Capitolul 1

NOŢIUNI GENERALE

1.1 Teoria mulţimilor

Dacă A este o mulţime, vom nota prin $x \in A$ faptul ca x este un element al mulţimii A (sau x *aparţine* lui A), respectiv prin $x \notin A$ faptul că x nu este un element al mulţimii A (sau x *nu aparţine* lui A). Mulţimea care nu conţine niciun element se va numi *mulţimea vidă* şi se va nota $\emptyset$.

Submulţimi, supramulţimi

Fiind date două mulţimi A şi B, vom spune că A este o *submulţime* a lui B (şi vom nota $A \subseteq B$), sau B este o *supramulţime* a lui A (şi vom nota $B \supseteq A$) dacă orice element al lui A este şi un element al lui B. Desigur, $\emptyset \subseteq A$ pentru orice mulţime A. Daca A este o submulţime a lui B, dar $A \neq B$, atunci A se numeşte *submulţime proprie* a lui B, ceea ce se notează $A \subsetneq B$. Dată o mulţime A, se va nota cu $\mathcal{P}(A)$ *mulţimea submulţimilor* (*părţilor*) sale. Se observă că $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

Egalitatea a două mulţimi

Două mulţimi A, B vor fi numite *egale* dacă au aceleaşi elemente, acest lucru fiind notat $A = B$. Se observă că $A = B$ dacă şi numai dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$, această caracterizare fiind utilă pentru demonstrarea practică a multor egalităţi de mulţimi. Dacă A şi B nu sunt egale, acest lucru se notează $A \neq B$, ceea ce revine, conform observaţiei anterioare, fie la $A \nsubseteq B$, fie la $B \nsubseteq A$.

Operaţii cu mulţimi

Fie X o mulţime şi $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Definim mulţimile

$$A \cup B = \{x \in X; x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in X; x \in A \wedge x \in B\},$$

numite *reuniunea*, respectiv *intersecţia* lui A şi B. Dacă $A \cap B = \emptyset$, A şi B se numesc *disjuncte*.

Aceste operaţii cu mulţimi au următoarele proprietăţi

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$
$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(*idempotenţă*, *comutativitate*, *asociativitate*, respectiv *distributivitate*). Proprietăţile de asociativitate asigură faptul ca scrierile $A \cup B \cup C$ şi $A \cap B \cap C$ nu sunt ambigue.

Operaţiile de reuniune şi intersecţie se pot extinde la familii nu neapărat finite de mulţimi. În acest sens, dată o familie $(A_i)_{i \in I}$, unde I este o mulţime oarecare de indici, finită sau nu, iar $A_i \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$ pentru orice $i \in I$, vom defini

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X; \text{ există } i \in I \text{ astfel ca } x \in A_i\},$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X; x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.$$

Mulţimile

$$A \setminus B = \{x \in X; x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

se numesc *diferenţa*, respectiv *diferenţa simetrică* a mulţimilor A şi B. Mulţimea

$$c_X A = \{x \in X; x \notin A\}$$

se numeşte *complementara* lui A faţă de X; dacă nu există pericol de confuzie, $c_X A$ se notează cA. Se observă atunci că

$$A \setminus B = A \cap cB$$

şi au loc următoarele proprietăţi, numite *formulele lui de Morgan*

$$c\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} cA_i$$
$$c\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} cA_i.$$

Vom numi *produs cartezian* al mulţimilor A şi B (în această ordine) mulţimea tuturor perechilor ordonate (x, y), cu $x \in A$, iar $y \in B$, adică

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \wedge y \in B\}.$$

În general, $A \times B \neq B \times A$. Două elemente (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) ale produsului cartezian $A \times B$ sunt egale dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.

Date mulţimile A_1, $A_2, \ldots, A_n$, numim *produs cartezian* al acestora mulţimea tuturor perechilor ordonate cu n elemente (denumite şi *n-uple*) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, cu $a_i \in A_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, adică

$$A_1 \times A_2 \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in A_i \text{ pentru orice } 1 \leq i \leq n\}.$$

Dacă $A_i = A$ pentru $1 \leq i \leq n$, se utilizează notaţia prescurtată

$$A \times A \times \ldots \times A = A^n.$$

Mulţimi de numere

În cele ce urmează, vom presupune cunoscute proprietăţile următoarelor mulţimi de numere:

$\mathbb{N}$ $=\{0, 1, 2, \ldots\}$ - mulţimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z}$ $=\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ - mulţimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q}$ $=\left\{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ - mulţimea numerelor raţionale.

Între acestea au loc următoarele relaţii de incluziune

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Pentru $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$, se notează cu $A^* = A \setminus \{0\}$ mulţimea numerelor nenule din A.

1.2 Construcţia axiomatică a mulţimii numerelor reale

Intuitiv, mulţimea numerelor reale poate fi înţeleasă ca mulţimea tuturor fracţiilor zecimale infinite, sub forma

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{\overline{r, r_1 r_2 \ldots r_n \ldots}; r \in \mathbb{Z}, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}\\ &= \left\{r + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \cdots + \frac{r_n}{10^n} + \cdots\right\}.\end{aligned}$$

Definiţia de mai sus (îndeajuns de explicită, dar totuşi pur algebrică) este însă greu de folosit în analiza matematică, necesitând unele completări. Din punctul de vedere al analizei matematice, mulţimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$, va fi un corp comutativ total ordonat, a cărui relaţie de ordine este compatibilă cu operaţiile de adunare şi înmulţire şi care în plus satisface o anumită axiomă de completitudine. Aceste proprietăţi, ce vor fi clarificate în cele de mai jos, sunt motivate de necesitatea de a efectua operaţiile elementare cu numere (structura de corp), necesitatea de a putea compara numere şi de a putea lucra convenabil cu inegalităţile rezultate (structura de ordine, împreună cu relaţiile de compatibilitate cu operaţiile), precum şi de a diferenţia mulţimea numerelor reale de mulţimea numerelor raţionale (axioma de completitudine).

Vom numi mulţimea numerelor reale o mulţime $\mathbb{R}$ înzestrată cu două operaţii algebrice „$+$" (adunarea) şi „$\cdot$" (înmulţirea) precum şi cu o relaţie de ordine „$\leq$" care satisfac grupurile de axiome (I), (II) şi (III) de mai jos.

Axiomele structurii algebrice

(I) $\mathbb{R}$ este un corp comutativ, adică

(I.1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(asociativitatea adunării)

(I.2) $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
(comutativitatea adunării)

(I.3) Există $0 \in \mathbb{R}$ astfel ca $0 + x = x + 0 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
(existenţa elementului neutru la adunare)

(I.4) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $-x \in \mathbb{R}$ astfel ca $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
(existenţa simetricului oricărui element în raport cu adunarea)

(I.5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(asociativitatea înmulţirii)

(I.6) $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
(comutativitatea înmulţirii)

(I.7) Există $1 \in \mathbb{R}$ astfel ca $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
(existenţa elementului neutru la înmulţire)

(I.8) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, există $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ astfel ca $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$.
(existenţa simetricului (inversului) oricărui element nenul în raport cu înmulţirea)

(I.9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(distributivitatea înmulţirii faţă de adunare)

(II) $\mathbb{R}$ este total ordonat, adică

(II.1) $x \leq x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(II.2) $x \leq y$ şi $y \leq x \implies x = y$.

(II.3) $x \leq y$ şi $y \leq z \implies x \leq z$.
(„$\leq$" este o relaţie de ordine pe $\mathbb{R}$)

(II.4) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, are loc fie $x \leq y$, fie $y \leq x$.
(relaţia de ordine este totală, adică oricare două elemente x, y se pot compara)

(II.5) Dacă $x \leq y$, atunci $x + z \leq y + z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.
(relaţia de ordine este compatibilă cu operaţia de adunare)

(II.6) Dacă $x \leq y$ iar $0 \leq z$, atunci $x \cdot z \leq y \cdot z$.
(relaţia de ordine este compatibilă cu operaţia de înmulţire)

Proprietăţile de mai sus definesc structura algebrică a lui $\mathbb{R}$. Pentru a enunţa cea de-a treia axiomă, care face posibilă demonstrarea rezultatelor specifice analizei matematice, vor fi făcute mai întâi câteva preparative suplimentare.

1.2.1 Minoranţi, majoranţi

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Spunem că A este *minorată* dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel că $m \leq x$ pentru orice $x \in A$. Un astfel de element m (care nu este unic determinat) se va numi *minorant* al mulţimii A. Similar, spunem că A este *majorată* dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $x \leq M$ pentru orice $x \in A$, un astfel de element M (care de asemenea nu este unic determinat) numindu-se *majorant* al mulţimii A. Minoranţii şi majoranţii unei mulţimi A nu aparţin neapărat acestei mulţimi.

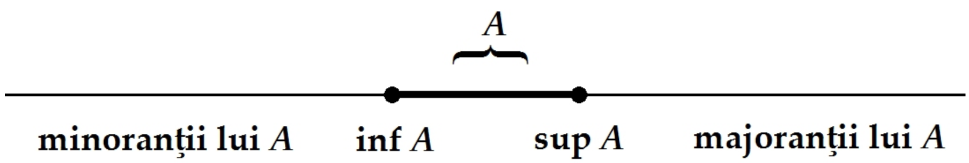


Figura 1.1: Majoranţii şi minoranţii unei mulţimi A.

Exemplu. Fie $A = \left\{x = \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Atunci A este majorată, 1 fiind un majorant al lui A, deoarece $x \leq 1$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 1 nu este element al mulţimii A, întrucât toate elementele lui A sunt subunitare, iar orice $y \in \mathbb{R}$ pentru care $1 \leq y$ este de asemenea un majorant al mulţimii A. În particular, $2, 3, \ldots$ sunt majoranţi ai mulţimii A.

Similar, A este minorată, 0 fiind un minorant al lui A, deoarece $0 \leq x$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 0 nu este element al mulţimii A, deoarece toate elementele lui A sunt strict pozitive, iar orice $y \in \mathbb{R}$ pentru care $y \leq 0$ este de asemenea un minorant al lui A. În particular, $-1, -2, \ldots$ sunt minoranţi ai mulţimii A.

Margine inferioară, margine superioară

Se observă că dacă o mulţime A este minorată, nu există un cel mai mic minorant al lui A, deoarece se pot preciza minoranţi oricât de mici. Similar, dacă o mulţime A este majorată, nu există un cel mai mare majorant, întrucât se pot preciza majoranţi oricât de mari.

În schimb, dacă A este minorată şi există un cel mai mare minorant al lui A, acesta se va numi *margine inferioară* a lui A, notată $\inf A$, iar dacă A este majorată şi există un cel mai mic majorant al lui A, acesta se va numi *margine superioară* a lui A, notată $\sup A$. Dacă marginea inferioară, respectiv marginea superioară a unei mulţimi A există, atunci acestea sunt unice, unicitatea derivând din caracterul acestora de a fi „cea mai mare", respectiv „cea mai mică".

Axioma de completitudine

În aceste condiţii, se poate enunţa cea de-a treia axiomă, numită *axioma de completitudine*, sau *axioma Cantor-Dedekind*.

(III) Orice submulţime nevidă majorată A a lui $\mathbb{R}$ admite o margine superioară în $\mathbb{R}$.

Se poate demonstra că proprietăţile de mai sus definesc existenţa şi unicitatea (până la un izomorfism de corpuri total ordonate) lui $\mathbb{R}$. Elementele mulţimii $\mathbb{R}$ astfel definite se numesc *numere reale*. Elementele mulţimii $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ se vor numi *numere iraţionale*.

Notaţii

Vom preciza în cele ce urmează câteva notaţii utilizate în calculul cu numere reale. Mai întâi, este utilă introducerea notaţiei „$x < y$" (ordonarea strictă ataşată relaţiei de ordine „$\leq$") dacă x, y satisfac $x \leq y$ şi $x \neq y$. De asemenea, vom scrie relaţia $x \leq y$ şi sub forma $y \geq x$, iar relaţia $x < y$ şi sub forma $y > x$.

Numerele reale a pentru care $a \geq 0$ (respectiv $a \leq 0$) vor fi numite *numere pozitive* (respectiv *numere negative*), iar numerele reale a pentru care $a > 0$ (respectiv $a < 0$) vor fi numite *numere strict pozitive* (respectiv *strict negative*). În cele ce urmează, în loc de $x + (-y)$ vom nota $x - y$, în loc de $x \cdot y$ vom nota xy, iar în loc de $x \cdot \frac{1}{y}$ vom nota $\frac{x}{y}$.

Dreapta reală

Pentru ilustrarea geometrică a unor concepte ale analizei matematice, este util ca numerele reale să poată fi reprezentate pe o dreaptă.

Fie o dreaptă d, un punct $O \in d$ şi un vector director $\vec{u}$ al dreptei d. Perechea $\mathcal{R} = (O, \vec{u})$ se numeşte *reper cartezian* al dreptei d. Definim

$$\Phi : \mathbb{R} \to d, \quad \Phi(x) = P, \text{ unde } \overrightarrow{OP} = x\vec{u}$$

(fiecărui $x \in \mathbb{R}$ i se asociază punctul P de pe dreaptă pentru care $\overrightarrow{OP}$ are coordonata x în raport cu reperul $\mathcal{R}$). Se poate demonstra că funcţia Φ este bine definită şi stabileşte o corespondenţă bijectivă între mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale şi mulţimea punctelor dreptei d. Datorită acestei corespondenţe (numită şi *bijecţia lui Descartes*), mulţimea $\mathbb{R}$ va putea fi numită şi *dreapta (axa) reală*, iar numerele reale vor fi numite şi *puncte*.

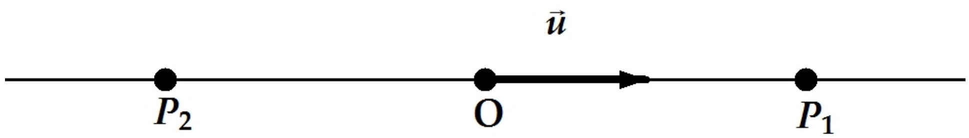


Figura 1.2: Bijecţia lui Descartes. $\Phi(2) = P_1$, unde $\overset{\rightarrow}{OP_1} = 2\vec{u}$, $\Phi(-2) = P_2$, unde $\overset{\rightarrow}{OP_2} = -2\vec{u}$

1.2.2 Mulţimi mărginite

În aceste condiţii, o mulţime nevidă A care este majorată se va numi *mărginită superior*, iar o mulţime nevidă A care este minorată se va numi *mărginită inferior*. Dacă A este atât mărginită superior cât şi mărginită inferior, ea se va numi *mărginită*. Conform acestei definiţii, o mulţime A este mărginită dacă există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$m \leq x \leq M \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

Caracterizări analitice pentru marginea superioară şi marginea inferioară a unei mulţimi

Cu notaţiile de mai sus, are loc următoarea *teoremă de caracterizare a marginii superioare a unei mulţimi*, care descrie caracteristica marginii superioare de a fi cel mai mic majorant prin intermediul a două inegalităţi, cea dintâi precizând faptul că marginea superioară este majorant, iar cea de-a doua precizând faptul că niciun număr mai mic decât marginea superioară nu este majorant.

Teorema 1.1. *Fie $A \neq \emptyset$. Un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ este margine superioară a mulţimii A dacă şi numai dacă*

1. *$x \leq \alpha$ pentru orice $x \in A$.*

2. *Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.*

În mod absolut similar se obţine urmatoarea *teoremă de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi*.

Teorema 1.2. *Fie $A \neq \emptyset$. Un număr $\beta \in \mathbb{R}$ este margine inferioară a mulţimii A dacă şi numai dacă*

1. *$\beta \leq x$ pentru orice $x \in A$.*
2. *Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.*

Proprietatea lui Arhimede şi consecinţe ale sale

O consecinţă importantă a teoremei de caracterizare a marginii superioare este următorul rezultat, numit *proprietatea lui Arhimede*.

Teorema 1.3. *Fie x, y numere reale fixate, cu $x > 0$. Există atunci $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $nx > y$.*

Parte întreagă, parte fracţionară

Printre consecinţele proprietăţii lui Arhimede menţionăm urmatoarele rezultate utile.

Corolar 1.3.1. *Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{Z}$ unic determinat astfel ca*

$$n \leq x < n + 1.$$

Pentru $x \in \mathbb{R}$ dat, numărul întreg n definit mai sus se numeşte *partea întreagă* a lui x şi se notează $[x]$. Notând cu $\{x\} = x - [x]$ *partea fracţionară* a lui x, următoarele proprietăţi sunt adevărate pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad [x] + \{x\} = x, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Corolar 1.3.2. *Dacă a, b sunt numere reale fixate, $a < b$, există atunci un număr raţional r astfel ca $a < r < b$.*

Teorema de mai sus afirmă faptul că mulţimea $\mathbb{Q}$ este *densă* în $\mathbb{R}$, în sensul că între orice două numere reale se află măcar un număr raţional. Folosind noţiuni de aşa-numita *teorie a numerelor cardinale* (vezi Capitolul 4), se poate demonstra că $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este de asemenea densă în $\mathbb{R}$, adică între orice două numere reale se află şi un număr iraţional.

Maxim, minim, signum

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, definim *maximul* elementelor x, y prin

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq y \\ y, & \text{dacă } x < y, \end{cases}$$

respectiv *minimul* elementelor x, y prin

$$\min(x, y) = \begin{cases} y, & \text{dacă } x \geq y \\ x, & \text{dacă } x < y. \end{cases}$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim *semnul* său, notat $\operatorname{sgn} x$ prin

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Modulul unui număr real

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim *modulul* sau *valoarea absolută* a lui x, notat $|x|$ prin

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Sunt atunci adevărate următoarele proprietăţi de calcul:

M1 $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

M2 $||x|| = |x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

M3 $|xy| = |x||y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M4 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

M5 $|x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M6 $|x - y| \geq ||x| - |y||$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M7 $|x| \leq M \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

M7′ $|x| < M \Leftrightarrow -M < x < M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Are loc şi egalitatea

$$|x| = x \operatorname{sgn} x \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea,

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right), \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right).$$

Funcţia modul astfel definită poate fi folosită pentru a caracteriza mărginirea unei mulţimi.

Teorema 1.4. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Au loc următoarele afirmaţii:*

1. *A este mărginită $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|x| \leq M$ pentru orice $x \in A$.*
2. *A este nemărginită $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists x_M \in A$ astfel ca $|x_M| > M$.*

Demonstraţie. 1. „$\Rightarrow$" Dacă A este mărginită, există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq x \leq M$ pentru orice $x \in A$, de unde $|x| \leq \max(|m|, |M|)$.

„$\Leftarrow$" Dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|x| \leq M$ pentru orice $x \in A$, atunci $-M \leq x \leq M$ pentru orice $x \in A$, deci A este mărginită.

2. Rezultă prin aplicarea operatorului de negare logică primei proprietăţi. ■

1.3 Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$

În analiza matematică, pe lângă numere reale, se utilizează şi două simboluri cu sens aparte, $+\infty$ (plus infinit, notat prescurtat şi ∞) şi $-\infty$ (minus infinit), cu proprietatea că

$$-\infty < x < \infty \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Vom nota

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

şi vom numi această mulţime *dreapta reală încheiată*, observând că ea este de asemenea total ordonată.

Operaţiile aritmetice se extind (parţial) la $\overline{\mathbb{R}}$ în următorul mod:

$$x + \infty = x - (-\infty) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$x + (-\infty) = x - \infty = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$
$$x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$$
$$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$$
$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

respectiv

$$\infty + \infty = \infty;$$
$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty);$$
$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;$$
$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Operaţiilor $0 \cdot (\pm\infty)$, $\infty - \infty$, $-\infty - (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ nu li se atribuie niciun sens.

1.3.1 Intervale în $\mathbb{R}$ şi $\overline{\mathbb{R}}$

Intervale în $\mathbb{R}$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Numim *intervale* în $\mathbb{R}$ mulţimi de forma

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ (interval închis);

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ (interval deschis);

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$; (interval semideschis; interval închis la dreapta şi deschis la stânga)

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ (interval semideschis; interval deschis la dreapta şi închis la stânga);

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < \infty\}$ (interval deschis nemărginit la dreapta; semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta);

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < a\}$ (interval deschis nemărginit la stânga; semidreaptă deschisă nemărginită la stânga);

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < \infty\}$ (semidreaptă închisă nemărginită la dreapta);

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq a\}$ (semidreaptă închisă nemărginită la stânga);

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (axa reală).

Intervale centrate

Numim *intervale centrate* intervalele simetrice faţă de un punct a de pe axa reală, de forma $[a-r, a+r]$ şi $(a-r, a+r)$. Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcţiei modul sub forma

$$[a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq \varepsilon\};$$
$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| < \varepsilon\}.$$

Intervale în $\overline{\mathbb{R}}$

Dacă $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, putem extinde notaţiile pentru intervale definite mai sus şi obţine

$$[a, b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}}; a \leq x \leq b\right\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\};$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\},$$

păstrând denumirile de intervale închise, deschise, respectiv semideschise. De asemenea

$$[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}} \quad \text{(dreapta reală încheiată).}$$

Conform proprietăţilor de densitate ale lui $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, se va observa că nici $\mathbb{Q}$ nici $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nu conţin intervale.

Supremumul şi infimumul unei mulţimi în $\overline{\mathbb{R}}$

Fie $A \neq \emptyset$. Cu aceste notaţii, vom spune că

$$\sup A = +\infty \quad \text{dacă } A \text{ nu este majorată (este nemărginită superior)}$$

respectiv

$$\inf A = -\infty \quad \text{dacă } A \text{ nu este minorată (este nemărginită inferior).}$$

şi vom observa că în $\overline{\mathbb{R}}$ orice mulţime nevidă admite un supremum şi un infimum.

Exemple. $\sup \mathbb{N} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$;

$A = \{x; x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită superior, deci $\sup A = +\infty$.

$A = \{x; x = -n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită inferior, deci $\inf A = -\infty$.

1.3.2 Vecinătăţi în $\overline{\mathbb{R}}$

1. Numim *vecinătate* a unui punct $x \in \mathbb{R}$ orice mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval deschis incluzându-l pe x, adică pentru care există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca
$$x \in (a, b) \subseteq V.$$
2. Numim *vecinătate* a lui $+\infty$ orice mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(a, \infty]$, cu $a \in \mathbb{R}$.
3. Numim *vecinătate* a lui $-\infty$ orice mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $[-\infty, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

Exemple. Mulţimile $(-2, 4]$, $(0, 6]$, $(-\infty, 2]$, $(-2, 5] \cup (6, \infty)$ sunt vecinătăţi ale lui $x = 1$ deoarece conţin intervalul deschis $(0, 2)$ care-l include pe 1.

Mulţimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece ea nu conţine intervale.

Mulţimea $B = [1, 3]$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece nu există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $1 \in (a, b) \subseteq B$ (ar trebui ca $a < 1$ şi atunci $(a, b) \nsubseteq B$).

Teorema 1.5. *Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este o vecinătate a lui x dacă şi numai dacă ea conţine un interval deschis centrat în x, adică există $\varepsilon > 0$ astfel ca*
$$x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq V.$$

Demonstraţie. „$\Leftarrow$" Se poate lua $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$.

„$\Rightarrow$" Se poate lua $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. ■

Dacă V este o vecinătate a lui $x \in \overline{\mathbb{R}}$, notăm acest lucru prin $V \in \mathcal{V}(x)$. Mulţimea $\mathcal{V}(x)$ se numeşte *mulţimea tuturor vecinătăţilor* punctului x. Această mulţime are următoarele proprietăţi:

(V1) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Atunci $x \in V$.

(V2) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$ şi $W \supset V$. Atunci $W \in \mathcal{V}(x)$.

(V3) Fie $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$. Atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(V4) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Există atunci $W \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $V \in \mathcal{V}(y)$ pentru orice $y \in W$.

Conform (**V1**), dacă V este vecinătate a lui x, atunci V îl conţine pe x. Datorită (**V2**), orice mulţime care conţine o vecinătate a lui x este de asemenea o vecinătate a lui x. Conform (**V3**), intersecţia a două vecinătăţi ale lui x este de asemenea o vecinătate a lui x, (**V4**) reprezentând faptul că dacă V este o vecinătate a lui x, atunci V este de fapt o vecinătate nu doar pentru x, ci şi pentru toate punctele dintr-o mulţime W, care la rândul ei este o vecinătate a lui x.

Proprietatea de separaţie Hausdorff

Orice două puncte $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ pot fi separate prin vecinătaţi. În acest sens, are loc următoarea proprietate, numită *proprietatea de separaţie Hausdorff*.

Teorema 1.6. *Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Există atunci $V_a \in \mathcal{V}(a)$ şi $V_b \in \mathcal{V}(b)$ astfel ca $V_a \cap V_b = \emptyset$.*

A fost menţionat anterior că axioma de completitudine deosebeşte $\mathbb{R}$ de mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale. Acest lucru se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie mulţimea $A = \left\{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\right\}$. Evident, $A \neq \emptyset$, deoarece $0 \in A$. Ca submulţime a lui $\mathbb{R}$, ea este majorată (de exemplu de 2), având deci, conform axiomei de completitudine, un cel mai mic majorant $\sup A$. În acest sens, se poate arăta că $\sup A = \sqrt{2}$. Ca submulţime a lui $\mathbb{Q}$, A este de asemenea majorată, de exemplu de 2 şi de oricare altă aproximare zecimală prin adaus a lui $\sqrt{2}$: 1.42, 1.415, 1.4143, ş.a.m.d. Totuşi, niciun număr raţional q mai mic decât $\sqrt{2}$ nu poate fi nici măcar majorant datorită definiţiei mulţimii A, care va conţine o aproximare zecimală prin lipsă a lui $\sqrt{2}$ mai bună decât q, iar niciun număr raţional mai mare decât $\sqrt{2}$ nu poate fi cel mai mic majorant, întrucât va exista o aproximare zecimală prin adaus a lui $\sqrt{2}$ mai bună decât q.

1.4 Inegalităţi între numere reale

Inegalitatea mediilor

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive. Definim

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}, \end{aligned}$$

A_n, G_n, H_n numindu-se respectiv *media aritmetică*, *media geometrică* şi *media armonică* a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Are loc atunci inegalitatea

$$A_n \geq G_n \geq H_n,$$

numită *inegalitatea mediilor*, egalităţile atingându-se doar dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale. Atunci

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 \left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n\right)^2,$$

egalitatea atingându-se doar dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt proporţionale, adică există $k \in \mathbb{R}$ astfel ca $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, $\ldots a_n = kb_n$.

Pentru $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, se obţine că

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2,$$

egalitatea atingându-se doar dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Inegalitatea Bernoulli

Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

1.5 Funcţii

Fie $X, Y \neq \emptyset$. Numim *funcţie* definită pe mulţimea X cu valori în mulţimea Y o corespondenţă (notată de exemplu f) prin care oricărui element din mulţimea X i se asociază un singur element din mulţimea Y. În această situaţie, se notează $f : X \to Y$, X numindu-se *domeniul de definiţie* al funcţiei f, notat şi $\mathrm{Dom}\, f$, iar Y *codomeniul* acesteia. Dacă lui $x \in X$ îi corespunde prin funcţia f elementul $y \in Y$, acest lucru se va nota $y = f(x)$ sau $x \overset{f}{\mapsto} y$. În acest caz, y se numeşte *imaginea* lui x prin funcţia f, sau *valoarea* lui f în x, iar x se numeşte *argumentul* funcţiei. Mulţimea tuturor funcţiilor definite pe X cu valori în Y se va nota $\mathcal{F}(X, Y)$.

Egalitatea a două funcţii

O funcţie f trebuie concepută ca un ansamblu format din domeniul de definiţie X, codomeniul Y şi corespondenţa propriu-zisă între argumente şi imagini. În acest sens, două funcţii $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ vor fi *egale* dacă $A = C$ şi $B = D$ (domeniile, respectiv codomeniile funcţiilor sunt egale), iar $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$, adică oricărui x din domeniul comun de definiţie i se asociază prin f şi g un acelaşi element.

Grafic, funcţie identică

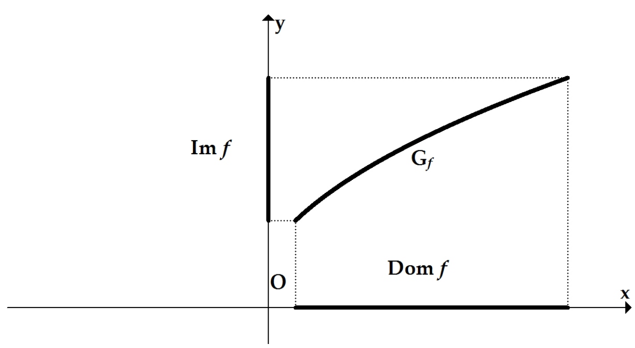


Figura 1.3: Imaginea, domeniul şi graficul unei funcţii f

Mulţimea

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$$

se va numi *graficul* funcţiei f. Fiind dată o mulţime A, funcţia $1_A : A \to A$ definită prin $1_A(x) = x \ \forall x \in A$ se va numi *funcţia identică* a mulţimii A.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Vom determina $\operatorname{Im} f$. Fie $y \in \mathbb{R}$ astfel ca $y = f(x)$, cu $x \in \mathbb{R}$, adică $y = x^2 - 2x + 3$. Urmează că $x^2 - 2x + 3 - y = 0$. Conditia de existenţă a lui x este $\Delta = (-2)^2 - 4(3 - y) \geq 0$, de unde $y \geq 2$. Urmează că $\operatorname{Im} f = [2, +\infty)$.

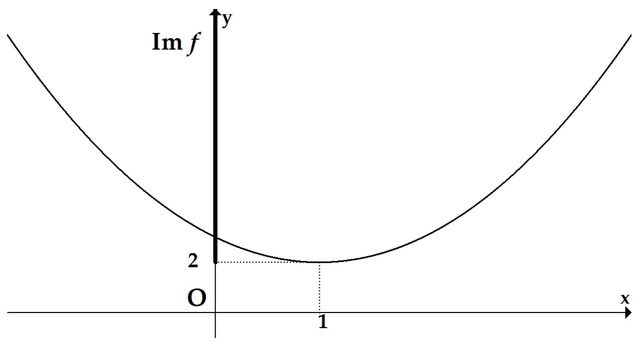


Figura 1.4: Imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Restricţia şi prelungirea unei funcţii

Dacă $f : X \to Y$ este o funcţie, iar $A \subseteq X$, numim *restricţia* funcţiei f la mulţimea A funcţia notată $f|_A$ cu domeniul A şi codomeniul Y care păstrează pe A corespondenţa definită de f, adică $f|_A(x) = f(x)\ \forall x \in A$. Dacă $g : A \to Y$ este o funcţie dată, iar $A \subseteq X$, orice funcţie $f : X \to Y$ pentru care $f|_A = g$ se numeşte *prelungirea* lui g la X.

Exemplu. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Atunci g este o prelungire a lui f (respectiv f este o restricţie a lui g), deoarece $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, iar $f(x) = g(x) = x$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

Imagine şi contraimagine

Fie funcţia $f : X \to Y$. Dacă $A \subseteq X$, notăm

$$f(A) = \{y \in B; \exists x \in A \text{ astfel ca } f(x) = y\}$$

imaginea mulţimii A prin funcţia f. Mulţimea $f(X)$ se va numi *imaginea funcţiei f* şi se va nota $\operatorname{Im} f$.

Dacă $B \subseteq Y$, notăm

$$f^{-1}(B) = \{x \in A; f(x) \in B\}$$

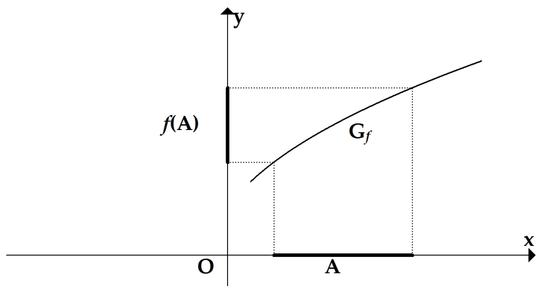


Figura 1.5: Imaginea $f(A)$ a unei mulţimi A

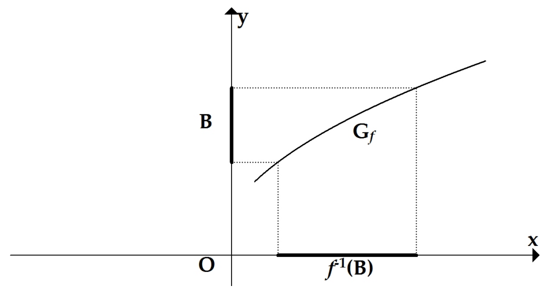


Figura 1.6: Contraimaginea $f^{-1}(B)$ a unei mulţimi B

contraimaginea (*imaginea inversă*, *preimaginea*) mulţimii B prin funcţia f. Dacă $B = \{y\}$, se foloseşte notaţia $f^{-1}(y)$ în loc de $f^{-1}(\{y\})$. Cum mulţimea $f^{-1}(y)$ poate să fie mulţimea vidă sau să conţină mai mult de un element, simbolul f^{-1} nu defineşte în general o funcţie.

Funcţii injective, funcţii surjective, funcţii bijective

O funcţie $f : X \to Y$ se numeşte *injectivă* dacă

$$\forall x, y \in X, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

(la argumente diferite x, y corespund prin f imagini diferite), ceea ce este echivalent cu

$$\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \implies x = y$$

(dacă imaginile $f(x)$ şi $f(y)$ sunt egale, atunci sunt egale şi argumentele corespunzătoare x şi y). Aceasta conduce la faptul că f este injectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(y)$ conţine cel mult un element pentru orice $y \in B$.

O funcţie $f : X \to Y$ se numeşte *surjectivă* dacă $f(X) = Y$, adică orice element y din codomeniul Y al funcţiei este imaginea cel puţin a unui argument x. Aceasta conduce la faptul că f este surjectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(y)$ conţine cel puţin un element pentru orice $y \in B$.

O funcţie $f : X \to Y$ se numeşte *bijectivă* dacă ea este atât injectivă cât şi surjectivă. Din cele de mai sus, se observă că f este bijectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(y)$ conţine exact un element pentru orice $y \in B$. În aceste condiţii, simbolul f^{-1} defineşte o funcţie $f^{-1} : Y \to X$ prin $f^{-1}(y) = x$, unde x, y sunt în aşa fel încât $y = f(x)$. Funcţia f^{-1} astfel definită se numeşte funcţia *inversă* a funcţiei f, iar f se numeşte *inversabilă*.

Compunerea a două funcţii

Fie funcţiile $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Funcţia $g \circ f : X \to Z$ definită prin $g \circ f(x) = g(f(x))$ $\forall x \in X$ se numeşte *compunerea* funcţiilor g şi f, în această ordine. Se poate observa că operaţia de compunere a funcţiilor nu este comutativă, dar este asociativă, în sensul că dacă $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to M$, atunci $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Funcţii numerice

O funcţie $f : E \to F$ se va numi *funcţie numerică* (*funcţie reală de variabilă reală*) dacă $E, F \subseteq \mathbb{R}$.

Funcţii pare, funcţii impare

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o *mulţime simetrică*, adică o mulţime pentru care $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$.

O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *pară* dacă $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in D$. Deoarece

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow b = f(-a) \Leftrightarrow (-a, b) \in G_f,$$

urmează că G_f este simetric faţă de Oy.

O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in D$. Deoarece

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow -b = f(-a) \Leftrightarrow (-a, -b) \in G_f,$$

urmează că G_f este simetric faţă de O.

> **Exemplu.** Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$ este pară, deoarece $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$, în timp ce funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2n+1}$ este impară, deoarece $g(-x) = (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1} = -g(x)$.

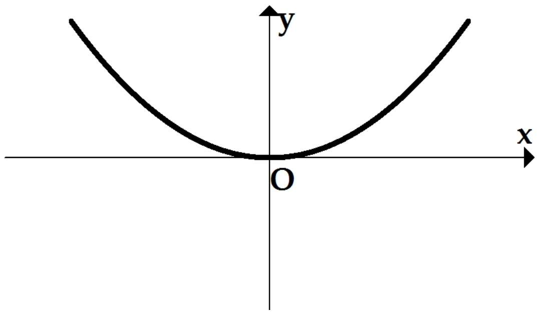


Figura 1.7: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$ (funcţie pară, grafic simetric faţă de Oy)

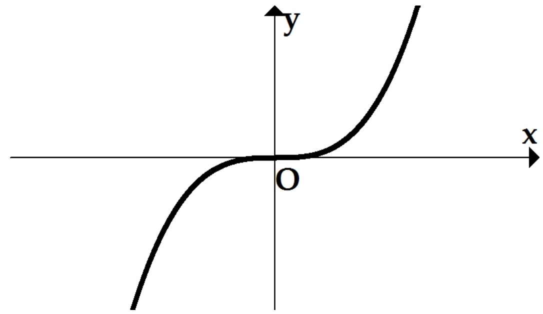


Figura 1.8: Graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2n+1}$ (funcţie impară, grafic simetric faţă de O).

Funcţii periodice

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$. O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *periodică* dacă există $T \in \mathbb{R}^*$ astfel încât pentru orice $x \in D$ urmează că $x + T$, $x - T \in D$, iar $f(x + T) = f(x)$. Orice astfel de T se numeşte *perioadă* a funcţiei f. Se observă că dacă T este o perioadă a funcţiei f, atunci şi nT, $n \in \mathbb{Z}^*$ (adică orice multiplu întreg al perioadei T) este de asemenea o perioadă a funcţiei f. Dacă există o cea mai mică perioadă pozitivă T_0 a funcţiei f, atunci aceasta se numeşte *perioadă principală* a funcţiei f. Pentru a studia comportarea unei funcţii periodice de perioadă T, este suficient să se analizeze comportarea acestei funcţii pe intervalul $[0, T]$.

Exemplu. Funcţia $f : R \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$, este periodică, de perioadă principală 1.

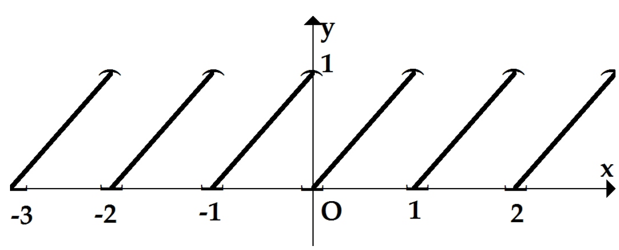


Figura 1.9: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$

Funcţii mărginite

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci

f se numeşte *mărginită superior* dacă $f(D)$ este majorată, adică există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) \leq M$ pentru orice $x \in D$.

f se numeşte *mărginită inferior* dacă $f(D)$ este minorată, adică există $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq f(x)$ pentru orice $x \in D$.

Dacă f este atât mărginită inferior cât şi mărginită superior, adică există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in D$, sau, echivalent $\operatorname{Im} f$ este mărginită, atunci f se numeşte *mărginită*.

Conform caracterizării mulţimilor mărginite cu ajutorul funcţiei modul (Teorema 1.4), f este mărginită dacă şi numai dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in D$.

Exemple. $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ este mărginită, deoarece

$$3 \leq f(x) \leq 5 \quad \text{pentru orice } x \in [1,2].$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 3 \sin x$ este mărginită, deoarece

$$|f(x)| \leq 2 + 3|\sin x| \leq 5 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Funcţii monotone

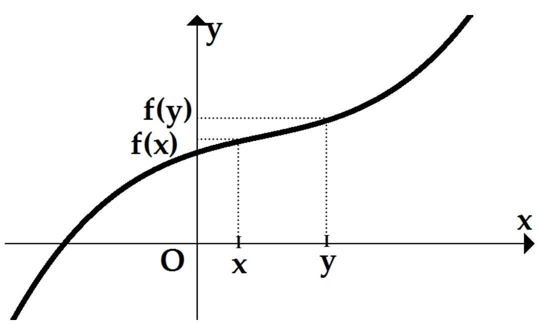


Figura 1.10: Graficul unei funcţii crescătoare

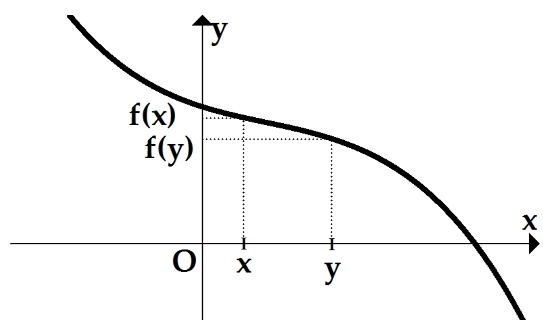


Figura 1.11: Graficul unei funcţii descrescătoare

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci

f se numeşte *crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

f se numeşte *strict crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) < f(y).$$

f se numeşte *descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

f se numeşte *strict descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) > f(y).$$

Se obervă că f este crescătoare dacă şi numai dacă

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0 \quad \text{pentru orice } x, y \in D,$$

respectiv strict crescătoare dacă şi numai dacă

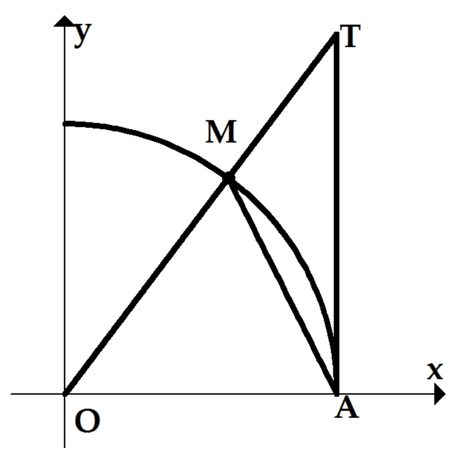
$$(f(x) - f(y))(x - y) > 0 \quad \text{pentru orice } x, y \in D, x \neq y,$$

proprietăţi analoage având loc şi pentru funcţii descrescătoare, respectiv strict descrescătoare. De asemenea, se poate observa că dacă f este strict monotonă, atunci f este injectivă.

Vom demonstra acum o inegalitate care prezintă un interes de sine stătător, anume

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{pentru orice } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

În acest sens, fie un cerc cu centrul în origine şi de rază 1 şi fie un unghi la centru $\widehat{AOM}$ de măsură în radiani x ca în figură. Fie de asemenea T intersecţia dintre dreapta OM şi tangenta în A la cerc. Atunci



$$\text{aria } \triangle AOM < \text{aria sector } AOM < \text{aria } \triangle AOT$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Graficele unor funcţii elementare

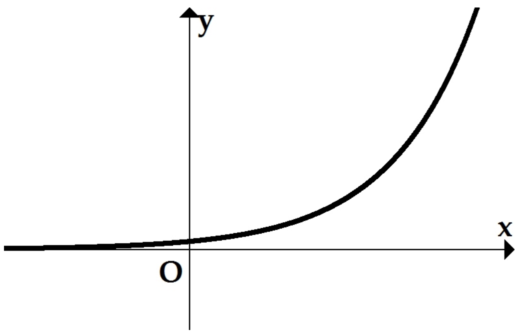


Figura 1.12: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 1$

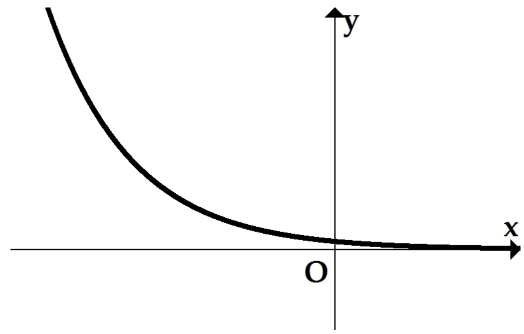


Figura 1.13: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a \in (0, 1)$

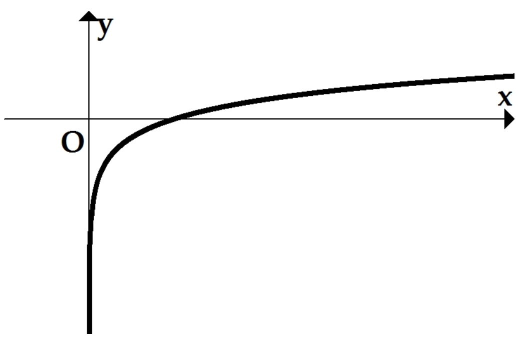


Figura 1.14: Graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 1$

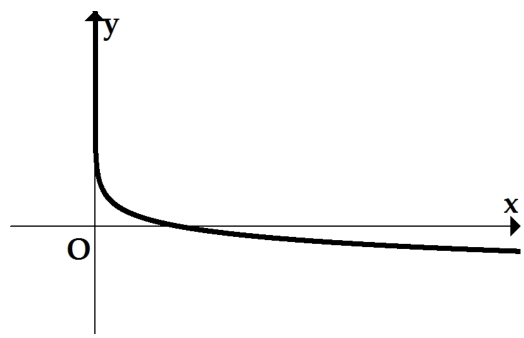


Figura 1.15: Graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, 1)$

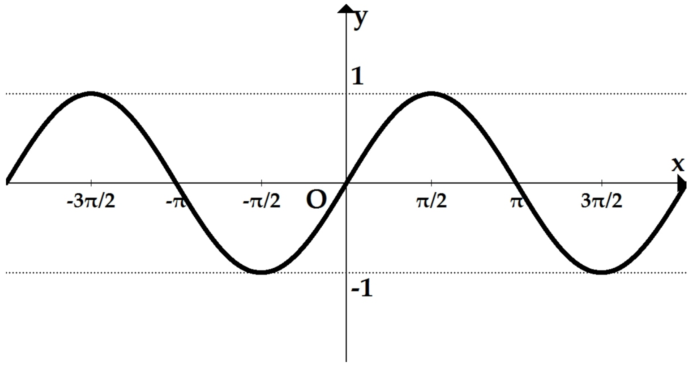


Figura 1.16: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

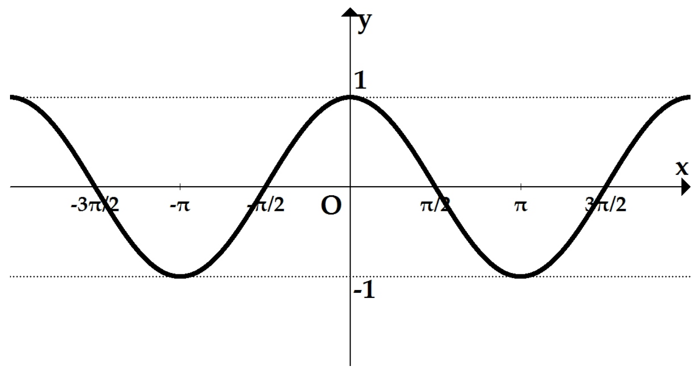


Figura 1.17: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$

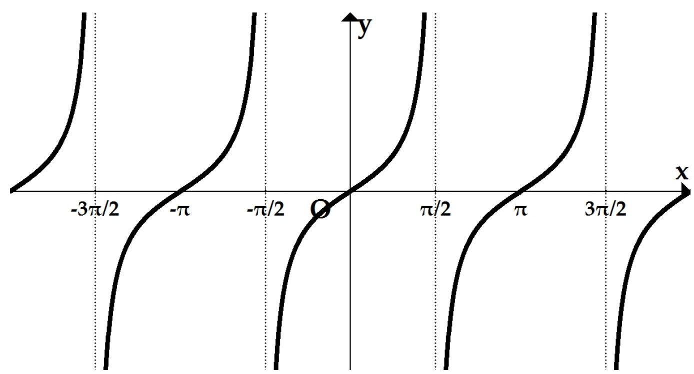


Figura 1.18: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

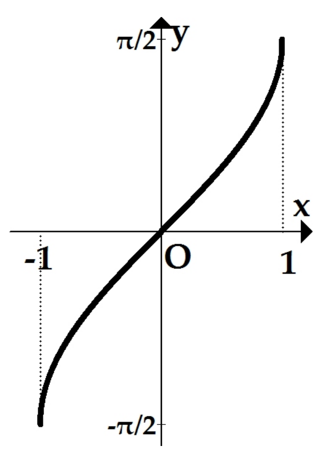


Figura 1.19: Graficul funcţiei $f : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$

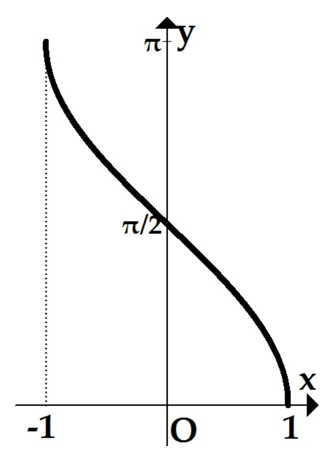


Figura 1.20: Graficul funcţiei $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$

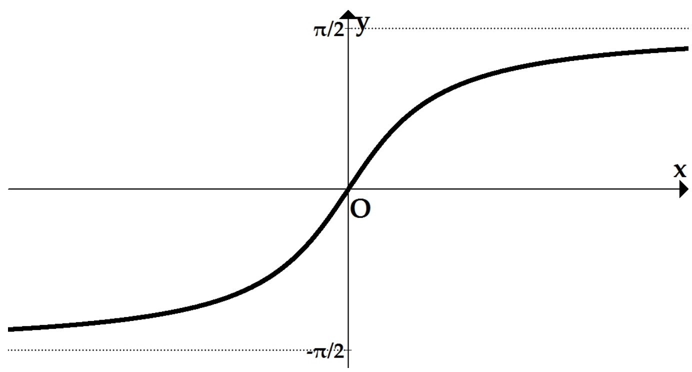


Figura 1.21: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Aplicaţii

1.1. *Fie* $a \in \mathbb{R}$. *Arătaţi că* $\max(a, -a) = |a|$.

1.2. *Dacă* $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$, *arătaţi că* $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

1.3. *Demonstraţi că* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *este număr iraţional.*

1.4. *Dacă* $a, b \in \mathbb{Q}$, *iar* $a + b\sqrt{2} = 0$, *atunci* $a = b = 0$.

1.5. *Dacă* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$, *iar* $a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2}$, *atunci* $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

1.6. *Rezolvaţi ecuaţia* $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

1.7. *Rezolvaţi sistemul*

$$\begin{cases} |x-1| + |y+2| = 6 \\ x = 1 + |y+2| \end{cases}.$$

1.8. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca sistemul* $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ *să aibă exact patru soluţii.*

1.9. *Dacă* $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y + \varepsilon$ *pentru orice* $\varepsilon > 0$, *atunci* $x \leq y$.

1.10. *Dacă* $a, b, c, d \in (0, \infty)$, *atunci* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a} \geq 4$.

1.11. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in (0, \infty)$, *atunci*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

1.12. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in (0, \infty)$*, atunci*

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}.$$

1.13. *Fie* $a, b \in (0, 1)$*. Demonstraţi că*

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

1.14. *Determinaţi* $m \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + m \geq 0 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

1.15. *Dacă* $A \subseteq \mathbb{R}$ *este mărginită, arătaţi că orice submulţime a lui* A *este mărginită.*

1.16. *Dacă* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *sunt mărginite, arătaţi că* $A \cap B$*,* $A \cup B$*,* $A \backslash B$*,* $B \backslash A$ *sunt mărginite.*

1.17. *Arătaţi că* A *este mărginită, unde:*

1. $A = [0, 1) \cup (2, 5]$;
2. $A = \{x; x = 2 + u^2, u \in [-1, 3]\}$;
3. $A = \left\{x; x = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$;
4. $A = \left\{x; x = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;
5. $A = \{x; x = \sin u + \cos(2u), u \in \mathbb{R}\}$.

1.18. *Fie* $A = \{\mathrm{tg}\, 1, \mathrm{tg}\, 2, \mathrm{tg}\, 3, \mathrm{tg}\, 4\}$*. Precizaţi* $\min A$, $\max A$*.*

1.19. *Fie* $A = \left\{\sin \frac{n\pi}{4}; n \in \mathbb{N}\right\}$*. Precizaţi* $\min A$, $\max A$*.*

1.20. *Fie* $A = \left\{\frac{6+x^2}{6-x^2}; x \in [-2, 1]\right\}$*. Determinaţi* $\inf A$, $\sup A$*.*

1.21. *Fie* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$*. Arătaţi că* d *are următoarele proprietăţi:*

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1.22. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. *Determinaţi* $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $f(x)^2$.

1.23. *Determinaţi valorile minime ale următoarelor funcţii:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x^2+2x+3}$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-3}$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

1.24. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie oarecare.*

1. *Dacă* f *este simultan monoton crescătoare şi monoton descrescătoare, atunci ea este constantă.*
2. *Dacă* f *este simultan pară şi impară, atunci ea este funcţia nulă.*

1.25. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. *Dacă* f, g *sunt (strict) crescătoare, atunci* $f + g$, $f \circ g$ *sunt (strict) crescătoare.*
2. *Dacă* f, g *sunt (strict) descrescătoare, atunci* $f + g$ *este (strict) descrescătoare, iar* $f \circ g$ *este (strict) crescătoare.*

1.26. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$.

1. *Demonstraţi că* f *este strict crescătoare pe* $(-\infty, 0]$ *şi strict descrescătoare pe* $[0, \infty)$.
2. *Determinaţi* $f([-2, -1])$, $f([3, 4])$, $f([-1, 1])$.

1.27. *Determinaţi care dintre următoarele funcţii sunt pare sau impare:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^3$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + \cos x$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + |x| - \sqrt{x^2 + 1}$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin^2 x$;
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 2x + \cos x$.
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1.28. *Determinaţi* $f \circ g$ *şi* $g \circ f$ *pentru* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *date prin:*

1. $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$;
2. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 1$.

1.29. *Determinaţi două funcţii* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel ca* $h = f \circ g$, *dacă*

1. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(x^2 + 1)$;
2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}^3$.

1.30. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$. *Arătaţi că orice număr raţional este perioadă a lui* f, *dar niciun număr iraţional nu este perioadă a lui* f. *Are* f *perioadă principală?*

1.31. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x^2)$. *Demonstraţi că* f *nu este periodică.*

1.32. *Fie* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2ax + 1$. *Demonstraţi că*

1. f *nu este injectivă pentru nicio valoare a lui* $a \in \mathbb{Q}$.
2. f *este injectivă pentru orice* $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

1.33. *Demonstraţi că următoarele funcţii sunt bijective şi precizaţi inversele acestora*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 1}$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

1.34. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + a, & x < 2 \end{cases}$ *să fie*

1) injectivă; 2) surjectivă; 3) bijectivă.

1.35. *Demonstraţi că graficele funcţiilor* $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax^2 + x + 2 - 4a$, $a \in \mathbb{R}$, *trec printr-un punct care nu depinde de* a.

1.36. *Demonstraţi că următoarele funcţii sunt mărginite*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1.37. *Fie* $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. *Demonstraţi că* f *este strict crescătoare şi surjectivă, iar inversa sa este* $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.