, b ale lui f, $a < b$, situate între x_1 şi x_2, deci $x_1 < a < b < x_2$. Conform Corolarului 7.12.1, există cel puţin încă o rădăcină x_3 a lui f' situată între a şi b, ceea ce înseamnă că x_1, x_2 nu sunt rădăcini consecutive, contradicţie. ■

Cu ajutorul acestor corolarii se va preciza un algoritm de determinare a numărului rădăcinilor unei ecuaţii situate într-un interval dat.

Şirul lui Rolle

Fiind dată funcţia derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, dorim să determinăm numărul rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = 0$. În acest scop, procedăm în următoarele etape.

1. Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ şi determinăm rădăcinile $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ale lui f'.

2. Determinăm $f(c_1)$, $f(c_2)$, …, $f(c_n)$ şi limitele l_1 şi l_2 în capătul inferior, respectiv superior al lui I.

3. Construim şirul $R_0 = \operatorname{sgn}(l_1)$, $R_1 = \operatorname{sgn} f(c_1)$, $R_2 = \operatorname{sgn} f(c_2)$, …, $R_n = \operatorname{sgn} f(c_n)$, $R_{n+1} = \operatorname{sgn} f(l_2)$, numit *şirul lui Rolle*, cu convenţia că $\operatorname{sgn}(+\infty) = 1$, $\operatorname{sgn}(-\infty) = -1$, întrucât limitele l_1 şi l_2 pot fi şi infinite. De asemenea, în acest şir se pot trece $+$ şi $-$ în loc de $+1$ şi respectiv -1. Dacă doi termeni consecutivi R_i şi R_{i+1} sunt identici, atunci între abscisele care le corespund nu se află nicio rădăcină a lui f. Dacă R_i şi R_{i+1} sunt diferiţi, dar nenuli, atunci între abscisele care le corespund se află exact o rădăcină a lui f. În fine, dacă un termen R_i este nul, aceasta înseamnă că abscisa care-i corespunde este rădăcină de ordinul cel puţin 2 a lui f, pentru determinarea exactă a ordinului de multiplicitate fiind necesară determinarea valorilor derivatelor de ordin superior în acest punct.

Exerciţiu. Determinaţi numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $2x^3 - 12x^2 + 18x + 3 = 0$.

Soluţie. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 2$. Atunci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 24x + 18 = 0$, de unde $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, iar $f(x_1) = 11$, $f(x_2) = 3$. Cum $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, urmează că şirul lui Rolle este $- + + +$, schimbarea de semn petrecându-se între R_0 (corespunzător lui $x = -\infty$) şi R_1 (corespunzător lui $x_1 = 1$). Atunci ecuaţia dată are o singură rădăcină reală, situată în intervalul $(-\infty, 1)$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$

Exerciţiu. Determinaţi numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $x^2 - 2\ln x + m = 0$ în funcţie de valorile parametrului real m.

Soluţie. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\ln x + m$. Atunci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2}{x} = 0$, de unde $x_1 = 1$ (rădăcina $x_2 = -1$ nu convine, întrucât nu aparţine domeniului de definiţie al logaritmului natural), iar $f(x_1) = 1 + m$. De asemenea, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$1+m$	$+$

Dacă $m < -1$, şirul lui Rolle este $+ - +$, schimbările de semn petrecându-se între R_0 (corespunzător lui $x = 0$) şi R_1 (corespunzător lui $x_1 = 1$), respectiv între R_1 (corespunzător lui $x_1 = 1$) şi R_2 (corespunzător lui $x = +\infty$). Atunci ecuaţia dată are două rădăcini reale, situată în intervalele $(0, 1)$ şi respectiv $(1, \infty)$.

Dacă $m = 1$, şirul lui Rolle este $+\ 0\ +$, $x_1 = 1$ fiind rădăcină de ordinul cel puţin 2. Cum $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$, urmează că $f''(1) \neq 0$, iar $x_1 = 1$ este rădăcină dublă a ecuaţiei date, aceasta neavând alte rădăcini reale.

Dacă $m > -1$, şirul lui Rolle este $+ + +$, fără schimbări de semn. Urmează că ecuaţia dată nu are rădăcini reale.

7.3.3 Teorema lui Lagrange

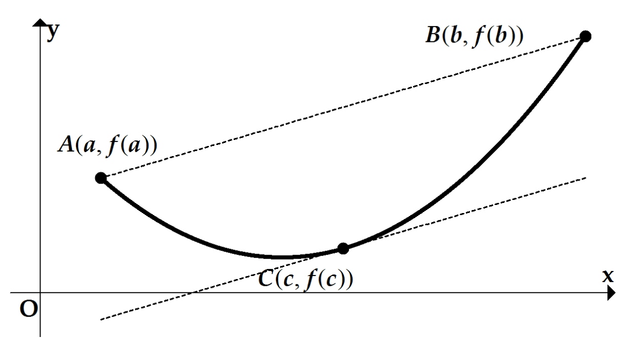
Teorema lui Rolle este un caz particular al următorului rezultat, numit *teorema lui Lagrange* sau *teorema creşterilor finite*.

Teorema 7.13. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f funcţie Rolle pe $[a, b]$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Lagrange.

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie Rolle pe $[a, b]$, atunci există pe graficul funcţiei f un punct $C(c, f(c))$ în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda AB, unde $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ sunt capetele graficului lui f.



Teorema lui Lagrange are consecinţe importante în studiul monotoniei funcţiilor, enunţate în următorul rezultat.

Corolar 7.13.1. *1. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I, iar derivata sa este identic nulă pe I, atunci f este constantă pe I.*

2. Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$, I interval, sunt derivabile pe I, iar derivatele lor sunt egale pe I, atunci f şi g diferă printr-o constantă pe I.

3. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I, iar derivata sa este pozitivă (respectiv strict pozitivă) pe I, atunci f este crescătoare (respectiv strict crescătoare) pe I. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I, iar derivata sa este negativă (respectiv strict negativă) pe I, atunci f este descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe I.

Exemplu. Prima parte a Corolarului 7.13.1 se poate folosi pentru demonstrarea unor identităţi. În acest sens, să demonstrăm că

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{pentru } x \in (-1, 1).$$

Fie $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$. Atunci f este derivabilă pe $(-1, 1)$, iar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2} \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

de unde f este constantă pe $(-1, 1)$. Pentru a determina valoarea acestei constante, dăm lui x o valoare din intervalul $(-1, 1)$, de exemplu $x = 0$. Cum

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

urmează concluzia.

Exemplu. Cea de-a treia parte a Corolarului 7.13.1 este instrumentală în demonstrarea multor inegalităţi. În acest sens, să demonstrăm că

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. Urmează că f este derivabilă pe $(0,\infty)$, iar

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0, \quad \text{pentru } x > 0,$$

deci f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. Cum f este şi continuă în $x = 0$, urmează că $f(x) > f(0) = 0$ pentru $x > 0$, de unde rezultă prima parte a inegalităţii, cea de-a două parte demonstrându-se analog.

Exerciţiu. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ pe un interval $[a, b]$, $0 < a < b$, demonstraţi că

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}.$$

Soluţie. Cum f este funcţie Rolle pe $[a, b]$, urmează conform teoremei lui Lagrange că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, deci $\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$, sau $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a)$. Cum $c \in (a, b)$, iar $a, b > 0$, urmează că $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, de unde concluzia.

Existenţa derivatelor laterale într-un punct

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange se poate determina de asemenea existenţa derivatei laterale a unei funcţii într-un punct, obţinută ca limită a unor alte derivate.

Corolar 7.13.2. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ cu proprietatea că există $\varepsilon > 0$ astfel ca $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subseteq I$, f este derivabilă pe $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ şi continuă la stânga în x_0. Dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(x) = \lambda$, atunci f are derivată la stânga în x_0, iar $f'_s(x_0) = \lambda$.*

Un rezultat asemănător se poate formula în ceea ce priveşte existenţa derivatei la dreapta într-un punct.

Corolar 7.13.3. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ cu proprietatea că există $\varepsilon > 0$ astfel ca $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$, f este derivabilă pe $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ şi continuă la dreapta în x_0. Dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f'(x) = \lambda$, atunci f are derivată la dreapta în x_0, iar $f'_d(x_0) = \lambda$.*

Prin combinarea acestor corolarii se obţine următorul rezultat.

Corolar 7.13.4. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ cu proprietatea că f este derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$, unde $V \in \mathcal{V}(x_0)$, continuă în x_0 şi există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \lambda$. Atunci f este derivabilă în x_0, iar $f'(x_0) = \lambda$.*

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x^3 - a|$, $a \in \mathbb{R}$. Să determinăm a astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Se observă că f este continuă pe $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x(x^3 - a), & x \geq \sqrt[3]{a} \\ x(a - x^3), & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$, deci $f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - a, & x > \sqrt[3]{a} \\ a - 4x^3, & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$. Atunci $\lim\limits_{\substack{x \to \sqrt[3]{a} \\ x < \sqrt[3]{a}}} f'(x) = -3a$, deci, conform Corolarului 7.13.2, $f'_s(\sqrt[3]{a}) = -3a$. Similar, conform Corolarului 7.13.3, $f'_d(\sqrt[3]{a}) = 3a$. Ca f să fie derivabilă în $\sqrt[3]{a}$, este necesar şi suficient ca valorile acestor derivate laterale să fie egale, deci $-3a = 3a$, iar $a = 0$. Se observă atunci că $f(x) = \begin{cases} x^4, & x \geq 0 \\ -x^4, & x < 0 \end{cases}$, fiind derivabilă şi pentru orice $x \neq 0$.

Funcţii Lipschitz. Contracţii

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange, se poate demonstra că orice funcţie derivabilă cu derivata mărginită este o funcţie Lipschitz. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Corolar 7.13.5. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f funcţie Rolle pe $[a, b]$. Dacă există $L \geq 0$ astfel încât $|f'(c)| \leq L$ pentru orice $c \in (a, b)$, atunci f este funcţie Lipschitz pe $[a, b]$. Dacă, în plus, $L < 1$, atunci f este o contracţie pe $[a, b]$.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in [a, b]$, $x < y$. Conform teoremei lui Lagrange, aplicate pe intervalul $[x, y] \subseteq [a, b]$, pe care f este de asemenea funcţie Rolle, urmează că există $c \in (x, y)$ astfel ca $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Atunci

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq L|x - y|,$$

deci f este funcţie Lipschitz pe $[a, b]$. Dacă $L < 1$, conform definiţiei, f este o contracţie pe $[a, b]$. ■

În particular, acest corolar poate fi utilizat pentru a stabili convergenţa unor şiruri recurente.

Exemplu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2x_n^2+1}{3x_n}$, $x_0 = 2$. Să demonstrăm că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să-i determinăm limita.

Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{2x^2+1}{3x}$. Mai întâi, se observă că $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$, iar recurenţa dată se poate scrie sub forma $x_{n+1} = f(x_n)$. Totuşi, $(0, \infty)$ nu este o mulţime închisă, neputându-se aplica direct teorema de punct fix a lui Banach, deşi f transformă mulţimea $(0, \infty)$ în ea însăşi. Conform inegalităţii mediilor,

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{3x}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Deoarece

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \leq \frac{2}{3}x + \frac{1}{3\frac{2\sqrt{2}}{3}} < \frac{2}{3}x + 1, \quad \text{pentru orice } x \geq \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

se poate observa că $f(x) \leq 3$ pentru orice $x \in \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$, deci f transformă intervalul $D = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$ în el însuşi. Deoarece $f'(x) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)$, urmează că $\frac{7}{21} \leq f'(x) \leq \frac{17}{27}$ pentru orice $x \in D$, deci f este o contracţie pe acest interval. Cum şi $x_0 \in D$, urmează conform teoremei de punct fix a lui Banach (teorema 6.14) că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la punctul fix l al lui f pe D. Din condiţia de punct fix, $l = \frac{2l^2+1}{3l}$, deci $l^2 = 1$, iar $l = 1$, deoarece $l_1 = -1 \notin D$. Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar limita sa este 1.

7.3.4 Teorema lui Cauchy

Următorul rezultat, atribuit lui Cauchy, constituie o generalizare a teoremei lui Lagrange.

Teorema 7.14. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g funcţii Rolle pe $[a, b]$. Dacă $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci $g(b) \neq g(a)$ şi există $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} =$*

$\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

7.3.5 Regulile lui L'Hôpital

În unele dintre situaţiile în care calculul limitelor unor funcţii conduce la cazuri de nedeterminare de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ sau $\frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}$, pot fi utilizate cu succes aşa-numitele *reguli ale lui L'Hôpital*.

Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

Teorema 7.15. *Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I şi fie f, g două funcţii definite pe I, cu excepţia eventuală a lui x_0. Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.
2. *f, g sunt derivabile pe I, cu excepţia eventuală a lui x_0.*
3. *$g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$.*
4. *Există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finită sau infinită.*

Atunci $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$, funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplu. Să determinăm valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. În acest scop, să observăm că funcţiile

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \operatorname{arctg} x, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3,$$

sunt în aşa fel încât $\lim\limits_{x \to 0}(x - \operatorname{arctg} x) = \lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$, f, g sunt derivabile pe $\mathbb{R}$

iar $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. În plus,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3},$$

de unde obţinem că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

Uneori, este necesar să se aplice de mai multe ori succesiv regula lui L'Hôpital, întrucât noua limită $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ este tot de tip $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$.

Exemplu. Să determinăm valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ În acest scop, să observăm că funcţiile

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \quad g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ g(x) = x - \sin x,$$

sunt în aşa fel încât $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - e^{-x} - 2x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - \sin x) = 0$, f, g sunt derivabile pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ iar $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. În plus,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Funcţiile

$$f_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x + e^{-x} - 2, \quad g_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ g_1(x) = 1 - \cos x$$

sunt în aşa fel încât $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + e^{-x} - 2) = \lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0$, f_1, g_1 sunt derivabile pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ iar $g_1'(x) = \sin x \neq 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. În plus,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x} \\ &= 2.\end{aligned}$$

Urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2.$$

Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 7.16. *Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I şi fie f, g două funcţii definite pe I, cu excepţia eventuală a lui x_0. Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.
2. *f, g sunt derivabile pe I, cu excepţia eventuală a lui x_0.*
3. *$g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$.*
4. *Există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finită sau infinită.*

Atunci funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplu. Să calculăm limita $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}$, $a, b \in (0, \infty)$. În acest scop, să observăm că funcţiile

$$f : (0, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(\sin(ax)), \quad g : (0, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ g(x) = \ln(\sin(bx))$$

sunt în aşa fel încât $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(\sin(bx)) = -\infty$, f, g sunt derivabile pe $(0, \varepsilon)$ iar $g'(x) = \frac{b \cos bx}{\sin bx} \neq 0$ pentru orice $x \in (0, \varepsilon)$. În plus,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln(\sin(ax)))'}{(\ln(\sin(bx)))'} &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{a \cos ax}{\sin ax}}{\frac{b \cos bx}{\sin bx}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \frac{\sin bx}{\sin ax} \\
&= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx}{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.
\end{aligned}$$

Urmează că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))} = 1.$$

Alte cazuri de nedeterminare

Regulile lui L'Hôpital sunt destinate în mod explicit calculului limitelor unor rapoarte de funcţii ce conduc la cazurile de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ şi $\frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}$. Totuşi, după rearanjarea unor termeni sau executarea unor operaţii de logaritmare, şi alte cazuri de nederminare pot fi tratate prin intermediul acestor reguli.

Cazul $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$

În situaţia în care calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$ conduce la cazul de nedeterminare $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$ (adică $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$), atunci se încearcă scrierea produsului ca un raport. Folosind formula $\mathbf{fg} = \dfrac{\mathbf{f}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g}}}$ se obţine cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, iar folosind formula $\mathbf{fg} = \dfrac{\mathbf{g}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}}}$ se obţine cazul de nedeterminare $\frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}$.

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3 \ln x$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$, limita se încadrează în cazul de nedeterminare $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$. Atunci

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3 \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=\!=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^3}{-3} = 0.$$

Cazul $\boldsymbol{\infty}-\boldsymbol{\infty}$

În situaţia în care calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)$ conduce la cazul de nedeterminare $\boldsymbol{\infty}-\boldsymbol{\infty}$ (adică $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$), atunci se încearcă obţinerea unui factor comun. Folosind formulele $\mathbf{f}-\mathbf{g} = \mathbf{f}(\dfrac{\mathbf{g}}{\mathbf{f}} - \mathbf{1})$ sau $\mathbf{f}-\mathbf{g} = \mathbf{g}(\dfrac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}} - \mathbf{1})$, limita dată se transformă într-un produs, iar folosind formula $\mathbf{f}-\mathbf{g} = \dfrac{\frac{\mathbf{f}-\mathbf{g}}{\mathbf{fg}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{fg}}} = \dfrac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{fg}}}$ se obţine cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$.

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x - x\right)$.

Soluţie. Se va da factor comun e^x, deoarece acesta creşte mai rapid decât x pentru $x \to \infty$. Se obţine că

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x - x\right) = \lim_{x\to\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

De asemenea

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0,$$

de unde

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x - x\right) = \infty(1-0) = \infty.$$

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Soluţie. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2},$$

limita iniţială fiind transformată într-o limită în cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$. Totuşi, în locul aplicării directe a regulii lui L'Hôpital, se recomandă simplificarea preliminară prin aplicarea limitelor fundamentale. Se obţine că

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x+\operatorname{tg} x)(x-\operatorname{tg} x)}{x\cdot x\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{tg} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^3} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^3}\\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=\!=} 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x^2}\\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=\!=} \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{2x} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Cazurile $\mathbf{1^\infty, 0^0, \infty^0}$

În situaţia în care calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ conduce la unul dintre aceste cazuri de nedeterminare, iar $f(x) > 0$ pe o vecinătate a lui x_0, se foloseşte formula $\mathbf{f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g\ln f}}$. Pentru cazul de nedeterminare $\mathbf{1^\infty}$, se poate ţine seama şi de faptul că $\lim\limits_{f\to 1}\dfrac{\ln f}{f-1} = 1$.

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\cos 2x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$, limita dată este în cazul de nedeterminare $\mathbf{1^\infty}$. Atunci

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x-\ln\cos 2x}{x^2}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=\!=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} 2x}{2x}}\\ &= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(-\frac{\operatorname{tg} x}{x}+2\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}\cdot 2\right)} = e^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1}{x}\right| = \infty$, limita dată este în cazul de nedeterminare 1^∞. Atunci

$$\lim_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+e^x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{x+e^x-1}\lim_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{e^x-1}{x}\right)} = e^2.$$

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-\cos x}{1-\cos x}\right)^{\sin^2 x}$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-\cos x}{1-\cos x}\right) = \infty$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x = 0$, limita dată este în cazul de nedeterminare $\mathbf{\infty^0}$. Atunci

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\cos x}{1-\cos x}\right)^{\sin^2 x} &= e^{\lim_{x\to 0}\sin^2 x\ln\left(\frac{2-\cos x}{1-\cos x}\right)}\\ &= e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0} x^2(\ln(2-\cos x)-\ln(1-\cos x))}\\ &= e^{\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln(2-\cos x)\right)-\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln(1-\cos x)\right)}\\ &= e^{-\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln(1-\cos x)\right)} = e^{-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{x^2}}}\\ &\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=\!=} e^{-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{1-\cos x}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=\!=} e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin x+x^3\cos x}{\sin x}}\\ &= e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(3x^2+\frac{x}{\sin x}\cdot x^2\cos x\right)} = e^0 = 1.\end{aligned}$$

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{x-\frac{\pi}{2}}$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)=0$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, limita dată este în cazul de nedeterminare $\mathbf{0^0}$. Atunci

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{x-\frac{\pi}{2}} &= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ln(1-\sin x)} = e^{\lim_{u\to 0} u\ln(1-\sin(u+\frac{\pi}{2}))}\\
&= e^{\lim_{u\to 0} u\ln(1-\cos u)} = e^{\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1-\cos u)}{\frac{1}{u}}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=\!=} e^{\lim_{u\to 0}\frac{\frac{\sin u}{1-\cos u}}{-\frac{1}{u^2}}}\\
&= e^{-\lim_{u\to 0}\frac{u^2\sin u}{1-\cos u}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=\!=} e^{-\lim_{u\to 0}\frac{2u\sin u+u^2\cos u}{\sin u}}\\
&= e^{-\lim_{u\to 0}\left(2u+\frac{u}{\sin u}\cdot u\cos u\right)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

7.3.6 Formula lui Taylor

Conform definiţiei diferenţiabilităţii, a fost observat anterior că dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I$, atunci există $\alpha : I \to \mathbb{R}$ cu $\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$, astfel ca

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0),$$

iar în concluzie

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0.$$

Polinomul lui Taylor de ordinul n

În cele ce urmează, dorim să extindem această formulă de aproximare la una cu acurateţe superioară. Să presupunem că $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabiă de ordinul n în $x_0 \in I$, $n \geq 1$. Atunci derivatele de ordin până la $n-1$ inclusiv există pe o vecinătate a lui x_0; pentru simplitatea expunerii, să presupunem că acestea există pe întreg I. Funcţia polinomială $T_n : I \to \mathbb{R}$ definită prin

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se numeşte *polinomul lui Taylor de grad n* ataşat funcţiei f în punctul x_0.

Restul formulei lui Taylor de ordinul n

Fie acum $R_n : I \to \mathbb{R}$, definită prin

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

Atunci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

sau

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &+ R_n(x), \end{aligned}$$

relaţie numită *formula lui Taylor de ordinul n* corespunzătoare funcţiei f în punctul x_0. Funcţia R_n astfel definită poartă numele de *restul formulei lui Taylor de ordinul n* şi măsoară eroarea cu care polinomul T_n aproximează funcţia f.

În ceea ce urmează, vom încerca să obţinem forme ale restului R_n care să precizeze mai multe informaţii despre precizia aproximării. Să observăm mai întâi că, în definiţia diferenţiabilităţii într-un punct x_0,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

funcţia polinomială de gradul 1

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

reprezintă de fapt polinomul Taylor T_1. Cum $R_1 = \alpha(x)(x - x_0)$, urmează că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Vom demonstra o proprietate similară pentru restul de ordin n. În acest scop, să calculăm mai întâi derivatele polinomului Taylor T_n. Se obţine că

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\ T_n''(x) &= f''(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$T_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0),\qquad T_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x_0)$$
$$T_n^{(m)}(x)=0,\quad \text{pentru } m>n.$$

Putem obţine de aici următoarele evaluări ale restului de ordin n şi ale derivatelor sale în x_0

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\ldots=R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

Să notăm $g:I\to R$, $g(x)=(x-x_0)^n$. Analog relaţiilor de mai sus, se observă că

$$g(x_0)=g'(x_0)=\ldots=g^{(n-1)}(x_0)=0;\quad g^{(n)}(x_0)=n!.$$

Fie $x\in I$ arbitrar. Aplicând teorema lui Cauchy funcţiilor R_n şi g pe intervalul $[x_0,x]$ (sau $[x,x_0]$), obţinem că există c_1 între x_0 şi x astfel ca $\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}$, iar cum $R_n(x_0)=g(x_0)=0$, urmează că

$$\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Aplicând încă o dată teorema lui Cauchy funcţiilor R_n' şi g' pe intervalul $[x_0,c_1]$ (sau $[c_1,x_0]$), obţinem că în mod similar că există c_2 între x_0, şi c_1) astfel ca

$$\frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}=\frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)},$$

deci

$$\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Aplicând în mod iterativ teorema lui Cauchy, obţinem că există c_{n-1} între x_0 şi x astfel încât

$$\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n^{(n-1)}(c_{n-1})}{g^{(n-1)}(c_{n-1})}.$$

Fie acum $(\overline{x}_k)_{k\geq 0}$ un şir convergent la x_0, $\overline{x}_k\neq x_0$. Conform celor de mai sus, există $c_{k,n-1}$ între x_0 şi $\overline{x}_k$ astfel încât

$$\frac{R_n(\overline{x}_k)}{g(\overline{x}_k)}=\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1})}{g^{(n-1)}(c_{k,n-1})}=\frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1})-R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1})-g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0}}.$$

Prin trecere la limită, obţinem că

$$\lim_{k\to\infty} \frac{R_n(\overline{x}_k)}{g(\overline{x}_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0}}$$

Cum $c_{k,n-1}$ se află între x_0 şi $\overline{x}_k$, urmează că $\lim_{k\to\infty} c_{k,n-1} = x_0$, de unde

$$\lim_{k\to\infty} \frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0} = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0} = g^{(n)}(x_0) = n!,$$

iar

$$\lim_{k\to\infty} \frac{R_n(\overline{x}_k)}{g(\overline{x}_k)} = 0.$$

Deoarece $(\overline{x}_k)_{k\geq 0}$ era un şir arbitrar convergent la x_0, urmează conform definiţiei limitei că

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Consideraţiile de mai sus conduc la următorul rezultat.

Teorema 7.17. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. Dacă f este derivabilă de n ori în $x_0 \in I$, atunci există o funcţie $\alpha : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ şi*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Demonstraţie. Să considerăm atunci funcţia $\alpha : I \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} n!\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

şi să observăm că $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$, conform celor de mai sus. În plus, $R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n$, pentru orice $x \in I$ (chiar şi pentru $x = x_0$, deoarece ambii membri sunt 0), de unde concluzia. ∎

Restul de ordin n din formula de mai sus,

$$R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numeşte *restul lui Peano*.

În teorema precedentă s-a presupus că f este derivabilă de n ori în punctul x_0, obţinându-se cu acest prilej o estimare a restului formulei lui Taylor. Vom presupune în cele ce urmează că f este derivabilă de $n+1$ ori pe întreg intervalul I, lucru care ne va ajuta să obţinem exprimări mai precise ale restului.

Fie $x_0, x \in I$. Fie deasemenea $p \in \mathbb{N}^*$ şi fie $C \in \mathbb{R}$ definit prin

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ + C(x - x_0)^p. \end{aligned}$$

Definim $\varphi : I \to \mathbb{R}$ prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + C(x - t)^p.$$

Atunci

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = f(x),$$

şi aplicând teorema lui Rolle funcţiei φ pe intervalul $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0]$) obţinem existenţa lui c situat între x_0 şi x (dependent de x_0, x, n şi p) astfel încât $\varphi'(c) = 0$. Însă

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \left(\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'(t)}{1!}\right) + \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x - t)\right) + \ldots \\ &\quad + \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1}\right) - pC(x - t)^{p-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - pC(x - t)^{p-1} \end{aligned}$$

şi atunci

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n - pC(x - c)^{p-1} = 0,$$

de unde

$$C = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x - c)^{n-p+1}$$

Se obţine atunci că restul R_n al formulei Taylor de ordinul n are forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x - x_0)^p (x - c)^{n-p+1}.$$

Pus sub această formă generală, restul R_n al formulei Taylor de ordinul n se numeşte *restul lui Schlömilch-Roche*. Prin particularizarea lui p în expresia de mai sus obţinem alte forme importante ale restului de ordin n. Astfel, pentru $p = 1$ obţinem *restul lui Cauchy*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)(x - c)^n,$$

în vreme ce pentru $p = n + 1$ obţinem *restul lui Lagrange*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Deoarece c se află între x_0 şi x, există $\theta \in (0, 1)$ (dependent de x_0, x şi n) astfel încât

$$c = x_0 + \theta(x - x_0),$$

iar cu notaţia $h = x - x_0$, formula lui Taylor se poate scrie astfel

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n,$$

unde R_n se poate pune sub una dintre următoarele forme

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!p}h^{n+1}(1 - \theta)^{n-p+1} && \text{(Schlömilch-Roche)}\\
R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!}h^{n+1}(1 - \theta)^{n} && \text{(Cauchy)}\\
R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} && \text{(Lagrange).}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Formula lui MacLaurin

Dacă în formula lui Taylor punem $x_0 = 0$, obţinem *formula lui MacLaurin*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n,$$

R_n obţinându-se din formulele (7.2) pentru $x_0 = 0$. De asemenea, pentru $n = 0$, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange reprezintă chiar teorema lui Lagrange.

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$, deci $f^{(2k)} = 0$, iar $f^{(2k+1)} = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. De aici,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2}$, deci $f^{(2k+1)} = 0$, iar $f^{(2k)} = (-1)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. De aici,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta \in (0,1).$$

Exemple. 1. Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

avem că $f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$. De aici,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^n}, \quad \theta \in (0,1).$$

2. $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^p$. Cum

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)\ldots(p-n+1)(1+x)^{p-n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = p(p-1)\ldots(p-n+1)$. De aici,

$$(1+x)^p = 1 + \frac{px}{1!} + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)x^n}{n!} + R_n$$

unde

$$R_n = \frac{p(p-1)\ldots(p-n)(1+\theta x)^{p-n-1}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0,1).$$

7.3.7 Puncte de extrem ale unei funcţii. Condiţii necesare şi suficiente

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. S-a observat anterior că punctele de extrem care sunt interioare lui I şi în care f este derivabilă se găsesc printre punctele critice ale funcţiei f, dar nu orice punct critic al unei funcţii este neapărat punct de extrem. De exemplu, fie $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$. Atunci $f_1'(x) = 3x^2$, deci $x = 0$ este punct critic al lui f_1. Totuşi, acesta nu este punct de extrem, deoarece $f_1(0) = 0$, iar în orice vecinătate a lui 0 funcţia f ia atât valori negative cât şi valori pozitive. În cele ce urmează, vom obţine condiţii de extrem cu ajutorul derivatelor de ordin superior.

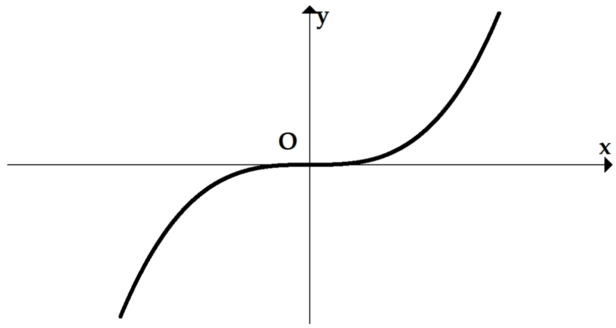


Figura 7.10: Graficul funcţiei $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$. $x = 0$ este punct critic, dar nu este punct de extrem

Teorema 7.18. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in I$ astfel încât*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. *Dacă $n = 2k$, atunci x_0 este punct de extrem local.*
   (a) *Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.*
   (b) *Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local.*
2. *Dacă $n = 2k + 1$, iar x_0 este punct interior lui I, atunci x_0 nu este punct de extrem local.*

Demonstraţie. Conform formulei lui Taylor cu restul lui Peano, în care primele $n - 1$ derivate în x_0 se anulează conform ipotezei, obţinem că

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n,$$

cu $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$. Atunci

$$f(x) - f(x_0) = \left(f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right) \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

cu

$$\lim_{x\to x_0} \left(f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right) = f^{(n)}(x_0).$$

Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) > 0$, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece $(x - x_0)^{2k} \geq 0$ pentru orice $x \in V$, urmează că

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar x_0 este punct de minim local.

Similar, dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) < 0$, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar x_0 este punct de maxim local.

Fie acum $n = 2k + 1$ şi fie x interior lui I. Dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ o vecinătate a lui x_0 astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece $(x - x_0)^{2k+1} < 0$ pentru orice $x \in V$, $x < x_0$, respectiv $(x - x_0)^{2k+1} > 0$ pentru orice $x \in V$, $x > x_0$, urmează că

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0$$

deci

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0,$$

iar

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

iar x_0 nu este punct de extrem local. Cazul în care $f^{(n)}(x_0) < 0$ se tratează analog.

■

Pentru $n = 2$, se obţine următorul corolar foarte util în studiul variaţiei funcţiilor.

Corolar 7.18.1. *Fie $f : I \to R$ derivabilă de două ori în $x_0 \in I$ astfel încât $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) \neq 0$.*

1. *Dacă $f''(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.*

2. *Dacă $f''(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local.*

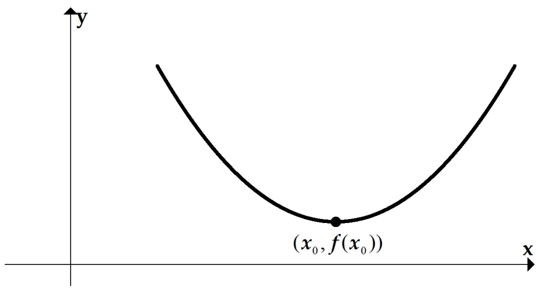


Figura 7.11: $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) > 0$. x_0 este punct de minim local

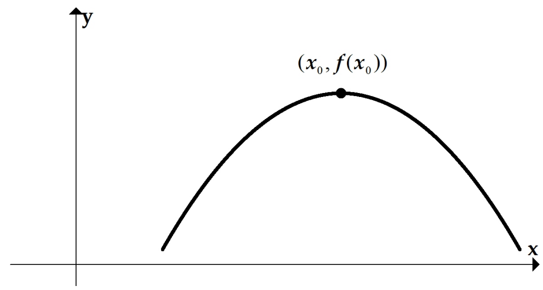


Figura 7.12: $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) < 0$. x_0 este punct de maxim local

Exerciţiu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Determinaţi punctele de extrem ale lui f.

Soluţie. Cum f este derivabilă pe întreg $\mathbb{R}$, iar toate punctele domeniului sunt puncte interioare acestuia, urmează conform teoremei lui Fermat că punctele de extrem sunt printre punctele critice. Deoarece $f'(x) = 3x^2 - 3$, f' se anulează pentru $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$. Cum $f''(x) = 6x$, urmează că $f''(-1) = -6 < 0$, iar $f''(1) = 6 > 0$, deci -1 este un punct de maxim local, iar 1 este un punct de minim local.

7.4 Aspecte grafice în studiul variaţiei funcţiilor

7.4.1 Asimptote

În situaţia în care este necesar să se studieze aspectul graficului unei funcţii sau viteza ei de creştere, devine adesea important să se determine dacă acest grafic are o formă apropiată de cea a unei linii drepte, respectiv daca funcţia are o creştere de un anumit tip precizat, de exemplu echivalentă cu cea a unei funcţii de gradul întâi. Dreapta de care se „apropie" graficul funcţiei se va numi *asimptotă*, iar în funcţie de poziţia acesteia se vor obţine, respectiv, noţiunile de asimptotă orizontală, verticală sau oblică.

Asimptote orizontale

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $+\infty$ (respectiv $-\infty$) fiind punct de acumulare al mulţimii D. Vom spune că dreapta $y = l$, $l \in \mathbb{R}$, este *asimptotă orizontală* la graficul funcţiei f spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) la graficul funcţiei f dacă $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectiv $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$).

Altfel spus, graficul unei funcţii f are asimptotă orizontală spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) dacă f are o limită finită l la $+\infty$ (respectiv la $-\infty$). În această situaţie, graficul funcţiei se apropie foarte mult de dreapta orizontală $y = l$ spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$), această dreaptă fiind asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$).

Desigur, dacă o funcţie nu are limită la $+\infty$, atunci graficul acesteia nu are asimptotă orizontală către $+\infty$. Mai departe, dacă $+\infty$ nu este punct de acumulare pentru domeniul funcţiei (de exemplu, dacă acesta este un interval de tip $(-\infty, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$), atunci de asemenea nu putem vorbi despre asimptotă orizontală la graficul acesteia spre $+\infty$, afirmaţii similare putându-se face şi despre despre asimptotele orizontale spre $-\infty$.

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-x+1}{2x^2-3x+2}$. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2},$$

deci dreapta $y = \frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f spre $+\infty$. Printr-un calcul similar, se obţine că această dreaptă este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f şi spre $-\infty$.

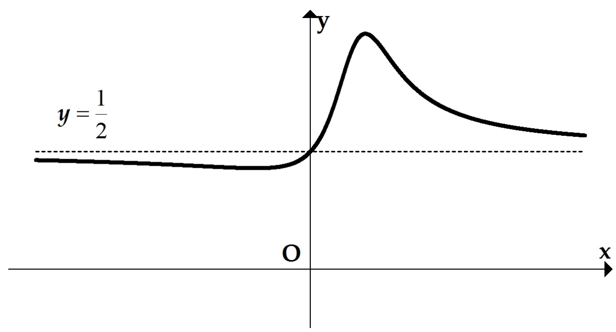


Figura 7.13: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-x+1}{2x^2-3x+2}$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Deoarece

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1,$$

urmează că dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f spre $-\infty$. Printr-un calcul similar, se obţine că dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f spre $+\infty$, cele două asimptote orizontale, către $-\infty$ respectiv către $+\infty$, fiind diferite între ele.

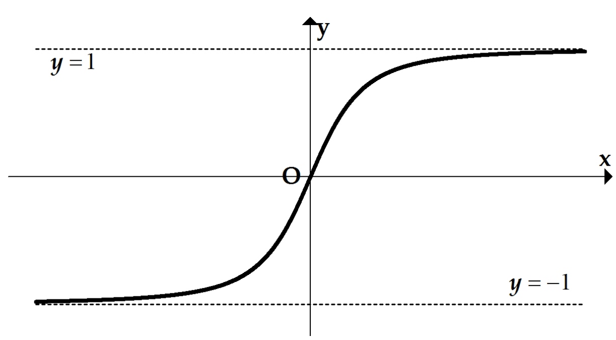


Figura 7.14: Graficul funcţiei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Deoarece $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nu există, graficul funcţiei f nu are asimptotă orizontală către $+\infty$. Nu putem

vorbi despre asimptotă orizontală către $-\infty$, deoarece $-\infty$ nu este punct de acumulare pentru domeniul funcţiei.

Asimptote oblice

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $+\infty$ fiind punct de acumulare al mulţimii D. Vom spune că dreapta $y = mx + n$, $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$, este *asimptotă oblică* la graficul funcţiei f spre $+\infty$ dacă

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n.$$

Similar, fie $f : D \to \mathbb{R}$, $-\infty$ fiind punct de acumulare al mulţimii D. Vom spune că dreapta $y = mx + n$, $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$, este *asimptotă oblică* la graficul funcţiei f spre $-\infty$ la graficul funcţiei f dacă

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = n.$$

În aceste situaţii, graficul funcţiei se apropie foarte mult de dreapta oblică $y = mx + n$ spre $+\infty$, respectiv spre $-\infty$.

Să notăm că, deoarece $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, o condiţie necesară (dar nu şi suficientă) ca graficul unei funcţi să aibă asimptotă oblică spre $+\infty$ este ca acea funcţie să aibă limită infinită la $+\infty$. În concluzie, existenţa unei asimptote oblice spre $+\infty$ exclude existenţa unei asimptote orizontale spre $+\infty$ şi reciproc, un raţionament similar putând fi efectuat relativ la existenţa asimptotelor orizontale sau oblice spre $-\infty$.

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2+x+1}$. Atunci

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x - 1}{x(x^2 + x + 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = 1,$$

iar

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 + x - 1}{x^2 + x + 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = -1.$$

De aici, dreapta $y = x - 1$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei f spre $+\infty$. Printr-un calcul similar, se obţine că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcţiei f şi spre $-\infty$.

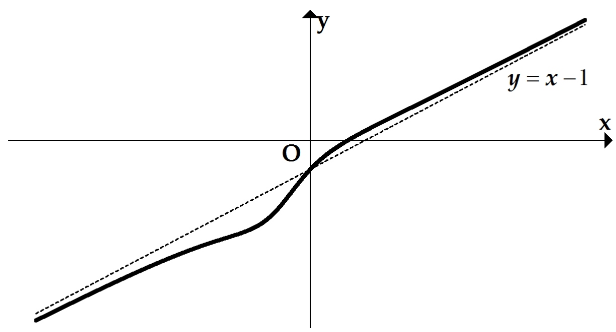


Figura 7.15: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2+x+1}$

2. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Atunci

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

iar

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \infty \cdot 1 = +\infty.$$

Cum $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = +\infty$, urmează că graficul lui f nu are asimptote oblice spre $+\infty$. Nu putem vorbi despre asimptote oblice spre $-\infty$ deoarece $-\infty$ nu este punct de acumulare pentru domeniul funcţiei.

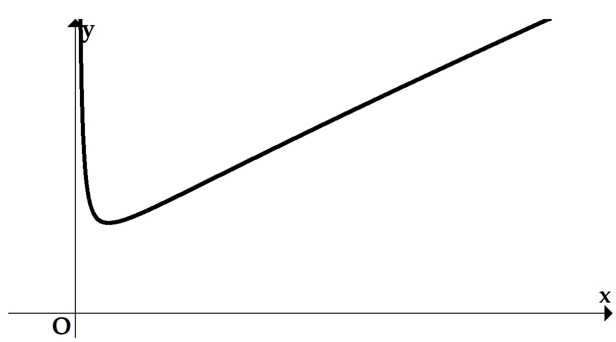


Figura 7.16: Graficul funcţiei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Asimptote verticale

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ fiind punct de acumulare la stânga al mulţimii D. Vom spune că dreapta $x = a$ este *asimptotă verticală* la stânga spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) la graficul funcţiei f dacă

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty, \quad (\text{respectiv } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty).$$

Similar, fie $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ fiind punct de acumulare la dreapta al mulţimii D. Vom spune că dreapta dreapta $x = a$ este *asimptotă verticală* la dreapta spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) la graficul funcţiei f dacă

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty, \quad (\text{respectiv } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty).$$

În aceste situaţii, graficul funcţiei f se apropie foarte mult de dreapta verticală $x = a$, în circumstanţele precizate. Să notăm că existenţa asimptotelor verticale nu exclude nici existenţa asimptotelor orizontale, nici a celor oblice, deoarece acestea din urmă sunt determinate cu ajutorul unor limite pentru $x \to +\infty$ sau $x \to -\infty$, nu pentru x tinzând la valori finite, aşa cum este cazul asimptotelor verticale. De asemenea, întrucât existenţa asimptotelor verticale presupune existenţa unor limite infinite, graficele funcţiile mărginite pe domeniile de definiţie nu au asimptote verticale, iar asimptotele verticale ale funcţiilor nemărginite se caută în punctele "patologice" ale domeniului de definiţie sau funcţiei, de exemplu zerouri ale unor numitori sau ale unor argumente de funcţii logaritmice.

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R}\setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Atunci

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x+1}{x-1} = \infty,$$

iar dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcţiei f spre $-\infty$, respectiv la dreapta spre $+\infty$.

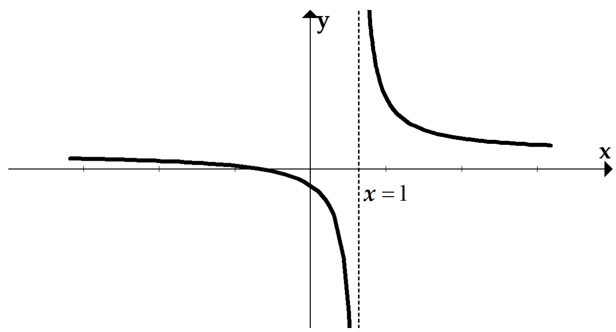


Figura 7.17: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

2. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Atunci

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty,$$

iar dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta la graficul funcţiei f spre $-\infty$. Să notăm că 0 nu este punct de acumulare la stânga pentru domeniul lui f (de fapt, f nici măcar nu este definită pentru $x < 0$), dreapta $x = 0$ nefiind şi asimptotă verticală la stânga la graficul funcţiei f.

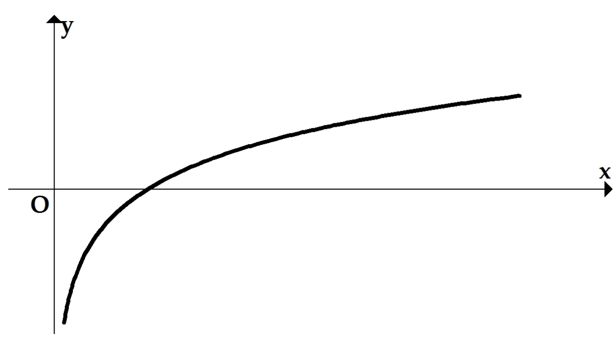


Figura 7.18: Graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

Exerciţiu. Determinaţi asimptotele funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$.

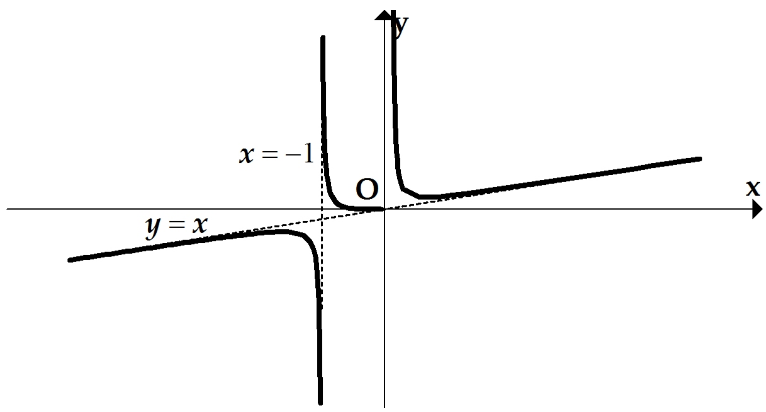


Figura 7.19: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$

Soluţie. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot 1 = \infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty,$$

graficul funcţiei nu are asimptote orizontale.

Studiem acum existenţa asimptotelor oblice, începând cu cea spre $+\infty$. Se observă că

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot 1 = 1,$$
$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

deci dreapta $y = x$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei f spre $+\infty$. Un calcul similar arată că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcţiei f şi spre $-\infty$.

În ceea ce priveşte existenţa asimptotelor verticale, observăm că

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0-} e^{-1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0+} e^{-1} = +\infty,$$

deci dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcţiei f spre $-\infty$, respectiv asimptotă verticală la dreapta la graficul funcţiei f spre $+\infty$. Similar,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} \cdot e^{\frac{1}{0-}} = 0 \cdot 0 = 0,$$

în vreme ce

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=\!=} \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{1} = \infty,$$

deci dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta (nu însă şi la stânga) la graficul funcţiei f spre $+\infty$.

7.4.2 Convexitate. Concavitate

Adesea, informaţiile oferite de prima derivată a unei funcţii nu sunt suficiente pentru descrierea precisă a modului de variaţie a acelei funcţii. În special, aceste informaţii pot fi insuficiente pentru determinarea formei graficului funcţiei. In cele ce urmează, vom studia rolul derivatei a doua a unei funcţii în precizarea formei graficului acelei funcţii.

Funcţii convexe şi strict convexe

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. Vom spune că f este *convexă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ şi oricare ar fi $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

De asemenea, vom spune că f este *strict convexă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ şi oricare ar fi $t \in (0, 1)$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Interpretarea geometrică a convexităţii

Deoarece $M(tx + (1-t)y, f(tx + (1-t)y))$ este punctul de pe graficul funcţiei corespunzător abscisei $tx + (1-t)y$, iar $N(tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y))$ este punctul cu aceeaşi abscisă de pe segmentul determinată de $A(x, f(x))$ şi $B(y, f(y))$, observăm că f este convexă dacă şi numai dacă pentru orice două puncte A, B de pe graficul funcţiei, porţiunea de grafic dintre A şi B se află sub segmentul AB determinat de acestea.

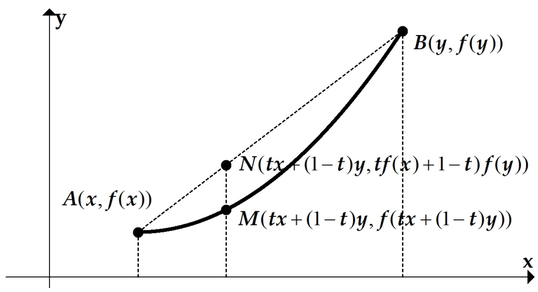


Figura 7.20: Graficul unei funcţii convexe

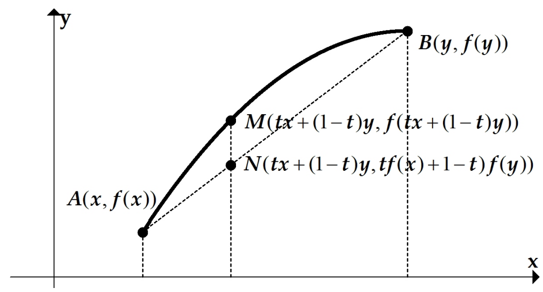


Figura 7.21: Graficul unei funcţii concave

Funcţii concave şi strict concave

Similar, vom spune că f este *concavă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ şi oricare ar fi $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y),$$

respectiv că f este *strict concavă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ şi oricare ar fi $t \in (0, 1)$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y).$$

Se observă că f este (strict) concavă dacă şi numai dacă $-f$ este (strict) convexă.

Interpretarea geometrică a concavităţii

Prin analogie cu interpretarea geometrică a convexităţii unei funcţii, se observă că f este concavă dacă şi numai dacă pentru orice două puncte A, B de pe graficul funcţiei, porţiunea de grafic dintre A şi B se află deasupra segmentului AB determinat de acestea.

O proprietate de monotonie

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unei funcţii de a fi convexă implică monotonia unui anumit raport incremental.

Teorema 7.19. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$, f convexă pe I. Fie deasemenea $a \in \mathbb{R}$. Atunci funcţia $g_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = \frac{f(x)-f(x)}{x-a}$, este crescătoare.*

Continuitatea funcţiilor convexe

Cu ajutorul proprietăţii de mai sus, putem deduce că o funcţie convexă este continuă pe interiorul domeniului ei de definiţie.

Teorema 7.20. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$, f convexă pe I. Fie deasemenea $a \in \overset{\circ}{I}$. Atunci f este continuă în a.*

O altă interpretare grafică a noţiunii de convexitate

Tot cu ajutorul Teoremei 7.19, putem demonstra următorul rezultat.

Teorema 7.21. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$, f convexă pe I. Fie de asemenea $a \in I$ un punct în care f este derivabilă lateral. Atunci*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'_s(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \quad \textit{pentru } x < a < y \in I.$$

În particular, dacă f este derivabilă în a, urmează că

$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a), \quad \text{pentru } x \in I,$$

deci

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a), \quad \text{pentru } x \in I. \tag{7.3}$$

Cum $B(x, f(a) + f'(a)(x-a))$ este punctul de pe tangenta la graficul funcţiei f în $A(a, f(a))$ corespunzător abscisei x, urmează că o funcţie derivabila f este convexă pe I dacă şi numai dacă pentru orice punct $A(a, f(a))$ de pe grafic, graficul funcţiei este situat deasupra tangentei în A la grafic.

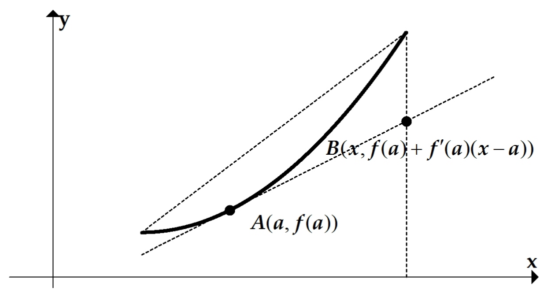


Figura 7.22: Graficul unei funcţii convexe

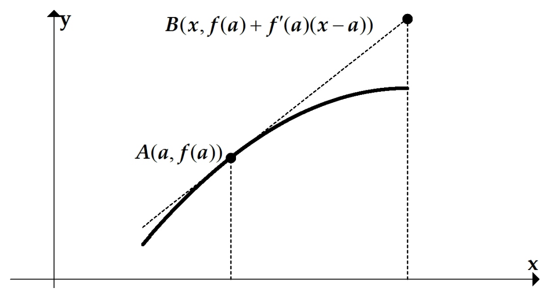


Figura 7.23: Graficul unei funcţii concave

Studiul convexităţii şi concavităţii cu ajutorul derivatei de ordinul al doilea

În cele ce urmează, vom vedea că se poate preciza convexitatea sau concavitatea unei funcţii cunoscând semnul derivatei de ordinul al doilea.

Teorema 7.22. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe I. Atunci au loc următoarele afirmaţii.*

1. $f''(x) \geq 0$ *pentru orice $x \in I$ dacă şi numai dacă f este convexă pe I.*

2. $f''(x) \leq 0$ *pentru orice $x \in I$ dacă şi numai dacă f este concavă pe I.*

Se poate observa că dacă $f'' > 0$ pe I, atunci f este strict convexă pe I.

Exemple. 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este convexă pe $\mathbb{R}$, deoarece $f''(x) = 2 > 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

2. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ este concavă pe $(0, \infty)$, întrucât $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pentru $x \in (0, \infty)$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{6}$, este convexă pe $[0, \infty)$ şi concavă pe $(-\infty, 0]$, întrucât $f''(x) = x$, $f''(x) \geq 0$ pentru $x \in [0, \infty)$, $f''(x) \leq 0$ pentru $x \in (-\infty, 0]$.

Inegalitatea lui Jensen

Pornind de la definiţia convexităţii, se poate demonstra prin inducţie matematică faptul că dacă f este convexă pe I, atunci

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_nf(x_n)$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ şi orice $t_1, t_2, \ldots t_n \in [0,1]$ cu $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, inegalitate cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Jensen*, pentru funcţii concave având loc inegalitatea inversă.

În particular, pentru $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1$, se obţine că

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, pentru funcţii concave având loc inegalitatea inversă.

Exemple. 1. Deoarece $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este concavă pe $[0, \pi]$, urmează că dacă A, B, C sunt unghiuri ale unui triunghi, atunci

$$\sin\frac{A+B+C}{3} \geq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3},$$

de unde, ţinând seama că $A + B + C = \pi$, obţinem că

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2. Deoarece $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ este concavă pe $(0, \infty)$, urmează că

$$\begin{aligned}\ln\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} &\geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n} \\ &= \ln\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},\end{aligned}$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$ ceea ce înseamnă că

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,\infty)$, ceea ce, împreună cu observaţia că inegalitatea rămâne adevărată şi atunci când unul sau mai mulţi x_i sunt nuli, demonstrează validitatea inegalităţii mediilor.

Puncte de inflexiune

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Observăm că, deoarece $g''(x) = 6x$, g este concavă pe $(-\infty, 0]$ şi convexă pe $[0, \infty)$, în $x_0 = 0$ schimbându-se convexitatea funcţiei. Graficul funcţiei f are tangentă în punctul corespunzător $(x_0, g(x_0)) = (0, 0)$, porţiunea din graficul lui g corespunzătoare lui $x \geq 0$ aflându-se deasupra acestei tangente, iar porţiunea din graficul lui g corespunzătoare lui $x \leq 0$ aflându-se dedesubtul acesteia. În cele ce urmează, vom încadra această situaţie tipică într-un cadru mai general.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in \dot{I}$. Atunci x_0 se numeşte *punct de inflexiune al funcţiei* f dacă

1. f este continuă în x_0;

2. f are derivată în x_0, finită sau infinită;

3. Există $a, b \in I$, $a < x_0 < b$ astfel încât

   f este convexă pe (a, x_0) şi concavă pe (x_0, b), sau

   f este concavă pe (a, x_0) şi convexă pe (x_0, b).

În această sitaţie, se spune că punctul corespunzător $A(x_0, f(x_0))$ este *punct de inflexiune al graficului funcţiei* f.

Din punct de vedere geometric, faptul că x_0 este punct de inflexiune al funcţiei f înseamnă că graficul funcţiei f are tangentă în $A(x_0, f(x_0))$, iar tangenta în A „traversează" graficul funcţiei f, în sensul că de o parte a lui A tangenta se aflǎ sub grafic, iar de cealaltă parte se aflǎ deasupra graficului.

Având în vedere caracterizarea convexităţii unei funcţii cu ajutorul semnului derivatei de ordinul al doilea, se obţine următorul rezultat.

Teorema 7.23. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile*

1. *f este continuă în x_0;*

2. *f are derivată în x_0, finită sau infinită;*

3. *Există $a, b \in I$, $a < x_0 < b$ astfel încât*

   $f''(x) \geq 0$ pe (a, x_0) şi $f''(x) \leq 0$ pe (x_0, b), sau

   $f''(x) \leq 0$ pe (a, x_0) şi $f''(x) \geq 0$ pe (x_0, b),

atunci x_0 este punct de inflexiune al funcţiei f.

În condiţiile acestei teoreme, putem spune că x_0 este punct de inflexiune numai dacă f'' îşi schimbă semnul la trecerea de la stânga lui x_0 la dreapta lui x_0. De asemenea, are loc următorul rezultat.

Teorema 7.24. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe I, iar $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ un punct de inflexiune al lui f. Atunci $f''(x_0) = 0$.*

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Atunci f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f''(x) = 6x$. Atunci f este concavă pe $(-\infty, 0]$, respectiv convexă pe $[0, \infty)$. Cum f este continuă în 0, iar f are derivată în 0, $f'(0) = -3$, urmează că 0 este punct de inflexiune.

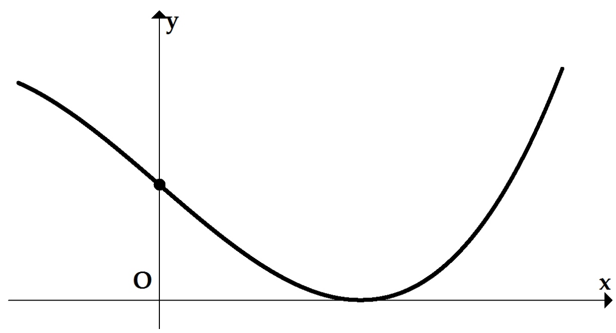


Figura 7.24: 0 este punct de inflexiune pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă de două ori pe $\mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, iar

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}.$$

Cum f are derivată în 2, $f'(2) = +\infty$, iar f este convexă pe $(-\infty, 2)$ respectiv concavă pe $(2, \infty)$, 2 este punct de inflexiune.

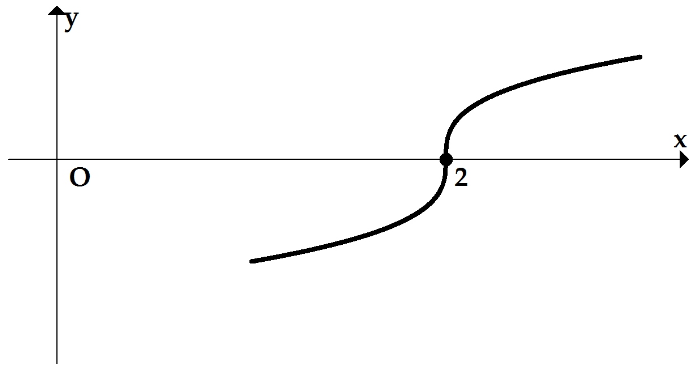


Figura 7.25: 2 este punct de inflexiune pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

Aplicaţii

7.1. *Cu ajutorul formulei de derivare* $(x^k)' = kx^{k-1}$, *determinaţi valoarea sumei* $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

7.2. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a^2 + x + 1, & x > 0 \\ a \sin x + b \cos x, & x \le 0 \end{cases}$. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât* f *să fie derivabilă în* $x_0 = 0$.

7.3. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 0 \\ e^x + 2, & x \le 0 \end{cases}$. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât* f *să fie derivabilă în* $x_0 = 0$.

7.4. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + |x|$, $g(x) = 1 - |x|$. *Demonstraţi că* f, g *nu sunt derivabile în* $x_0 = 0$, *dar* $f + g$ *este derivabilă în* $x_0 = 0$.

7.5. *Fie* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, f *pară şi derivabilă în* $x_0 = 0$. *Demonstraţi că* $f'(0) = 0$.

7.6. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f *derivabilă în* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Determinaţi*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)\right)$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(f(x_0 + \frac{1}{n^2}) - f(x_0 - \frac{1}{n^2})\right)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f(x_0 + \frac{1}{n}) + f(x_0 + \frac{2}{n}) + f(x_0 + \frac{3}{n}) - 3f(x_0)\right)$.

7.7. *Determinaţi (dacă există) punctele de pe graficul funcţiilor* f *următoare,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *în care tangenta este paralelă cu axa* Ox
1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$; *2)* $f(x) = x^5 + 2x + 1$; *3)* $f(x) = 4x + 2$.

7.8. *Fie* $f : (\frac{2}{3}, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(3x-2)$. *Determinaţi punctele de pe graficul funcţiei* f *în care tangenta este paralelă cu dreapta* $y = 3x + 4$.

7.9. *Determinaţi ecuaţiile tangentelor la graficul funcţiei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$ *în punctele de abscise respectiv* 0, $\frac{1}{2}$, 1 *şi precizaţi unghiurile pe care aceste tangente le fac cu axa* Ox.

7.10. *Să se arate că dreapta* $y = 7x - 2$ *este tangentă la curba* $y = x^3 + 4x$.

7.11. *Determinaţi cea mai mică pantă posibilă a tangentei la curba* $y = x^3 - 3x^2 + 7x$.

7.12. *Demonstraţi că funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, *este continuă în* $x_0 = 0$, *dar graficul său nu are tangentă în* $A(0,0)$.

7.13. *Fie funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + 1$, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$. *Determinaţi* a, $b \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficele celor două funcţii să aibă tangentă comună într-un punct de abscisă* 1.

7.14. *Precizaţi dacă graficele funcţiilor* $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = |1 - x^2|$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$, $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \max(x^2 + 5x, 4x + 2)$, *au puncte unghiulare sau de întoarcere.*

7.15. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 4}$. *Demonstraţi că* f *verifică relaţia*

$$f(x)f'(x) = x\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}, \quad \textit{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

7.16. *Fie* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}$. *Demonstraţi că* f *verifică relaţia*

$$xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0, \quad \textit{pentru } x \in (0, \infty).$$

7.17. *Demonstraţi că*

$$(\ln(ax+b))^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-1)! a^n}{(ax+b)^n}, \quad \textit{pentru } n \geq 1.$$

7.18. *Folosind eventual o descompunere în fracţii simple, demonstraţi că*

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2n!} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right], \quad \textit{pentru } n \geq 1.$$

7.19. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$. *Demonstraţi că* $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$, *unde* P_n *este un polinom de gradul* n *şi determinaţi o formulă de recurenţă pentru calculul lui* P_n.

7.20. *Determinaţi*
1) $(x \ln(3x-1))^{(n)}$; *2)* $(x^2 \cos x)^{(n)}$; *3)* $((x^2+x+3)e^{2x})^{(n)}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

7.21. *Fie* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$. *Demonstraţi că* $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{f(x)}{x^{2n}}$.

7.22. *Fie* $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$. *Demonstraţi că* f *este strict crescătoare şi precizaţi mulţimea valorilor funcţiei.*

7.23. *Fie* $f : (0,\infty) \to (1,\infty)$, $f(x) = e^x + x^2 + 3x$. *Demonstraţi că* f *este strict crescătoare, bijectivă şi calculaţi* $(f^{-1})'(e^2+10)$.

7.24. *Fie* $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{3^x}$. *Demonstraţi că* f *este strict descrescătoare, bijectivă şi calculaţi* $(f^{-1})'(2)$.

7.25. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+a-2}{x^2+1}$, $a \in \mathbb{R}$. *Să se determine* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $x_0 = 1$ *să fie punct de extrem.*

7.26. *Fie* $a,b,c \in (0,\infty)$. *Dacă* $a^x + b^x + c^x \geq 3$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$, *demonstraţi folosind teorema lui Fermat că* $abc = 1$.

7.27. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie polinomială de gradul* n, $n \geq 2$, *cu* n *rădăcini reale distincte. Demonstraţi că ecuaţia* $f'(x) = 0$ *are exact* $n-1$ *rădăcini reale distincte.*

7.28. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$. *Demonstraţi că ecuaţia*

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-(n+1)} = 0,$$

are exact n *rădăcini reale.*

7.29. *Determinaţi numărul de rădăcini reale ale ecuaţiilor*
1) $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$; *2)* $x^4 - 14x^2 + 24x - 6 = 0$; *3)* $x^5 - 5x + 1 = 0$;
4) $3x \ln x + 2 = 0$; *5)* $xe^x - 2 = 0$

7.30. *Demonstraţi că ecuaţia* $2x^3 + 3x + m = 0$ *are o unică rădăcină reală indiferent de valoarea parametrului* $m \in \mathbb{R}$.

7.31. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie Rolle pe $[a,b]$ cu proprietatea că $f(a)^2 + b^2 = f(b)^2 + a^2$. Să se demonstreze că ecuaţia $f(x)f'(x) = x$ are măcar o rădăcină în intervalul (a,b).*

7.32. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie Rolle pe $[a,b]$.*

1. *Demonstraţi că $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x-a)(x-b)f(x)$, este de asemenea o funcţie Rolle pe $[a,b]$.*
2. *Demonstraţi că există $c \in (a,b)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{1}{b-c}$.*

7.33. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Determinaţi punctele în care funcţia nu este derivabilă.*

7.34. 1. *Demonstraţi că $e^x \geq 1 + x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

2. *Folosind această inegalitate, demonstraţi că*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ (inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică a n numere pozitive).

7.35. *Folosind teorema lui Lagrange, demonstraţi inegalităţile*

1. $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$, $0 \leq a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$, $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$.
3. $3^p + 6^p > 4^p + 5^p$, $p > 1$.
4. $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x}$, *pentru* $x \geq 2$.

7.36. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^6+5}$. Demonstraţi cu ajutorul teoremei lui Lagrange că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.*

7.37. *Folosind teorema lui Lagrange, demonstraţi că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x - \sin x} = 1$.*

7.38. *Folosind teorema lui Lagrange, arătaţi că ecuaţia $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$, $x \in \mathbb{R}$, are doar soluţiile $x = 0$ şi $x = 1$.*

7.39. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ două funcţii derivabile cu proprietăţile că $f(2012) = g(2012)$ şi $f' \cdot g^2 = g' \cdot f^2$. Demonstraţi că $f = g$.*

7.40. *Demonstraţi că pe intervalele indicate funcţiile următoare diferă printr-o constantă, a cărei valoare se cere*

1. $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ *pe* $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2)$, $g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2}{2}$ *pe* $\mathbb{R}$.

7.41. *Fie $f, g : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Demonstraţi că f şi g au aceeeaşi derivată pe $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, dar $(f-g)(\sqrt{3}) = \pi$, $(f-g)(-\sqrt{3}) = -\pi$, deci f şi g nu diferă printr-o constantă. Cum explicaţi?*

7.42. *Demonstraţi inegalităţile*

1. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, *pentru orice* $x > 0$.
2. $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.
3. $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.
4. $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.
5. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, *pentru orice* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

7.43. *Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Determinaţi valoarea maximă a lui f şi deduceţi de aici că $e^x \geq x^e$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.*

7.44. *Determinaţi valorile limitelor*

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$; *2)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{\sin(\operatorname{tg} x)}$; *3)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$; *5)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln\left(4 + e^{3x}\right)}{\ln\left(3 + e^{4x}\right)}$; *6)* $\lim\limits_{x \to 0} x e^{\frac{1}{\sin x}}$; *7)* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}\right)$;

8) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$; *9)* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; *10)* $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \ln \dfrac{1}{x-2}$; *11)* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$;

12) $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; *13)* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\frac{2}{3+4\ln x}}$.

7.45. *Dezvoltaţi funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ după puterile lui $x - 2$.*

7.46. *Determinaţi polinomul lui Taylor de ordinul n asociat următoarelor funcţii în punctele date*

1) $f(x) = e^{-3x}$; $x_0 = -\frac{1}{3}$; *2)* $f(x) = \ln(1+3x)$; $x_0 = \frac{1}{3}$; *3)* $f(x) = \sqrt{4x-3}$; $x_0 = 1$; *4)* $f(x) = \cos^2 x$; $x = \frac{\pi}{6}$; *5)* $f(x) = \operatorname{sh} x$; $x_0 = 1$.

7.47. *Determinaţi asimptotele funcţiilor*

1. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x}$;
2. $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x)$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \\ 0, & x = 1 \text{ sau } x = 2 \end{cases}$;
4. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^3-x}{x+2}\right|}$;
5. $f : (-3,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$;
6. $f : (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2-1}$;
7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x + 2\cos 3x$;
8. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|^{\frac{1}{x-1}}$.

7.48. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficul funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ *să aibă dreapta* $y = 1$ *ca asimptotă orizontală.*

7.49. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficul funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+ax+a}$, *să aibă o unică asimptotă verticală.*

7.50. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficul funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x+2}$ *să aibă dreapta* $y = x+2$ *ca asimptotă oblică spre* $+\infty$.

7.51. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficul funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{ax^2+bx}$ *să aibă dreapta* $y = 2x+1$ *ca asimptotă oblică spre* $+\infty$.

7.52. *Demonstraţi că graficul unei funcţii polinomiale de grad* n, $n \geq 2$, *nu are asimptote.*

7.53. *Determinaţi o funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$ *care să aibă ca asimptote verticale toate dreptele* $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.54. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, I interval, două funcţii convexe. Demonstraţi că $f + g$ este o funcţie convexă. Se poate spune acelaşi lucru şi despre $f - g$?*

7.55. *Determinaţi intervalele de convexitate şi concavitate pentru funcţiile*

1. $f : (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;
2. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$;
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x}$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3} \sin x + 2 \cos x$;
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

Au aceste funcţii puncte de inflexiune?

7.56. *Studiind eventual convexitatea funcţiei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, demonstraţi că $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$, pentru orice $x, y \geq 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

7.57. *Studiind eventual convexitatea funcţiei $f : [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sqrt{\sin x}$, demonstraţi că în orice triunghi ABC există relaţia $\sqrt{\sin \frac{A}{2}} + \sqrt{\sin \frac{B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{C}{2}} \leq 3\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

7.58. *Studiind eventual convexitatea funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$, demonstraţi că $\ln \frac{x+y}{2} < \frac{x}{x+y} \ln x + \frac{y}{x+y} \ln y$, pentru orice $x, y > 0$.*

Capitolul 8

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

8.1 Şiruri de funcţii

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ şi fie $f_0, f_1, f_2, \ldots$ funcţii reale definite pe mulţimea D. Şirul $f_0, f_1, f_2, \ldots$ se numeşte *şir de funcţii* şi se notează cu $(f_n)_{n\geq 0}$. La fel ca şi în cazul şirurilor numerice, dorim să studiem proprietăţile de convergenţă ale şirurilor de funcţii, investigând posibilele moduri în care se poate defini noţiunea de convergenţă, şi să cercetăm dacă tipurile de convergenţă astfel definite realizează sau nu transmiterea unor proprietăţi uzuale ale funcţiilor de la termenii unui şir de funcţii la funcţia limită.

8.1.1 Punct de convergenţă. Mulţime de de convergenţă. Limita unui şir de funcţii

Mărginire uniformă

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D. Vom spune că $(f_n)_{n\geq 0}$ este *uniform mărginit* dacă există $M > 0$ astfel încât $|f_n(x)| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in D$.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin nx$. Atunci $|f_n(x)| \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$, deci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform mărginit.

Punct de convergenţă. Mulţime de de convergenţă

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D. Vom spune că $a \in D$ este un *punct de convergenţă* al şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ dacă şirul numeric $(f_n(a))_{n\geq 0}$ al valorilor funcţiilor în a este convergent. Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă ale şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ se va numi atunci *mulţimea de convergenţă* a acestui şir.

Funcţia limită a unui şir de funcţii

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie $E \subseteq D$ mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$. Funcţia $f : E \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

se numeşte *funcţia limită* a şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{nx}} = 1, \text{ pentru } x \in (0,1],$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \text{ pentru } x = 0.$$

Urmează că mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ este $[0,1]$, iar funcţia limită este

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

8.1.2 Convergenţa punctuală a unui şir de funcţii

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie de asemenea $f : D \to \mathbb{R}$. Vom spune că $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge punctual* sau *simplu* la f şi vom nota $f_n \xrightarrow{s} f$ *pentru* $n \to \infty$ dacă pentru orice $x \in D$ şirul numeric $(f_n(x))_{n\geq 0}$ este convergent la $f(x)$. În aceste condiţii, pentru orice $x \in D$ şi orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_{\varepsilon,x}. \tag{8.1}$$

Din exemplul anterior se observă însă că acest tip de convergenţă nu asigură transferul unor proprietăţi cum ar fi continuitatea şi derivabilitatea de la termenii şirului de funcţii către funcţia limită. În acest sens, deşi toţi termenii şirului $(f_n)_{n\geq 0}$ sunt funcţii derivabile pe $[0,1]$, funcţia limită f nu este nici măcar continuă pe acest interval, fiind discontinuă în $x_0 = 0$. Este naturală atunci introducerea unui concept mai puternic de convergenţă.

8.1.3 Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie de asemenea $f : D \to \mathbb{R}$. Vom spune că $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniform* la f şi vom nota $f_n \xrightarrow{u} f$ *pentru* $n \to \infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } x \in D,$$

adică rangul $n_{\varepsilon,x}$ introdus în (8.1) nu mai depinde de x, iar diferenţa $|f_n(x) - f(x)|$ poate fi făcută suficient de mică de la un rang n_ε încolo indiferent de valoarea lui $x \in D$.

Conform definiţiei, se observă atunci că dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, atunci şi $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \to \infty$. Implicaţia inversă nu este însă adevărată, în acest sens putându-se considera următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$. Atunci, deoarece

$$0 \leq x^n(1-x^n) \leq x^n,$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ pentru $x \in [0,1)$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pentru $x \in [0,1)$. Deoarece $f_n(1) = 0$ pentru $n \geq 0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$, deci $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{4}$ şi să presupunem că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$. Atunci există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x)| < \frac{1}{4}, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } x \in [0,1].$$

Însă $f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq 1$, ceea ce contrazice inegalitatea de mai sus. În concluzie, $f_n \overset{u}{\nrightarrow} f$ pentru $n \to \infty$.

8.1.4 Criterii de convergenţă uniformă

Se poate obţine în mod imediat următorul criteriu de convergenţă uniformă, util atunci când limita şirului este cunoscută de la bun început, sau poate fi uşor determinată.

Teorema 8.1. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie de asemenea $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0,$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. Să arătăm că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. În acest sens, conform celor de mai sus, este suficient să demonstrăm că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|\right) = 0.$$

Deoarece f_n este impară pentru orice $n \geq 0$, iar $f_n(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$, urmează că

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = \sup_{x\geq 0}|f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} f_n(x).$$

Întrucât

$$f_n'(x) = \frac{1 + nx^2 - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2},$$

urmează că $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este unicul punct de maxim local al lui f_n pe $[0, \infty)$, iar cum $f_n(x_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, urmează că

$$f_n(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \text{pentru orice } x \geq 0,$$

iar

$$\sup_{x\geq 0} f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

deci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

Vom preciza în cele ce urmează un criteriu care constituie o adaptare a criteriului de convergenţă Cauchy pentru şiruri, menţionând în esenţă faptul că dacă şirurile numerice $(f_n(x))_{n\geq 0}$ sunt fundamentale în mod uniform, în sensul că rangul indicat în condiţia Cauchy depinde doar de ε, nu şi de x, atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent. La fel ca şi în cazul şirurilor numerice, nu este necesar să fie cunoscută limita şirului de funcţii, aşa cum s-a întâmplat în cazul criteriului anterior.

Teorema 8.2. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D. Atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent către o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } m, n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } x \in D.$$

Rezultatul se poate exprima şi sub următoarea formă echivalentă.

Teorema 8.3. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D. Atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent către o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \text{ orice } p \geq 0 \text{ şi orice } x \in D.$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k(k+1)}$. Să arătăm că $(f_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent.

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k(k+1)}\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \Big|\frac{\sin kx}{k(k+1)}\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Deoarece

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

pentru $n \geq n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, urmează că

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \text{ orice } p \geq 0 \text{ şi orice } x \in D.$$

Conform teoremei de mai sus, urmează că $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent.

Următorul rezultat poartă numele de *criteriul majorării* şi indică faptul că o condiţie suficientă pentru convergenţa uniformă a unui şir de funcţii către o funcţie dată este ca modulul diferenţei dintre termenii şirului şi acea funcţie să poată fi majorat, indiferent de valoarea argumentului, de termenii unui şir cu limita 0.

Teorema 8.4. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi fie de asemenea $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă există $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ şi*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi } x \in D,$$

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

Demonstraţie. Deoarece

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

concluzia urmează în mod imediat cu ajutorul Teoremei 8.1. ■

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1}$. Atunci

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\cos nx|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi } x \in [0,1],$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0,$$

deci $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform către funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pentru $x \in [0,1]$.

Pentru studierea convergenţei uniforme a unui şir de funcţii a cărei limită nu este cunoscută de la început, este utilă mai întâi determinarea funcţiei limită „punct cu punct", ţinând seama de faptul că orice şir de funcţii uniform convergent este în mod necesar şi convergent punctual, după care diferenţa dintre termenii şirului şi funcţia limită astfel obţinută se estimează în mod uniform.

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2+2}{nx}$.

Soluţie. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+2}{nx} = \lim_{n\to\infty} (x + \frac{2}{nx}) = x, \quad \text{pentru orice } x \in [1,2],$$

deci $(f_n)_{n\geq 0}$ converge, deocamdată punctual, către funcţia

$$f : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

Să arătăm că această convergenţă este uniformă. Observăm că

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{n}, \quad \text{pentru orice } x \in [1,2],$$

iar deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, urmează conform criteriului majorării că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

În fine, în prezenţa proprietăţii de monotonie, convergenţa punctuală se poate transforma în convergenţă uniformă, aşa cum va fi observat din rezultatul următor, numit *teorema lui Dini*.

Teorema 8.5. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii continue definit pe mulţimea compactă D şie de asemenea o funcţie constantă $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

1. *$f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \to \infty$,*
2. *$(f_n(x))_{n\geq 0}$ este monoton pentru orice $x \in D$,*

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

8.1.5 Transmiterea unor proprietăţi prin convergenţă uniformă

S-a observat anterior că prin convergenţă punctuală proprietăţile de continuitate şi derivabilitate nu se transmit neapărat de la termenii şirului către funcţia limită. Vom observa în cele ce urmează că vehiculul potrivit de transmitere a proprietăţilor uzuale este convergenţa uniformă.

Mărginire

Teorema 8.6. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi mărginite pe D, astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea mărginită pe D.*

Continuitate

Teorema 8.7. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi continue în $a \in D$, astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea continuă în a.*

Conform definiţiei continuităţii pe o mulţime, teorema de mai sus conduce la următorul corolar.

Corolar 8.7.1. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea D şi continue pe D, $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$. Atunci f este de asemenea continuă pe D.*

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Atunci

$$f_n \xrightarrow{s} f \text{ pentru } n \to \infty, \text{ unde } f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Totuşi, f_n nu converge şi uniform la această funcţie, deoarece în caz contrar ar trebui ca f să fie continuă, fiind limita uniformă a unui şir de funcţii continue, iar f este discontinuă în $x_0 = 1$.

Derivabilitate

Prin analogie cu transmiterea proprietăţilor de mărginire şi continuitate de la termenii unui şir uniform convergent către funcţia limită, s-ar putea crede că şi proprietatea de derivabilitate se transmite prin convergenţă uniformă. Acest lucru nu este însă adevărat, aşa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2n}, & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ x + \frac{1}{2n}, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Atunci

$$f_n'(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{1}{n} \\ nx, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

În plus,

$$\left(f_n'\right)_s\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{n} \\ x < -\frac{1}{n}}} \frac{f_n(x) - f_n\left(-\frac{1}{n}\right)}{x - \left(-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{n} \\ x < -\frac{1}{n}}} \frac{-x - \frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}} = -1$$

$$\left(f_n'\right)_d\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{n} \\ x > -\frac{1}{n}}} \frac{f_n(x) - f_n\left(-\frac{1}{n}\right)}{x - \left(-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{n} \\ x > -\frac{1}{n}}} \frac{\frac{n}{2}x^2 - \frac{1}{2n}}{x + \frac{1}{n}} = -1,$$

deci f_n este derivabilă în $x_1 = -\frac{1}{n}$, iar $f_n'(-\frac{1}{n}) = -1$. Similar, f_n este derivabilă în $x_2 = \frac{1}{n}$, iar $f_n'(\frac{1}{n}) = 1$. În concluzie, f_n este derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru orice $n \geq 1$.

Fie acum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Vom estima $|f_n(x) - f(x)|$, pentru $x \in \mathbb{R}$, cu scopul de a demonstra că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

Avem că

$$|f_n(x) - f(x)| = |-\frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n}, \qquad \text{pentru } x \leq -\frac{1}{n}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{n}{2}x^2 - |x|| \leq \frac{n}{2}|x|^2 + |x| \leq \frac{3}{2n}, \qquad \text{pentru } x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n}, \qquad \text{pentru } x \geq \frac{1}{n}.$$

În concluzie,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2n}, \qquad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

iar conform criteriului majorării urmează că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$. Totuşi, funcţia limită f nu este derivabilă în $x = 0$, deci proprietatea de derivabilitate nu se transmite neapărat prin convergenţă uniformă.

Exemplul, totuşi, nu este surprinzător. Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii este o proprietate globală, măsurând, într-un anumit sens, cât de „aproape" sunt termenii acestui şir de funcţia limită, în vreme ce derivabilitatea unei funcţii este o proprietate locală, măsurând viteza de variaţie a acelei funcţii. În acest sens, două funcţii pot avea valori „apropiate", dar valorile uneia dintre ele pot varia cu mult mai repede decât valorile celeilalte, fie şi doar local, caz în care derivatele celor două funcţii nu vor fi „apropiate" una de alta.

O altă întrebare naturală este dacă uniforma convergenţă a unui şir $(f_n)_{n\geq 0}$ atrage uniforma convergenţă a şirului derivatelor sale $(f_n')_{n\geq 0}$. Răspunsul la această întrebare este de asemenea negativ, din aceleaşi motive enunţate mai sus, aşa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$. Deoarece

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

urmează conform criteriului majorării că $f_n \xrightarrow{u} f$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Totuşi, deoarece $f_n'(x) = \cos nx$, iar $f_n'(\frac{\pi}{2}) = (-1)^n$, urmează că $(f_n'(\frac{\pi}{2}))_{n\geq 0}$ nu este convergent, iar $(f_n')_{n\geq 0}$ nu poate fi uniform convergent pe $\mathbb{R}$, întrucât mulţimea sa de convergenţă nu este întreg $\mathbb{R}$.

Se va observa însă că transferul de derivabilitate se produce în condiţiile în care sunt asigurate atât convergenţa uniformă a şirului funcţiilor, cât şi convergenţa uniformă a şirului derivatelor.

Teorema 8.8. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii derivabile definite pe un interval I şi fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât*

1. *$(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent, $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.*
2. *$(f_n')_{n\geq 0}$ este uniform convergent, $f_n' \xrightarrow{u} g$ pentru $n \to \infty$.*

Atunci f este derivabilă, iar $f' = g$.

Egalitatea $f' = g$ de mai sus se poate pune şi sub forma

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} (f_n'),$$

spunându-se că, în condiţiile teoremei, *limita derivatelor este derivata limitei*.

Dacă intervalul I este mărginit, atunci este suficient ca $(f_n)_{n\geq 0}$ să fie convergent într-un singur punct, restul ipotezelor implicând convergenţa uniformă a acestui şir.

Teorema 8.9. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii derivabile definite pe un interval mărginit I şi fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât*

1. *$(f_n)_{n\geq 0}$ este convergent într-un punct $a \in I$.*

2. *$(f'_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent, $f'_n \xrightarrow{u} g$ pentru $n \to \infty$.*

Atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent către o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, f este derivabilă, iar $f' = g$.

Integrabilitate

Pentru conformitate, menţionăm aici că şi proprietatea unei funcţii de a fi integrabilă Riemann, care va fi studiată ulterior, se transmite la rândul ei de la termenii unui şir uniform convergent către funcţia limită.

Teorema 8.10. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii integrabile Riemann definite pe un interval $[a, b]$ astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea integrabilă Riemann pe $[a, b]$, iar*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Observăm atunci că, în condiţiile teoremei, *limita integralelor este integrala limitei*.

8.2 Serii de funcţii

Fiind dat un şir de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$, vom numi *serie de funcţii de termen general f_n* cuplul $((f_n)_{n\geq 0}, (S_n)_{n\geq 0})$ format din şirul $(f_n)_{n\geq 0}$ al termenilor seriei şi şirul de funcţii $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale, definit după regula

$$S_n = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n.$$

În această situaţie, f_n se va numi şi *termenul de rang n* sau *indice n* al seriei. Vom nota o serie de funcţii de termen general f_n prin

$$f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$
Dacă primii k termeni $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ nu sunt definiţi, vom nota seria de funcţii de termen general f_n prin
$$f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \ldots + f_n + \ldots,$$
respectiv prin
$$\sum_{n=k}^{\infty} f_n.$$

8.2.1 Punct de convergenţă. Mulţime de convergenţă. Suma unei serii de funcţii

Pentru a studia convergenţa seriilor de funcţii, vom utiliza noţiunile şi rezultatele menţionate anterior pentru şiruri de funcţii şi serii numerice.

Punct de convergenţă. Mulţimea de convergenţă

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Vom spune că $a \in D$ este un *punct de convergenţă* al seriei de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dacă şirul numeric $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ este convergent, adică a este punct de convergenţă pentru şirul de funcţii $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale. Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă ale seriei de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi atunci *mulţimea de convergenţă* a acestei serii.

Exemplu. Fie seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ şi fie $x \in \mathbb{R}$ fixat. Studiem absoluta convergenţă a seriei numerice obţinute. Urmează că
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{1+x^{2n}}}.$$
Pentru $x \in (-1, 1)$, $L = |x| < 1$, deci seria obţinută pentru acest x este absolut

convergentă, conform criteriului radicalului. Pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

$$L = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1}} = \frac{1}{|x|} < 1,$$

deci seria obţinută pentru acest x este absolut convergentă, conform criteriului radicalului. Pentru $x = -1$, seria iniţială devine $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. Pentru $x = 1$, seria iniţială devine $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Suma unei serii de funcţii

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D şi fie $E \subseteq D$ mulţimea sa de convergenţă. Funcţia $S : E \to \mathbb{R}$ definită prin

$$S : E \to \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

se va numi *suma* seriei de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$.

8.2.2 Convergenţa punctuală a unei serii de funcţii

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă punctual* sau *simplu* către $f : D \to \mathbb{R}$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent punctual către f, adică pentru orice $a \in D$ seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ este convergentă către $f(a)$.

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă absolut* dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ este convergentă punctual, adică pentru orice $a \in D$ seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(a)|$ este convergentă.

Să remarcăm că, la fel ca şi în cazul seriilor numerice, dacă o serie de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă, atunci ea este şi convergentă. În plus, deoarece pentru seriile numerice cu termeni pozitivi convergenţa este echivalentă cu mărginirea, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă dacă şi numai dacă $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(a)|$ este mărginită pentru orice $a \in D$.

8.2.3 Convergenţa uniformă a unei serii de funcţii

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă uniform* către $f : D \to \mathbb{R}$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent uniform către f.

Exemplu. Fie seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$. Să demonstrăm că seria este convergentă uniform pe $(0,\infty)$.

Într-adevăr,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x}, \quad \text{pentru orice } x \in (0,\infty),$$

deci $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă, deocamdată punctual, la $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Deoarece

$$|S_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

urmează conform criteriului majorării că $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent uniform la f, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă uniform pe $(0,\infty)$.

8.2.4 Criterii de convergenţă uniformă

Conform Teoremei 8.3 şi definiţiei convergenţei uniforme, se obţine următorul criteriu de convergenţă uniformă.

Teorema 8.11. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon$*, orice* $p \geq 0$ *şi orice* $x \in D$.

De asemenea, prin analogie cu Teorema 8.4, se poate enunţa şi demonstra următorul criteriu de convergenţă uniformă şi absolută pentru serii de funcţii, numit *criteriul lui Weierstrass*.

Teorema 8.12. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea D. Dacă există* $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale pozitive astfel încât* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *este convergentă şi*

$$|f_n(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi } x \in D,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *este absolut şi uniform convergentă.*

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}$. Deoarece

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}\right| \leq \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi orice } x \in \mathbb{R},$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ este convergentă, fapt care poate fi demonstrat, de exemplu, cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel sau comparând seria dată cu seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ cu ajutorul criteriului de comparaţie cu limită, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}$ este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Criteriul lui Dirichlet

La fel ca şi în cazul seriilor numerice, înmulţirea termenului general al unei serii de funcţii nu neapărat convergente, dar cu şirul sumelor parţiale uniform mărginit cu termenul general al unui şir de funcţii cu valori „mici" (monoton descrescător pentru orice valoare fixată a argumentului şi uniform convergent la 0) „îmbunătăţeşte" covergenţa seriei, în sensul că seria de funcţii ce are ca termen general rezultatul acestui produs este uniform convergentă.

Teorema 8.13. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D care are şirul sumelor parţiale uniform mărginit. Fie $(g_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe D cu proprietăţile următoare.*

1. *$g_n \xrightarrow{u} 0$ pentru $n \to \infty$.*

2. *Şirul numeric $(g_n(x))_{n\geq 0}$ este monoton descrescător pentru orice $x \in D$.*

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă.

Criteriul lui Abel

Similar, înmulţirea termenului general al unei serii de funcţii uniform convergente cu termenul general al unui şir de funcţii cu proprietăţi suficient de bune (uniform mărginit şi monoton pentru valoare fixată a argumentului) păstrează uniforma convergenţă a seriei.

Teorema 8.14. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea D care este uniform convergentă. Fie $(g_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe D cu proprietăţile următoare:*

1. *$(g_n)_{n\geq 0}$ este uniform mărginit.*

2. *Şirul numeric $(g_n(x))_{n\geq 0}$ este monoton pentru orice $x \in D$.*

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ *este uniform convergentă pe* D.

Criteriul lui Leibniz

Teorema 8.15. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea* D *cu proprietăţile următoare:*

1. $f_n \xrightarrow{u} 0$ *pentru* $n \to \infty$.

2. *Şirul numeric* $(f_n(x))_{n\geq 0}$ *este monoton descrescător pentru orice* $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ *este uniform convergentă pe* D.

8.2.5 Transmiterea unor proprietăţi prin convergenţă uniformă

Prin analogie cu rezultatele corespunzătoare pentru şiruri de funcţii, se pot discuta continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea sumelor seriilor uniform convergente.

Continuitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.16. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea* D *care este uniform convergentă către o funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$. *Dacă toate funcţiile* f_n *sunt continue în* $a \in D$ *(respectiv pe* D*), atunci* f *este de asemenea continuă în* a *(respectiv pe* D*).*

Derivabilitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.17. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii derivabile definite pe un interval* I *şi fie* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă,* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xrightarrow{u} f$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$ *este uniform convergentă,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n' \xrightarrow{u} g$.

Atunci f *este derivabilă, iar* $f' = g$.

Egalitatea $f' = g$ de mai sus se poate pune şi sub forma

$$(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n'),$$

spunându-se că, în condiţiile teoremei, seriile de funcţii convergente uniform se pot *deriva termen cu termen*.

Dacă intervalul I este mărginit, atunci este suficient ca $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ să fie convergentă într-un singur punct, restul ipotezelor implicând convergenţa uniformă a acestei serii.

Teorema 8.18. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii derivabile definite pe un interval mărginit* I *şi fie* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât*

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *este convergentă într-un punct* $a \in I$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$ *este uniform convergentă,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n' \xrightarrow{u} g$.

Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă către o funcţie* $f : I \to \mathbb{R}$, f *este derivabilă, iar* $f' = g$.

Pentru conformitate, menţionăm aici şi un rezultat privitor la integrarea seriilor uniform convergente.

Integrabilitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.19. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii integrabile Riemann definite pe un interval mărginit* $[a, b]$, *uniform convergentă către o funcţie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Atunci* f *este de asemenea integrabilă Riemann pe* $[a, b]$, *seria integralelor* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

este convergentă, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

8.3 Serii de puteri

Vom numi *serie de puteri centrată în* x_0 o serie de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ pentru care funcţiile f_n, $n \geq 0$, au forma particulară $f_n = a_n(x - x_0)^n$, unde a_n, $n \geq 0$, şi x_0 sunt numere reale. O serie de puteri centrată în x_0 are deci forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{8.2}$$

fiind unic determinată de numărul $x_0 \in \mathbb{R}$ şi de şirul $(a_n)_{n\geq 0}$. Dacă $x_0 = 0$, se obţine cazul particular al seriei de puteri centrată în origine

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \tag{8.3}$$

Întrucât după schimbarea de variabilă $x - x_0 = y$ seria (8.2) de mai sus se scrie sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n,$$

similară cu (8.3), se va considera în cele ce urmează doar cazul în care $x_0 = 0$, iar seria de puteri se scrie sub forma (8.3), adaptarea rezultatelor pentru cazul $x_0 \neq 0$ putându-se face cu uşurinţă.

8.3.1 Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri

Pentru o serie de funcţii oarecare, mulţimea de convergenţă poate avea o structură complexă. Totuşi, pentru serii de puteri situaţia este cu mult mai simplă. Se poate observa că seria (8.3) este convergentă pentru $x = 0$, având suma a_0. Mai departe, se va demonstra că (8.3) poate converge doar în $x = 0$, poate converge pe întreaga axă reală sau poate converge pe un interval deschis simetric faţă de origine, o întrebare adiţională fiind dacă seria (8.3) converge şi în capetele acestui interval.

Mai întâi, vom exemplifica aceste situaţii.

Convergenţă doar în 0

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ şi fie $x \neq 0$ fixat. Atunci notând $b_n = n!x^n$, urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty,$$

ceea înseamnă că $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$, iar, pentru acest x fixat, seria dată nu poate fi convergentă, întrucât termenul ei general nu tinde la 0. În concluzie, seria dată converge doar pentru $x = 0$.

Convergenţă pentru orice $x \in \mathbb{R}$

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ şi fie $x \neq 0$ fixat. Atunci notând $b_n = \frac{x^n}{n!}$, urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

iar, conform criteriului raportului pentru serii numerice, seria dată este absolut convergentă pentru acest x fixat, deci şi convergentă. În concluzie, seria dată converge pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Convergenţă pe un interval deschis centrat în 0

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. S-a observat deja că pentru $x \in (-1, 1)$ fixat, seria dată este convergentă, cu suma $\frac{1}{1-x}$, iar pentru $x \in (-\infty - 1] \cup [1, \infty)$ fixat, seria dată este divergentă, întrucât termenul său general nu tinde la 0. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $(-1, 1)$.

Convergenţă pe un interval deschis centrat în 0

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ şi fie $x \neq 0$ fixat. Atunci, notând $b_n = \frac{x^n}{n}$, urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n|x|}{n+1} = |x|.$$

Pentru $x \in (-1, 1)$, urmează, conform criteriului raportului pentru serii numerice, că seria dată este absolut convergentă, deci şi convergentă. Pentru $|x| > 1$, urmează că $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$, iar seria dată este divergentă, întrucât termenul general nu tinde la 0.

Rămâne deci să studiem convergenţa seriei în capetele intervalului menţionat anterior, anume în $x = -1$ şi $x = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă. Pentru $x = -1$, seria dată devine seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz pentru serii numerice. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $[-1, 1)$.

Cu un raţionament similar celui de mai sus, se poate observa că mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ este $(-1, 1]$, în vreme ce mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ este $[-1, 1]$, nicio afirmaţie generală neputând fi făcută *a priori* relativ la convergenţa sau divergenţa seriei la extremităţile mulţimii de convergenţă.

Rezultatul următor, cunoscut sub numele de *teorema lui Abel*, furnizează informaţii adiţionale despre conţinutul mulţimii de convergenţă.

Teorema 8.20. *Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Fie de asemenea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ este convergentă, respectiv seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ este divergentă. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge în orice punct x cu $|x| < |x_1|$, respectiv diverge în orice punct x cu $|x| > |x_2|$.*

2. *Pentru orice $r \in (0, |x_1|)$, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.*

Determinarea razei de convergenţă a unei serii de puteri

S-a observat deja că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $x = 0$, iar teorema lui Abel ne asigură de următoarele lucruri.

1. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $x = x_1$, atunci este convergentă şi pentru $|x| < |x_1|$.

2. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pentru $x = x_2$, atunci este divergentă şi pentru $|x| > |x_2|$.

Fie E mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi fie

$$R = \sup E,$$

numit şi *raza de convergenţă* a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Conform celor de mai sus, $0 \in E$, deci $R \geq 0$. Sunt posibile următoarele situaţii.

1. $\mathbf{R = 0}$

Dacă $x \neq 0 \in E$, atunci $(-|x|, |x|) \subseteq E$, deci $R \geq |x|$, contradicţie. Atunci $E = \{0\}$.

2. $\mathbf{0 < R < \infty}$

Conform caracterizării analitice a marginii superioare a unei mulţimi şi teoremei lui Abel, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pe $(-R, R)$, divergentă pe $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ şi absolut convergentă pe orice interval $[-r, r]$, cu $r < R$. Relativ la comportarea seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ în cele două capete ale intervalului $(-R, R)$, aceasta poate fi convergentă în ambele, într-unul singur, sau în niciunul, în acest sens putând fi studiate exemplele menţionate anterior.

3. $\mathbf{R = +\infty}$

Atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$ şi uniform convergentă pe orice interval $[-r, r]$, cu $r \in \mathbb{R}$.

În toate aceste cazuri, dacă E este mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, iar R este raza sa de convergenţă, atunci

$$(-R, R) \subseteq E \subseteq [-R, R].$$

Intervalul $(-R, R)$ poartă numele de *intervalul de convergenţă* al seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (a nu se confunda cu mulţimea de convergenţă a acestei serii, care mai poate conţine eventual şi capetele $-R$ şi R ale acestui interval).

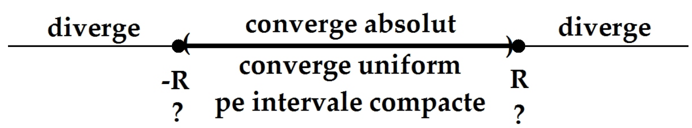


Figura 8.1: Convergenţa unei serii de puteri

Formulele Cauchy-Hadamard

Având în vedere faptul că pe intervalul de convergenţă $(-R, R)$ seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă, pentru determinarea razei de convergenţă vom folosi criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi, aplicate seriei modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Mai întâi, vom preciza o modalitate de determinare a razei de convergenţă a seriei de puteri cu ajutorul limitei unui raport.

Teorema 8.21. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri cu coeficienţi nenuli. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \textit{dacă } \lambda \in (0, \infty), \\ \infty, & \textit{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \textit{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Aplicând criteriul raportului seriei numerice cu termeni strict pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \lambda |x|,$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $|x| < \frac{1}{\lambda}$ şi divergentă pentru $|x| > \frac{1}{\lambda}$. De aici rezultă în mod imediat teorema de mai sus. ■

Exemplu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1,$$

iar raza de convergenţă a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă, conform criteriului Raabe-Duhamel, sau conform criteriului de comparaţie cu limită, folosind ca termen de comparaţie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pentru $x = -1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Urmează că mulţimea de convergenţă a seriei de puteri date este $[-1, 1]$.

Vom preciza acum o modalitate de determinare a razei de convergenţă a seriei de puteri cu ajutorul limitei unui radical.

Teorema 8.22. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}$. Aplicând criteriul radicalului cu limite extreme seriei cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, observăm că

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| = \lambda |x|,$$

iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $|x| < \frac{1}{\lambda}$ şi divergentă pentru $|x| > \frac{1}{\lambda}$. De aici rezultă în mod imediat teorema de mai sus. ■

Teorema de mai sus se poate particulariza sub următoarea formă.

Teorema 8.23. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \textit{dacă } \lambda \in (0,\infty), \\ \infty, & \textit{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \textit{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Formulele cuprinse în Teoremele 8.21 şi 8.22 poartă numele de *formulele Cauchy-Hadamard*.

Exemple. 1. Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+5^n} x^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n+5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}} = \frac{1}{5},$$

iar raza de convergenţă a seriei de puteri date este $R = 5$. Pentru $x = 5$, seria dată devine $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^n+5^n}$, care este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{2^n+5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1} = 1$, iar limita termenului său general nu este 0. Pentru $x = -5$, seria dată devine $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{2^n+5^n}$, care este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-5)^n}{2^n+5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}$ nu există, întrucât numărătorul nu are limită pentru $n \to \infty$, iar limita numitorului este 1. Urmează că mulţimea de convergenţă a seriei de puteri date este $(-5, 5)$.

2. Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$. Cu notaţia $x + 1 = y$, obţinem

seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} y^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}} = 3,$$

iar raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} y^n$ este $R = \frac{1}{3}$. Pentru $y = \frac{1}{3}$, această serie devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}$, fiind serie cu termeni pozitivi, iar cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}$ are aceeaşi natură cu seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, deci este divergentă. Pentru $y = -\frac{1}{3}$, seria de puteri în y devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Urmează că mulţimea de convergenţă a seriei în y este $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, iar ţinând seama că $y = x + 1$, deci $x = y - 1$, mulţimea de convergenţă seriei de puteri în x este $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Suma unei serii de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă $R > 0$ şi fie E mulţimea sa de convergenţă. S-a observat deja că $(-R, R) \subseteq E \subseteq [-R, R]$. Ca şi în cazul general al seriilor de funcţii, se poate defini funcţia $S : E \to \mathbb{R}$,

$$S : E \to \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

numită *suma* seriei de puteri, unde

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

reprezintă suma parţială de ordinul n a seriei de puteri.

Teorema 8.24. *Suma seriei de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este funcţie continuă pe* $(-R, R)$.

Demonstraţie. Fie $r \in (0, R)$. Conform teoremei lui Abel, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$, iar cum sumele parţiale S_n ale seriei sunt funţii continue pe $[-r, r]$, urmează că S este funcţie continuă pe $[-r, r]$, întrucât proprietatea de continuitate a sumelor parţiale se transmite prin convergenţă uniformă. Cum $r \in (0, R)$ era arbitrar, urmează că S este funcţie continuă pe $(-R, R)$. ■

Comportarea funcţiei sumă în capetele intervalului de convergenţă

Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă şi în R sau $-R$, atunci funcţia sumă S este bine definită şi în aceste puncte, continuitatea sa neputându-se însă decide cu ajutorul teoremei de mai sus. Teorema de mai jos, numită şi *teorema a doua a lui Abel*, furnizează un răspuns în această direcţie.

Teorema 8.25. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *cu raza de convergenţă* $R > 0$. *Dacă seria de puteri este convergentă în* $x = R$ *(respectiv în* $x = -R$*), atunci suma sa* S *este funcţie continuă în* $x = R$ *(respectiv în* $x = -R$*).*

Combinând teorema a doua a lui Abel cu proprietatea de continuitate pe $(-R, R)$ obţinută anterior, observăm că suma unei serii de puteri este continuă în toate punctele în care este bine definită, lucru afirmat în următorul rezultat.

Corolar 8.25.1. *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Atunci suma sa este o funcţie continuă pe mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.*

Derivarea unei serii de puteri

Fie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

o serie de puteri şi fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_2 x^2 + \ldots + n a x^{n-1} + \ldots$$

seria de puteri obţinută prin derivarea termen cu termen a seriei iniţiale, numită *seria derivatelor*. Vom preciza în cele ce urmează legăturile dintre razele de convergenţă ale celor două serii şi dintre sumele acestora.

Teorema 8.26. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri şi fie* R *raza sa de convergenţă, iar* S *funcţia sa sumă. Atunci seria derivatelor* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *are aceeaşi rază de convergenţă* R*,* S *este derivabilă pe* $(-R, R)$*, iar*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \text{pentru } x \in (-R, R).$$

Să notăm că relaţia de derivare din teorema de mai sus se poate scrie sub forma

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

iar derivarea unei serii de puteri se poate face termen cu termen pe intervalul de convergenţua. Repetând raţionamentul în mod inductiv, se poate deduce următorul rezultat.

Teorema 8.27. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri şi fie* R *raza sa de convergenţă, iar* S *funcţia sa sumă. Atunci seria derivatelor de ordinul* k*,*

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \quad k \geq 1,$$

are aceeaşi rază de convergenţă, S *este indefinit derivabilă pe* $(-R, R)$*, iar*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \quad \text{pentru } x \in (-R, R).$$

Exerciţiu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

1. Determinaţi raza de convergenţă a acestei serii de puteri, studiaţi-i convergenţa şi precizaţi suma sa.

2. Calculaţi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Soluţie. 1. Deoarece

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

urmează că raza de convergenţă a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Pentru $x = -1$ seria dată devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă, fiind seria armonică înmulţită cu constanta -1. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $(-1, 1]$.

Pentru $x \in (-1, 1)$, să notăm $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Atunci

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Cum $S'(x) = \frac{1}{1+x}$, urmează că $S(x) = \ln(1+x) + C$, conform unui corolar al teoremei lui Lagrange. Deoarece $S(0) = 0$, se obţine că $C = 0$, iar $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Deoarece seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ este convergentă şi în $x = 1$, urmează conform celei de-a doua teoreme a lui Abel că suma sa S este funcţie continuă în $x = 1$, şi deci

$$S(1) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} S(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \ln(1+x) = \ln 2,$$

deci $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1]$.
2. În particular, din cele de mai sus se obţine că

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots = \ln 2.$$

8.3.2 Seria binomială

Fie seria de puteri

$$1+\frac{k}{1!}x+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad k\in\mathbb{R}, \tag{8.4}$$

numită în cele ce urmează *seria binomială*. Observăm că pentru $k=n$, $n\in\mathbb{N}$, seria se transformă într-o sumă finită, având ca rezultat o funcţie polinomială de gradul n. Vom presupune acum că $k\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)|}{(n+1)!}}{\frac{|k(k-1)\cdots(k-n+1)|}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|k-n|}{|n+1|}=1,$$

urmează că seria binomială (8.4) are raza de convergenţă $R=1$. Fie $S:(-1,1)\to\mathbb{R}$ suma sa. Atunci, conform teoremei de derivare a seriilor de puteri,

$$S'(x)=k+\frac{k(k-1)}{1!}x+\ldots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots,\quad x\in(-1,1)$$

de unde

$$xS'(x)=kx+\frac{k(k-1)}{1!}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n+\ldots,\quad x\in(-1,1)$$

iar

$$(1+x)S'(x)=kS(x),\quad x\in(-1,1).$$

De aici, înmulţind ambii membri cu $(1+x)^{k-1}$, obţinem că

$$(1+x)^kS'(x)-k(1+x)^{k-1}S(x)=0,\quad x\in(-1,1),$$

deci

$$\left(\frac{S(x)}{(1+x)^k}\right)'=0,\quad x\in(-1,1),$$

iar $S(x)=C(1+x)^k$, $C\in\mathbb{R}$. Deoarece $S(0)=1$, urmează că $C=1$, de unde $S(x)=(1+x)^k$. Obţinem deci că, pentru orice $x\in(-1,1)$,

$$(1+x)^k=1+\frac{k}{1!}x+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

formulă care generalizează formula binomială a lui Newton, valabilă pentru $k \in \mathbb{N}$. Pentru diverse valori particulare ale lui k se obţin sumele unor serii uzuale de puteri.

Astfel, pentru $k = -1$ obţinem

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1),$$

de unde, substituind x cu $-x$ obţinem

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1),$$

iar substituind x cu x^2 obţinem

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Pentru $k = \frac{1}{2}$ obţinem

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1),$$

iar pentru $k = -\frac{1}{2}$ obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Reamintim aici că $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots 2n$. Substituind x cu $-x^2$ obţinem că

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Integrarea unei serii de puteri

Teorema 8.28. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri şi fie* R *raza sa de convergenţă, iar* S *funcţia sa sumă. Atunci seria obţinută prin integrare termen cu termen* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *are aceeaşi rază de convergenţă* R, S *este integrabilă pe orice interval* $[a, b] \subseteq (-R, R)$, *iar*

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-R, R).$$

Exerciţiu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

1. Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.

2. Determinaţi suma seriei de puteri.

Soluţie. 1. Deoarece

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{n+1}{n+2}\right|}{\left|\frac{n}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)^2|}{|n(n+2)|} = 1,$$

urmează că raza de convergenţă a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. Pentru $x = -1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei date este $(-1, 1)$.

2. Observăm mai întâi că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Rămâne deci să calculăm suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = S(x)$. Cum

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

obţinem prin integrare termen cu termen în condiţiile Teoremei 8.28 că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1),$$

deci
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}, \quad x \in (-1,1).$$
Alternativ, puteam observa că
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1),$$
deci $S(x) = -\ln(1-x) + C$. Deoarece $S(0) = 0$, urmează că $C = 0$, iar $S(x) = -\ln(1-x)$.

8.3.3 Dezvoltarea unei funcţii în serie Taylor

În situaţia în care o funcţie se poate reprezenta ca suma unei serii de puteri centrate în x_0, $x_0 \in \mathbb{R}$, ea se poate deriva uşor termen cu termen pe intervalul de convergenţă al seriei, derivatele sale exprimându-se tot ca serii de puteri cu aceeaşi rază de convergenţă. Astfel, dacă
$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \\ &\qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R), \end{aligned}$$
atunci
$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n + \cdots, \\ &\qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R) \end{aligned}$$
şi, în general,
$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= k! a_k + (k+1)k \cdots 2 a_{k+1}(x-x_0) + \cdots \\ &\qquad + (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)(x-x_0)^n + \cdots, \\ &\qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$
Să notăm faptul că, înlocuind $x = x_0$ în formulele de mai sus, obţinem că
$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$
Cunoscându-se deci faptul că o funcţie f se poate exprima ca o serie de puteri centrată într-un punct oarecare şi cu raza de convergenţă nenulă (fiind deci indefinit derivabilă pe intervalul de convergenţă), se poate determina o formulă de calcul pentru derivatele sale de orice ordin în acel punct.

Teorema 8.29. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *o serie de puteri centrată în* x_0 *cu raza de convergenţă* $R > 0$*, mulţimea de convergenţă* E *şi suma* $f : E \to \mathbb{R}$*. Atunci* f *este indefinit derivabilă pe intervalul* $(x_0 - R, x_0 + R)$*, iar*

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k \quad \text{pentru orice } k \geq 0. \tag{8.5}$$

O întrebare naturală este dacă se poate reface drumul şi în sens invers, adică dată fiind o funcţie indefinit derivabilă, aceasta se poate scrie ca suma unei serii de puteri centrate într-un punct dat, coeficienţii seriei de puteri fiind calculaţi cu ajutorul formulei (8.5). În absenţa unor condiţii suplimentare asupra funcţiei f, răspunsul este negativ, aşa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Să observăm că pentru orice polinom $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(u)}{e^{u^2}} = \lim_{u\to-\infty} \frac{P(u)}{e^{u^2}} = 0,$$

egalităţi demonstrabile uşor cu ajutorul regulii lui l'Hôpital, şi deci

$$\lim_{x\to 0} P(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Se poate observa că

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{(n)} = P_n(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

unde $(P_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}[X]$ este un şir de polinoame care verifică relaţia de recurenţă

$$P_{n+1}(X) = 2P_n(X)X^3 - X^2 P_n'(X),$$

de unde, conform celor de mai sus, f admite derivate de orice ordin în $x = 0$, iar $f^{(k)}(0) = 0$ pentru $k \geq 0$. Atunci, conform formulei (8.5), ar trebui ca $a_k = 0$ pentru $k \geq 0$. Cum $f(x) \neq 0$ pentru $x \neq 0$, f nu poate fi suma seriei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, cu a_k, $k \geq 0$, precizaţi de (8.5) pe niciun subinterval al lui $\mathbb{R}$.

Vom preciza în continuare condiţii suplimentare cu ajutorul cărora se poate asocia unei funcţii f o serie de puteri centrată în x_0 şi convergentă la f prin intermediul formulelor (8.5).

Seria Taylor asociată unei funcţii într-un punct. Seria MacLaurin

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ astfel încât f este indefinit derivabilă în x_0. Vom numi *serie Taylor centrată în x_0 asociată lui f* seria de puteri T_f definită prin

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{8.6}$$

Pentru $x_0 = 0$, vom numi *seria MacLaurin asociată lui f* seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Să notăm că T_f este o serie de funcţii definite pe întreg $\mathbb{R}$, nu doar pe I, iar sumele parţiale de ordinul k, S_k, ale seriei Taylor centrate în x_0 asociate lui f sunt polinoamele Taylor definite în Capitolul 7, anume

$$\begin{aligned} T_k &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Totuşi, în acest moment, această asociere este pur formală, întrucât chiar dacă seria Taylor T_f definită mai sus converge în mod obligatoriu pentru $x = x_0$, ea poate să nu mai conveargă în niciun alt punct, având raza de convergenţă 0. Mai mult, chiar dacă seria Taylor T_f este convergentă, ea poate converge la o altă funcţie decât funcţia f iniţială, în acest sens putându-se observa exemplul de mai sus, în care T_f este funcţia identic nulă, fără ca f să aibă aceeaşi proprietate.

Vom spune atunci că $f : I \to \mathbb{R}$, f indefinit derivabilă în $x_0 \in I$, este *dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0* dacă seria Taylor centrată în x_0 asociată lui f are raza de convergenţă $R > 0$ şi converge la f pe $(x_0 - R, x_0 + R) \cap I$, adică

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \text{pentru } x \in (x_0 - R, x_0 + R) \cap I.$$

Convergenţa seriei Taylor

Să ne reamintim că

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

unde R_n este restul formulei lui Taylor de ordinul n, iar T_n reprezintă polinomul Taylor de ordinul n, egal cu suma parţială de ordinul n a seriei de funcţii T_f. Intrucât dorim ca T_f să coincidă cu f cel puţin pentru funcţii f cu regularitate ridicată, intuim că diferenţa $R_n(x)$ între „funcţia ţintă" $f(x)$ şi suma parţială $T_n(x)$ trebuie să tindă la 0. Se poate obţine atunci următorul rezultat.

Teorema 8.30. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ astfel încât f este indefinit derivabilă în x_0. Fie de asemenea $a \in I$. Atunci seria Taylor T_f este convergentă în a la $f(a)$ dacă şi numai dacă şirul $(R_n(a))_{n\geq 0}$ al resturilor formulei lui Taylor calculate pentru $x = a$ este convergent la 0.*

Demonstraţie. Fie $a \in I$. Atunci

$$f(a) = T_n(a) + R_n(a) = S_n(a) + R_n(a),$$

unde S_n reprezintă sumele parţiale ale lui T_f, egale cu polinoamele Taylor de ordinul n, T_n. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(a) = 0 \Leftrightarrow (S_n(a))_{n\geq 0}$ este convergent, cu limita $f(a) \Leftrightarrow T_f$ este convergentă în $x = a$, iar $T_f(a) = f(a)$. ■

Estimând restul de ordinul n sub forma lui Lagrange, obţinem cu ajutorul teoremei de mai sus următoarele condiţii suficiente de convergenţă.

Teorema 8.31. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, $f \in C^\infty(I)$, astfel încât există $M > 0$ şi $\delta > 0$ cu proprietatea că*

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M}{\delta^n} n! \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi } x \in I.$$

Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0, iar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \text{pentru } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

Teorema 8.32. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, $f \in C^\infty(I)$, astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea că*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \textit{pentru orice } n \geq 0 \textit{ şi } x \in I.$$

Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0, iar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad \textit{pentru } x \in I.$$

Demonstraţie. Ca mai sus,

$$|R_n(x)| \leq M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Notând $a_n = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$, observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|}{n+2} = 0.$$

De aici, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, de unde concluzia. ■

Vom spune atunci că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, f indefinit derivabilă pe I, I interval, este *analitică* pe I dacă pentru orice $x_0 \in I$ f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0.

8.3.4 Exemple de dezvoltări în serie Taylor

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. S-a observat deja că

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta_x x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta_x \in (0, 1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1},$$

iar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În concluzie,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Substituind x cu $-x$, obţinem şi că

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. S-a observat deja că

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\theta_x x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \theta_x \in (0,1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

iar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. S-a observat deja că

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(\theta_x x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta_x \in (0,1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

iar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alte dezvoltări remarcabile în serie MacLaurin sunt

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, && x \in (-1,1),\\
\arcsin x &= 1 + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, && x \in (-1,1),\\
\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, && x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Operaţii cu serii de puteri

Fie seriile de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, cu razele de convergenţă R_1, respectiv R_2, şi fie $c \in \mathbb{R}^*$.

Suma a două serii de puteri

Suma celor două serii de puteri este seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$, cu raza de convergenţă $R \geq \min(R_1, R_2)$. În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Seria produs cu o constantă

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n$ are raza de convergenţă R_1. În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R_1, R_1).$$

Seria produs după Cauchy

Seria produs după Cauchy a celor două serii de puteri este seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

cu raza de convergenţă $R \geq \min(R_1, R_2)$. În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right), \quad x \in (-R, R).$$

Exerciţiu. Să se dezvolte în serie MacLaurin funcţile
1) $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x-7}{x^2-4x+3}$; 2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 e^{-2x}$.

Soluţie. 1) Se observă că f se poate descompune în fracţii simple sub forma

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\},$$

fiind de asemenea cunoscut că

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} y^n, \quad y \in (-1, 1).$$

Atunci

$$\frac{2}{x-1} = -2\frac{1}{1-x} = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$
$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad x \in (-3, 3).$$

De aici

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(2 + \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

2) Este cunoscut că

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

de unde

$$x^3 e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n-3}}{(n-3)!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicaţii

8.1. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$.

1. *Demonstraţi că* $x_n = \frac{n}{n+1}$ *este punct de maxim pentru* f_n, *iar*

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in [0,1].$$

2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent uniform către funcţia nulă pe* $[0,1]$.

8.2. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.

1. *Demonstraţi că*

$$|f_n(x) - |x|| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent uniform către funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

8.3. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+x}{n+1}$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia constantă* 1 *pe* $[1,\infty)$.
2. *Calculaţi* $f_n(n+2)$. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform către funcţia constantă* 1 *pe* $[1,\infty)$?

8.4. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia nulă pe* $[0,1]$.
2. *Calculaţi* $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform către funcţia nulă pe* $[0,1]$?

8.5. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia nulă pe* $[0,1]$.
2. *Calculaţi* $f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)$. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform către funcţia nulă pe* $[0,1]$?

8.6. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{n(x-1)}$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia nulă pe* $(0,1)$.
2. *Calculaţi* $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform către funcţia nulă pe* $(0,1)$?

8.7. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$.

1. *Folosind eventual inegalitatea* $a^2 + b^2 \geq 2ab$ *pentru orice* $a, b \geq 0$, *demonstraţi că*
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in \mathbb{R}.$$
2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este uniform convergent către funcţia nulă pe* $\mathbb{R}$.

8.8. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx+2)+n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1. *Demonstraţi că*
$$|f_n(x) - 1| < \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in \mathbb{R}.$$
2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniform către funcţia constantă* 1 *pe* $\mathbb{R}$.

8.9. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin \frac{nx}{n+1}$.

1. *Demonstraţi că*
$$|f_n(x) - \sin x| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ şi orice } x \in \mathbb{R}.$$
2. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniform către funcţia* $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

8.10. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n x$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia* $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

2. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform la* f*?*

8.11. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 1, & \text{în rest} \end{cases}$.

1. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent punctual către funcţia constantă* 1 *pe* $\mathbb{R}$.

2. *Este* $(f_n)_{n\geq 0}$ *convergent şi uniform la această funcţie?*

8.12. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx}{n+x}, & x \in [0, \frac{n-1}{n}] \\ x, & x \in (\frac{n-1}{n}, 1] \end{cases}$. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 1}$ *este uniform convergent.*

8.13. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie uniform continuă şi fie* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$, $n \geq 1$. *Demonstraţi că* $f_n \xrightarrow{u} f$ *pentru* $n \to \infty$.

8.14. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. *Demonstraţi că* $f_n \xrightarrow{u} f$ *pentru* $n \to \infty$, *dar* $f_n^2 \overset{u}{\not\to} f^2$ *pentru* $n \to \infty$.

8.15. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$. *Determinaţi funcţia limită a şirului* $(f_n)_{n\geq 1}$ *şi demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniform la această funcţie.*

8.16. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+\cos nx}{n+1}$. *Demonstraţi că* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este uniform convergent, dar* $(f_n')_{n\geq 0}$ *nu este uniform convergent.*

8.17. *Determinaţi suma seriei* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

8.18. *Fie seria de funcţii* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$.

1. *Determinaţi suma parţială de ordinul* n, S_n, *a seriei.*

2. *Demonstraţi că seria de funcţii dată este uniform convergentă.*

8.19. *Fie seria de funcţii* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$, $x \in [1, \infty)$.

1. *Determinaţi suma parţială de ordinul* n, S_n, *a seriei.*

2. *Demonstraţi că seria de funcţii dată este uniform convergentă.*

8.20. *Folosind eventual criteriul lui Weierstrass, demonstraţi că următoarele serii de funcţii sunt absolut şi uniform convergente pe* $\mathbb{R}$.
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4+x^2}}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}$.

8.21. *Folosind eventual inegalitatea* $|\sin y| \leq |y|$ *pentru orice* $y \in \mathbb{R}$, *demonstraţi că seria de funcţii* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ *este absolut şi uniform convergentă pe* $\mathbb{R}$.

8.22. *Folosind eventual inegalitatea* $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$ *pentru orice* $y \in \mathbb{R}$, *demonstraţi că seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^4}$ *este absolut convergentă pe* $\mathbb{R}$.

8.23. *Folosind criteriul lui Dirichlet, demonstraţi convergenţa uniformă a următoarelor serii de funcţii.*
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \frac{\cos nx}{n}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

8.24. *Fie seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$.

1. *Demonstraţi că* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă pe* $\mathbb{R}$.

2. *Demonstraţi că* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *este uniform convergentă pe* $\mathbb{R}$.

3. *Folosind teorema de derivare termen cu termen, respectiv proprietatea de transfer de continuitate în condiţii de convergenţă uniformă, demonstraţi că suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă.*

8.25. *Demonstraţi că suma seriei de funcţii* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ *este o funcţie continuă pe* $\mathbb{R}$.

8.26. *Demonstraţi că suma seriei de funcţii* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$ *este o funcţie derivabilă pe* $\mathbb{R}$ *şi cu derivata continuă.*

8.27. *Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri.*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+2n} x^n$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n+3}$;
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+2}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)^{n+2} x^n$.

8.28. *Precizaţi mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de funcţii reductibile la serii de puteri prin schimbări de variabilă.*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2}\left(\frac{x}{3}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{4n^3+2n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$;
4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{(n^3+2)x^{2n}}$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2+3n+2}$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2+\frac{1}{4})^n}{(n+1)(n+2)x^n}$.

8.29. *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{3n-2}}{3n-2}$.

1. *Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.*

2. *Notând cu S suma seriei de puteri, demonstraţi că*

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^3}, \quad x \in (-1,1).$$

3. *Demonstraţi că* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

8.30. *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$.

1. *Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.*

2. *Folosind eventual egalitatea*

$$(n+1)^2 x^n = (n+2)(n+1)x^n - (n+1)x^n$$

precum şi teorema de derivare termen cu termen aplicată seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$*, determinaţi suma seriei date.*

8.31. *Fie seria de funcţii* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$.

1. *Determinaţi mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii.*

2. *Notând cu S funcţia sa sumă, demonstraţi că*

$$S'(x) = S(x) - \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad x > 0.$$

8.32. *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

1. *Determinaţi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.*

2. *Notând cu S funcţia sa sumă, demonstraţi că*

$$\int_0^x S(t)dt = \frac{x}{1+x^2}.$$

3. *Determinaţi S.*

8.33. *Folosind eventual egalitatea*

$$\frac{x+5}{x^2+4x+3} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\},$$

dezvoltaţi în serie MacLaurin funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4x+3}$.

8.34. *Folosind eventual egalităţile*

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - x\frac{1}{1-x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

dezvoltaţi în serie MacLaurin funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

8.35. *Folosind eventual egalitatea*

$$\ln\frac{1+x}{1+x^2} = \ln(1+x) - \ln(1+x^2), \quad x \in (-1, \infty),$$

dezvoltaţi în serie MacLaurin funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{1+x}{1+x^2}$.

8.36. *Folosind eventual egalitatea*

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (-2, 2)$$

dezvoltaţi în serie MacLaurin funcţia $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Index