ELEMENTE DE CALCUL INTEGRAL
(manual universitar)

Paul GEORGESCU

Cuprins

Capitolul 1

PRIMITIVE

1.1 Primitive

Definiţia noţiunii de primitivă

Una dintre problemele centrale ale calculului diferenţial este determinarea derivatelelor unei funcţii date, de una sau mai multe variabile. Calculul integral se ocupă, printre alte lucruri, cu o problemă de natură inversă, anume: fiind dată o funcţie f, se doreşte „recuperarea" funcţiei F din care f se obţine prin derivare.

Definiţie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Spunem că $F : I \to \mathbb{R}$ este o **primitivă** a lui f pe I dacă F este derivabilă pe I, iar $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in I$.

Exemple. Funcţia $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = x^2$ este o primitivă a lui $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2x$, pe $\mathbb{R}$, deoarece $(x^2)' = 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_2(x) = \sin x$ este o primitivă a lui $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \cos x$, pe $\mathbb{R}$, deoarece $(\sin x)' = \cos x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $F_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F_3(x) = \ln x$ este o primitivă a lui $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, pe $(0, \infty)$, deoarece $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Primitiva unei funcţii date nu este unică

Totuşi, este uşor de observat că o funcţie dată poate avea mai mult de o primitivă. Mai precis, nu doar F_1 este o primitivă a lui f_1 pe $\mathbb{R}$. Întrucât

$$(x^2 + C)' = 2x, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ şi orice constantă } C \in \mathbb{R},$$

de fapt orice funcţie de forma $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + C$ este o primitivă a lui f_1 pe $\mathbb{R}$. Rămâne de observat, desigur, dacă f_1 mai are şi alte primitive în afară de acestea şi dacă situaţia în cauza (adunând la o primitivă dată o constantă oarecare obţinem o altă primitivă) este întâlnită şi pentru alte funcţii.

Teorema 1.1. *Fie $F : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Au loc următoarele afirmaţii.*

1. *Dacă F este o primitivă a lui f pe I, atunci $F + C$ este de asemenea o primitivă a lui f pe I, pentru orice constantă $C \in \mathbb{R}$.*
2. *Dacă F_1, F_2 sunt primitive ale lui f pe I, atunci ele diferă printr-o constantă.*

Demonstraţie. 1. Deoarece F este o primitivă a lui f pe I, rezultă că $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in I$. Fie $C \in \mathbb{R}$ o constantă oarecare. Atunci

$$(F + C)'(x) = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

deci $F + C$ este de asemenea o primitivă a lui f pe I.
2. Deoarece F_1, F_2 sunt primitive ale lui f pe I, rezultă că F_1, F_2 sunt derivabile pe I, iar $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in I$. Atunci $F_1 - F_2$ este derivabilă pe I, iar

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

de unde deducem că $F_1 - F_2$ este constantă pe intervalul I, având derivata nulă pe acest interval. ■

Existenţa primitivelor unei funcţii

În cele de mai sus, am precizat proprietăţi ale primitivelor unei funcţii date, admiţând că aceste primitive există. Totuşi, este posibil ca acest lucru să nu se întâmple. Mai precis, ca să existe o primitivă a unei funcţii f, ar trebui ca f să fie derivata acestei primitive (funcţie derivabilă, conform definiţiei). Reamintindu-ne că derivata oricării funcţii derivabile pe un interval are proprietatea lui Darboux (a valorii intermediare) pe acel interval, observăm că, pentru a exista o primitivă a unei funcţii f pe un interval I este necesar (dar nu şi suficient) ca f să aibă proprietatea lui Darboux pe I.

De aici, obţinem că pentru o funcţie care nu are proprietatea lui Darboux nu există primitive.

Definiţie. In cele ce urmează, vom spune că $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, **admite primitive** dacă există măcar o primitivă a lui f pe I.

Definiţie. Fiind dată $f : I \to \mathbb{R}$ care admite primitive, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, vom nota cu

$$\int f(x)dx$$

mulţimea tuturor primitivelor lui f, numită şi **integrala nedefinită** a lui f. Se foloseşte şi notaţia

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C},$$

unde F este o primitivă oarecare a lui f, aleasă convenabil, iar $\mathcal{C}$ reprezintă mulţimea funcţiilor constante pe I. Semnul $\int$ se numeşte **integrală**, iar funcţia f se numeşte **integrand**, operaţia prin care se determină primitivele unei funcţii date numindu-se **integrare**. De asemenea, variabila x se numeşte **variabilă de integrare**.

Exemple.

$$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}, \quad \int e^x dx = e^x + \mathcal{C}, \quad \int 2x dx = x^2 + \mathcal{C}.$$

Funcţiile continue admit primitive

S-a observat anterior ce fel de funcţii nu au primitive. Mai important, rămâne acum să observăm ce fel de funcţii au primitive. În acest sens, se va demonstra în Capitolul 2 că orice funcţie continuă pe un interval I admite primitive pe acel interval.

Operaţii cu mulţimea funcţiilor constante

Întrucât suma a două funcţii constante este tot o funcţie constantă, respectiv produsul dintre o constantă şi o funcţie constantă este tot o funcţie constantă, au loc proprietăţile

$$\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}, \quad \lambda\mathcal{C} = \mathcal{C}, \quad \text{pentru } \lambda \neq 0.$$

Legătura între operaţiile de integrare şi derivare

Ţinând cont de definiţia noţiunii de primitivă, rezultă că, dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, iar $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a sa, atunci

$$F'(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in I, \quad \text{iar} \int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C},$$

situaţie sistematizabilă sub următoarele forme

$$f \underset{\text{derivare}}{\overset{\text{integrare}}{\rightleftharpoons}} F, \qquad \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Într-un sens oarecum imprecis (întrucât integrala lui F' nu este F, ci $F + \mathcal{C}$), dar suficient de sugestiv, putem spune că operaţiile de integrare şi derivare sunt operaţii inverse.

Integrarea unei derivate de ordin superior

Întrucât operaţia de integrare „anulează" o singură operaţie de derivare, putem observa şi că, dacă $F : I \to \mathbb{R}$, este de $n + 1$ ori derivabilă pe intervalul I, atunci

$$\int F^{(n+1)}(x)dx = F^{(n)}(x) + \mathcal{C}.$$

Legătura între formulele de integrare şi cele de derivare

Întrucât operaţiile de integrare şi derivare sunt operaţii inverse, oricărei formule de derivare îi corespunde o formulă de integrare, obţinută prin citirea în sens invers a formulei de derivare. Astfel,

$$(\sin x)' = \cos x \implies \int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C},$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \implies \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + \mathcal{C}.$$

În plus, corectitudinea oricărei operaţii de integrare poate fi verificată derivând rezultatul obţinut. În cazul determinării corecte a unei primitive, după derivarea rezultatului se va obţine funcţia de sub integrala iniţială.

Terminologie

Trebuie observat că denumirile „integrală" şi „primitivă" nu sunt interschimbabile, primitiva reprezentând **o singură** funcţie, iar integrala reprezentând **o mulţime** de funcţii.

Funcţii definite pe reuniunea unor intervale

Definiţia noţiunii de primitivă se poate extinde pentru funcţii ale căror domenii sunt alcătuite din reuniunea mai multor intervale disjuncte. Totuşi, în această situaţie, diferenţa dintre două primitive ale unei funcţii date nu mai este neapărat constantă, întrucât pe fiecare interval din domeniu primitivele pot să difere printr-o altă constantă.

Exemplu. Funcţiile

$$F_1, F_2 : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \begin{cases} x^2+4, & x \in (0,1) \\ x^2+5, & x \in (2,3) \end{cases}, \quad F_2(x) = x^2$$

sunt primitive ale funcţiei $f : (0,1) \cup (2,3)$, $f(x) = 2x$, dar diferenţa lor $(F_1 - F_2)(x) = \begin{cases} 4, & x \in (0,1) \\ 5, & x \in (2,3) \end{cases}$ nu este constantă.

Integralele unor funcţii uzuale

În cele ce urmează vom sistematiza integralele unor funcţii uzuale, cu unele comentarii. Prin I vom nota un interval oarecare, $I \subset \mathbb{R}$.

Integrala funcţiei putere

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N};$$
$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset (0,\infty),\ p \in \mathbb{R},\ p \neq -1;$$
$$\int 1 dx = x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R};$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset (0,\infty) \quad \text{sau } x \in I \subset (-\infty, 0).$$

Să notăm că, pentru primele două formule, exponenţii numărătorilor sunt egali cu numitorii, operaţia de integrare fiind asociată cu o operaţie de împărţire. De asemenea, prin **i**ntegrare, puterea creşte (**i**ncreases, în limba engleză), în vreme ce prin **d**erivare puterea descreşte (**d**ecreases, în limba engleză), primele litere ale cuvintelor furnizând regula mnemotehnică.

Integrala funcţiei exponenţiale

$$\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R}, a > 0.$$

Din nou, integrarea funcţiei exponenţiale cu baza diferită de e este asociată unei operaţii de împărţire.

Integralele funcţiilor sin **şi** cos **şi ale unor funcţii în care intervin** sin **şi** cos

$$
\begin{aligned}
\int \sin x dx &= -\cos x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R} \\
\int \cos x dx &= \sin x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset \mathbb{R} \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset (k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Semnele cu care apar integralele funcţiilor sin şi cos sunt inverse semnelor cu care apar derivatele acestora. Semnul integralei funcţiei $\frac{1}{\sin^2}$ este acelaşi cu semnul integralei funcţiei sin. Semnul integralei funcţiei $\frac{1}{\cos^2}$ este acelaşi cu semnul integralei funcţiei cos.

Integralele unor fracţii (I)

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I \subset \mathbb{R} \\
&\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I \subset (-\infty, -a) \text{ sau } x \in I \subset (a, \infty)
\end{aligned}
$$

Integralele unor fracţii (II)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I \subset \mathbb{R} \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I \subset (-a, a)
\end{aligned}
$$

Pentru deosebirea integralelor de mai sus, cu integranzi destul de asemănători, este utilă următoarea regulă mnemotehnică: dacă după eliminarea termenului liber, extragerea radicalului şi eliminarea modulului se obţine $\frac{1}{x}$, atunci integrala conţine ln (logaritmul natural), ca şi $\int \frac{1}{x} dx$. Dacă după aceste operaţii nu se obţine $\frac{1}{x}$, atunci nici integrala nu conţine ln.

În plus, o altă regulă mnemotehnică este că în rezultatul primei integrale (cea fără radical) se împarte cu a şi înăuntrul argumentului funcţiei arctg şi în afara acestuia, întrucât „se pleacă de la a^2". În rezultatul celei de-a doua integrale se împarte cu a doar înăuntrul argumentului funcţiei arcsin, nu şi în afara acestuia, întrucât „se pleacă de la $\sqrt{a^2} = a$".

Integralele unor fracţii (III)

Are loc şi următoarea formulă, care nu se conformează însă regulii mnemotehnice de mai sus

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \mathcal{C}, \quad a > 0, x \in I, \text{ unde}$$
$$I \subset (-\infty, -a) \text{ sau } I \subset (-a, a) \text{ sau } I \subset (a, \infty).$$

Oricum, integralele de acest tip pot fi calculate relativ uşor ca aplicaţie a operaţiilor cu funcţii care admit primitive, insistenţa asupra încă unei formule de calcul separate pentru acest caz, neconformă cu celelalte, nefiind neapărat necesară.

1.2 Operaţii cu funcţii care admit primitive

Teorema 1.2. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, f, g admit primitive pe I şi $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ admit primitive pe I, iar*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(**integrala sumei este egală cu suma integralelor**)*, respectiv*

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

(**integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor**).

2. *Funcţia cf admite primitive pe I, iar*

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx,$$

(**o constantă nenulă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei**).

Menţionăm că nu au loc formule asemănătoare pentru produs şi raport, adică integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor şi nici integrala raportului nu este, de regulă, raportul integralelor. Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 1.3. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, f, g admit primitive pe I şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \neq 0$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ admite primitive pe I şi*

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

Exemplu.

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{3}{x^2+16} + \frac{5}{\sqrt{x^2+19}}\right) dx &= 3\int \frac{1}{x^2+16}dx + 5\int \frac{1}{\sqrt{x^2+19}}dx \\ &= \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + 5\ln\left(x + \sqrt{x^2+19}\right).\end{aligned}$$

Exemplu. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}dx = \frac{1}{2a}\int \frac{2a}{(x-a)(x+a)}dx \\ &= \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx\right) \\ &= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + \mathcal{C} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

1.3 Metode de calcul

S-a observat anterior că integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor. Pentru calculul integralei unui produs, şi în câteva alte situaţii, se poate aplica metoda descrisă mai jos.

1.3.1 Metoda de integrare prin părţi

Teorema 1.4. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabile, cu f', g' continue. Atunci $f'g$ şi fg'*

admit primitive pe I, iar

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Demonstraţie. Întrucât $f'g$ şi fg' sunt continue, ca produse de funcţii continue, ele admit primitive. Să observăm că

$$(fg)' = f'g + fg',$$

conform formulei de derivare a unui produs de funcţii, şi atunci

$$\begin{aligned}
&\int \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right] dx = \int (fg)'(x)dx \\
&\Longrightarrow \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = (fg)(x) + \mathcal{C} \\
&\Longrightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) + \mathcal{C} - \int f(x)g'(x)dx \\
&\Longrightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.
\end{aligned}$$

■

Întrucât metoda de integrare prin părţi nu reprezintă o metodă de calcul explicit al unei integrale, ci doar o formă de exprimare a unei integrale printr-o alta, ea se poate aplica doar atunci când integrala rezultată are o formă mai simplă decât integrala iniţială.

Practic, trebuie mai întâi identificată sub integrală funcţia care se poate scrie ca o derivată (f'; implicit, trebuie determinat şi f). În membrul drept, ca rezultat, mai întâi se elimina integrala, derivata şi dx şi se scriu doar funcţiile rămase, iar apoi se mută semnul de derivare de la una dintre funcţii la funcţia cealaltă.

Exemplu. 1. Fie integrala

$$\int xe^x dx.$$

Întrucât x este o funcţie polinomială, încercăm să scriem **cealaltă** funcţie de sub integrală ca o derivată (procedând invers am obţine după aplicarea formulei de integrare prin părţi o funcţie polinomială de grad mai mare decât cea iniţială). Cum e^x se poate scrie ca o derivată sub forma

$(e^x)' = e^x$, urmează că

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)' e^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + \mathcal{C} = e^x(x-1) + \mathcal{C}.$$

2. Fie integrala

$$\int \ln x dx, x \in (0, \infty).$$

Întrucât $\ln x$ este o funcţie inversă, mai greu de scris direct ca o derivată, încercăm să scriem **cealaltă** funcţie de sub integrală (adică funcţia constantă 1) ca o derivată. Cum 1 se poate scrie ca o derivată sub forma $1 = x'$, obţinem că

$$\int \ln x dx = \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x(\ln x)' dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + \mathcal{C} = x(\ln x - 1) + \mathcal{C}.$$

1.3.2 Prima metodă de schimbare de variabilă

Teorema 1.5. *Fie I, J intervale şi $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă cu derivata continuă pe I;*
2. *f admite primitive pe J;*

Atunci $(f \circ u)u'$ admite primitive pe I, iar

$$\int (f \circ u)(x) u'(x) dx = (F \circ u)(x) + \mathcal{C},$$

unde F este o primitivă a lui f.

Demonstraţie. Deoarece F este o primitivă a lui f, urmează că F este derivabilă, iar $F' = f$. Atunci funcţia compusă $F \circ u$ este derivabilă, fiind compunerea a două funcţii derivabile, iar

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x) = (f \circ u)(x)u'(x), \quad (\forall)\ x \in I,$$

conform formulei de derivare a funcţiei compuse. Din această egalitate rezultă că $(f \circ u)u'$ admite primitive pe I, iar o primitivă a sa este $F \circ u$, de unde concluzia. ■

Pentru aplicarea acestei metode, trebuie mai întâi identificată **corect** schimbarea de variabilă. În acest, scop, se pune mai întâi în evidenţă sub semnul integral derivata unei funcţii (la nivelul lui dx, nu la numitor, exponent, ş.a.m.d.) si se observă daca acea funcţie „se repetă". Dacă se întâmplă acest lucru, funcţia respectivă poate fi noua variabilă u.

Exemple. 1. Fie integrala

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Cum $\cos x$ se scrie ca o derivată sub forma $\cos x = (\sin x)'$, urmează că

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{1 + \sin^2 x} dx,$$

observându-se că $\sin x$ se repetă sub integrală. Notăm $u = \sin x$. Atunci

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Asociem integralei iniţiale integrala

$$J_1 = \int \frac{1}{1 + u^2} du,$$

obţinută prin înlocuirea lui u şi du (aceasta corespunde determinării lui F din enunţul teoremei). Cum $J_1 = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C}$ (adică $F(u) = \operatorname{arctg} u$), revenind la variabila iniţială prin înlocuire (calculând explicit $(F \circ u)(x)$) urmează că

$$I_1 = \operatorname{arctg}(\sin x) + \mathcal{C}.$$

In cele de mai sus, „asocierea" se face datorită faptului că I_1 şi J_1 reprezintă mulţimi de funcţii depinzând de variabile distincte (x, respectiv u), posibil definite pe intervale diferite, neputând fi pus semnul de egalitate între I_1 şi J_1. Reamintim că două funcţii sunt egale dacă şi numai dacă au acelaşi domeniu, acelaşi codomeniu şi realizează o asociere identică, adică asociază fiecărui element din domeniul comun un acelaşi element din codomeniu.

Polinoame de gradul 1 ca variabile noi

O aplicaţie imediată este faptul că schimbarea de variabilă $u = ax + b$, $a \neq 0$, poate fi folosită ori de câte ori este nevoie. Într-adevăr, fie integrala

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot adx.$$

Cum a se scrie ca o derivată sub forma $a = (ax+b)'$, urmează că

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)(ax+b)'dx,$$

observându-se că $ax+b$ se repetă sub integrală. Notăm $u = ax+b$. Atunci

$$du = (ax+b)'dx = adx.$$

Asociem integralei iniţiale integrala

$$\frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u) + \mathcal{C}$$

unde F este o primitivă a lui f. Înlocuind u, obţinem

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + \mathcal{C}.$$

Urmează că **formulele precizând integralele funcţiilor uzuale rămân valabile şi în cazul în care x este înlocuit cu un termen de gradul 1 în x, împărţind însă rezultatul final prin coeficientul lui x.** De exemplu, deoarece

$$\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}, \quad \int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C},$$

urmează că

$$\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + \mathcal{C}, \quad \int \cos(4x+2)dx = \frac{1}{4}\sin(4x+2) + \mathcal{C}.$$

Integralele unor funcţii hiperbolice

Reamintim definiţiile următoarelor funcţii hiperbolice

$$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{(sinus hiperbolic)}$$

$$\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{(cosinus hiperbolic)}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{(tangentă hiperbolică)} \\ \operatorname{cth} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{cth} x &= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad \text{(cotangentă hiperbolică)}, \end{aligned}$$

împreună cu identitatea fundamentală

$$(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx &= \operatorname{th} x + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx &= -\operatorname{cth} x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subset (-\infty, 0) \text{ sau } x \in I \subset (0, \infty). \end{aligned}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh} x dx &= \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\int e^x dx - \int e^{-x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{e^{-x}}{-1} \right) + \mathcal{C} = \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x}\right) + \mathcal{C} = \operatorname{ch} x + \mathcal{C}, \end{aligned}$$

similar calculându-se cea de-a doua integrală. De asemenea,

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2},$$

de unde

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + \mathcal{C},$$

cea de-a patra formulă obţinându-se asemănător. Remarcăm faptul că formulele de integrare pentru funcţii hiperbolice sunt asemănătoare celor pentru funcţiile trigonometrice corespunzătoare, cu excepţia absenţei semnului $-$ pentru $\int \operatorname{sh} x dx$.

1.3.3 A doua metodă de schimbare de variabilă

Din punct de vedere practic, prima metodă de schimbare de variabilă se foloseşte atunci când sub integrală se poate pune în evidenţă derivata unei funcţii care, de asemenea, „se repetă" (integrandul poate fi scris în funcţie de aceasta). Există multe situaţii în care se poate face o schimbare de variabilă plauzibilă, chiar dacă nu poate fi pusă în evidenţă sub integrală derivata acestei schimbări de variabilă, sau cel puţin nu la nivelul lui dx. Un exemplu este integrala

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx, \quad x \in (0,\infty),$$

în care schimbarea de variabilă $u = e^x$ este plauzibilă, deşi $u' = e^x$ nu poate fi pus în evidenţă la nivelul lui dx. Această situaţie este tratată cu ajutorul următoarei teoreme, în care integrandul este $f \circ u$, nu $(f \circ u)u'$, ca în prima metodă de schimbare de variabilă.

Teorema 1.6. *Fie I, J intervale şi $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă şi inversabilă, iar u^{-1} este derivabilă cu derivata continuă pe J;*
2. *$f \cdot (u^{-1})'$ admite primitive pe J;*

Atunci $(f \circ u)$ admite primitive pe I, iar

$$\int (f \circ u)(x)dx = (F \circ u)(x) + \mathcal{C},$$

unde F este o primitivă a lui $f \cdot (u^{-1})'$.

Exemplu. Fie integrala

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx, \quad x \in (0,\infty),$$

Schimbarea de variabilă, plauzibilă din context, este $u = e^x$, unde

$$u : (0,\infty) \to (1,\infty), \quad u(x) = e^x$$

este derivabilă şi inversabilă, inversa sa,

$$u^{-1} : (1, \infty) \to (0, \infty), \quad u^{-1}(y) = \ln y$$

fiind de asemenea derivabilă, cu $(u^{-1})'$ continuă pe $(1, \infty)$, deoarece

$$(u^{-1})'(y) = \frac{1}{y}, \quad y \in (1, \infty).$$

Atunci

$$u = e^x \implies x = \ln u$$

(această etapă reprezintă inversarea lui u), de unde

$$dx = (\ln u)' du = \frac{1}{u} du,$$

(această etapă include calculul lui $(u^{-1})'$). Asociem integrala, obţinută prin înlocuirea lui e^x şi dx,

$$J = \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{u} du$$

(acum se calculează o primitivă pentru $f \cdot (u^{-1})'$). Atunci

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{u(1+u)} du = \int \frac{1+u-u}{u(1+u)} du \\ &= \int \frac{1+u}{u(1+u)} du - \int \frac{u}{u(1+u)} du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{1+u} du \\ &= \ln|u| - \ln|1+u| + \mathcal{C} = \ln \left| \frac{u}{1+u} \right| + \mathcal{C} \end{aligned}$$

(s-a determinat o primitivă F a lui $f \cdot (u^{-1})'$). Prin înlocuirea lui u (acum se calculează $F \circ u$), urmează că integrala iniţială este

$$I = \ln \left| \frac{e^x}{1+e^x} \right| + \mathcal{C} = \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) + \mathcal{C}.$$

1.4 Integrarea funcţiilor raţionale

Definiţie. Numim **funcţie raţională** o funcţie f care se poate scrie sub forma (similară unui număr raţional)

$$f = \frac{P}{Q},$$

unde P, Q sunt funcţii polinomiale.

Să observăm că denumirea de funcţie raţională are legătură cu forma de raport a funcţiei, nefiind necesar ca P, Q să aibă coeficienţi raţionali. Astfel,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}}{x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{7}},$$

este o funcţie raţională, deşi coeficienţii $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ nu sunt numere raţionale.

Descompunerea unei funcţii raţionale

În cele ce urmează, vom preciza un mod general de calcul al primitivelor unei funcţii raţionale. În fapt, calculul unei integrale de forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

se poate reduce la calculul mai multor integrale mai simple, ţinând cont de următoarele observaţii.

1. Dacă grad $P \geq$ grad Q, se poate face mai întâi împărţirea cu rest a numărătorului la numitor. Se înlocuieşte apoi numărătorul cu expresia sa furnizată de această împărţire cu rest, iar apoi se separă integrala iniţială în două integrale, una corespunzătoare câtului şi împărţitorului, iar cealaltă restului.

2. Dacă numitorul nu este „elementar" (puterea unei funcţii polinomiale care nu se descompune mai departe), atunci, după descompunerea lui Q, funcţia de integrat $\frac{P}{Q}$ se poate scrie ca suma unor fracţii cu numitori mai simpli. În acest sens, orice funcţie polinomială Q se poate descompune ca un produs de funcţii polinomiale de forma

   - $(x - a)^p$ (puteri ale unor funcţii polinomiale de gradul 1)
   - $(x^2 + bx + c)^p$, cu $\Delta = b^2 - 4c < 0$ (puteri ale unor funcţii polinomiale de gradul 2 care nu se descompun mai departe),

   înmulţite eventual cu o constantă.

Exemplu. Fie integrala
$$\int \frac{x^4}{x+1}dx.$$
Cum gradul numărătorului este 4 iar cel al numitorului este 1, împărţim mai întâi cu rest numărătorul la numitor, obţinând relaţia

$$x^4 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 1.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x+1}dx &= \int \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 1}{(x+1)}dx \\ &= \int \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)}{(x+1)}dx + \int \frac{1}{x+1}dx \\ &= \int (x^3 - x^2 + x - 1)dx + \ln|x+1| + \mathcal{C} \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Pentru descompunerea în fracţii mai simple, ţinem seamă că

- Numărătorii vor fi căutaţi de grad **cu o unitate mai mic** decât gradul elementului principal de la numitor.

- Descompunerea nu „face salturi", în sensul că odată cu o putere a unui element principal pentru descompunere sunt necesare şi puterile intermediare, chiar dacă acestea nu apar în mod explicit de la început.

Astfel, un exemplu de descompunere este

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Elementele principale de la numitorul fracţiei iniţiale sunt $x+1$ şi $x+2$ (de gradul 1), numărătorii care le corespund fiind de gradul 0 (constante).

De asemenea, un alt exemplu de descompunere este

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+6)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+6} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+6)^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+2x+6)^3}.$$

Elementele principale de la numitorul fracţiei iniţiale sunt

- $x + 1$ (de gradul 1);
- $x^2 + 2x + 6$ (de gradul 2, care nu se descompune mai departe întrucât $\Delta = -20 < 0$).

Numărătorii care le corespund sunt de gradul 0 (constante), respectiv de gradul 1. În descompunere, odată cu puterea 3 (cea care apare explicit) apar şi puterile intermediare 1 şi 2.

Metode de determinare a coeficienţilor

1. Aducerea la acelaşi numitor, identificarea coeficienţilor şi rezolvarea unui sistem.
2. Înmulţirea cu puterile cele mai mari ale elementelor principale de la numitor.
3. (În unele situaţii particulare) Scrierea numărătorului cu ajutorul diferenţei unor factori de la numitor

Exemplu. Fie integrala
$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx.$$
Numitorul fracţiei este funcţia polinomială de gradul al doilea $x^2 + 3x + 2$. Întrucât $\Delta = 9 - 8 > 0$, aceasta se descompune mai departe. Rezolvând ecuaţia $x^2 + 3x + 2 = 0$, obţinem rădăcinile $x_1 = -1$ şi $x_2 = -2$, şi atunci $x^2 + 3x + 2$ se descompune sub forma
$$x^2 + 3x + 2 = 1(x - (-1))(x - (-2)) = (x + 1)(x + 2),$$
deci
$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} dx.$$
Integrandul se descompune sub forma
$$\frac{1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}.$$
Rămâne deci să determinăm A şi B. Prin amplificare şi aducere la acelaşi

numitor obţinem

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{x(A+B)+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$$

Întrucât două fracţii echivalente cu numitorii egali au şi numărătorii egali, obţinem de aici

$$1 = x(A+B) + (2A+B),$$

pentru orice x din domeniul de integrare. Prin identificarea coeficienţilor, obţinem că

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1, \end{cases}$$

sistem cu soluţia $A=1$, $B=-1$. Înlocuind aceste valori acolo unde A şi B au apărut pentru prima dată obţinem descompunerea

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

De aici,

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$$
$$= \ln|x+1| - \ln|x+2| + \mathcal{C} = \ln\frac{|x+1|}{|x+2|} + \mathcal{C}.$$

Exemplu. Fie integrala

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx.$$

Integrandul se descompune sub forma

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}. \tag{1.1}$$

Rămâne deci să determinăm A, B şi C.

Înmulţind (1.1) cu primul numitor, $x+1$, obţinem că

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = A + \frac{B(x+1)}{x+2} + \frac{C(x+1)}{x+3},$$

de unde, pentru $x = -1$ (valoare care anulează factorul cu care s-a înmulţit) se obţine că

$$\frac{1}{2} = A.$$

Înmulţind (1.1) cu al doilea numitor, $x+2$, obţinem că

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+2)}{x+1} + B + \frac{C(x+2)}{x+3},$$

de unde, pentru $x = -2$ (valoare care anulează factorul cu care s-a înmulţit) se obţine că

$$-1 = B.$$

Înmulţind (1.1) cu al treilea numitor, $x+3$, obţinem că

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+3)}{x+1} + \frac{B(x+3)}{x+2} + C,$$

de unde, pentru $x = -3$ (valoare care anulează factorul cu care s-a înmulţit) se obţine că

$$\frac{1}{2} = C.$$

Înlocuind aceste valori acolo unde A, B şi C au apărut pentru prima dată obţinem descompunerea

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3}.$$

De aici,

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + \mathcal{C}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|(x+1)(x+3)|}{|x+2|^2}\right) + \mathcal{C}.$$

Exemplu. Fie integrala

$$\int \frac{1}{(x^2+2)(x^2+4)}dx.$$

Cum

$$(x^2+4)-(x^2+2)=2,$$

putem scrie

$$\int \frac{1}{(x^2+2)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(x^2+2)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4)-(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+4)}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2+4}{(x^2+2)(x^2+4)}dx - \int \frac{x^2+2}{(x^2+2)(x^2+4)}dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x^2+2}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + \mathcal{C}$$

1.5 Integrale reductibile la integralele unor funcţii raţionale

Vom prezenta un număr de situaţii tip în care calculul integralei unor funcţii aparent mai complicate se reduce la calculul integralelor unor funcţii raţionale după schimbări de variabile potrivite. În cele ce urmează, prin R vom înţelege o funcţie raţională oarecare.

Integrale conţinând exponenţiale

$$\int R(a^x)dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă $u = a^x$ (se alege exponenţiala ca variabilă nouă).

Exemplu. Fie integrala
$$I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$
Întrucât $e^{2x} = (e^x)^2$, putem scrie
$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx.$$
Alegând variabila nouă $u = e^x$, urmează că
$$du = (e^x)' dx = e^x dx.$$
Asociem integralei iniţiale integrala
$$J = \int \frac{1}{1+u^2} du,$$
obţinută prin înlocuirea lui du şi u (în această ordine). Cum $J = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C}$, obţinem prin înlocuirea lui u că
$$I = \operatorname{arctg}(e^x) + \mathcal{C}.$$

Integrale conţinând radicalul unei funcţii polinomiale de gradul 1
$$\int R(\sqrt[n]{ax+b}) dx$$
Se poate folosi schimbarea de variabilă $u = \sqrt[n]{ax+b}$ (se alege radicalul ca variabilă nouă). Pasul următor este ridicarea la putere, pentru eliminarea radicalului.

Exemplu. Fie integrala
$$I = \int \sqrt[5]{2x+1} dx.$$
Alegând variabila nouă $u = \sqrt[5]{2x+1}$, urmează că
$$u^5 = 2x+1 \implies x = \frac{u^5-1}{2} \implies dx = \left(\frac{u^5-1}{2}\right)' du = \frac{5}{2} u^4 du.$$

Asociem integralei iniţiale integrala

$$J = \int u \cdot \frac{5}{2} u^4 du,$$

obţinută prin înlocuirea lui du şi u. Cum

$$J = \int \frac{5}{2} u^5 du = \frac{5}{2} \int u^5 du = \frac{5}{2} \cdot \frac{u^6}{6} + \mathcal{C} = \frac{5}{12} u^6 + \mathcal{C},$$

obţinem prin înlocuirea lui u că

$$I = \frac{5}{12} \left(\sqrt[5]{2x+1} \right)^6 + \mathcal{C}.$$

Integrale conţinând mai mulţi radicali de ordine diferite ai unei aceleiaşi expresii de gradul 1

$$\int R(\sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă $u = \sqrt[n]{ax+b}$, unde n este cel mai mic multiplu comun al radicalilor existenţi. Pasul următor este ridicarea la putere, pentru eliminarea radicalului. Calculele sunt similare celor de mai sus.

Integrale conţinând radicalul unui raport de funcţii polinomiale de gradul 1

$$\int R(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (se alege radicalul ca variabilă nouă). Pasul următor este ridicarea la putere, pentru eliminarea radicalului. Calculele sunt similare celor de mai sus.

Integrale conţinând radicalul unei funcţii polinomiale de gradul 2 **la numitor**

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

Se poate reduce la una dintre integralele uzuale după aducerea trinomului de gradul al doilea $ax^2 + bx + c$ la forma canonică (punând în evidenţă pătrate perfecte).

Exemplu. Fie integrala

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx$$

Deoarece

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+1 &= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right], \end{aligned}$$

urmează că

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}}}dx$$

Cu schimbarea de variabilă $u = x - \frac{3}{4}$, obţinem

$$du = \left(x-\frac{3}{4}\right)' dx = dx.$$

Asociem integrala

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{u^2-\frac{1}{16}}}du = \ln\left|u+\sqrt{u^2-\frac{1}{16}}\right| + \mathcal{C}.$$

Atunci, prin înlocuirea lui u, obţinem că

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(x-\frac{3}{4}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}}\right| + \mathcal{C}.$$

Integrale conţinând radicalul unei funcţii polinomiale de gradul 2

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx$$

Se poate calcula utilizând metoda de integrare prin părţi. În acest sens, să notăm

$$I = \int \sqrt{x^2+a^2}dx.$$

Observăm că

$$I = \int x' \sqrt{x^2 + a^2} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x(\sqrt{x^2 + a^2})' dx$$
$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$

Întrucât numărătorul, x^2, este asemănător cu expresia de la numitor, $x^2 + a^2$, exploatăm această asemănare scriind numărătorul sub forma

$$x^2 = x^2 + a^2 - a^2.$$

Atunci

$$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$
$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$
$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \mathcal{C}$$

De aici,

$$2I = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \mathcal{C}$$
$$\Longrightarrow \ I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right] + \mathcal{C}$$

În mod asemănător se pot calcula şi integralele $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$$

După aducerea la forma canonică (formarea de pătrate perfecte), problema se reduce la calculul uneia din integralele de mai sus.

Integrale conţinând radicalul unei funcţii polinomiale de gradul 2 într-un cadru general

$$\int R(\sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0$$

Se pot folosi schimbările de variabilă

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}, \quad \text{dacă } a > 0$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}, \quad \text{dacă } c \geq 0$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1), \quad \text{dacă } \Delta \geq 0$$

x_1 fiind o rădăcină a ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$. Aceste schimbări de variabilă se mai numesc şi **substituţiile lui Euler**. Cele trei cazuri nu se exclud unul pe celălalt, existând situaţii în care pot fi utilizate toate cele trei schimbări de variabilă.

Exemplu. Fie integrala
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-3x+2}}dx.$$
Pot fi aplicate toate cele trei schimbări de variabilă, deoarece $a=1>0$, $c=2>0$, iar $\Delta=1>0$. Va fi folosită prima dintre ele,

$$\sqrt{x^2-3x+2} = t+x.$$

Atunci, după ridicare la pătrat,

$$x^2-3x+2 = t^2+2tx+x^2 \implies 2-t^2 = x(2t+3) \implies x = \frac{2-t^2}{2t+3},$$

de unde
$$dx = \left(\frac{2-t^2}{2t+3}\right)' dt = (-2)\frac{t^2+3t+2}{(2t+3)^2}dt.$$
Asociem integrala

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{1}{\frac{2-t^2}{2t+3}\left(t+\frac{2-t^2}{2t+3}\right)} \cdot (-2)\frac{t^2+3t+2}{(2t+3)^2}dt \\
&= \int \frac{1}{\frac{2-t^2}{2t+3}\cdot\frac{t^2+3t+2}{2t+3}} \cdot (-2)\frac{t^2+3t+2}{(2t+3)^2}dt \\
&= \int \frac{-2}{2-t^2}dt = 2\int \frac{1}{t^2-2}dt = 2\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + \mathcal{C} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Prin înlocuirea lui t cu $\sqrt{x^2-3x+2}-x$, obţinem că

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-3x+2}-x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-3x+2}-x+\sqrt{2}} \right| + \mathcal{C}.$$

Integralele unor funcţii trigonometrice (I)

$$\int R(\sin x)\cos x dx, \quad \int R(\cos x)\sin x dx$$

Întrucât $(\sin x)' = \cos x$, iar $(\cos x)' = -\sin x$, integralele de mai sus au în fapt forma

$$\int R(\sin x)\cdot(\sin x)' dx, \quad \int R(\cos x)\cdot(-\cos x)' dx.$$

Se vor folosi schimbările de variabilă $u = \sin x$, respectiv $u = \cos x$.

Exemplu. Fie integrala

$$I = \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx.$$

Atunci, deoarece

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x,$$

urmează că

$$I = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x} dx = 2\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\cos x dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \sin x$ obţinem

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Asociem integrala

$$J = 2\int \frac{u}{1+u^2} du = \int \frac{2u}{1+u^2} du = \int \frac{(1+u^2)'}{1+u^2} du.$$

Cu schimbarea de variabilă $v = 1+u^2$ obţinem

$$dv = (1+u^2)' du = 2u du.$$

Asociem integrala

$$J' = \int \frac{1}{v} dv = \ln|v| + \mathcal{C}.$$

Atunci, prin înlocuirea lui v obţinem că

$$J = \ln\left|1+u^2\right| + \mathcal{C} = \ln\left(1+u^2\right) + \mathcal{C}.$$

Prin înlocuirea lui u obţinem că integrala iniţială are valoarea

$$I = \ln\left(1+\sin^2 x\right) + \mathcal{C}.$$

Integralele unor funcţii trigonometrice (II)

$$\int \sin^m \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Dacă măcar una dintre puterile m, n ale uneia din funcţii este impară, **cealaltă** funcţie se poate alege ca variabilă nouă.

Dacă ambele puteri sunt pare, se va trece la unghiul dublu prin folosirea formulelor

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

Exemplu. Fie integrala

$$I = \int \sin^5 \cos^3 x dx.$$

Deoarece $\sin x$ este ridicată la o putere impară, $\cos x$ poate fi aleasă ca variabilă nouă. Dintr-un motiv similar, şi $\sin x$ poate fi aleasă ca variabilă nouă. Pentru fixarea ideilor, vom folosi schimbarea de variabilă $u = \sin x$. Atunci

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Folosind identitatea trigonometrică fundamentală, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obţinem

$$I = \int \sin^5 x \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^5 x(1-\sin^2 x) \cdot \cos x dx.$$

Asociem integrala

$$J = \int u^5(1-u^2)du = \int (u^5 - u^7)du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + \mathcal{C}.$$

Prin înlocuirea lui u obţinem că

$$I = \frac{(\sin x)^6}{6} - \frac{(\sin x)^8}{8} + \mathcal{C}.$$

Integralele unor funcţii trigonometrice (III)

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Prin analogie cu cele de mai sus, dacă R este impară într-una din funcţiile $\sin x$, $\cos x$, adică

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

respectiv

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

cealaltă funcţie se alege ca schimbare de variabilă.

Dacă R este pară atât în $\sin x$ cât şi în $\cos x$, fie se trece la unghiul dublu, fie se alege ca schimbare de variabilă $u = \operatorname{tg} x$. Calculele sunt similare celor de mai sus.

Integrale binome

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \neq 0$$

Întrucât m, n, p sunt numere raţionale, nu neapărat întregi, integrala de mai sus poate conţine radicali de diverse forme. Dacă

$$p \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z},$$

şi numai în aceste cazuri, calculul unei integrale de forma de mai sus poate fi redus la calculul integralei unei funcţii raţionale. Sunt posibile următoarele situaţii.

1. Dacă $p \in \mathbb{Z}$, atunci $x = t^q$, unde q este numitorul comun al lui m şi n. Altfel spus, $t = \sqrt[N]{x}$, unde N este cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor deja existenţi.

2. Dacă $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, atunci $ax^n + b = t^q$, unde q este numitorul lui p. Altfel spus, $t = \sqrt[N]{ax^n + b}$, adică se alege ca variabilă nouă paranteza cu tot cu exponent, eliminând eventualul numărător al exponentului şi eventualul semn $-$.

3. Dacă $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, atunci $a + \frac{b}{x^n} = t^q$, unde q este numitorul lui p. Altfel spus, $t = \sqrt[N]{a + \frac{b}{x^n}}$, adică se alege ca variabilă nouă paranteza după un factor comun forţat, cu tot cu exponent, eliminând eventualul numărător al exponentului şi eventualul semn $-$.

Substituţiile de mai sus se numesc şi **substituţiile lui Cebâşev**.

Exemplu. Fie integrala

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Atunci

$$I = \int x^3 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx \implies m = 3, n = 2, p = -\frac{1}{2}.$$

Observăm că $p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, dar $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$. Alegem ca variabilă nouă

$$t = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1},$$

eliminând semnul $-$ de la exponent, întrucât expresia $1 + x^2$ de sub radical nu este ridicată ea însăşi la o putere. De aici

$$t^2 = x^2 + 1 \implies x^2 = t^2 - 1 \implies x = \sqrt{t^2-1},$$

şi deci

$$dx = (\sqrt{t^2-1})' dt = \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot (t^2-1)' dt = \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot 2t dt = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt.$$

Asociem integrala

$$J = \int \left(\sqrt{t^2-1}\right)^3 \cdot (t^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \int (t^2-1)\sqrt{t^2-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt$$
$$= \int (t^2-1) dt = \frac{t^3}{3} - t + \mathcal{C}.$$

Prin înlocuirea lui t, obţinem că

$$I = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3} - \sqrt{x^2+1} + \mathcal{C}.$$

Aplicaţii

1.1. *Demonstraţi că*

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

şi determinaţi $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.2. *Demonstraţi că*

$$\left(2\sqrt{x}(\ln x - 2)\right)' = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad \textit{pentru orice } x > 0,$$

şi determinaţi $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

1.3. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{5+\sin x}$. *Demonstraţi că orice primitivă a lui* f *este strict crescătoare.*

1.4. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\cos 2x$. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât funcţia*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = e^{-x}(a\cos 2x + b \sin 2x),$$

să fie o primitivă a lui f.

1.5. *Fie* $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$. *Determinaţi* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *astfel încât funcţia*

$$F : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = (ax^2+b)\cos x + cx \sin x,$$

să fie o primitivă a lui f.

1.6. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{1+x}-b}{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ *să admită primitive.*

1.7. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int \frac{1}{4x+5}dx$; 2) $\displaystyle\int e^{3x+1}dx$; 3) $\displaystyle\int \sin(3x+4)dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^4}$.

1.8. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int x^2e^x dx$; 2) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$; 3) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x dx$; 4) $\displaystyle\int x^2 \cos x dx$;
5) $\displaystyle\int \sin(\ln x) dx$; 6) $\displaystyle\int x\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$.

1.9. *Determinaţi*

1) $\int xe^{x^2}dx$; 2) $\int \sqrt{\ln x}\frac{1}{x}dx$; 3) $\int \sin^3 x \cos x dx$; 4) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$;
5) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 6) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$; 7) $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

1.10. *Determinaţi formule de recurenţă pentru calculul următoarelor şiruri integrale.*

1) $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int (\ln x)^n dx$; 2) $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int x^n e^x dx$ 3) $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \int x^n \sin x dx$.

1.11. *Determinaţi o formulă de recurenţă pentru termenii şirului*

$$(I_n)_{n\geq 0}, \quad I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

folosind eventual faptul că

$$\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = x^{n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^{n-1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'.$$

1.12. *Fie* $A = \int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; $B = \int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

1. *Calculaţi* $A+B$ *şi* $A-B$.

2. *Determinaţi* A *şi* B*, folosind eventual 1.*

1.13. *Fie* $A = \int \sin^2 x dx$; $B = \int \cos^2 x dx$.

1. *Calculaţi* $A+B$ *şi* $B-A$*, folosind eventual formula* $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. *Determinaţi* A *şi* B*, folosind eventual 1.*

1.14. *Determinaţi primitivele următoarelor funcţii raţionale.*

1) $\int \frac{7}{(x+1)^2}dx$; 2) $\int \frac{5}{x^2+4x+4}dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; 4) $\int \frac{dx}{x^2+3x+6}dx$;
5) $\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}dx$; 6) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$; 7) $\int \frac{x^4}{x^2-4x+3}dx$;
8) $\int \frac{x+5}{x^4-x^2}dx$.

1.15. *Determinaţi primitivele următoarelor funcţii reductibile la funcţii raţionale.*

1) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$; 2) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$; 3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x}+\sqrt[3]{3-x}}$;
5) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1+x}}$; 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$; 7) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-6x+8}dx$;
8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+3}}$; 9) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x-7}}dx$.

1.16. *Determinaţi primitivele următoarelor funcţii trigonometrice*

1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x dx$; 2) $\displaystyle\int \sin^3\cos^4 x dx$; 3) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x dx$.

1.17. *Determinaţi următoarele integrale binome*

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

1.18. *Determinaţi* $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$, *folosind fie una dintre substituţiile lui Euler, fie faptul că*

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=-\frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}.$$

1.19. *Fie funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{e^x}, & x<1\\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x\geq 1\end{cases}$. *Demonstraţi că f admite primitive şi determinaţi o primitivă a lui f.*

1.20. *Fie F o primitivă a funcţiei* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

1. *Demonstraţi că F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.*

2. *Demonstraţi că*

$$|F(x_2)-F(x_1)|\leq|x_2-x_1|,\quad \text{pentru orice } x_1,x_2\geq 0.$$

Capitolul 2

INTEGRALA DEFINITĂ

Încă din antichitate, s-a pus problema determinării ariilor unor figuri geometrice care nu erau mărginite de segmente de dreaptă. Maeştri ai geometriei clasice, vechii greci s-au dovedit a fi şi precursori a ceea ce urma să devină calculul integral. Deşi in acea vreme nu exista, desigur, noţiunea de trecere la limită, acest impediment nu l-a oprit pe Eudoxius să introducă în preajma anului 370 î.Hr. metoda exhaustiunii (epuizării). În această abordare, aria măsurată se extindea pas cu pas, devenind din ce in ce mai apropiată de aria căutată.

Arhimede a folosit această metodă pentru a calcula (în mod exact!), în jurul anului 230 î.Hr., aria de sub graficul unei parabole, oferind cu această ocazie primul exemplu de serie convergentă, şi pentru a aproxima ariile cercurilor şi elipselor. De aceeaşi atenţie din partea sa s-a bucurat şi calculul volumelor unor corpuri cum ar fi sferele şi paraboloizii de revoluţie.

Bazele calculului integral au fost puse de către Isaac Newton, în 1666, pornind de la probleme de natură cinematică. Pentru Newton, calculul integral însemna găsirea „fluenţilor" atunci cand sunt cunoscute „fluxiunile" (derivatele), obiectivul principal fiind determinarea legii de mişcare a unui punct material atunci când este cunoscută permanent viteza sa. Din motive conjuncturale, tratatul respectiv nu a fost publicat în mod formal decât după mai mult timp de la redactarea sa, deşi conţinutul devenise cunoscut matematicienilor vremii.

În vreme ce punctul de vedere al lui Newton era, într-un fel, de natură geometrică, Gottfried Wilhelm von Leibniz a contribuit la punerea bazelor calculului integral cu un punct de vedere ceva mai apropiat de cel al analizei de azi şi sistematizat mai convenabil din punct de vedere analitic. Abordarea propusă de Leibniz consta în utilizarea proprietăţile seriilor convergente (în fapt, Leibniz şi-a numit abordarea „calculus summatorius", numele de calcul integral fiind sugerat ulterior de Jacob Bernoulli, în 1690). Tot lui Leibniz i se datorează utilizarea cantităţilor infinitezimale dx şi dy şi notaţiile pentru acestea, precum şi introducerea semnului $\int$ pentru operaţia de integrare.

Leibniz a fost cel care şi-a publicat mai întâi propria abordare (1684, 1686), lucru care a dat naştere unei controverse intense privind adevăratul creator al calculului integral, punctul central al acesteia fiind măsura în care Leibniz a cunoscut rezultatele lui Newton. Astăzi, atât lui Newton cât şi lui Leibniz li se acordă credit pentru dezvoltarea independentă a noţiunilor de bază ale calculului integral.

Definiţia actuală a noţiunii de integrală i se datorează lui Bernhard Riemann (1854), extinderi ale acestei noţiuni fiind introduse, între alţii de Thomas Joannes Stieltjes (1894, integrala Riemann-Stieltjes) şi Henri Lebesgue (1904, integrala Lebesgue).

2.1 Definiţia noţiunii de integrală definită

Diviziuni ale unui interval

Fiind dat un interval mărginit $[a,b]$, numim **diviziune** a sa o mulţime ordonată

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad \text{cu} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Punctele $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc **nodurile** diviziunii, iar lungimea maximă a **intervalelor elementare** $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ astfel determinate,

$$\|\Delta\| = \max_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1} - x_i),$$

se numeşte **norma** diviziunii Δ. În situaţia în care toate intervalele elementare ale diviziunii Δ au aceeaşi lungime, egală cu $\frac{1}{n}(b-a)$, diviziunea se numeşte **echidistantă**.

Exemplu. Mulţimea

$$\Delta_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1\right\}$$

este o diviziune a intervalului $[0,1]$, cu norma

$$\|\Delta_1\| = \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5},$$

fără a fi echidistantă. Mulţimea

$$\Delta_2 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

este o diviziune echidistantă a intervalului $[0, 1]$, toate intervalele elementare ale diviziunii având lungimea $\frac{1}{5}$.

Notaţie

Mulţimea diviziunilor unui interval $[a, b]$ se notează $\mathcal{D}_{[a,b]}$.

Sisteme de puncte intermediare asociate

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, vom numi **sistem de puncte intermediare asociat diviziunii** Δ o mulţime ordonată

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\},$$

astfel încât $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare interval elementar se află câte un punct intermediar).

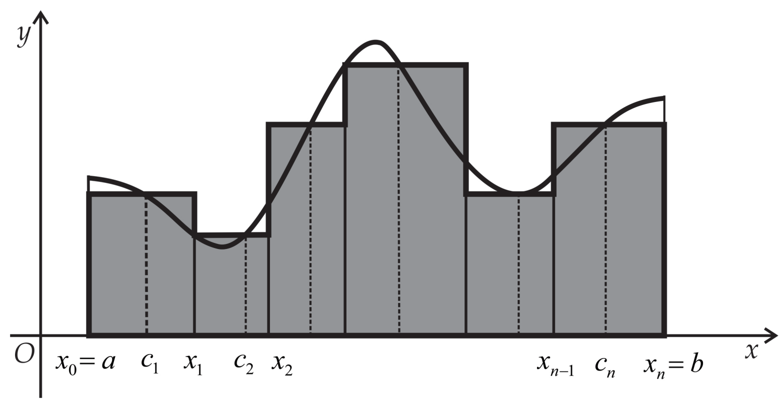
Sume Riemann. Interpretare geometrică

Fiind date o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, o diviziune $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a intervalului $[a, b]$ şi $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, vom numi **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** C suma

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})\end{aligned}$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţeşte cu lungimea intervalului din care punctul intermediar face parte, adunându-se rezultatele).

Pentru fixarea ideilor, să presupunem că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, graficul funcţiei f fiind atunci situat în întregime deasupra axei Ox. Atunci $f(c_1)(x - x_0)$ reprezintă aria unui dreptunghi care aproximează aria trapezului curbiliniu delimitat de graficul funcţiei f, dreptele $x = x_0$, $x = x_1$ şi axa Ox (primul trapez curbiliniu dintre cele n în care a fost împărţită porţiunea dintre graficul funcţiei f şi axa Ox). Desigur, această aproximare este cu atât mai bună (adică eroarea de aproximare este mai mică) cu cât x_1 este mai apropiat de x_0.



Ceilalţi termeni ai sumei Riemann având interpretări similare, obţinem că suma Riemann reprezintă o aproximare pentru aria porţiunii dintre graficul funcţiei f, axa Ox, paralela „iniţială" la Oy, $x = a$, şi paralala „finală" la Oy, $x = b$. Această aproximare este cu atât mai bună cu cât **toate** lungimile de intervale elementare $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$ sunt mai mici.

Funcţii integrabile Riemann

Definiţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este **integrabilă Riemann** pe $[a, b]$ (pe scurt, f este **integrabilă** pe $[a, b]$) dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare C asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, C) - I| < \varepsilon.$$

Astfel, pentru o normă a diviziunii Δ suficient de mică, suma Riemann $\sigma_\Delta(f, C)$ reprezintă o aproximare „suficient de bună" a lui I, indiferent de alegerea sistemului de puncte intermediare C.

Integrala Riemann

Numărul I de mai sus se numeşte **integrala definită**, sau **integrala Riemann**, a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ şi se notează

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Să obsevăm şi că I, dacă există, este unic determinat.

Numerele a şi b se numesc **limitele de integrare**, intervalul $[a, b]$ se numeşte **interval de integrare**, iar variabila x se numeşte **variabilă de integrare**.

Definiţie alternativă

Are loc următoarea echivalenţă, cea de-a doua afirmaţie putând fi utilizată de asemenea ca definiţie a integrabilităţii Riemann.

Teorema 2.1. *Fie o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *f este integrabilă pe $[a,b]$.*
2. *Oricare ar fi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ ale intervalului $[a,b]$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$, împreună cu un şir de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f,C_n))_{n\geq 0}$ este convergent.*

Cea de-a doua afirmaţie pare, la prima vedere, imprecisă. Mai precis, se cere doar ca limita unui şir de sume Riemann să fie finită, apărînd, la prima vedere, posibilitatea ca şiruri diferite de sume Riemann să tindă la limite diferite, adică să existe „candidaţi" diferiţi pentru $\int_a^b f(x)dx$. În fapt, se poate demonstra că limita unui astfel de şir de sume Riemann nu depinde nici de alegerea şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$, nici de alegerea şirului de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$. Valoarea (comună) a acestor limite reprezintă $\int_a^b f(x)dx$.

Diferenţa între integrala nedefinită şi integrala definită a unei funcţii

Integrala nedefinită a unei funcţii f este o **mulţime de funcţii**, pe când integrala sa definită este un **număr**.

Inversarea limitelor de integrare

Observăm din cele de mai sus că nu este neapărat necesar ca $a < b$. Comparând sumele Riemann obţinute pentru intervalele $[a,b]$ şi $[b,a]$ (şi aceeaşi diviziune Δ şi acelaşi sistem de puncte intermediare C), observăm că a doua este opusă primei, întrucât $(x_i - x_{i-1})$ se transformă în $(x_{i-1} - x_i) = -(x_i - x_{i-1})$. Urmează imediat că

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(**inversarea limitelor de integrare are ca efect inversarea semnului integralei**).

Interval de integrare redus la un punct

Prin definiţie (consistentă cu observaţia de mai sus şi cu interpretarea geometrică a integralei definite)

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

(**dacă lungimea intervalului de integrare este** 0**, atunci şi valoarea integralei este** 0)

Integrala funcţiei nule

Cu ajutorul definiţiei, putem observa că, dacă $f(x) = 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

întrucât toate sumele Riemann asociate sunt nule.

2.2 Legătura între integrabilitate şi alte proprietăţi ale funcţiilor

După definirea noţiunii de funcţie integrabilă, este natural să căutăm legăturile între integrabilitate şi alte proprietăţi uzuale ale unor funcţii (continuitate, monotonie, mărginire).

Ţinând seama de motivaţia practică a introducerii noţiunii de integrală definită (calculul unor arii), ar fi natural ca funcţiile continue pe un interval $[a, b]$ să fie şi integrabile. Ţinând seama şi de faptul că integrala definită a unei funcţii este, în fapt, limita (finită) a unui şir (convergent) de sume Riemann, cum un şir convergent este mărginit, ne putem aştepta prin analogie ca şi o funcţie integrabilă să fie mărginită. Prin acelaşi gen de analogie, cum un şir monoton şi mărginit este convergent, ne putem aştepta ca o funcţie monotonă şi mărginită să fie integrabilă.

Teorema 2.2. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*,* f *continuă pe* $[a, b]$*. Atunci* f *este integrabilă pe* $[a, b]$*.*

Teorema 2.3. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*,* f *integrabilă pe* $[a, b]$*. Atunci* f *este mărginită pe* $[a, b]$*.*

În fapt, putem preciza o proprietate mai generală, dar a cărei prezentare detaliată depăşeşte cadrul acestui curs.

Teorema 2.4. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Atunci f este integrabilă pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă f este mărginită şi continuă „aproape peste tot" pe $[a,b]$.*

Aici, continuă „aproape peste tot" înseamnă faptul că mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f are măsura Lebesgue 0, în sensul că poate fi acoperită cu o reuniune numărabilă de intervale cu sumă a lungimilor oricât de mică. De exemplu, o funcţie cu un număr finit de puncte de discontinuitate (caz des întâlnit în practică) este continuă „aproape peste tot".

Teorema 2.5. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f monotonă şi mărginită pe $[a,b]$. Atunci f este integrabilă pe $[a,b]$.*

2.3 Formula Leibniz-Newton

Formula următoare reprezintă legătura dintre noţiunile de integrală definită, respectiv nedefinită.

Teorema 2.6. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe $[a,b]$ şi admite primitive pe $[a,b]$. Atunci*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{notaţie}{=\!=} F(x)\Big|_a^b,$$

F fiind o primitivă oarecare a lui f.

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că valoarea expresiei $F(b) - F(a)$ nu depinde de primitiva F, întrucât două primitive F_1, F_2 diferă printr-o constantă, $F_2 = F_1 + C$. Atunci

$$F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + C) - (F_1(a) + C) = F_1(b) - F_1(a).$$

Fie F o primitivă a lui f. Atunci F este derivabilă pe $[a,b]$, iar

$$F'(x) = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a,b].$$

Fie $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Aplicând teorema valorii medii a lui Lagrange funcţiei F pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$, obţinem că există $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încât

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ este atunci

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece f este integrabilă pe $[a, b]$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca

$$\left| \sigma_\Delta(f, C) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \implies \left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

pentru orice Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi orice sistem C de puncte intermediare asociat lui Δ ca mai sus. Cum ε era arbitrar, urmează că

$$F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

■

În fapt, prin intermediul formulei Leibniz-Newton, calculul unei integrale definite se reduce la calculul unei primitive şi la scăderea valorilor acestei primitive în capetele intervalului de integrare, mai precis din valoarea în capătul superior scăzându-se valoarea în capătul inferior.

Exemplu.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) - \operatorname{tg} 0 = 1,$$

deoarece

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C},$$

o primitivă a funcţiei $\frac{1}{\cos^2}$ fiind funcţia tg.

2.4 Operaţii cu funcţii integrabile

Prin intermediul formulei Leibniz-Newton, numită şi **formula fundamentală a calculului integral**, formulelor de calcul al primitivelor pentru functii uzuale le corespund formule de calcul pentru integrale definite.

Teorema 2.7. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$ şi $c \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. **Proprietatea de aditivitate**

   Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ sunt integrabile pe $[a, b]$, iar

   $$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

   *(**integrala sumei este egală cu suma integralelor**), respectiv*

   $$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

   *(**integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor**).*

2. **Proprietatea de omogenitate**

   Funcţia cf este integrabilă pe $[a, b]$, iar

   $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

   *(**o constantă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei**).*

Menţionăm că nu au loc formule asemănătoare pentru produs şi raport, adică integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor şi nici integrala raportului nu este, de regulă, raportul integralelor. Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 2.8. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci*

$c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

Proprietatea are loc şi pentru mai mult de două funcţii. Prin inducţie matematică se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 2.9. *Fie $f_1, f_2, \dots, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_1, $f_2, \dots, f_n$ integrabile pe $[a,b]$ şi $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi*

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x))dx$$
$$= c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x)dx.$$

2.5 Metode de calcul

Din nou, metodelor de calcul pentru integrale nedefinite le corespund prin intermediul formulei Leibniz-Newton metode de calcul similare pentru integrale definite.

2.5.1 Metoda de integrare prin părţi

Teorema 2.10. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, cu f', g' continue. Atunci $f'g$ şi fg' sunt integrabile pe $[a,b]$, iar*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Demonstraţie. Deoarece f', g' sunt continue, urmează că $f'g$ şi fg' sunt integrabile pe $[a,b]$, fiind continue pe acest interval, ca produse de funcţii continue. Întrucât

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a,b],$$

funcţia produs, fg, este o primitivă a funcţiei $f'g + fg'$. Aplicând formula Leibniz-Newton, urmează că

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)\Big|_a^b \\
&\quad \Longrightarrow \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b \\
&\quad \Longrightarrow \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx,
\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Exemplu. Determinaţi $\int_0^\pi x\cos x dx$.

Soluţie. Întrucât x este o funcţie polinomială, încercăm să scriem **cealaltă** funcţie de sub integrală ca o derivată, sub forma $\cos x = (\sin x)'$. Urmează că

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cos x dx &= \int_0^\pi x(\sin x)' dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (x)'\sin x dx \\
&= x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = x\sin x\Big|_0^\pi - (-\cos x)\Big|_0^\pi \\
&= x\sin x\Big|_0^\pi + \cos x\Big|_0^\pi = 0 - 2 = -2.
\end{aligned}$$

2.5.2 Prima metodă de schimbare de variabilă

Teorema 2.11. *Fie $[a,b], [c,d]$ intervale şi $[a,b] \xrightarrow{u} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă cu derivata continuă pe $[a,b]$;*

2. *f continuă pe $[c,d]$;*

Atunci $(f \circ u)u'$ *este integrabilă pe* $[a, b]$, *iar*

$$\int_a^b (f \circ u)(x)u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du,$$

Remarcăm faptul că atunci când se schimbă variabila de integrare se schimbă şi limitele de integrare.

Demonstraţie. Deoarece $(f \circ u)$ este funcţie continuă pe $[a, b]$ (ca o compunere de funcţii continue), iar u' este de asemenea continuă pe $[a, b]$, produsul lor $(f \circ u)u'$ este funcţie continuă pe $[a, b]$, fiind deci şi integrabilă pe acest interval.

Deoarece funcţia f este continuă, ea admite primitive. Fie F o primitivă a sa. Atunci $F' = f$.

Conform formulei de derivare a funcţiei compuse,

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x) = (f \circ u)(x)u'(x),$$

şi atunci $F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ u)u'$, iar conform formulei lui Leibniz-Newton

$$\int_a^b (f \circ u)(x)u'(x)dx = (F \circ u)(x) \Big|_a^b = F(u(b)) - F(u(a)).$$

De asemenea, tot conform formulei Leibniz-Newton,

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du = F(u) \Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)),$$

deci

$$\int_a^b (f \circ u)(x)u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Exemplu. Fie integrala

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

Atunci

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx.$$

Notând $u = \operatorname{arctg} x$, obţinem că

$$du = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Calculăm noile limite de integrare, înlocuindu-le pe cele vechi în schimbarea de variabilă. Astfel,

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies u = \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ x = 1 &\implies u = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Înlocuind du şi u (în această ordine), urmează că

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u du = \frac{u^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

2.5.3 A doua metodă de schimbare de variabilă

Teorema 2.12. *Fie $[a,b], [c,d]$ intervale şi $[a,b] \xrightarrow{u} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă şi inversabilă, iar $v = u^{-1}$ este derivabilă cu derivata continuă pe $[c,d]$;*
2. *f este continuă pe $[c,d]$;*

Atunci $(f \circ u)$ este integrabilă pe $[a,b]$, iar

$$\int_a^b (f \circ u)(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \cdot v'(u) du.$$

Practic, ca şi pentru integrale nedefinite, cea de-a doua metodă de schimbare de variabilă corespunde situaţiei în care nu se poate pune în evidenţă sub integrala iniţială derivata schimbării de variabilă.

2.6 Proprietăţi ale integralei definite

2.6.1 Proprietăţi în raport cu intervalul

Restrângerea intervalului de integrare

Teorema 2.13. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, b]$. Atunci f este integrabilă pe orice subinterval $[c, d] \subset [a, b]$.*

Extinderea intervalului de integrare. Aditivitatea în raport cu intervalul

Teorema 2.14. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Dacă f este integrabilă atât pe $[a, c]$ cât şi pe $[c, b]$, atunci este integrabilă pe întreg intervalul $[a, b]$, iar*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.1}$$

Să observăm însă că, în ipoteza în care toate cele trei integrale sunt bine definite, nu este neapărat necesar ca $c \in (a, b)$. În fapt, dacă integralele sunt bine definite, egalitatea are loc indiferent de poziţia lui c faţă de a şi b.

Într-adevăr, pentru $c > b$, urmează că $b \in (a, c)$, iar conform Teoremei 2.14 are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx,$$

de unde

$$\int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Cum $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$ (inversarea limitelor de integrare are ca efect inversarea semnului integralei), urmează că (2.1) are loc şi pentru $c > b$. Un raţionament similar se poate face şi pentru $c < a$.

Pentru $c = a$, urmează că $\int_a^c f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$, deci

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = 0 + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

un raţionament similar având loc şi pentru $c = b$.

Integrarea funcţiilor pare şi impare

Reamintim că o funcţie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, se numeşte **pară** dacă

$$f(-x) = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in [-a, a]$$

(semnul $-$ dispare, aşa cum dispare când -1 este ridicat la putere pară). De asemenea, dacă

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{pentru orice } x \in [-a, a]$$

(semnul $-$ se păstrează, aşa cum se păstrează când -1 este ridicat la putere impară), funcţia f se numeşte **impară**.

Teorema 2.15. *Fie $[-a, a]$ un interval simetric faţă de origine, $a > 0$, şi fie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[-a, a]$.*

1. *Dacă f este impară, atunci* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
2. *Dacă f este pară, atunci* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Exemplu. Determinaţi

$$\int_{-1}^{1} x^7\sqrt{1+x^2}dx.$$

Intervalul de integrare, $[-1, 1]$, este simetric faţă de origine. Rămâne să determinăm paritatea funcţiei de sub integrală. Fie

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^7\sqrt{1+x^2}.$$

Atunci

$$f(-x) = (-x)^7\sqrt{1+(-x)^2} = -x^7\sqrt{1+x^2} = -f(x), \quad x \in [-1, 1],$$

deci f este impară, iar

$$\int_{-1}^{1} x^7\sqrt{1+x^2} = 0.$$

Practic, funcţiile impare „păstrând semnul", integrala pe partea negativă $[-a, 0]$ a intervalului $[-a, a]$ are semn schimbat faţă de integrala pe partea pozitivă $[0, a]$ a intervalului $[-a, a]$, iar suma lor este 0.

Funcţiile pare „eliminând semnul", integrala pe partea negativă $[-a, 0]$ a intervalului $[-a, a]$ este egală cu integrala pe partea pozitivă $[0, a]$ a intervalului $[-a, a]$, suma lor fiind dublul integralei pe partea pozitivă $[0, a]$.

2.6.2 Proprietăţi în raport cu funcţia

Vom observa în cele ce urmează că integrala definită păstrează semnul funcţiei de integrat şi inegalităţile nestricte între funcţii. În plus, inegalitatea strictă într-un punct de continuitate a funcţiei de integrat atrage inegalitatea strictă pentru integrală.

Păstrarea inegalităţilor nestricte

Teorema 2.16. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$.*

1. *Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$, atunci*
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
2. *Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$, iar $[c, d] \subset [a, b]$, atunci*
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d g(x)dx.$$
3. *Dacă $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$, atunci*
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstraţie. 1. Fie $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ un şir de diviziuni ale lui $[a, b]$ şi $(C_n)_{n\geq 0}$ un şir de sisteme de puncte intermediare asociate. Să notăm

$$\Delta_n = \left\{x_n^0, x_n^1, \ldots, x_n^{N_n}\right\}; \quad C_n = \left\{c_n^1, c_n^2, \ldots, c_n^{N_n}\right\}.$$

Atunci şirul sumelor Riemann corespunzătoare, $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este convergent la $\int_a^b f(x)dx$, conform Teoremei 2.1. Deoarece

$$\sigma_{\Delta_n}(f, C_n) = \sum_{i=1}^{N_n} f(c_n^i)(x_n^i - x_n^{i-1}) \geq 0,$$

urmează că $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este şir cu termeni pozitivi, iar limita sa, adică $\int_a^b f(x)dx$ este tot pozitivă, ceea ce trebuia demonstrat.
2. Deoarece

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx,$$

iar $\int_a^c f(x)dx \geq 0$, $\int_d^b f(x)dx \geq 0$ conform 1., urmează concluzia.
3. Deoarece

$$f(x) \geq g(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a,b],$$

urmează că

$$f(x) - g(x) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in [a,b].$$

Conform 1., urmează că

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0 \implies \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

■

Corolar 2.16.1. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a,b]$. Dacă*

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \textit{pentru orice } x \in [a,b],$$

atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Demonstraţie. Deoarece

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{pentru orice } x \in [a,b],$$

iar inegalităţile nestricte între funcţii se păstrează prin integrare, urmează că

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx \implies mx\Big|_a^b \leq \int_a^b f(x)dx \leq Mx\Big|_a^b$$
$$\implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

■

Exemplu. Demonstraţi că

$$\sqrt{3} \leq \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \leq \sqrt{6}.$$

Soluţie. Întrucât avem de determinat valorile minime şi maxime ale unei integrale, încercăm să determinăm valorile minime şi maxime ale funcţiei de sub integrală. Deoarece această funcţie este

$$f : [2,5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

(valorile funcţiei în afara intervalului de integrare nu interesează), este necesar să stabilim monotonia funcţiei de sub radical, anume

$$g : [2,5] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Pentru a stabili monotonia unei funcţii, putem utiliza semnul derivatei sale. Observăm că

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \geq 0,$$

deci g este crescătoare pe $[2,5]$, şi la fel este şi $f = \sqrt{g}$. Atunci valorile minime şi maxime ale lui f sunt

$$m = f(2) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad M = f(5) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Conform corolarului, urmează că

$$\sqrt{\frac{1}{3}}(5-2) \leq \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \leq \sqrt{\frac{2}{3}}(5-2),$$

de unde concluzia.

Corolar 2.16.2. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a,b]$. Atunci $|f|$ este integrabilă pe $[a,b]$, iar*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Păstrarea inegalităţilor stricte

Teorema 2.17. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a,b]$.*

1. *Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a,b]$ şi există $x_0 \in [a,b]$ astfel ca*
$$f(x_0) > 0, \text{ iar } f \text{ este continuă în } x_0,$$
atunci
$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$
2. *Dacă $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in [a,b]$, şi există $x_0 \in [a,b]$ astfel ca*
$$f(x_0) > g(x_0), \text{ iar } f, g \text{ sunt continue în } x_0,$$
atunci
$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplu. Fie $n \in \mathbb{N}$. Care număr este mai mare,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \text{ sau } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx?$$

Soluţie. Întrucât integralele au acelaşi interval de integrare, $[0, \frac{\pi}{2}]$, încercăm să stabilim o inegalitate între funcţiile de integrat. Pentru $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, urmează că $\sin x \in [0,1]$, adică $\sin x$ este pozitiv subunitar. Atunci,
$$\sin^n x \geq \sin^{n+1} x, \quad \text{pentru orice } x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$
deoarece un număr pozitiv subunitar scade prin ridicarea la o putere mai mare. Inegalitatea între funcţii se păstrează şi între integrale, deci
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx.$$
În fapt, deoarece ambii integranzi sunt funcţii continue, iar
$$\sin^n(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n > \sin^{n+1}(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1},$$
(există inegalitate strictă într-un punct comun de continuitate) urmează că
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx.$$

Teorema de medie

Teorema 2.18. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$. Atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Demonstraţie. Deoarece f este continuă pe $[a,b]$, ea este mărginită pe acest interval, adică există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{pentru orice } x \in [a,b].$$

Atunci, conform Corolarului 2.16.1,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

adică

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M.$$

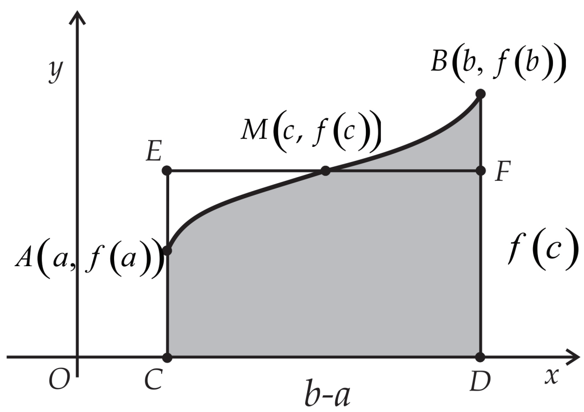
Deoarece f este continuă pe $[a,b]$, ea îşi atinge atât marginea inferioară m şi marginea superioară M, şi ia de asemenea orice valoare intermediară dintre ele, în particular $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. Rezultă de aici că există $c \in [a,b]$ astfel încât

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},$$

de unde concluzia. ■

Interpretare geometrică

Vom observa ulterior că $\int_a^b f(x)dx$ reprezintă aria subgraficului funcţiei x (a trapezului curbiliniu $ABCD$). Teorema de medie afirmă faptul că există un punct M pe graficul funcţiei f astfel încât dreptunghiul $CDFE$ determinat de dreptele $x = a$, $x = b$, axa Ox şi paralela prin M la axa Ox are aria egală cu aria trapezului curbiliniu. Altfel spus, „porţiunea excedentară" AEM a dreptunghiului compensează „porţiunea lipsă" BMF.



Teorema funcţiei modificate

Teorema 2.19. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, b]$. Dacă modificăm valorile lui f într-un număr finit de puncte din $[a, b]$, obţinând în acest mod o nouă funcţie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, atunci*

1. *g este de asemenea integrabilă pe $[a, b]$;*
2. *valoarea integralei sale rămâne aceeaşi, adică*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Practic, diferenţa între subgraficul lui f şi subgraficul lui g constă într-o reuniune finită de segmente, mulţime care are aria nulă. Din acest motiv, cele două subgrafice au aceeaşi arie, adică $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

2.7 Integrala definită ca funcţie de limita superioară

Am afirmat în capitolul precedent că orice funcţie continuă admite primitive. Pentru a dovedi acest lucru, demonstrăm mai întâi următoarea formulă de derivare a integralei definite ca funcţie de limita superioară de integrare (limita inferioară fiind constantă).

Teorema 2.20. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$. Atunci*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

este derivabilă pe $[a,b]$, iar

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \text{ pentru orice } x \in [a,b].$$

Altfel spus, derivarea acestui tip de integrală se realizează prin înlocuirea variabilei x sub integrală şi apoi „eliminarea reciprocă" a lui $'$, $\int$ şi dx (reamintim că integrarea şi derivarea sunt „operaţii inverse").

Demonstraţie. Fie $x_0 \in [a,b]$ oarecare. Fie, de asemenea, $x \in [a,b]$. Atunci

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left[\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt.$$

De aici

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)\right|$$
$$= \left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)dt - (x-x_0)f(x_0)\right)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt\right)\right|.$$

Conform proprietăţilor funcţiei modul, se obţine

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\, dt.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece f este continuă în x_0, există $\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon, x_0)$ astfel încât, pentru orice $x \in [a,b]$ cu $|x-x_0| < \delta_\varepsilon$ urmează că $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

Se obţine de aici că dacă $x \in [a,b]$ cu $|x-x_0| < \delta_\varepsilon$, iar t este între x_0 şi x, atunci

$$|t-x_0| \le |x-x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(t)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Urmează atunci că, pentru orice $x \in [a,b]$ cu $|x-x_0| < \delta_\varepsilon$,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|x-x_0|}\varepsilon|x-x_0| = \varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0),$$

deci F este derivabilă în x_0, iar $F'(x_0) = f(x_0)$. Deoarece x_0 era oarecare în $[a,b]$, urmează concluzia. ■

Exemplu.

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t dt\right)' = \sin x$$

O consecinţă imediată a acestei formule este faptul că o primitivă a lui f este

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(x)dx,$$

aceasta având în plus şi proprietatea că

$$F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Am demonstrat deci următorul rezultat.

Teorema 2.21. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$. Atunci f admite primitive pe $[a,b]$.*

Formula de derivare care face obiectul Teoremei 2.20 este valabilă doar atunci când limita inferioară de integrare este o constantă, iar cea superioară este x, şi nu o altă funcţie în care x apare într-un mod mai complicat. Într-un caz mai general, funcţionează următoarea formulă de derivare a unei integrale definite în care atât limita inferioară de integrare cât şi cea superioară sunt variabile, motivată de formula de derivare a funcţiei compuse.

Teorema 2.22. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar $u, v : [c,d] \to [a,b]$ funcţii derivabile, cu derivata continuă. Atunci*

$$F : [c,d] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

este derivabilă pe $[c,d]$, iar

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)' = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x).$$

Demonstraţia este similară demonstraţiei Teoremei 2.20.

Exemplu. Demonstraţi că funcţia

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^t dt,$$

este strict descrescătoare.

Soluţie. Pentru a studia monotonia funcţiei f, calculăm derivata acesteia, observând că

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_{\sin x}^{\cos x} e^t dt \right)' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' - e^{\sin x} \cdot (\sin x)' \\ &= -e^{\cos x} \sin x - e^{\sin x} \cos x < 0, \quad \text{pentru } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \end{aligned}$$

de unde concluzia.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă $T > 0$. Demonstraţi că

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(a) = \displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx$. Atunci

$$F'(a) = f(a+T) - f(a).$$

Deoarece f este periodică, cu perioadă T, urmează că $f(a+T) = f(a)$, iar $F'(a) = 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, de unde F ia o valoare constantă. Atunci

$$F(a) = F(0) = \int_0^T f(t)dt, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R},$$

deci

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

Proprietatea de mai sus afirmă faptul că, pentru o funcţie periodică, integrala pe un interval de lungime egală cu o perioadă ia o valoare constantă.

2.8 Integrale dependente de parametri

2.8.1 Recunoaşterea parametrului

În unele situaţii, limitele de integrare sau integrandul pot depinde de valorile unui parametru. Astfel, o integrală de tipul

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$$

depinde de valorile parametrului t (nu şi de ale lui x, care este variabilă de integrare; variabila de integrare „dispare" după calculul integralei definite). Similar, o integrală de tipul

$$G(x) = \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,t)dt$$

depinde de valorile parametrului x (nu şi de ale lui t, întrucât t este acum variabilă de integrare).

Integrala ca funcţie de parametru

Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi fie $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ două funcţii de asemenea continue. Atunci integrala $\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$ există pentru orice valoare a lui $t \in [a,b]$ (întrucât integrandul este funcţie continuă de variabila de integrare, x), valoarea ei depinzând însă de valoarea parametrului t. Această integrală defineşte funcţia

$$F : [c,d] \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx.$$

2.8.2 Continuitatea în funcţie de parametru

Funcţia $F = F(t)$ s-a obţinut prin integrarea (în raport cu x) a unei funcţii continue $f = f(t,x)$. O întrebare naturală este dacă după integrare (operaţie după care „dispare" x), rezultatul rămâne funcţie continuă în raport cu variabila rămasă, t. Răspunsul la această întrebare este afirmativ.

Teorema 2.23. *Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi fie $\alpha, \beta : [c,d] \to$*

$[a, b]$ *două funcţii continue. Atunci funcţia*

$$F : [c, d] \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx,$$

este continuă pe $[c, d]$.

Trecere la limită în funcţie de parametru

Întrucât F este funcţie continuă, operaţia de aplicare a lui F unui argument comută cu operaţia de calculare a limitei, sub forma

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0), \quad \text{pentru orice } t_0 \in [a, b].$$

Explicitând această relaţie, obţinem următorul rezultat.

Teorema 2.24. *Fie* $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, fie* $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ *două funcţii continue şi fie* $t_0 \in [a, b]$. *Atunci*

$$\lim_{t \to t_0} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x, t_0)dx.$$

Limite de integrare independente de valorile parametrului

În cazul în care limitele de integrare nu depind de valorile parametrului t, ţinând seama şi de faptul că

$$\lim_{t \to t_0} f(x, t) = f(x, t_0),$$

datorită continuităţii funcţiei f, obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.24.1. *Fie* $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă,* $\alpha, \beta \in [c, d]$ *şi* $t_0 \in [a, b]$. *Atunci*

$$\lim_{t \to t_0} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t_0)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{t \to t_0} f(x, t)dx.$$

În acest caz, putem spune că **operaţia de calculare a integralei definite comută cu operaţia de calculare a limitei**.

2.8.3 Derivabilitatea în funcţie de parametru

Am văzut în cele de mai sus că dacă atât limitele de integrare cât şi integrandul sunt funcţii continue, continuitatea se păstrează şi după integrare, în raport cu variabila rămasă. Un rezultat oarecum asemănător are loc şi pentru derivabilitate.

Teorema 2.25. *Fie* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, cu* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *continuă, şi fie* $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ *două funcţii derivabile. Atunci funcţia*

$$F : [c,d] \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx,$$

este derivabilă pe $[c,d]$, *şi*

$$F'(t) = \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx \right)' = f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Limite de integrare independente de valorile parametrului

În cazul în care limitele de integrare nu depind de valorile parametrului t, obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.25.1. *Fie* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, cu* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *continuă şi fie* $\alpha, \beta \in [c,d]$. *Atunci*

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dx \right)' = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

În acest caz, putem spune că **derivarea se poate face sub semnul integral**.

Exemplu. Ştiind că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}dx = \frac{\ln(1+t)}{t}$, calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+xt)^2}dx$.

Soluţie. Suntem în ipotezele în care derivarea se poate face sub semnul integral. Obţinem că

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{1+xt}dx \right)' = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{1+xt} \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{x}{(1+xt)^2} \right) dx$$
$$= -\int_0^1 \frac{x}{(1+xt)^2}dx.$$

Conform ipotezei,

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{1+xt}dx \right)' = \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right)' = \frac{\frac{1}{1+t} \cdot t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)},$$

de unde

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+xt)^2}dx = -\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2}dx$.

Soluţie. Are loc egalitatea

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}dx = \frac{1}{t}\operatorname{arctg}\frac{x}{t}\bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{t}\operatorname{arctg}\frac{1}{t}.$$

Suntem în ipotezele în care derivarea se poate face sub semnul integralei. Obţinem că

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}dx\right)' &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right)dx = \int_0^1 \frac{-2t}{(x^2+t^2)^2}dx \\ &= -2t\int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2}dx.\end{aligned}$$

De asemenea,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}dx\right)' &= \left(\frac{1}{t}\operatorname{arctg}\frac{1}{t}\right)' = \left(-\frac{1}{t^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right) \\ &= -\frac{1}{t^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{t} - \frac{1}{t(t^2+1)}.\end{aligned}$$

Urmează atunci că

$$-2t\int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2}dx = -\frac{1}{t^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{t} - \frac{1}{t(t^2+1)},$$

adică

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2}dx = \frac{1}{2t^3}\operatorname{arctg}\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2(t^2+1)}.$$

2.9 Aplicaţii ale integralei definite

2.9.1 Aria subgraficului unei funcţii

Funcţii cu semn pozitiv

Definiţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Vom numi **subgrafic** al funcţiei f mulţimea Γ_f definită prin

$$\Gamma_f = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

situată între dreptele verticale $x = a$ şi $x = b$, axa Ox şi graficul funcţiei f.

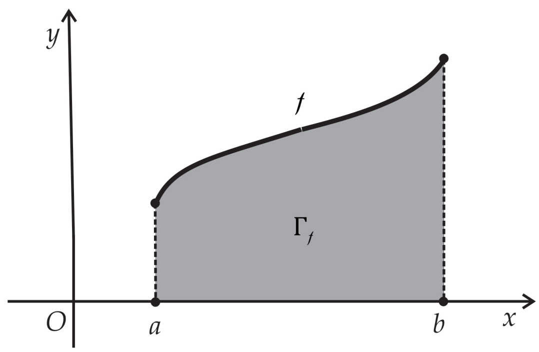


Figura 2.1: Subgraficul unei funcţii pozitive f.

Teorema 2.26. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *integrabilă pe* $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ *pentru orice* $x \in [a, b]$. *Atunci aria lui* Γ_f *este*

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Funcţii cu semn oarecare

Dacă funcţia f nu păstrează semn constant pozitiv, Γ_f se defineşte prin

$$\Gamma_f = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \ \text{ sau } \ 0 \geq y \geq f(x)\},$$

fiind situată între dreptele verticale $x = a$ şi $x = b$, axa Ox şi graficul funcţiei f (acum putându-se afla, parţial sau total şi deasupra graficului funcţiei f).

Se poate observa că dacă f păstrează semn constant pozitiv, atunci definiţia coincide cu cea de mai sus. Aria lui Γ_f poate fi calculată şi în acest caz printr-o formulă asemănătoare.

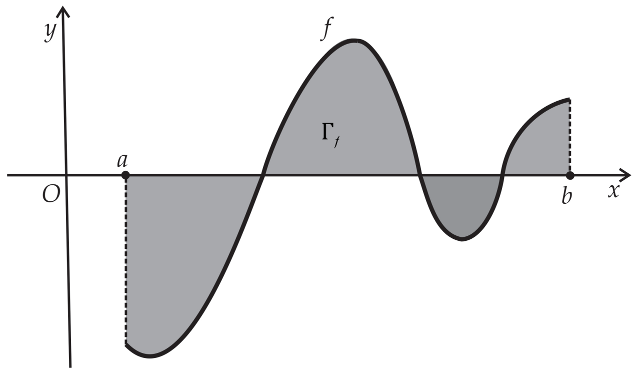


Figura 2.2: Subgraficul unei funcţii cu semn oarecare f.

Teorema 2.27. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, b]$, cu semn oarecare. Atunci aria lui Γ_f este*

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Desigur, modulul este necesar datorită faptului că aria calculată trebuie să fie pozitivă, iar funcţia f nu are, în cazul de faţă, această proprietate.

2.9.2 Aria mulţimii mărginite de graficele a două funcţii

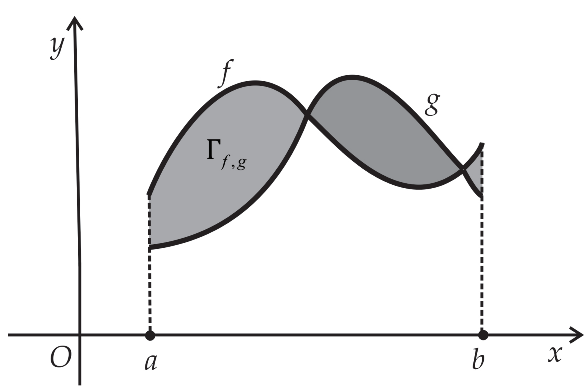


Figura 2.3: Mulţimea mărginită de graficele a două funcţii f şi g.

Definiţie. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$. Numim **mulţimea măr-**

ginită de graficele funcţiilor f şi g mulţimea $\Gamma_{f,g}$ definită prin

$$\Gamma_{f,g} = \{(x, y); a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x) \text{ sau } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

situată între dreptele verticale $x = a$, $x = b$, şi graficele funcţiilor f, g.

Teorema 2.28. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$. Atunci aria lui $\Gamma_{f,g}$ este*

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$$

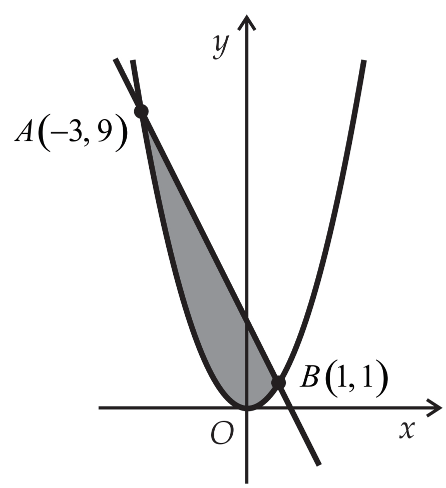
Dacă una dintre funcţii ia tot timpul valori mai mari (graficul său este deasupra graficului celeilalte), atunci se poate renunţa la modul.

Corolar 2.28.1. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$, astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci aria lui $\Gamma_{f,g}$ este*

$$\textit{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx.$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului plan mărginit de graficele funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 3 - 2x$.

Domeniul plan mărginit de graficele funcţiilor f, g este cel haşurat în figură. Do-



meniul de integrare se obţine determinând abscisele punctelor de intersecţie. La rândul lor, acestea se obţin rezolvând sistemul format de ecuaţiile graficelor celor două funcţii, anume

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3 - 2x. \end{cases}$$

Atunci $x^2 = 3 - 2x$, de unde $x^2 + 2x - 3 = 0$, ecuaţie cu soluţiile $x_1 = -3$ şi $x_2 = 1$. Din reprezentarea grafică, $g \geq f$ pe domeniul de intersecţie (acest lucru se poate demonstra şi algebric). Atunci aria căutată este

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{1} \left[(3 - 2x) - x^2\right] dx &= \int_{-3}^{1} 3dx - \int_{-3}^{1} 2xdx - \int_{-3}^{1} x^2 dx \\ &= 3x \Big|_{-3}^{1} - 2\frac{x^2}{2} \Big|_{-3}^{1} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^{1} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

2.9.3 Centrul de masă al unei plăci plane omogene

Teorema 2.29. *Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f continuă pe $[a, b]$ şi neidentic nulă. Atunci coordonatele centrului de masă al lui Γ_f, privit ca o placă plană* **omogenă** *de grosime neglijabilă, sunt*

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x) dx}{\displaystyle\int_a^b f(x) dx}, \quad y_G = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x) dx}{\displaystyle\int_a^b f(x) dx}.$$

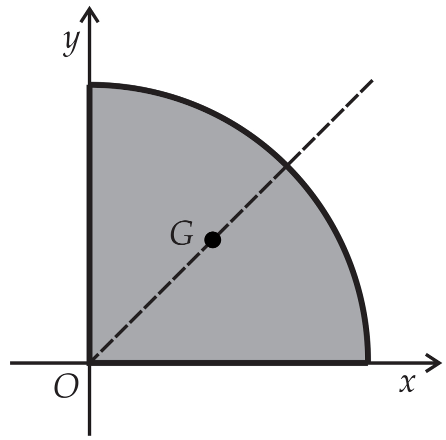
Consideraţie practică

În aplicaţii, este util a se observa mai întâi eventuala simetrie a lui Γ_f. Astfel, dacă Γ_f are o axă de simetrie, atunci şi centrul de masă se află pe acea axă, lucru ce poate simplifica determinarea poziţiei sale.

Exemplu. Fie $r > 0$. Să se determine coordonatele centrului de masă al plăcii plane omogene definite prin

$$M = \left\{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq r^2,\ x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Soluţie. Placa plană respectivă este porţiunea din discul cu centrul în origine şi de rază r situată în primul cadran. Cum cercul cu centrul în origine şi de rază r are ecuaţia $x^2 + y^2 = r^2$, de unde $y^2 = r^2 - x^2$, porţiunea de cerc situată în primul



cadran are ecuaţia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. În concluzie, placa respectivă poate fi privită ca subgrafic al funcţiei

$$f : [0, r] \to [0, \infty), \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

De aici,

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^r x f(x) dx}{\displaystyle\int_0^r f(x) dx} = \frac{\displaystyle\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2} dx}{\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx},$$

$$y_G = \frac{\displaystyle\int_0^r \frac{1}{2} f^2(x) dx}{\displaystyle\int_0^r f(x) dx} = \frac{\displaystyle\int_0^r \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right) dx}{\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx}.$$

Cu schimbarea de variabilă

$$x = r \sin t \implies dx = r \cos t dt,$$

urmează că

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt$$
$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Similar,

$$\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin t \cdot \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin t \cos^2 t dt.$$

Cu schimbarea de variabilă

$$\cos t = u \implies du = -\sin t dt,$$

urmează că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin t \cos^2 t dt = \int_1^0 r^3 u^2(-du) = r^3 \int_0^1 u^2 du = r^3 \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{r^3}{3},$$

iar

$$x_G = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Deoarece

$$\int_0^2 \frac{1}{2}(r^2-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = \frac{r^3}{3},$$

urmează că

$$y_G = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Alternativ, pentru simplificarea calculelor, era suficient să observăm că placa respectivă, fiind simetrică faţă de prima bisectoare, are centrul de greutate situat pe aceasta, de unde $x_G = y_G$, putându-se astfel calcula doar y_G.

2.9.4 Lungimea graficului unei funcţii

Teorema 2.30. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f derivabilă cu f' continuă. Atunci graficul său G_f are lungimea*

$$l(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} dx.$$

Exemplu. Determinaţi lungimea graficului funcţiei

$$f : [\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x.$$

Soluţie.

$$l(G_f) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x^{-1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Integrala obţinută este o integrală binomă, cu $m = -1$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$. Deoarece

$$\frac{m+1}{n} = 0 \in \mathbb{Z},$$

vom face schimbarea de variabilă

$$u = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}.$$

Atunci

$$u^2 = x^2 + 1 \implies x^2 = u^2 - 1 \implies x = \sqrt{u^2-1}$$
$$\implies dx = \left(\sqrt{u^2-1}\right)' du = \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} du.$$

Limitele noi de integrare sunt

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies u = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{3}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$x = \sqrt{3} \implies u = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Urmează că

$$l(G_f) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} du = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{u^2}{u^2-1} du = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du$$
$$= \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \left(\frac{u^2-1}{u^2-1} + \frac{1}{u^2-1}\right) du = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} 1 du + \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{u^2-1} du$$
$$= u \Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{u-1}{u+1}\right| \Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{3}}{3(2-\sqrt{3})}.$$

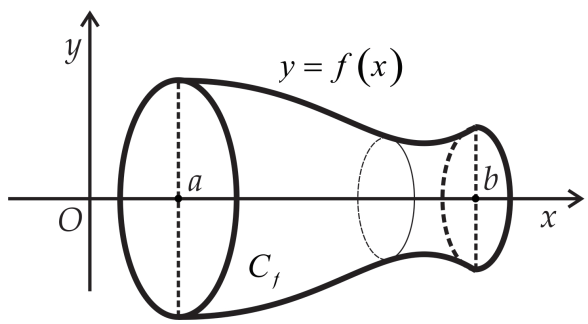
2.9.5 Volumul unui corp de rotaţie

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f continuă.

Definiţie. Numim **corp de rotaţie** generat de graficul funcţiei f mulţimea spaţială

$$C_f = \left\{(x, y, z); a \le x \le b,\ f(x) \ge \sqrt{y^2 + z^2}\right\}$$

obţinută prin rotaţia subgraficului funcţiei f în jurul lui Ox.



Un exemplu de corp de rotaţie este cilindrul circular drept (obţinut prin rotaţia subgraficului unei funcţii cu graficul un segment paralel cu Ox). Un altul este conul circular drept (obţinut prin rotaţia subgraficului unei funcţii cu graficul un segment ce conţine O). De asemenea, bila sferică şi trunchiul de con circular drept sunt corpuri de rotaţie.

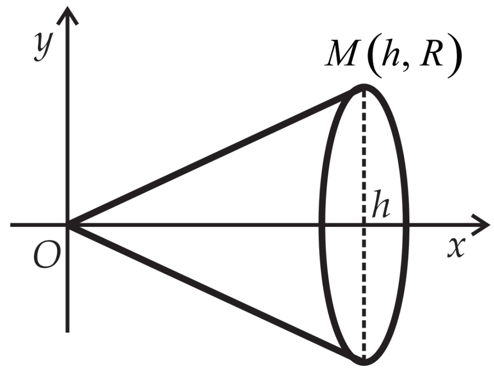
Teorema 2.31. *Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f continuă. Volumul corpului de rotaţie generat de graficul funcţiei f este*

$$\mathrm{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Exemplu. Demonstraţi că volumul conului circular drept de înălţime h şi rază a bazei R este $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

Soluţie. Un con circular drept de înălţime h şi rază a bazei R poate fi obţinut prin rotaţia subgraficului unei funcţii cu graficul un segment ce conţine O, adică al funcţiei

$$f : [0, h] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = kx,$$



unde k se determină din condiţia ca punctul $M(h, R)$ să aparţină graficului funcţiei f. Urmează că $kh = R$, deci $k = \frac{R}{h}$. Atunci

$$V = \text{vol}(C_f) = \pi \int_0^h f^2(x)dx = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \pi \left(\frac{R}{h}\right)^2 \int_0^h x^2 dx$$
$$= \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

2.9.6 Volumul corpului de rotaţie generat de graficele a două funcţii

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f, g continue, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.

Definiţie. Numim **corp de rotaţie** generat de graficele funcţiilor f şi g mulţimea spaţială

$$C_{f,g} = \left\{(x, y, z); a \leq x \leq b,\ f(x) \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq g(x)\right\}$$

obţinută prin rotaţia lui $\Gamma_{f,g}$, mulţimea mărginită de graficele funcţiilor f şi g, în jurul lui Ox.

Teorema 2.32. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g continue pe $[a, b]$, astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci volumul lui $C_{f,g}$ este*

$$vol(C_{f,g}) = \pi \int_a^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right) dx.$$

Vom preciza în cele ce urmează legătura între volumul corpului $C_{f,g}$ obţinut prin rotaţia mulţimii $\Gamma_{f,g}$ în jurul axei Ox şi aria $\Gamma_{f,g}$ a acestei mulţimi.

Teorema Pappus-Guldin

Teorema 2.33. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g continue pe $[a, b]$, astfel încât $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, inegalitatea fiind strictă în cel puţin un punct. Atunci*

$$\mathrm{vol}(C_{f,g}) = \mathrm{aria}(\Gamma_{f,g}) \cdot l(C),$$

C fiind cercul descris de centrul de greutate al $\Gamma_{f,g}$.

2.9.7 Ariile suprafeţelor de rotaţie

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f derivabilă cu f' continuă.

Definiţie. Numim **suprafaţă de rotaţie** generată de graficul funcţiei f mulţimea spaţială

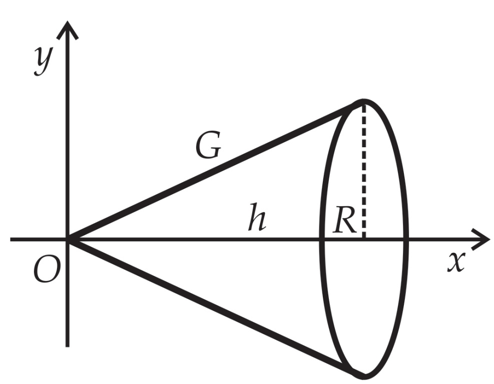
$$S_f = \left\{(x, y, z); a \leq x \leq b, f(x) = \sqrt{y^2 + z^2}\right\}$$

obţinută prin rotaţia graficului funcţiei f în jurul lui Ox.

Teorema 2.34. *Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f derivabilă cu f' continuă. Aria suprafeţei de rotaţie generate de graficul funcţiei f este*

$$\mathrm{aria}(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}dx.$$

Exemplu. Demonstraţi că aria laterală a conului circular drept de generatoare G şi rază a bazei R este $S = \pi RG$.



Soluţie. Întrucât conul este circular drept, între înălţimea sa h, generatoarea sa G şi raza bazei R există relaţia $G^2 = R^2 + h^2$, obţinută prin aplicarea Teoremei lui Pitagora. Ca mai sus, un con circular drept de înălţime h şi rază a bazei R poate fi obţinut prin rotaţia graficului funcţiei

$$f : [0, h] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{R}{h}x.$$

Atunci

$$\begin{aligned} S = \text{aria}(S_f) &= 2\pi \int_0^h f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}dx = 2\pi \int_0^h \frac{R}{h}x\sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2}dx \\ &= 2\pi\frac{R}{h}\int_0^h x\sqrt{\frac{R^2+h^2}{h^2}}dx = 2\pi\frac{R}{h}\int_0^h x\sqrt{\frac{G^2}{h^2}}dx = 2\pi\frac{R}{h}\frac{G}{h}\int_0^h xdx \\ &= 2\pi\frac{RG}{h^2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^h = 2\pi\frac{RG}{h^2}\frac{h^2}{2} = \pi RG. \end{aligned}$$

Aplicaţii

2.1. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$; *2)* $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$; *3)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arctg} x dx$; *4)* $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$.

2.2. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; *2)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; *3)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{4+x^6}dx$; *4)* $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$.

2.3. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$; *2)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

2.4. *Determinaţi* $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$.

2.5. *Determinaţi* $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$*, folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = \dfrac{1}{x}$.

2.6. *Determinaţi* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \cos x}dx$*, folosind eventual faptul că*

$$\frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)', \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}].$$

2.7. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

2.8. *Folosind proprietatea de aditivitate a integralei definite în raport cu intervalul, determinaţi*

1) $\displaystyle\int_0^2 \min(1, x, x^2)\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| dx$; 3) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (|x+1| + |x-1|)\,dx$;
4) $\displaystyle\int_1^{2e} |1 - \ln x|\,dx$; 5) $\displaystyle\int_0^2 \max(x, x\ln(1+x))\,dx$.

2.9. *Studiind paritatea integrandului, demonstraţi că*

1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1+x^{10}}\,dx = 0$; 2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{2+\sin^2 x}\,dx = 0$; 3) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{2+x^2}\,dx = 0$;
4) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \cos x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = 0$.

2.10. *Determinaţi* $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| e^{x^2}\,dx$.

2.11. *Determinaţi* $\displaystyle\int_0^2 x\ln(x + \sqrt{x^2+1})\,dx$.

2.12. *Determinaţi* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$.

2.13. *Se defineşte şirul* $(I_n)_{n\geq 1}$ *prin* $\displaystyle I_n = \int_1^n \frac{x-1}{x+1}\,dx$.

1. *Determinaţi* I_n.

2. *Determinaţi* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n}$, *folosind fie 1., fie lema Cesaro-Stolz şi teorema de medie pentru integrala definită.*

2.14. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = 0 + \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - x$, *demonstraţi că*

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx$.

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,dx = 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

2.15. *Fie integrala* $I = \int_0^{1000\pi} |\sin x| dx$.

1. *Demonstraţi că* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x|$ *este periodică, de perioadă* π.
2. *Justificaţi faptul că* $I = 1000 \int_0^{\pi} |\sin x| dx$.
3. *Calculaţi* I.

2.16. *Comparaţi integralele*

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x dx$;
2. $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$, $\quad J = \int_0^1 \sqrt{1 - x^n} dx$, $n > 2$;
3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n dx$, $\quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n} dx$.

2.17. *Se defineşte şirul* $(I_n)_{n \geq 0}$ *prin* $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$.

1. *Demonstraţi că* $(I_n)_{n \geq 0}$ *este monoton descrescător.*
2. *Folosind eventual inegalitatea*

$$0 \leq \ln(1 + u) \leq u, \quad \text{pentru orice } u \geq 0,$$

demonstraţi că $(I_n)_{n \geq 0}$ *este convergent la* 0.

2.18. *Demonstraţi următoarele inegalităţi*

1. $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$;
2. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1 - x^2) dx \leq 0$;
3. $\frac{1}{5} \leq \int_5^8 \frac{2x - 9}{2x + 5} dx \leq 1$;
4. $2\sqrt{e} \leq \int_0^1 (e^{x^2} + e^{1 - x^2}) dx \leq 1 + e$.

2.19. *Demonstraţi următoarele inegalităţi*

1. $\int_1^5 \ln(1+x)dx \geq \int_1^5 \frac{x}{1+x}dx$;
2. $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1}dx \leq \frac{1}{2n+1}$;
3. $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{\pi}{6}$.

2.20. *Se defineşte şirul* $(I_n)_{n\geq 0}$ *prin* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n dx$.

1. *Demonstraţi că* $(I_n)_{n\geq 0}$ *este monoton şi mărginit.*
2. *Demonstraţi că*

$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, \quad \textit{pentru orice } n \geq 0,$$

folosind eventual faptul că

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = (\mathrm{tg}\, x)', \quad \textit{pentru orice } x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

2.21. *Se defineşte şirul* $(I_n)_{n\geq 0}$ *prin* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+3}dx$.

1. *Demonstraţi că* $(I_n)_{n\geq 0}$ *este monoton şi mărginit.*
2. *Demonstraţi că*

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

3. *Demonstraţi că*

$$6I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 6I_n, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

4. *Demonstraţi că*

$$\frac{1}{6(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{6(n-1)}, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

5. *Determinaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} I_n$. *Discuţie după valorile lui* $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.22. *Scriind eventual şirurile de mai jos sub forma unor sume Riemann pentru anumite funcţii, intervale de integrare, diviziuni (echidistante) şi sisteme de puncte intermediare, determinaţi*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{0\pi}{n}+\sin\frac{1\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$.

2.23. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n \ln t\,dt$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Demonstraţi că* f *este strict descrescătoare pe* $(0,1)$.

2.24. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. *Demonstraţi că* f *este concavă pe* $[0,\infty)$.

2.25. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{tg} t\,dt}{x^2}; \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}; \qquad 3)\ \lim_{x\to\pi} \frac{\int_0^{\sin x} e^{t^2} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dx}.$$

2.26. *Determinaţi ariile domeniilor plane mărginite de graficele următoarelor funcţii*

1. $f, g : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = 9x$;
2. $f, g : [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, $g(x) = \frac{1}{2}$.

2.27. *Determinaţi ariile suprafeţelor de rotaţie obţinute prin rotaţia graficelor următoarelor funcţii în jurul axei Ox*

1. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;
2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

3. $f : [0, \frac{1}{\sqrt{3}}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.
4. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$.

2.28. *Calculaţi raportul ariilor în care parabola* $y^2 = 2x$ *împarte discul* $x^2 + y^2 \leq 8$.

2.29. *Determinaţi volumele corpurilor de rotaţie obţinute prin rotaţia graficelor următoarelor funcţii în jurul axei* Ox

1. $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.
2. $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.

Capitolul 3

INTEGRALE IMPROPRII

În definiţia integralei Riemann, s-a presupus că intervalul de integrare $[a, b]$ este un interval închis şi mărginit, demonstrându-se mai apoi că o funcţie integrabilă este în mod necesar şi mărginită. Totuşi, apar în mod natural situaţii în care aceste condiţii nu sunt îndeplinite.

În cele ce urmează, vom extinde noţiunea de integrală Riemann pentru a acoperi aceste cazuri (interval de integrare nemărginit, respectiv integrand nemărginit pe intervalul de integrare), obţinându-se aşa-numitele **integrale improprii** sau **integrale generalizate**. Prin analogie cu seriile numerice, pentru care convergenţa sau divergenţa seriei erau definite cu ajutorul limitei şirului sumelor parţiale, vom defini convergenţa sau divergenţa unor integrale improprii cu ajutorul unui procedeu de trecere la limită pentru integrale „parţiale", pe domenii mai mici, pe care se evită situaţiile problematice în cauză.

Vom începe mai întâi cu situaţia în care intervalul de integrare este nemărginit, continuând apoi cu situaţia în care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare.

3.1 Integrale improprii în raport cu intervalul

Integralele pentru care intervalul de integrare este nemărginit se numesc **integrale improprii în raport cu intervalul**, sau de **specia (speţa) I**.

Vom studia mai întâi integrale de tipul $\int_a^\infty f(x)dx$. În acest sens, fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $A > a$. Putem atunci vorbi despre $\int_a^A f(x)dx$ pentru orice $A > a$, următorul pas fiind cel de a studia ceea ce se intâmplă când $A \to \infty$ (ne „apropiem" de $+\infty$ prin trecere la limită).

3.1.1 Convergenţă şi divergenţă. Integrabilitate

Definiţie. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $A > a$.

Dacă există limita $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ şi este finită, spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este **convergentă** iar funcţia f este **integrabilă** pe $[a, \infty)$ (pe scurt, **integrabilă**).

Dacă limita $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ nu există, sau există, dar este infinită, spunem că integrală $\int_a^\infty f(x)dx$ este **divergentă** iar funcţia f **nu este integrabilă** pe $[a, \infty)$ (pe scurt, **nu este integrabilă**).

În situaţia în care limita $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ există (finită sau nu), această limită reprezintă **valoarea integralei** $\int_a^\infty f(x)dx$.

Exemple. 1. Fie integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$. Funcţia

$$f_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

este integrabilă pe orice interval $[0, A]$, $A > 0$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2},$$

deci integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}$ este convergentă, valoarea sa este $\frac{\pi}{2}$, iar f_1 este integrabilă pe $[0, \infty)$.

2. Fie integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$. Funcţia

$$f_2 : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x},$$

este integrabilă pe orice interval $[1, A]$, $A > 1$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x}dx = \lim_{A\to\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty,$$

deci integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ este divergentă, valoarea sa fiind $+\infty$, iar f_2 nu este integrabilă pe $[1, \infty)$.

3. Fie integrala $\int_0^\infty \cos x dx$. Funcţia

$$f_3 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \cos x,$$

este integrabilă pe orice interval $[0, A]$, $A > 0$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A\to\infty} \sin x \Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} \sin A, \text{care nu există.}$$

Integrala $\int_0^\infty \cos x dx$ este divergentă, fără a i se asocia o valoare, iar f_3 nu este integrabilă pe $[0, \infty)$.

Exemplu. Fie integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$. Printr-un raţionament similar celui din Exemplul 2 de mai sus putem arăta că

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă,} & \text{pentru } p > 1, \\ \text{divergentă,} & \text{pentru } p \leq 1. \end{cases}$$

Integrale improprii de speţa I cu integrand pozitiv

Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $a < A$. Să notăm

$$F : [a, \infty) \to \mathbb{R}, \quad F(A) = \int_a^A f(x)dx.$$

Întrucât f este pozitivă, F este crescătoare, valoarea integralei crescând odată cu creşterea lungimii intervalului. Atunci limita $\lim\limits_{A\to\infty} F(A)$, utilizată în definiţiile convergenţei şi divergenţei, există, finită sau nu. Are deci loc următorul rezultat, similar în natura sa cu proprietatea seriilor cu termeni pozitivi de a fi sau convergente, sau divergente către $+\infty$.

Teorema 3.1. *Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $a < A$. Atunci integrala $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ este fie convergentă, fie divergentă cu valoarea $+\infty$.*

Alte tipuri de intervale nemărginite

În mod similar definim convergenţa unor integrale de tipul $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$, cu ajutorul limitei

$$\lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)dx,$$

respectiv a unor integrale de tipul $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, cu ajutorul limitei

$$\lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \int_A^B f(x)dx.$$

3.1.2 Convergenţa în sensul valorii principale (Cauchy)

Pentru definiţia integralei $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, este important să se observe faptul că limita

$$\lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \int_A^B f(x)dx$$

conţine două variabile diferite, A şi B, întrucât ne putem apropia de $-\infty$ şi $+\infty$ în mod independent. Acest lucru se poate observa şi cu ajutorul relaţiei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

pentru $a \in (-\infty, +\infty)$ oarecare, în care convergenţa primei integrale este independentă de convergenţa celei de-a doua.

Definiţie. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[-A, A]$ pentru orice $A > 0$ iar limita cu o singură variabilă

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx,$$

caz particular al celei de mai sus (ne îndreptăm către $-\infty$ şi $+\infty$ „cu aceeaşi viteză"), există şi este finită, spunem că integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este **convergentă în sensul valorii principale (Cauchy)**, valoarea sa principală, notată

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

fiind valoarea limitei.

Relaţia între convergenţă şi convergenţă în sensul valorii principale

Conform definiţiei, dacă integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, atunci ea este convergentă şi în sensul valorii principale (Cauchy). Să observăm însă că implicaţia reciprocă nu are loc.

Fie integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$. Deoarece

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-A}^{A} = 0,$$

urmează că integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ este convergentă în sensul valorii principale, iar v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$. Totuşi

$$\lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \int_{A}^{B} xdx = \lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{A}^{B} = \lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \frac{B^2 - A^2}{2}$$

nu există, integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ nefiind deci convergentă.

3.1.3 Proprietăţi de calcul

Integralele improprii păstrează cele mai multe proprietăţi ale integralelor definite. În particular, au loc următoarele proprietăţi de calcul, prima reprezentând **proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul**, cea de-a doua reprezentând **proprietatea de aditivitate în raport cu funcţia**.

Teorema 3.2. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, f *integrabilă pe* $[a, \infty)$. *Atunci* f *este integrabilă pe orice subinterval* $[c, \infty)$, $c > a$, *şi*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Demonstraţie. Fie $c > a$ arbitrar. Fie de asemenea $A > c$. Atunci f este integrabilă pe $[c, A]$, iar conform proprietăţii de aditivitate a integralei definite în raport cu intervalul, avem că

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx &= \lim_{A\to\infty} \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx \right) \\ &= \lim_{A\to\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{A\to\infty} \int_c^A f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \lim_{A\to\infty} \int_c^A f(x)dx,\end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Teorema 3.3. *Fie* $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, f, g *integrabile pe* $[a, \infty)$ *şi* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Atunci* $c_1 f + c_2 g$ *este integrabilă pe* $[a, \infty)$, *şi*

$$\int_a^\infty (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^\infty f(x)dx + c_2 \int_a^\infty g(x)dx$$

Demonstraţia se obţine din proprietatea corespunzătoare a integralei definite printr-un procedeu de trecere la limită similar celui de mai sus.

3.1.4 Criterii de convergenţă

Criteriul de comparaţie

Teorema 3.4. *Fie $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$, astfel încât*

$$f(x) \leq g(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a, \infty).$$

1. *Dacă* $\int_a^\infty g(x)dx$ *este convergentă, atunci şi* $\int_a^\infty f(x)dx$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\int_a^\infty f(x)dx$ *este divergentă, atunci şi* $\int_a^\infty g(x)dx$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $A > a$. Atunci

$$\int_a^A f(x)dx \leq \int_a^A g(x)dx,$$

întrucât inegalităţile între funcţii se păstrează prin integrare. Conform Teoremei 3.1, există

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx, \quad \lim_{A\to\infty} \int_a^A g(x)dx = \int_a^\infty g(x)dx,$$

iar prin trecere la limită pentru $A \to \infty$ în inegalitatea de mai sus obţinem că

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$

Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este convergentă, atunci membrul drept este finit, şi atunci la fel este şi membrul stâng, iar $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă. Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă, atunci membrul stâng este infinit, şi atunci la fel este şi membrul drept, iar $\int_a^\infty g(x)dx$ este divergentă. ■

Rezultatul este uşor de reţinut (şi înţeles) ţinând seama de următoarea observaţie. Integrala pe $[a, \infty)$ a unei funcţii pozitive este fie „mică" (convergentă, cu valoare numerică), fie „mare" (divergentă), cu valoarea $+\infty$.

Cum $f \leq g$, inegalitatea se păstrează şi între cele două integrale, adică

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$

Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este „mică" (convergentă), atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este „şi mai mică" (tot convergentă). Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este „mare" (divergentă), atunci $\int_a^\infty g(x)dx$ este „şi mai mare" (tot divergentă).

Tot de aici putem observa că nu putem trage nicio concluzie dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este divergentă, întrucât $\int_a^\infty f(x)dx$ este „mai mică", dar poate fi sau „mică" (convergentă), sau „mare" (divergentă). Similar, dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă, atunci nu putem obţine nicio concluzie.

Teorema 3.5. *Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $A > a$.*

1. *Dacă există $p > 1$ astfel ca*

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \in [0,\infty)$$

atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.

2. *Dacă există $p \leq 1$ astfel ca*

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \in (0,\infty]$$

atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Combinând cele două proprietăţi obţinem următorul criteriu de convergenţă util în aplicaţii.

Corolar 3.5.1. *Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea*

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \in (0,\infty).$$

Atunci

1. *Dacă $p > 1$, atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.*
2. *Dacă $p \leq 1$, atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.*

Remarcăm faptul că în situaţia în cauză, integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ are comportament „invers" lui p. Astfel dacă p este „mic" (≤ 1), integrala este „mare" (divergentă cu valoarea $+\infty$), iar dacă p este „mare" (> 1), integrala este „mică" (convergentă).

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$.

Soluţie. Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$ pentru $x \to \infty$, alegem $p = 2$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 1 \in (0,\infty).$$

Cum $p = 2 > 1$, urmează că $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$ este convergentă.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx$.

Soluţie. Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{\sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ pentru $x \to \infty$, alegem $p = \frac{5}{2}$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+2x+3} = 1 \in (0,\infty).$$

Deoarece $p = \frac{5}{2} > 1$, urmează că integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx$ este convergentă.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Soluţie. Deoarece numitorul are comportarea aproximativă a lui $\sqrt{x^2} = x$ pentru $x \to \infty$, iar numărătorul este mărginit, alegem $p = 1$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x\to\infty} x \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\pi}{2} \in (0,\infty).$$

Deoarece $p = 1$, urmează că integrala $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ este divergentă.

3.1.5 Transformarea într-o serie numerică

Integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ poate fi transformată într-o serie numerică. Astfel, are loc egalitatea

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^{a+1} f(x)dx + \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx + \dots.$$

Cu notaţia $a_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(x)dx$, $n \geq 0$, urmează că

$$\int_a^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

În acest fel, convergenţa unei integrale improprii în raport cu intervalul poate fi legată de convergenţa unei serii numerice. Desigur, transformarea integralei într-o serie numerică nu este unică, intervalul $[a,\infty)$ putând fi împărţit şi în alte moduri.

Teorema 3.6. *Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$, f continuă şi monoton descrescătoare. Atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ are aceeaşi natură cu $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$, unde indicele de plecare $k \in [a,\infty)$ poate fi ales convenabil.*

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$

Soluţie. Funcţia

$$f : [1,\infty) \to [0,\infty), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}},$$

este continuă şi monoton descrescătoare pe $[1,\infty)$. Urmează că $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$.

Studiem acum natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ cu ajutorul unui criteriu de comparaţie. Întrucât

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2},$$

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (serie armonică generalizată cu $p = 2 > 1$), urmează că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ este convergentă. La rândul ei, integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$ este convergentă, având aceeaşi natură cu această serie.

3.1.6 Convergenţă absolută

Definiţie. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$. Vom spune că $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este **absolut convergentă**, iar f este **absolut integrabilă** pe $[a, \infty)$, dacă $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ este convergentă, adică $|f|$ este integrabilă pe $[a, \infty)$.

Se poate demonstra că dacă $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci este şi convergentă, nefiind însă valabilă şi reciproca (aşa cum numele sugerează, absoluta convergenţă înseamnă **mai mult** decât convergenţa). Pentru funcţii cu valori pozitive, cum $|f|$ coincide cu f, noţiunea de absolută convergenţă coincide cu noţiunea de convergenţă.

3.2 Integrale improprii în raport cu funcţia

Integralele pentru care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare se numesc **integrale improprii în raport cu funcţia**, sau de **specia (speţa) II**.

Vom studia mai întâi integrale de tipul $\int_a^b f(x)dx$ în care limita inferioară a este punct singular, în sensul că f este nemărginită într-o vecinătate a lui a.

Definiţie. Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că a este **punct singular** pentru funcţia f dacă f este mărginită pe orice subinterval $[A, b]$, $a < A < b$, dar f este nemărginită pe $(a, b]$.

Prototip

Un prototip al acestor integrale este integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $p > 0$, în care integrandul nu este definit în $x = 0$, punctul singular, nefiind nici mărginit pe $(0, 1]$, întrucât limita sa la dreapta în $x = 0$ este $+\infty$.

Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$. Putem atunci vorbi despre $\int_A^b f(x)dx$ pentru orice $a < A < b$, următorul pas fiind cel de a studia ceea ce se întâmplă când $A \to a$, punctul singular al funcţiei (ne „apropiem" de punctul singular prin trecere la limită).

3.2.1 Convergenţă şi divergenţă. Integrabilitate

Definiţie. Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$.

Dacă există limita $\lim\limits_{\substack{A \to a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$ şi este finită, spunem că integrala $\int_a^b f(x)dx$ este **convergentă** iar funcţia f este **integrabilă** pe $(a, b]$ (pe scurt, **integrabilă**).

Dacă limita $\lim\limits_{\substack{A \to a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$ nu există, sau există, dar este infinită, spunem că integrală $\int_a^b f(x)dx$ este **divergentă** iar funcţia f **nu este integrabilă** pe $(a, b]$ (pe scurt, **nu este integrabilă**).

În situaţia în care limita $\lim\limits_{\substack{A \to a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$ există (finită sau nu), această limită reprezintă **valoarea integralei** $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple. 1. Fie integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $p \in (0, 1)$. Punctul singular al funcţiei este $x = 0$, întrucât $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^p} = +\infty$. Funcţia

$$f_1 : (0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{x^p},$$

este integrabilă pe orice interval $[A, 1]$, $0 < A < 1$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \int_A^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{A\to 0} \int_A^1 x^{-p}dx = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \Bigg|_A^1 \right)$$
$$= \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{A^{1-p}}{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}.$$

Integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p \in (0,1)$ este deci convergentă, cu valoarea $\frac{1}{1-p}$.

2. Fie integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$. Ca mai sus, punctul singular al funcţiei este $x = 0$, funcţia

$$f_2 : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x},$$

este integrabilă pe orice interval $[A,1]$, $0 < A < 1$, iar

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \int_A^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \ln x \Bigg|_A^1 = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} (\ln 1 - \ln A) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ este deci divergentă, cu valoarea $+\infty$.

3. Fie integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p > 1$. Ca mai sus, punctul singular al funcţiei este $x = 0$, funcţia

$$f_3 : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x^p},$$

este integrabilă pe orice interval $[A,1]$, $0 < A < 1$, iar

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \int_A^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{A^{1-p}}{1-p} \right) = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{A^{p-1}(1-p)} \right)$$
$$= \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(0+)\cdot(1-p)} = +\infty.$$

Integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $p > 1$ este deci divergentă, cu valoarea $+\infty$. Obţinem din cele de mai sus că

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{pentru } p < 1, \\ \text{divergentă}, & \text{pentru } p \geq 1. \end{cases}$$

Integrale improprii de speţa II cu integrand pozitiv

Fie $f : (a, b] \to [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$. Putem obţine următorul rezultat analog celui corespunzător pentru integrale improprii de speţa I.

Teorema 3.7. *Fie $f : (a, b] \to [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$. Atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este fie convergentă, fie divergentă cu valoarea $+\infty$.*

3.2.2 Proprietăţi de calcul

Au loc următoarele proprietăţi de calcul, similare celor pe care le au integralele improprii de speţa I.

Teorema 3.8. *Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $(a, b]$. Atunci f este integrabilă pe orice subinterval $(a, c]$, $a < c < b$, şi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema 3.9. *Fie $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $(a, b]$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe $(a, b]$, şi*

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

3.2.3 Criterii de convergenţă

Teorema 3.10. *Fie $f : (a, b] \to [0, \infty)$, integrabilă pe $[A, b]$ pentru orice $a < A < b$.*

1. *Dacă există* $p < 1$ *astfel ca*
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^p f(x) = l \in [0,\infty),$$
atunci $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă.*

2. *Dacă există* $p \geq 1$ *astfel ca*
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^p f(x) = l \in (0,\infty],$$
atunci $\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă.*

Demonstraţia este similară demonstraţiei Teoremei 3.5, criteriul corespunzător de convergenţă pentru integrale improprii de specia I.

Corolar 3.10.1. *Fie* $f : (a,b] \to [0,\infty)$ *continuă astfel încât există* $p \in \mathbb{R}$ *cu proprietatea*
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^p f(x) = l \in (0,\infty).$$

Atunci

1. *Dacă* $p < 1$*, atunci integrala* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $p \geq 1$*, atunci integrala* $\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă.*

Remarcăm faptul că în situaţia în cauză, integrala $\int_a^b f(x)dx$ are comportamentul lui p. Astfel dacă p este „mic" ($p < 1$), integrala este „mică" (convergentă), iar dacă p este „mare" (> 1), integrala este „mare" (divergentă cu valoarea $+\infty$).

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx$.

Soluţie. Deoarece
$$\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2(5-x)} dx,$$

urmează că $x = 0$ este punct singular pentru integrand (cealaltă rădăcină a numitorului, $x = 5$, nu aparţine intervalului de integrare). Deoarece termenul care anulează numitorul în punctul singular, x^2, are puterea 2, alegem $p = 2$. Atunci

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x-0)^2 \frac{1}{x^2(5-x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \in (0, \infty).$$

Cum $p = 2 > 1$, urmează că integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx$ este divergentă, cu valoarea $+\infty$.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$.

Soluţie. Deoarece

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

iar numitorul se anulează pentru $x = 0$, în timp ce numărătorul nu, urmează că $x = 0$ este punct singular. Deoarece termenul care anulează numitorul în punctul singular, $\sin x$, are comportarea aproximativă a lui x pentru $x \to 0$, lucru observabil cu ajutorul limitei

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

alegem $p = 1$. Urmează că

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^1 \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \cos x \frac{x}{\sin x} = 1 \in (0, \infty).$$

Deoarece $p = 1$, urmează că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$ este divergentă.

3.2.4 Convergenţă absolută

Definiţie. Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că $\displaystyle\int_a^b f(x) dx$ este **absolut convergentă**, iar f este **absolut integrabilă** pe $(a, b]$ dacă $\displaystyle\int_a^b |f(x)| dx$ este convergentă, adică $|f|$ este integrabilă pe $(a, b]$.

Se poate demonstra că dacă $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci este şi convergentă pe $(a, b]$, nefiind însă valabilă şi reciproca (din nou, aşa cum numele sugerează, absoluta convergenţă înseamnă **mai mult** decât convergenţa). Pentru funcţii cu valori pozitive, cum $|f|$ coincide cu f, noţiunea de absolută convergenţă coincide cu noţiunea de convergenţă.

Integrale improprii cu limita superioară punct singular

Integralele de tipul $\int_a^b f(x)dx$ în care limita superioară b este punct singular, în sensul că f este nemărginită într-o vecinătate a lui b, se studiază analog celor în care limita inferioară este punct singular, utilizând „apropierea" de punctul singular b prin trecere la limită.

Definiţie. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Vom spune că b este **punct singular** pentru funcţia f dacă f este mărginită pe orice subinterval $[a, A]$, $a < A < b$, dar f este nemărginită pe $[a, b)$.

Prototip

Un prototip al acestor integrale este integrala $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}dx$, $p > 0$, în care integrandul nu este definit în $x = 1$, punctul singular, nefiind nici mărginit pe $[0, 1)$, întrucât limita sa la stânga în $x = 1$ este $+\infty$.

Prin analogie, pentru integralele improprii cu limita superioară punct singular se pot obţine următoarele criterii de convergenţă.

Criterii de convergenţă

Teorema 3.11. *Fie $f : [a, b) \to [0, \infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $a < A < b$.*

1. *Dacă există $p < 1$ astfel ca*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x) = l \in [0, \infty)$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

2. *Dacă există $p \geq 1$ astfel ca*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x) = l \in (0, \infty]$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă.*

Corolar 3.11.1. *Fie $f : [a, b) \to [0, \infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x) = l \in (0, \infty).$$

Atunci

1. *Dacă $p < 1$, atunci integrala* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă.*

2. *Dacă $p \geq 1$, atunci integrala* $\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă.*

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{5-x}}dx$.

Soluţie. Observăm că $x = 5$ este punct singular, întrucât celălalt punct în care se anulează numitorul, $x = 1$, nu aparţine intervalului de integrare. Deoarece termenul care anulează numitorul, $\sqrt{5-x}$, poate fi scris ca $(5-x)^{\frac{1}{2}}$, având puterea $\frac{1}{2}$, alegem $p = \frac{1}{2}$. Urmează că

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} (5 - x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{5-x}} = \lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} \frac{x^2}{x-1} = \frac{25}{4} \in (0, \infty).$$

Deoarece $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că integrala $\int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{5-x}}dx$ este convergentă.

Integrale improprii cu mai mult de un punct singular

Pot fi întâlnite însă şi integrale improprii de speţa II cu mai mult de un punct singular, sau integrale improprii în care atât intervalul de integrare este nemărginit, cât şi funcţia de integrat este nemărginită pe acest interval, având puncte singulare finite. Acestea din urmă combină atât caracteristicile integralelor improprii de speţa I, cât şi ale celor de speţa II.

În această situaţie, se scrie integrala ca suma mai multor integrale improprii, fiecare cu câte un unic punct singular, respectiv ca suma dintre o integrală improprie de speţa I şi una de speţa II.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$.

Soluţie. În această situaţie, atât $x = 1$ cât şi $x = 4$ sunt puncte singulare, fiind rădăcini ale numitorului. Scriem integrala sub forma

$$\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx + \int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx,$$

ca suma între o integrală cu limita inferioară punct singular (prima integrală) şi o integrală cu limita superioară punct singular (a doua integrală). Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^3}{(4-x)^2} = \frac{1}{9} \in (0,\infty),$$

iar $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$ este convergentă.

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} (4-x)^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} = \lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} = \frac{64}{\sqrt{3}} = \frac{64\sqrt{3}}{3} \in (0,\infty),$$

iar $p = 2 > 1$, urmează că integrala $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$ este divergentă. Fiind suma dintre o integrală convergentă şi una divergentă, integrala $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$ este divergentă.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$.

Soluţie. În această situaţie, $x = 0$ este punct singular, fiind rădăcină a numitorului, iar intervalul de integrare este nemărginit. Scriem integrala sub forma

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx,$$

ca suma între o integrală improprie de speţa II cu limita inferioară punct singular (prima integrală) şi o integrală improprie de speţa I (a doua integrală). Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{1+x^2} = 1 \in (0,\infty),$$

iar $p = \frac{1}{3} < 1$, urmează că $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$ este convergentă. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \in (0,\infty),$$

iar $p = \frac{7}{3} > 1$, urmează că integrala $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$ este de asemenea convergentă. De aici, integrala improprie $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$ este convergentă, fiind suma a două integrale improprii convergente.

3.3 Integrale improprii dependente de parametri

Dependenţa de parametru poate apare şi în contextul integralelor improprii. Prezentăm în continuare două dintre cele mai cunoscute integrale de acest tip.

3.3.1 Funcţia Γ a lui Euler

Integrala

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

este convergentă pentru orice $p > 0$, definind astfel o funcţie $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Integrala de mai sus se mai numeşte şi **integrala lui Euler de specia (speţa) II**.

Proprietăţi ale funcţiei Γ

Teorema 3.12. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, *pentru orice* $p > 0$ (**formula de recurenţă**).
3. $\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2)\cdots p\Gamma(p)$, *pentru orice* $p > 0, n \in \mathbb{N}$.
4. $\Gamma(n+1) = n!$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.
5. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, *pentru orice* $p \in (0,1)$ (**formula complementelor**).

6. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Exemplu. Determinaţi $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$.

Soluţie. Observăm că

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}-1}e^{-x}dx = \Gamma(\frac{3}{2}).$$

Conform formulei de recurenţă, urmează că

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Exemplu. Demonstraţi că

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \textbf{(integrala Euler-Poisson)}.$$

Soluţie. Să notăm $u = x^2$. Atunci

$$u = x^2 \implies x = \sqrt{u} \implies dx = (\sqrt{u})'du = \frac{1}{2\sqrt{u}}du,$$

de unde

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^2}dx &= \int_0^\infty e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}e^{-u}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

3.3.2 Funcţia β a lui Euler

Integrala

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

este convergentă pentru orice $p, q > 0$, definind astfel o funcţie $\beta : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Integrala de mai sus se mai numeşte şi **integrala lui Euler de specia (speţa) I**.

Proprietăţi ale funcţiei β

Teorema 3.13. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\beta(1,1) = 1$.
2. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$, *pentru orice* $p,q > 0$.
3. $\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$, *pentru orice* $p,q > 0$.
4. $\beta(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}\beta(p-1,q)$, *pentru orice* $p,q > 0$ (**formula de recurenţă** *pentru prima poziţie*).
5. $\beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\beta(p,q-1)$, *pentru orice* $p,q > 0$ (**formula de recurenţă** *pentru a doua poziţie*).
6. $\beta(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, *pentru orice* $m,n \in \mathbb{N}$.
7. $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, *pentru orice* $p,q > 0$.
8. $\beta(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, *pentru orice* $p \in (0,1)$ (**formula complementelor**).
9. $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$.

Exemplu. Determinaţi $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$.

Soluţie. Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx &= \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1} = \beta(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}.\end{aligned}$$

Conform formulei de recurenţă,

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

În plus, $\Gamma(3) = 2! = 2$. Urmează atunci că

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}dx = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}dx$.

Soluţie. Observăm că

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}dx = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}dx.$$

Pentru a calcula această integrală cu ajutorul proprietăţilor funcţiei β, transformăm intervalul de integrare în intervalul $[0, 1]$ cu ajutorul schimbării de variabilă $u = x - 2$. Atunci

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}du$$
$$= \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}du = \beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Soluţie. Ţinând seama de identitatea trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ceea ce conduce la $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, vom face schimbarea de variabilă $u = \sin^2 x$. Atunci

$$du = 2 \sin x \cos x dx,$$

de unde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{5}{2}-1}(1-u)^{\frac{3}{2}-1}du = \frac{1}{2}B(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}).$$

Folosind formula de recurenţă pentru prima poziţie obţinem

$$\frac{1}{2}B(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\frac{5}{2} - 1}{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} - 1}B(\frac{5}{2} - 1, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}}{3}B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{4}B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}).$$

Folosind formula de reprezentare a funcţiei β cu ajutorul funcţiei Γ, urmează că

$$\frac{1}{4}\beta(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})} = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})^2}{\Gamma(3)} = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})^2}{2!} = \frac{1}{8}\Gamma(\frac{3}{2})^2.$$

Conform formulei de recurenţă,

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

de unde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{\pi}{32}.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$

Soluţie. Observăm că

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{1+x}dx.$$

Pentru a aplica formula $\beta(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$, alegem $p = \frac{1}{2}$ (corespondenţa cu numărătorul), iar q va fi determinat din condiţia ca $p+q=1$ (corespondenţa cu numitorul). Urmează că $q = \frac{1}{2}$, iar

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}dx = \beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi.$$

Aplicaţii

3.1. *Determinaţi valorile următoarelor integrale improprii*

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}dx$; *2)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; *3)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$; *4)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

3.2. *Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii*

1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^5+1}$; *2)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+2x^6+3x^8}}dx$; *3)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-2x+3}$.

3.3. *Folosind eventual faptul că*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0, \quad \text{pentru orice funcţie polinomială } P,$$

demonstraţi că integrala improprie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$ *este convergentă.*

3.4. *Demonstraţi că integrala improprie* $\displaystyle\int_0^\infty e^{2x}\cos 3x dx$ *este convergentă.*

3.5. *Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii*

1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2(4-x)}dx$; 2) $\displaystyle\int_2^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$; 3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$;

4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}$.

3.6. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Folosind eventual schimbarea de variabilă*

$$u = \frac{x-a}{b-a},$$

(sau, în etape, $u = x - a$ *pentru a transforma intervalul de integrare în intervalul* $[0, b-a]$, *cu un capăt în origine, apoi* $v = \dfrac{u}{b-a}$ *pentru a transforma acest interval, de lungime* $b-a$, *în intervalul* $[0,1]$*) şi proprietăţile funcţiei* β, *determinaţi*

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx.$$

3.7. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = x^2$ *şi proprietăţile funcţiei* β, *determinaţi* $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

3.8. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = x^2$ *şi proprietăţile funcţiei* β, *determinaţi* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[3]{x}}dx$.

3.9. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = x^4$ *şi proprietăţile funcţiei* β, *determinaţi* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$.

3.10. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = \sin^2 x$ *şi proprietăţile funcţiei* β, *demonstraţi că*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} dx = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2n+1}.$$

3.11. *Folosind eventual schimbările succesive de variabilă* $u = \operatorname{tg}^2 x$, $v = u^2$ *şi proprietăţile funcţiei* β, *determinaţi* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p dx$, $p \in (-1, 1)$.

Capitolul 4

INTEGRALE CURBILINII

Până în momentul de faţă, s-a presupus că reprezentarea geometrică a domeniului de integrare este o parte a unei drepte, anume un segment (pentru integralele definite şi unele integrale improprii), respectiv o semidreaptă sau o dreaptă (pentru alte integrale improprii). În cele ce urmează vom renunţa la această restricţie, domeniul de integrare fiind acum o curbă din plan sau din spaţiu. Desigur, este necesar să definim mai întâi conceptul, intuitiv evident, de curbă continuă.

4.1 Curbe în plan şi în spaţiu

4.1.1 Noţiuni de bază

Curbă continuă (drum continuu) în spaţiu

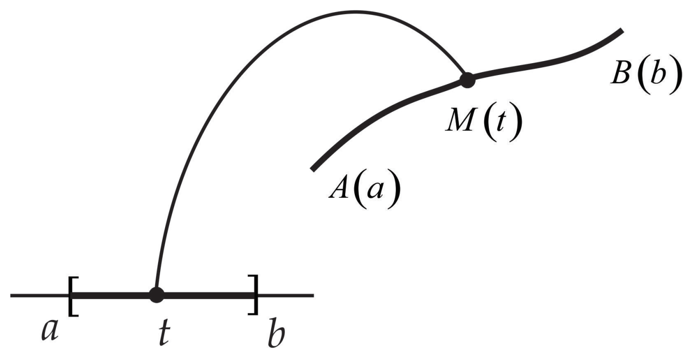
Numim **curbă continuă (drum continuu) în spaţiu** o mulţime de forma

$$(C) = \{(x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a,b],\ x, y, z \text{ continue pe } [a,b]\}.$$

Reprezentarea

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ t \in [a,b],$$

se numeşte **reprezentarea parametrică** a curbei (C), t numindu-se **parametrul** curbei. Poziţia unui punct M pe curbă se poate indica precizând valoarea parametrului care-i corespunde, sub forma $M = M(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$. O curbă în $\mathbb{R}^3$ se mai numeşte şi **curbă în spaţiu**.



În situaţia în care $x, y, z \in C^1[a, b]$ (funcţiile care definesc reprezentarea parametrică sunt derivabile cu derivata continuă), se spune că (C) este o **curbă de clasă C^1 (un drum de clasă C^1)** sau o **curbă cu tangentă continuă (un drum cu tangentă continuă)**.

Dacă (C) nu se autointersectează, ea se numeşte **simplă**, iar dacă punctul iniţial $A(a)$ şi punctul final $B(b)$ coincid, curba se numeşte **închisă**.

Curbe plane

Similar se definesc noţiunile corespunzătoare pentru curbe în plan, reprezentarea parametrică fiind de această dată

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a, b].$$

Puncte critice

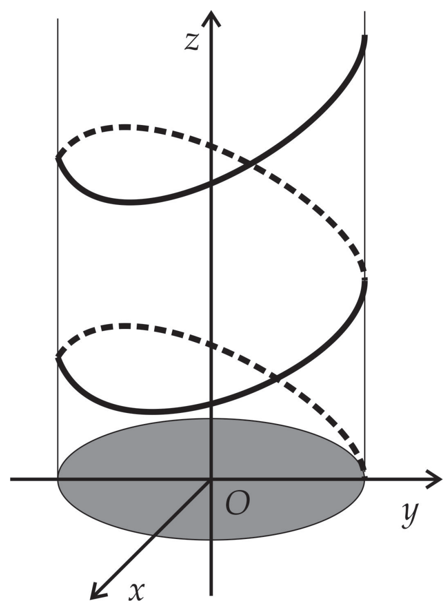
Fiind dată o curbă în spaţiu de clasă C^1, reprezentată parametric sub forma

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

vom spune că $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ este un **punct critic** al curbei (C) dacă $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$ (derivatele funcţiilor care definesc reprezentarea parametrică se anulează simultan). Un punct al unei curbe de clasă C^1 care nu este punct critic se numeşte **punct regulat**.

Curbă netedă

O curbă cu tangentă continuă şi fără puncte critice se numeşte **curbă netedă**. O curbă care nu este netedă, dar se poate scrie ca reuniunea unui număr finit de curbe netede se numeşte **curbă netedă pe porţiuni**.



Analog se definesc noţiunile corespunzătoare pentru curbe în plan.

Exemplu. Curba în spaţiu

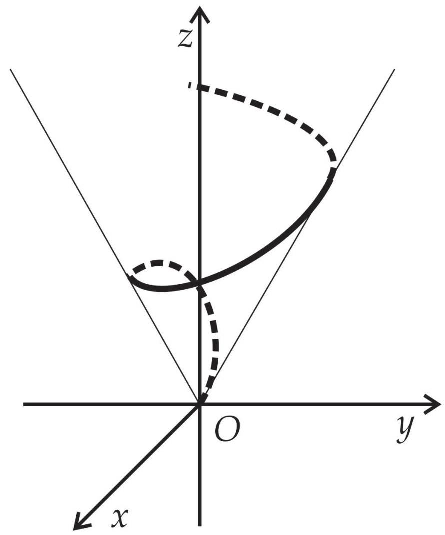
$$(C) : \begin{cases} x = r\cos(kt) \\ y = r\sin(kt) \\ z = ct \end{cases}, \ t \in [a,b], \ r,c,k \neq 0,$$

situată pe suprafaţa cilindrului $x^2 + y^2 = r^2$, se numeşte **elice cilindrică**. Cum funcţiile care definesc reprezentarea parametrică sunt de clasă C^1, iar $z'(t) = c \neq 0$, elicea cilindrică este o curbă netedă.

Exemplu. Curba în spaţiu

$$(C) : \begin{cases} x = rt\cos(kt) \\ y = rt\sin(kt) \\ z = ct \end{cases}, \ t \in [a,b], \ r,c,k \neq 0,$$

situată pe suprafaţa conului $x^2 + y^2 - \frac{r^2}{c^2}z^2 = 0$, se numeşte **elice conică**. Cum funcţiile care definesc reprezentarea parametrică sunt de clasă C^1, iar $z'(t) = c \neq 0$, elicea conică este o curbă netedă.



Alte moduri de a defini o curbă în $\mathbb{R}^3$

Reprezentarea parametrică

$$(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ ,\ t \in [a,b], \\ z = z(t) \end{cases}$$

este echivalentă cu

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a,b],$$

unde $\vec{r}(t)$ este vectorul de poziţie al punctului curent $M(t)$, numită **reprezentarea parametrică vectorială**. Curbele pot fi reprezentate şi în alte moduri, de exemplu ca intersecţia unor mulţimi (**reprezentarea implicită**), sau precizând valorile a două coordonate ca funcţie de cea de-a treia (**reprezentarea explicită**). Pentru consideraţiile următoare, cea mai „bună" reprezentare va fi cea parametrică.

Exemplu. Curba

$$(C):\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases}, \quad R > 0,$$

reprezintă un cerc, definit în mod implicit ca intersecţia dintre sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cu centrul în origine şi cu rază R şi planul $x + y + z = 0$.

Curba definită explicit prin

$$(C) : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 3x + 2 \end{cases}, \quad x \in [0, 2],$$

reprezintă un segment al dreptei $x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$, cu capetele în $A(0, 1, 2)$ şi $B(2, 5, 8)$.

Transformarea unei reprezentări explicite într-una parametrică

Să observăm că o reprezentare explicită a unei curbe poate fi transformată întotdeauna într-una parametrică alegându-se variabila în funcţie de care sunt reprezentate celelalte două ca parametru, iar o curbă de clasă C^1 definită explicit este întotdeauna netedă. Într-adevăr, dacă

$$(C) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, \quad x \in [a, b], \quad f, g \in C^1[a, b],$$

este o curbă de clasă C^1, atunci o reprezentare parametrică a ei este

$$(C) : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

iar $t' = 1 \neq 0$.

Orientarea unei curbe

Pe o curbă dată parametric se pot defini două **orientări (sensuri de parcurgere)**. Sensul pozitiv este cel al creşterii argumentului. În situaţia în care o curbă este definită prin consideraţii geometrice, reprezentarea parametrică fiind absentă, sensul pozitiv va fi cel trigonometric (un observator care se deplasează pe frontiera domeniului vede întotdeauna domeniul la stânga sa).

4.1.2 Lungimea unei curbe

Intuitiv, lungimea unei curbe continue s-ar putea defini ca limita lungimilor unui şir de linii frînte aproximante. Totuşi, ceea ce este poate mai puţin intuitiv este faptul că există curbe continue cu multe „salturi abrupte" şi, în consecinţă, cu lungime infinită. Astfel, formule de calcul ale lungimii vor putea fi obţinute doar pentru curbe cu proprietăţi mai mari de regularitate (netede pe porţiuni).

Aproximarea cu linii frânte

Fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \;,\; t \in [a, b], \\ z = z(t) \end{cases}$$

o curbă continuă în spaţiu şi fie

$$\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}\,, \quad \text{cu} \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b,$$

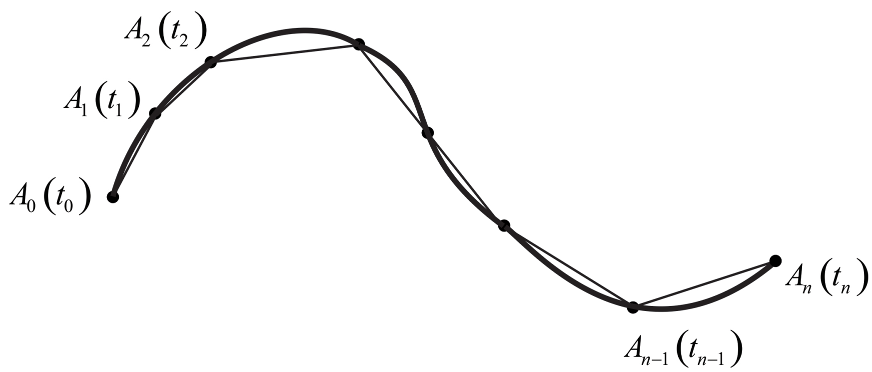
o diviziune a intervalului $[a, b]$, care determină pe (C) punctele

$$A_0(t_0),\ A_1(t_1),\ \ldots\ , A_n(t_n).$$

Lungimea liniei frânte corespunzătoare $f_\Delta = A_0A_1 \ldots A_n$ este

$$l(f_\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2}.$$

Întrucât cea mai scurtă distanţă între punctele A_i şi A_{i+1} este linia dreaptă A_iA_{i+1}, nu arcul $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$, intuitiv, lungimea liniei frânte este mai mică sau egală cu lungimea curbei (C).



Curbe rectificabile

Vom defini atunci lungimea $l(C)$ a curbei (C) ca fiind marginea superioară a mulţimii lungimilor linilor frânte de acest fel, spunând că (C) este **rectificabilă** dacă această lungime este finită.

Formula de calcul a lungimii unei curbe

Teorema 4.1. *Fie*

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă în spaţiu cu tangentă continuă. Atunci (C) *este rectificabilă, iar*

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

Conform proprietăţii de aditivitate a integralei definite în raport cu domeniul, formula de mai sus se poate extinde imediat şi pentru curbe cu tangentă continuă pe porţiuni.

Exemplu. Determinaţi lungimea curbei

$$(C) : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ct \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi], \ r > 0.$$

Soluţie. Au loc egalităţile

$$x'(t) = -r\sin t, \quad y'(t) = r\cos t, \quad z'(t) = c.$$

Atunci

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2 + [c]^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + c^2}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}dt = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2}.$$

Se poate observa că elicea de mai sus are ca punct iniţial $A(r, 0, 0)$, iar ca punct final $B(r, 0, 2\pi c)$, cu aceleaşi valori ale coordonatelor x şi y, dar cu z diferit, între timp parametrul t parcurgând intervalul de periodicitate $[0, 2\pi]$ pentru cos şi sin. Putem spune că (C) este o **spiră** a unei elice de rază r şi **pas** $2\pi c$.

Formula de calcul a lungimii unei curbe plane

Similar, fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă plană cu tangentă continuă. Atunci

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

Formula de calcul pentru lungimea unei curbe definite în coordonate polare

Teorema 4.2. *Fie*

$$(C): \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [a,b], \quad \rho \in C^1[a,b],$$

o curbă reprezentată în coordonate polare. Atunci

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}d\theta.$$

Demonstraţie. Aşa cum s-a observat anterior, lungimea curbei (C) este dată de formula

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}d\theta.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta \\ y'(\theta) &= \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta, \end{aligned}$$

urmează că

$$\begin{aligned} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} &= \sqrt{[\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta]^2 + [\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta]^2} \\ &= \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}, \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Exemplu. Determinaţi lungimea **spiralei lui Arhimede**

$$(C) = \{(\rho,\theta); \rho = a\theta,\ \theta \in [0, 2\pi]\}, \quad a > 0.$$

Soluţie. Au loc relaţiile

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a\theta]^2 + [(a\theta)']^2}d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}d\theta.$$

Fie $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1}d\theta$. Atunci

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \theta' \sqrt{\theta^2+1}d\theta = \theta\sqrt{\theta^2+1}\,\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \theta \left(\sqrt{\theta^2+1}\right)' d\theta \\
&= 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \theta \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}} d\theta = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \frac{\theta^2+1-1}{\sqrt{\theta^2+1}} d\theta \\
&= 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1}d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}} d\theta \\
&= 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - I + \ln(\theta + \sqrt{\theta^2+1})\,\Big|_0^{2\pi},
\end{aligned}$$

de unde

$$I = \frac{1}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)\right],$$

iar

$$l(C) = \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)\right].$$

Alte detalii asupra coordonatelor polare sunt precizate în Capitolul 5.

4.1.3 Elementul de arc (elementul de lungime)

Elementul de lungime în spaţiu

Fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ ,\ t \in [a,b], \\ z = z(t) \end{cases}$$

o curbă cu tangentă continuă. Definim $s : [a,b] \to [0,\infty)$ prin

$$s(t) = \text{ lungimea porţiunii din } (C) \text{ cu capetele } A(a) \text{ şi } M(t).$$

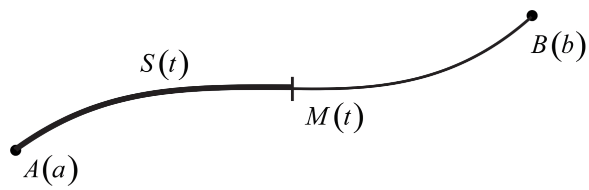
Conform celor de mai sus,

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du,$$

de unde, ţinând seama că $ds = s'(t)dt$,

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Diferenţiala ds de mai sus poartă numele de **elementul de arc (elementul de lungime)** al curbei (C).



Elementul de lungime în plan (coordonate carteziene)

Similar, fie
$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$
o curbă plană cu tangentă continuă. Atunci
$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Elementul de lungime în plan (coordonate polare)

Fie
$$(C) : \begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [a, b], \quad \rho \in C^1[a, b],$$
o curbă reprezentată în coordonate polare. Atunci
$$ds = \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta.$$

4.2 Integrale curbilinii de specia (speţa) I

Reamintim că integrala Riemann a unei funcţii definite pe un interval a fost definită cu ajutorul unui procedeu de aproximare. Mai precis, dat fiind intervalul de integrare $[a, b]$, s-au construit diviziuni ale acestuia, în fiecare subinterval astfel determinat alegându-se câte un punct intermediar. Pe baza acestor elemente, s-au construit sume Riemann în care fiecare subinterval „contribuia" cu valoarea funcţiei în punctul intermediar, înmulţită cu lungimea subintervalului.

4.2.1 Definiţie

Vom folosi un procedeu asemănător pentru a defini noţiunea de integrală curbilinie de specia I. Fie
$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$. Fie de asemenea

$$\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}, \quad \text{cu} \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$, care determină pe (C) punctele

$$A_0(t_0),\ A_1(t_1), \dots, A_n(t_n).$$

Pe fiecare arc de curbă $\overset{\frown}{A_0 A_1}$, $\overset{\frown}{A_1 A_2}, \dots, \overset{\frown}{A_{n-1} A_n}$ alegem câte un punct intermediar

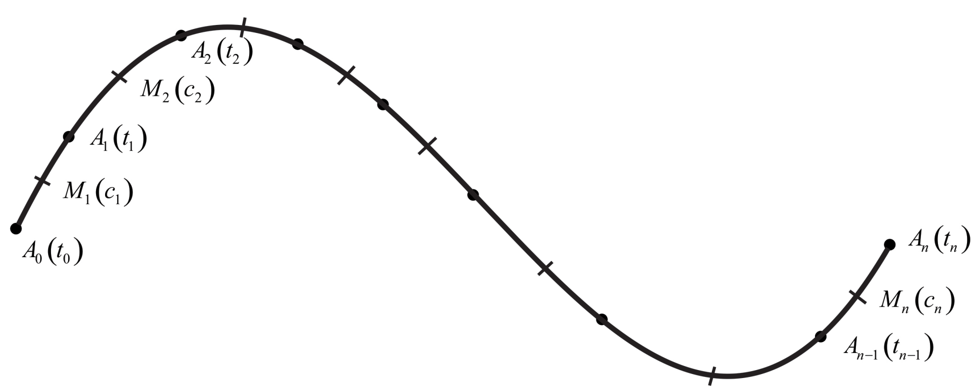
$$M_1(c_1),\ M_2(c_2),\ \dots\ , M_n(c_n), \quad t_{i-1} \le c_i \le t_i,\ 1 \le i \le n.$$

Aceste puncte determină un sistem de puncte intermediare

$$S = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}.$$

Numim atunci **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** S suma

$$\sigma_\Delta(F, S) = \sum_{i=1}^{n} F(x(c_i), y(c_i), z(c_i)) l(\overset{\frown}{A_{i-1} A_i}).$$



Definiţie. Dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\max\limits_{1 \le i \le n} l(\overset{\frown}{A_{i-1} A_i}) < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte S asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(F, S) - I| < \varepsilon,$$

atunci I se numeşte **integrala curbilinie de specia (speţa) I** a funcţiei F pe curba (C) şi se notează

$$\int_C F(x,y,z)ds.$$

Integrala curbilinie de specia I se mai numeşte şi **integrala curbilinie în raport cu elementul de lungime**.

4.2.2 Formula de calcul

Are loc următoarea formulă, prin intermediul căreia calculul unei integrale curbilinii de specia I se reduce la calculul unei integrale definite, o formulă similară având loc şi pentru curbe plane.

Teorema 4.3. *Fie*

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci

$$\int_C F(x,y,z)ds = \int_a^b F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt.$$

Pentru $F \equiv 1$ (funcţia constantă 1), folosind şi Teorema 4.1, obţinem că

$$\int_C ds = l(C),$$

adică **integrând funcţia constantă** 1 **în raport cu elementul de lungime al unei curbe obţinem lungimea acelei curbe**.

Curbe plane (coordonate carteziene)

Similar, fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă în plan şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci

$$\int_C F(x,y)ds = \int_a^b F(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

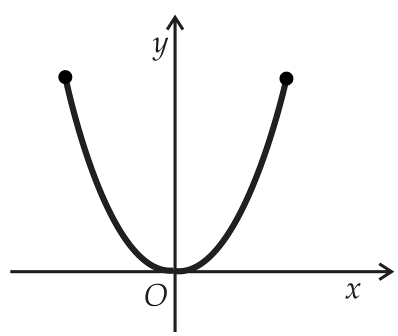
Curbe plane (coordonate polare)

Fie
$$(C): \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [a,b],$$
o curbă netedă în plan reprezentată în coordonate polare şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci
$$\int_C F(x,y)ds = \int_a^b F(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}d\theta.$$

Procedeul de înlocuire

Din cele de mai sus, se observă că determinarea valorii integralei începe cu operaţia de **înlocuire**. Mai precis, coordonatele x, y, z se înlocuiesc cu expresiile acestora date de reprezentarea parametrică a curbei, iar pentru calculul lui ds se înlocuiesc de această dată derivatele x', y', z'.

Exemplu. Determinaţi $\int_C xyds$, unde (C) este curba plană definită explicit prin $(C): y = x^2$, $x \in [-1,1]$.



Soluţie. Curba (C) se poate reprezenta parametric alegând x ca parametru. Se obţine
$$(C): \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \ t \in [-1,1] \implies x'(t) = 1, y'(t) = 2t \implies ds = \sqrt{1+4t^2}dt.$$
Atunci
$$\int_C xyds = \int_{-1}^{1} t \cdot t^2 \cdot \sqrt{1+4t^2}dt = \int_{-1}^{1} t^3\sqrt{1+4t^2}dt = 0,$$
deoarece intervalul de integrare $[-1,1]$ este simetric faţă de origine, iar integrandul este funcţie impară.

4.2.3 Proprietăţi de calcul

Independenţa de sensul de parcurgere

Fie

$$\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă netedă şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z) ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z) ds,$$

adică valoarea integralei **nu depinde** de sensul de parcurgere al curbei $\overset{\frown}{AB}$, proprietate motivată de faptul că, în definiţia de mai sus, lungimea $l(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i})$ nu depinde de sensul de parcurgere al arcului.

Întrucât calculul integralelor curbilinii de specia I se poate reduce, în condiţiile date, la calculul unei integrale definite, integrala curbilinie de specia I moşteneşte unele dintre proprietăţile de calcul ale integralei definite.

Aditivitatea în raport cu funcţia

Fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă netedă şi fie $F_1, F_2 : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F_1, F_2 continue pe D. Fie deasemenea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

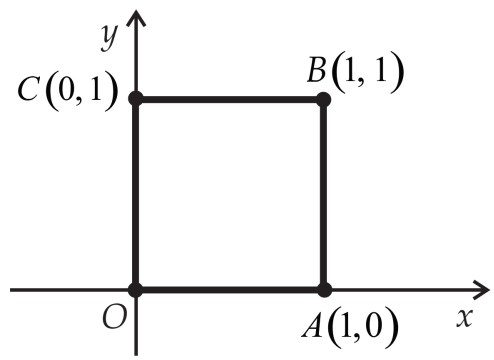
$$\int_C (c_1 F_1(x, y, z) + c_2 F_2(x, y, z)) ds = c_1 \int_C F_1(x, y, z) ds + c_2 \int_C F_2(x, y, z) ds.$$

Aditivitatea în raport cu domeniul de integrare

Fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă şi M un punct pe $\overset{\frown}{AB}$. Fie deasemenea $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$. Atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z) ds = \int_{\overset{\frown}{AM}} F(x, y, z) ds + \int_{\overset{\frown}{MB}} F(x, y, z) ds.$$

Exemplu. Determinaţi $\int_{C_1} xyds$, unde (C_1) este pătratul de vârfuri $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ şi $C(1,0)$.



Soluţie. Reamintim că un segment MN paralel cu Ox, cu $M = M(a,k)$, $N = N(b,k)$ se poate parametriza astfel

- Pentru $a < b$: $\begin{cases} x = t, \ t \in [a,b], \\ y = k \end{cases}$
- Pentru $b < a$: $\begin{cases} x = a + b - t, \ t \in [b,a], \\ y = k \end{cases}$,

intervalul de valori al parametrului fiind de la coordonata variabilă mai mică la coordonata variabilă mai mare. Similar se pot reprezenta parametric şi segmente paralele cu Oy. Curba (C_1) este netedă pe porţiuni, iar

$$\int_{C_1} xyds = \int_{OA} xyds + \int_{AB} xyds + \int_{BC} xyds + \int_{CO} xyds.$$

Putem parametriza fiecare segment prin

$$OA : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ t \in [0,1], \qquad \Longrightarrow ds = \sqrt{(t')^2 + (0')^2}dt = dt$$

$$AB : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \ t \in [0,1], \qquad \Longrightarrow ds = \sqrt{(1')^2 + (t')^2}dt = dt$$

$$BC : \begin{cases} x = 0 + 1 - t = 1 - t \\ y = 1 \end{cases}, \ t \in [0,1], \qquad \Longrightarrow ds = \sqrt{[(1-t)']^2 + (1')^2}dt = dt$$

$$CO : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 0 - t = 1 - t \end{cases}, \ t \in [0,1] \quad \Longrightarrow \ ds = \sqrt{(0')^2 + [(1-t)']^2} dt = dt.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int_C xyds &= \int_0^1 t \cdot 0 \cdot dt + \int_0^1 1 \cdot t \cdot dt + \int_0^1 (1-t) \cdot 1 \cdot dt + \int_0^1 0 \cdot (1-t) \cdot dt \\ &= \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1-t)dt = \int_0^1 (t + 1 - t)dt = \int_0^1 1dt = 1. \end{aligned}$$

4.2.4 Aplicaţii

Considerăm un fir material de grosime neglijabilă, asimilabil unei curbe (C), cu densitatea pe unitatea de lungime $\rho = \rho(x, y, z)$.

Masa firului

Masa firului este

$$m_C = \int_C \rho(x, y, z) ds$$

Coordonatele centrului de masă

Coordonatele centrului de masă sunt

$$x_G = \frac{1}{m_C} \int_C x\rho(x, y, z)ds, \quad y_G = \frac{1}{m_C} \int_C y\rho(x, y, z)ds, \quad z_G = \frac{1}{m_C} \int_C z\rho(x, y, z)ds.$$

Momente de inerţie

În raport cu axele

Momentul de inerţie în raport cu axa Oz este

$$I_{Oz} = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)ds,$$

$x^2 + y^2$ reprezentând pătratul distanţei de la punctul curent $M(x, y, z)$ la axa Oz. Similar se calculează momentele de inerţie în raport cu celelalte axe.

În raport cu planele de coordonate

Momentul de inerţie în raport cu planul xOy este

$$I_{xOy} = \int_C z^2 \rho(x, y, z)ds,$$

z^2 reprezentând pătratul distanţei de la punctul curent $M(x, y, z)$ la planul xOy. Similar se calculează momentele de inerţie în raport cu celelalte plane de coordonate.

În raport cu originea

Momentul de inerţie în raport cu originea O este

$$I_O = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds,$$

$x^2 + y^2 + z^2$ reprezentând pătratul distanţei de la punctul curent $M(x, y, z)$ la O.

Exemplu. Determinaţi coordonatele centrului de masă al firului

$$(C) : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ct \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi], \ r, c \neq 0,$$

cu densitatea liniară constantă ρ.

Soluţie. Masa firului este

$$m = \int_C \rho(x, y, z)ds = \rho \int_C ds$$

Deoarece

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{[(r\cos t)']^2 + [(r\sin t)']^2 + [(ct)']^2}dt = \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2 + [c]^2}dt \\ &= \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + c^2}dt = \sqrt{r^2 + c^2}dt \end{aligned}$$

urmează că

$$m = \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}dt = \rho\sqrt{r^2 + c^2} \cdot 2\pi$$

Coordonatele centrului de masă sunt

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{m}\int_C x\rho(x, y, z)ds = \frac{1}{\rho\sqrt{r^2 + c^2} \cdot 2\pi}\int_0^{2\pi} r\cos t \cdot \rho \cdot \sqrt{r^2 + c^2}dt \\ &= \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t dt = \frac{r}{2\pi}\sin t \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{CM} &= \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y,z)ds = \frac{1}{\rho\sqrt{r^2+c^2}\cdot 2\pi}\int_0^{2\pi} r\sin t\cdot\rho\cdot\sqrt{r^2+c^2}dt \\
&= \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t dt = \frac{r}{2\pi}(-\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 0, \\
z_{CM} &= \frac{1}{m}\int_C z\rho(x,y,z)ds = \frac{1}{\rho\sqrt{r^2+c^2}\cdot 2\pi}\int_0^{2\pi} ct\cdot\rho\cdot\sqrt{r^2+c^2}dt \\
&= \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} t dt = \frac{c}{2\pi}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = c\pi.
\end{aligned}
$$

4.3 Integrale curbilinii de specia (speţa) II

4.3.1 Definiţie

Din nou, vom folosi un procedeu de sumare pentru a defini noţiunea de integrală curbilinie de specia II. Fie

$$
(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ ,\ t\in[a,b], \\ z = z(t) \end{cases}
$$

o curbă netedă în spaţiu şi fie $\vec{F}: D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbf{V_3}$

$$
\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}
$$

astfel încât $(C)\subset D$. Fie de asemenea

$$
\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}\,, \quad \text{cu} \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b,
$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$, care determină pe (C) punctele

$$
A_0(t_0),\ A_1(t_1), \ldots, A_n(t_n).
$$

Pe fiecare arc de curbă $\overset{\frown}{A_0A_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$, …,$\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ alegem câte un punct intermediar

$$
M_1(c_1),\ M_2(c_2),\ \ldots\ , M_n(c_n), \quad t_{i-1}\le c_i\le t_i,\ 1\le i\le n.
$$

Aceste puncte determină un sistem de puncte intermediare

$$
S = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}\,.
$$

Numim atunci **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** S suma

$$\sigma_\Delta(\vec{F}, S) = \sum_{i=1}^{n} P(x(c_i), y(c_i), z(c_i))(x_i - x_{i-1}) + Q(x(c_i), y(c_i), z(c_i))(y_i - y_{i-1}) + R(x(c_i), y(c_i), z(c_i))(z_i - z_{i-1}).$$

Definiţie. Dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\max\limits_{1 \le i \le n} l(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}) < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte S asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$\left|\sigma_\Delta(\vec{F}, C) - I\right| < \varepsilon,$$

atunci I se numeşte **integrala curbilinie de specia (speţa) II** a funcţiei $\vec{F}$ pe curba (C) şi se notează

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

sau

$$\int_C \vec{F}(x, y, z)d\vec{r}$$

În situaţia în care curba (C) este închisă, se pot folosi notaţiile $\circlearrowleft\!\!\oint \vec{F}d\vec{r}$, $\circlearrowright\!\!\oint \vec{F}d\vec{r}$, acestea indicând şi sensul de parcurgere al lui (C)

Integrala curbilinie de specia II se mai numeşte şi **integrala curbilinie în raport cu coordonatele**, datorită prezenţei lui dx, dy, dz. Funcţiile P, Q, R se mai numesc şi **componentele** lui $\vec{F}$.

4.3.2 Formula de calcul

Are loc următoarea formulă, prin intermediul căreia calculul unei integrale curbilinii de specia II se reduce la calculul unei integrale definite, o formulă similară având loc şi pentru curbe plane.

Teorema 4.4. *Fie*

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar P, Q, R continue pe D. Atunci

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_a^b \big[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big]\, dt.$$

Similar, fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă în plan şi fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar P, Q continue pe D. Atunci

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big]\, dt.$$

Formulele de mai sus se extind şi pentru cazul curbelor netede pe porţiuni.

Procedeul de înlocuire

Din cele de mai sus, se observă că, din nou, determinarea valorii integralei începe cu operaţia de **înlocuire**.

Exemplu. Determinaţi

$$\int_C xyzdx + xydy + xdz, \quad (C) : \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}, \ t \in [0,1].$$

Soluţie. Calculăm mai întâi dx, dy, dz. Observăm că

$$dx = e^t dt, \quad dy = -e^{-t}dt, \quad dz = \sqrt{3}dt.$$

Atunci, înlocuind x, y, z şi dx, dy, dz, obţinem

$$\begin{aligned}\int_C xyzdx + xydy + xdz &= \int_0^1 \left(e^t \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{3}t \cdot e^t + e^t \cdot e^{-t} \cdot (-e^{-t}) + e^t \cdot \sqrt{3}\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{3}te^t - e^{-t} + \sqrt{3}e^t\right) dt \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 te^t dt - \int_0^1 e^{-t}dt + \sqrt{3}\int_0^1 e^t dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{3}\left(\int_0^1 t(e^t)'dt\right) - \frac{e^{-t}}{-1}\Bigg|_0^1 + \sqrt{3}e^t\Bigg|_0^1 \\
&= \sqrt{3}\left(te^t\Bigg|_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right) + \frac{1}{e^t}\Bigg|_0^1 + \sqrt{3}e^t\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{e} - 1 + \sqrt{3}e.
\end{aligned}
$$

4.3.3 Proprietăţi de calcul

Dependenţa de sensul de parcurgere

Fie

$$
\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ , \ t \in [a,b], \\ z = z(t) \end{cases}
$$

o curbă netedă şi fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$, iar P, Q, R continue pe D. Atunci

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \\
&\quad = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,
\end{aligned}
$$

adică valoarea integralei **depinde** de sensul de parcurgere al curbei $\overset{\frown}{AB}$, în sensul că îşi schimbă semnul atunci când se schimbă sensul de parcurgere al curbei.

Această proprietate este motivată de faptul că, în definiţia de mai sus, diferenţele între coordonate $x_i - x_{i-1}$, $y_i - y_{i-1}$, $z_i - z_{i-1}$ îşi schimbă semnul atunci când se schimbă sensul de parcurgere al curbei, devenind, respectiv, $x_{i-1} - x_i$, $y_{i-1} - y_i$, $z_{i-1} - z_i$.

Întrucât calculul integralelor curbilinii de specia II se poate reduce, în condiţiile date, la calculul unei integrale definite, şi integrala curbilinie de specia II are proprietăţile de aditivitate ale integralei definite.

Aditivitatea în raport cu funcţia

Fie

$$
(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ , \ t \in [a,b], \\ z = z(t) \end{cases}
$$

o curbă netedă şi fie $\vec{F}_1, \vec{F}_2 : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ cu componentele continue pe D astfel încât $(C) \subset D$. Fie deasemenea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\int_C (c_1\vec{F}_1(x,y,z) + c_2\vec{F}_2(x,y,z))d\vec{r} = c_1 \int_C \vec{F}_1(x,y,z)d\vec{r} + c_2 \int_C \vec{F}_2(x,y,z)d\vec{r}.$$

Aditivitatea în raport cu domeniul de integrare

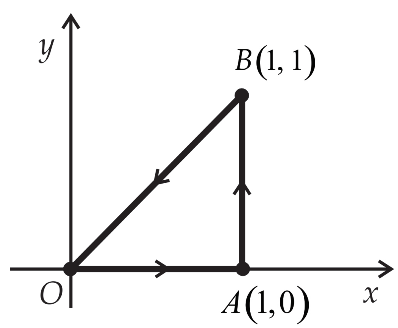
Fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă şi M un punct pe $\overset{\frown}{AB}$. Fie deasemenea $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ cu componentele continue pe D astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$. Atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{AM}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{r} + \int_{\overset{\frown}{MB}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{r}.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\int_C y^2dx + x^2dy,$$

unde (C) este triunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(1,0)$ şi $B(1,1)$, parcurs în sens trigonometric.



Soluţie. Curba (C) este netedă pe porţiuni, iar

$$\int_C y^2dx + x^2dy = \int_{OA} y^2dx + x^2dy + \int_{AB} y^2dx + x^2dy + \int_{BO} y^2dx + x^2dy.$$

Putem parametriza segmentele OA şi AB prin

$$OA : \begin{cases} x = t,\ t \in [0,1], \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow\ dx = dt,\ dy = 0$$

$$AB : \begin{cases} x = 1, \\ y = t,\ t \in [0,1] \end{cases} \qquad \Longrightarrow\ dx = 0,\ dy = dt.$$

Rămâne să precizăm (şi comentăm) parametrizarea lui BO. Acest segment face parte din prima bisectoare, cu ecuaţia $y = x$. Alegând (natural) x ca parametru, obţinem însă că de la B la O valoarea lui t (adică a lui x) **scade** de la 1 la 0.

Obţinem

$$BO : \begin{cases} x = t, \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [1, 0] \implies dx = dt,\ dy = dt.$$

Scrierea (mai puţin uzuală) $t \in [1, 0]$ este făcută pentru a păstra orientarea segmentului BO, de la B (obţinut pentru $t = 1$) către O (obţinut pentru $t = 0$). Această scriere este compatibilă cu (şi motivată de) proprietatea integralei curbilinii de specia II de a-şi schimba semnul după schimbarea orientării domeniului de integrare. **Nu** putem aplica acelaşi artificiu şi pentru calculul integralei curbilinii de specia I, care **nu** are această proprietate! Atunci

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 0^2 dt + \int_0^1 1^2 dt + \int_1^0 2t^2 dt = t \Big|_0^1 + 2 \cdot \frac{t^2}{3} \Big|_1^0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4.3.4 Aplicaţii

Lucrul mecanic

Considerăm un câmp de forţe $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$,

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$$

care deplasează un punct material $M(x, y, z)$ de-a lungul curbei (C). Atunci lucrul mecanic efectuat de câmpul de forţe $\vec{F}$ este

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Ariile unor domenii plane

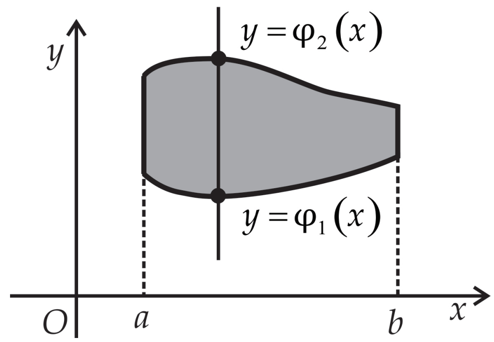
Domenii simple în raport cu Oy

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime închisă şi mărginită. D se numeşte **simplă în raport cu** Oy dacă au loc următoarele proprietăţi.

1. Proiecţia lui D pe Ox este un segment $[a, b]$.

2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x, y); \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), x \in [a, b]\}.$$

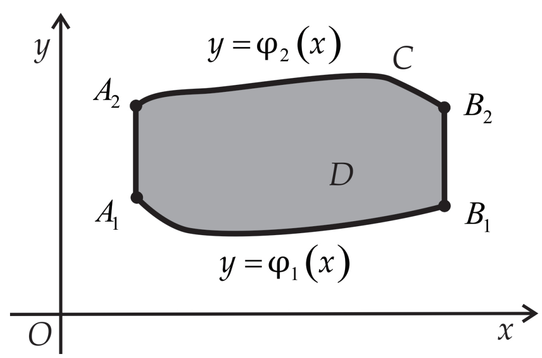


Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă prin interiorul segmentului $[a, b]$ la axa Oy taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(x)$ fiind ordonata punctului de intrare, iar $\varphi_2(x)$ fiind ordonata punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide. De remarcat că domeniul este simplu în raport cu axa la care se duce paralela, nu cu cea pe care se face proiecţia.

Ariile domeniilor simple în raport cu Oy

Teorema 4.5. *Fie D un domeniu simplu în raport cu Oy, cu frontiera* (C). *Atunci*

$$\text{aria } (D) = -\int_C y\,dx.$$



Demonstraţie. D fiind simplu în raport cu Oy, au loc proprietăţile de mai sus. Păstrând notaţiile, fie $A_1 = A_1(a, \varphi_1(a))$, $B_1 = B_1(b, \varphi_1(b))$, $A_2 = A_2(a, \varphi_2(a))$, $B_2 = B_2(b, \varphi_2(b))$ ca în figură.

Conform formulei care precizează aria porţiunii dintre graficele a două funcţii, obţinem că

$$\text{aria } (D) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))dx = \int_a^b \varphi_2(x)dx - \int_a^b \varphi_1(x)dx.$$

Deoarece

$$\int_C y dx = \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} y dx + \int_{\overline{A_2A_1}} y dx + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} y dx + \int_{\overline{B_1B_2}} y dx,$$

iar $\int_{\overline{B_1B_2}} y dx = \int_{\overline{A_2A_1}} y dx = 0$, deoarece $dx = 0$ pe aceste segmente, urmează că

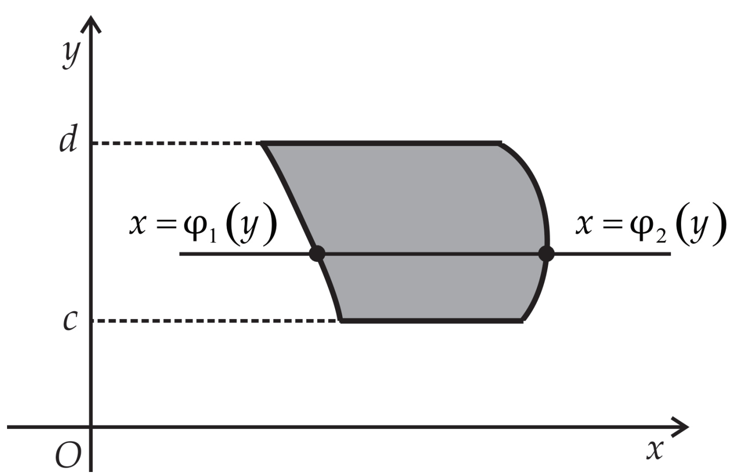
$$\int_C y dx = \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} y dx + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} y dx = \int_b^a \varphi_2(x) dx + \int_a^b \varphi_1(x) dx$$
$$= -\int_a^b \varphi_2(x) dx + \int_a^b \varphi_1(x) dx.$$

De aici,

$$\text{aria } (D) = -\int_C y dx.$$

■

Domenii simple în raport cu Ox



Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime închisă şi mărginită. D se numeşte **simplă în raport cu** Ox dacă dacă au loc următoarele proprietăţi.

1. Proiecţia lui D pe Oy este un segment $[c, d]$.

2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x, y); \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), y \in [c, d]\}.$$

Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă prin interiorul segmentului $[c, d]$ la axa Ox taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(y)$ fiind abscisa punctului de intrare, iar $\varphi_2(y)$ fiind abscisa punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide.

Ariile domeniilor simple în raport cu Oy

Fie D un domeniu simplu în raport cu Oy, cu frontiera (C). Atunci

$$\text{aria }(D) = \int_C x dy.$$

Demonstraţia este similară celei efectuate mai sus pentru domenii simple în raport cu Ox.

Semnul integralelor curbilinii folosite în calculul ariilor se poate reţine cu ajutorul următoarei reguli mnemotehnice: $\int_C x dy$, cu x „înaintea" lui y (de fapt, a lui dy), corespunzător ordinii alfabetice, reprezintă aria lui D. În schimb, $\int_C y dx$, cu y „înaintea" lui x (de fapt, a lui dx), contrar ordinii alfabetice, reprezintă opusul ariei lui D.

Ariile domeniilor simple în raport cu ambele axe

Fie D un domeniu simplu în raport cu ambele axe, cu frontiera (C). Prin combinarea formulelor de mai sus, obţinem că

$$\text{aria }(D) = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx.$$

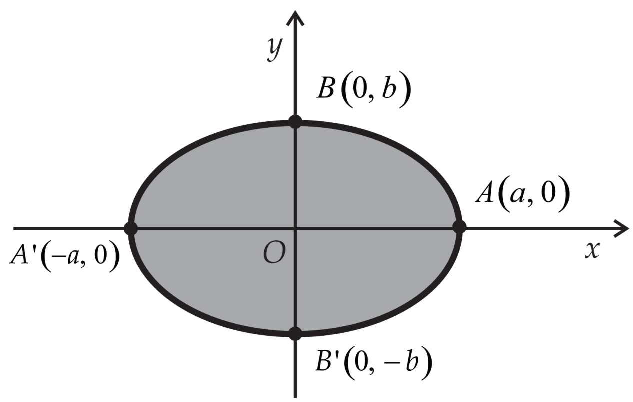
> **Exemplu.** Determinaţi aria domeniului mărginit de elipsa $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, de semiaxe a şi b, unde $a, b > 0$.

Soluţie. Domeniul respectiv este simplu în raport cu ambele axe. Frontiera sa se poate parametriza sub forma

$$(C) : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Din motive de simetrie, vom folosi formula

$$\text{aria }(D) = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx.$$



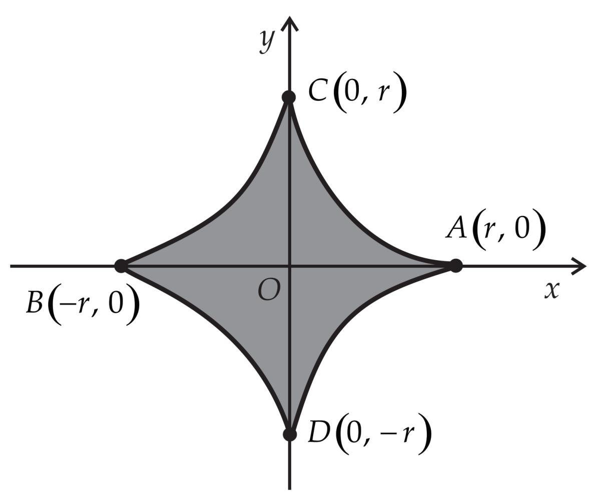
Atunci

$$dx = -a \sin t dt, \quad dy = b \cos t dt,$$

deci

$$\begin{aligned} \text{aria } (D) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot 2\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului mărginit de **astroida** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$, $r > 0$.



Soluţie. Determinăm mai întâi o reprezentare parametrică a lui (C). Întrucât ecuaţia lui (C) poate fi pusă sub forma

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(r^{\frac{1}{3}}\right)^2,$$

sau, cu notaţiile $x^{\frac{1}{3}} = X$, $y^{\frac{1}{3}} = Y$, $r^{\frac{1}{3}} = R$,

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

acest lucru sugerează folosirea ecuaţiilor parametrice

$$X = R\cos t,\ Y = R\sin t \implies x^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}\cos t,\ y^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}\sin t,$$

de unde

$$(C): \quad \begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi].$$

Din motive de simetrie, vom folosi formula

$$\text{aria } (D) = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx.$$

Atunci

$$dx = \left(r\cos^3 t\right)' dt = -3r\cos^2 t \sin t dt, \quad dy = \left(r\sin^3 t\right)' dt = 3r\sin^2 t\cos t dt,$$

deci

$$\begin{aligned}
\text{aria } (D) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[r\cos^3 t \cdot 3r\sin^2 t\cos t - r\sin^3 t \cdot (-3r\cos^2 t\sin t)\right] dt \\
&= \frac{3r^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{3r^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t dt \\
&= \frac{3r^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3r^2}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2} dt \\
&= \frac{3r^2}{16}\left(t\Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin 4t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{3\pi r^2}{8}.
\end{aligned}$$

4.4 Integrale curbilinii independente de drum

S-a observat că integrala curbilinie de specia II poate fi folosită pentru a calcula lucrul mecanic al unei forţe care acţionează asupra unui punct material care se deplasează de-a lungul unei curbe netede. Pentru cazul unui câmp de forţe conservativ (de exemplu mişcarea în câmp gravitaţional, fără frecare sau rezistenţă), acest lucru mecanic depinde doar de punctul de plecare şi de cel de sosire, nu şi de calea de deplasare aleasă. Acest lucru ne conduce la investigarea condiţiilor în care valoarea unei integrale curbilinii de specia II este independentă de drumul ales.

4.4.1 Definiţie

Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Spunem că integrala curbilinie de specia II $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este **independentă de drum** în D dacă pentru orice $A, B \in D$ valoarea integralei $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ este aceeaşi pentru orice curbă netedă pe porţiuni $\overset{\frown}{AB}$ care uneşte A şi B.

Notaţie

Dacă $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum în D, iar $\overset{\frown}{AB}$ este o curbă netedă pe porţiuni oarecare în D, vom nota $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ şi prin

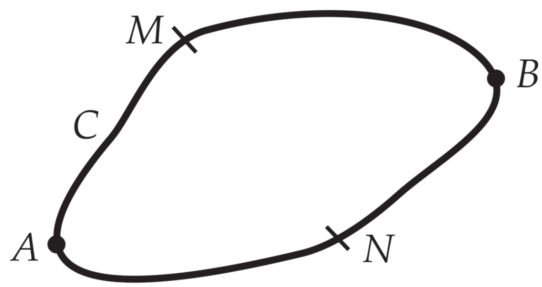
$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz.$$

Teorema 4.6. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Atunci integrala curbilinie de specia II $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum dacă şi numai dacă $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Vom considera numai cazul curbelor simple, situaţia în care curba (C) se autointersectează putând fi tratată cu ajutorul aceloraşi idei.

Fie (C) o curbă închisă simplă netedă pe porţiuni conţinută în D. Fie A, $B \in$ (C). Pentru fixarea ideilor, fie M pe unul din arcele determinate pe (C) de A şi B, iar N pe celălalt. Atunci, conform proprietăţii de aditivitate a integralei curbilinii de specia II în raport cu domeniul de integrare,

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\overset{\frown}{AMB}} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{\overset{\frown}{BNA}} Pdx + Qdy + Rdz$$



$$= \int_{\widehat{AMB}} Pdx + Qdy + Rdz - \int_{\widehat{ANB}} Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

„$\Leftarrow$" Fie A, $B \in D$ şi $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$ două curbe netede pe porţiuni unind A şi B. Fie deasemenea curba închisă (C) definită prin

$$(C) = \widehat{AMB} \cup \widehat{BNA}.$$

Atunci

$$0 = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\widehat{AMB}} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{\widehat{BNA}} Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \int_{\widehat{AMB}} Pdx + Qdy + Rdz - \int_{\widehat{ANB}} Pdx + Qdy + Rdz,$$

de unde

$$\int_{\widehat{AMB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\widehat{ANB}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Cum A, B şi curbele netede pe porţiuni $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$ erau arbitrare, urmează că $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum în D. ■

Să notăm faptul că $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D corespunde unui principiu de conservare a energiei pentru câmpul de forţe $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ în D.

4.4.2 Forme diferenţiale exacte. Primitive (potenţiale)

Numită şi teorema fundamentală a calculului integral, teorema Leibniz-Newton permite calculul unei integrale definite atunci când se cunoaşte o primitivă a integrandului, valoarea acestei integrale fiind egală cu diferenţa valorilor primitivei în capetele intervalului.

Cum integrala curbilinie de specia II este o extensie a integralei definite, mai fidelă decât cea de de specia I, întrucât, spre deosebire de aceasta din urmă, păstrează şi proprietatea de schimbare a semnului după schimbarea orientării domeniului de integrare, o întrebare naturală este dacă un rezultat asemănător teoremei Leibniz-Newton are loc şi pentru integrala curbilinie de speţa a doua.

Mai mult, dacă răspunsul la această întrebare ar fi afirmativ, o integrală curbilinie de speţa a doua căreia i s-ar aplica această teoremă ar fi automat independentă de drum, întrucât valoarea acestei integrale ar depinde doar de valorile primitivei corespunzând capetelor curbei, nu şi de forma curbei.

Desigur, rămâne să definim mai întâi conceptul de primitivă în contextul dat. Pentru integrala definită, **derivând** primitiva se obţinea integrandul. În acest context, **diferenţiind** primitiva (dacă aceasta există), se obţine integrandul.

Forme diferenţiale exacte

Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Spunem că forma diferenţială $Pdx + Qdy + Rdz$ este **formă diferenţială exactă** dacă există $U : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este diferenţiala acesteia, adică

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Primitive (potenţiale)

În această situaţie, U se numeşte **primitiva** sau **potenţialul** formei diferenţiale $Pdx + Qdy + Rdz$, având loc egalităţile

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă reală, primitivele unei funcţii sunt determinate până la o constantă.

Teorema 4.7. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Atunci $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum în D dacă şi numai dacă $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Definim $U : D \to \mathbb{R}$ prin

$$U(x, y, z) = \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz, \quad \text{unde } M = M(x, y, z),$$

iar A este un punct oarecare din D. Deoarece

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

pentru a verifica faptul că $dU = Pdx + Qdy + Rdz$ va trebui să calculăm $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ şi să arătăm că $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$.

Fie $M_1 = M_1(x+h, y, z) \in D$. Atunci

$$\begin{aligned} U(x+h,y,z) - U(x,y,z) &= \int_A^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz - \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz + \int_M^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz \\ &\quad - \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_M^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz. \end{aligned}$$

Calculând $\int_M^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz$ de-a lungul segmentului MM_1, pentru care $dy = dz = 0$, deoarece y, z sunt constante, iar $x = t$, $t \in [x, x+h]$, de unde $dx = dt$, obţinem că

$$U(x+h,y,z) - U(x,y,z) = \int_x^{x+h} P(t,y,z)dt = hP(\theta,y,z),$$

cu $\theta \in [x, x+h]$, conform teoremei de medie pentru integrala definită. De aici,

$$\frac{U(x+h,y,z) - U(x,y,z)}{h} = P(\theta,y,z),$$

iar trecând la limită pentru $h \to 0$ obţinem, ţinând seama de continuitatea lui P, că

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z).$$

Similar demonstrăm că

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z).$$

Deoarece

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

urmează că

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz,$$

iar forma diferenţială $Pdx + Qdy + Rdz$ este exactă, cu potenţial U.

„$\Leftarrow$" Fie $A, B \in D$ şi fie

$$\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \ , \ t \in [a, b], \\ z = z(t) \end{cases}$$

o curbă netedă pe porţiuni cu punct iniţial $A(x_A, y_A, z_A)$ şi punct final $B(x_B, y_B, z_B)$. Atunci

$$\begin{aligned}
\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial U}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right] dt \\
&= \int_a^b \left[U(x(t), y(t), z(t))\right]' dt \\
&= U(x(b), y(b), z(b)) - U(x(a), y(a), z(a)) \\
&= U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A).
\end{aligned}$$

■

Formula Leibniz-Newton

Inspectând demonstraţia Teoremei 4.7, observăm că am obţinut de asemenea următoarea formulă de tip Leibniz-Newton pentru integrala curbilinie de specia II.

Corolar 4.7.1. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă şi fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă pe porţiuni în D. Atunci*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A),$$

unde U este o primitivă a formei diferenţiale $Pdx + Qdy + Rdz$.

Exemplu. 1. Demonstraţi că

$$\omega = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz$$

este o formă diferenţială exactă în $D = (0, \infty)^3$, observând că o primitivă a acesteia este

$$U : D \to \mathbb{R}, \quad U(x, y, z) = \frac{xy}{z}.$$

2. Determinaţi

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz,$$

unde $\widehat{AB}$ este o curbă netedă pe porţiuni care uneşte $A(1, 1, 1)$ şi $B(4, 2, 2)$.

Soluţie. 1. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned} d\left(\frac{xy}{z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{z}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{z}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{z}\right)dz \\ &= \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz, \end{aligned}$$

de unde concluzia.

2. Conform formulei Leibniz-Newton pentru integrala curbilinie de specia II,

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz = U(4, 2, 2) - U(1, 1, 1) = 4 - 1 = 3.$$

Determinarea primitivei unei forme diferenţiale exacte

Este cunoscut faptul că dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci

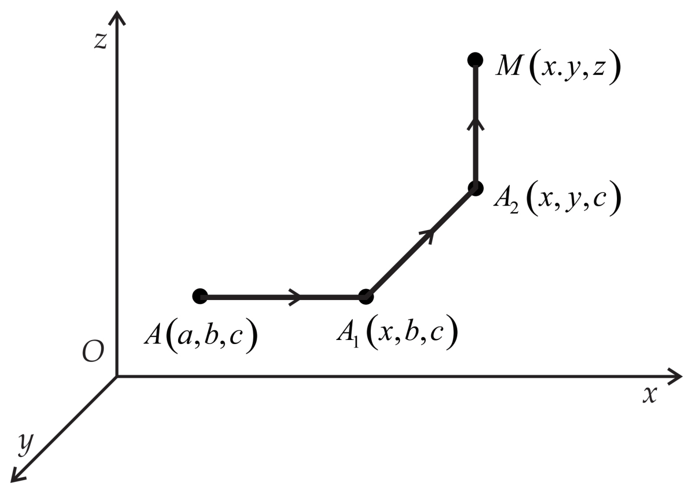
$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(u)du,$$

este o primitivă a lui f. În demonstraţia Teoremei 4.7, implicaţia „$\Rightarrow$", s-a obţinut, în fapt, un mod de calcul complet analog al primitivelor unei forme diferenţiale exacte date.

Corolar 4.7.2. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă. Atunci o primitivă a sa este $U : D \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$U(x, y, z) = \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz, \quad \text{unde } M = M(x, y, z),$$

iar A este un punct oarecare din D.



În situaţia în care drumul paralel cu axele de coordonate

$$A(a,b,c) \to A_1(x,b,c) \to A_2(x,y,c) \to M(x,y,z)$$

este conţinut în D, primitiva U ia forma simplificată

$$U(x,y,z) = \int_a^x P(t,b,c)dt + \int_b^y Q(x,t,c)dt + \int_c^z R(x,y,t)dt.$$

Să observăm că sub fiecare integrală se află câte o singură componentă a formei diferenţiale. Componentele de dinaintea poziţiei pe care se integrează sunt cele ale punctului de sosire, $M(x,y,z)$, cele de după sunt ale punctului de plecare, $A(a,b,c)$.

Exemplu. Ştiind că

$$\omega = 2xyzdx + (e^y + x^2z)dy + x^2ydz$$

este o formă diferenţială exactă, determinaţi o primitivă a sa.

Soluţie. Alegem ca punct iniţial $A(0,0,0)$ şi notăm

$$P(x,y,z) = 2xyz, \quad Q(x,y,z) = e^y + x^2z, \quad R(x,y,z) = x^2y.$$

O primitivă a lui ω este atunci

$$U(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_0^z R(x,y,t)dt$$

$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y e^t dt + \int_0^z x^2 y dt = e^t \Big|_{t=0}^{t=y} + x^2 yt \Big|_{t=0}^{t=z} = e^y - 1 + x^2 yz.$$

Primitiva U se poate deduce şi prin integrarea directă unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale. Astfel, dacă

$$dU = 2xyzdx + (e^y + x^2 z)dy + x^2 ydz,$$

urmează că

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x^2 z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = x^2 y.$$

Urmează că

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz \implies U = \int 2xyzdx = yz \int 2xdx = x^2 yz + \varphi_1(y,z).$$

Să notăm că funcţia φ_1 depinde de variabilele rămase, y şi z aici, deoarece se integrează după x. De asemenea

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x^2 z \implies \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 yz + \varphi_1(y,z)\right) = e^y + x^2 z$$

$$\implies x^2 z + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_1(y,z)\right) = e^y + x^2 z \implies \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_1(y,z)\right) = e^y$$

$$\implies \varphi_1(y,z) = \int e^y dy = e^y + \varphi_2(z).$$

Din nou, funcţia φ_2 depinde de variabila rămasă, z, întrucât se integrează după y iar variabilele „disponibile" înainte de integrare erau y şi z. Urmează că

$$U = x^2 yz + \varphi_1(y,z) = x^2 yz + e^y + \varphi_2(z).$$

În plus

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^2 y \implies \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 yz + e^y + \varphi_2(z)\right) = x^2 y$$

$$\implies x^2 y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_2(z)\right) = x^2 y \implies \varphi_2'(z) = 0 \implies \varphi_2(z) = C.$$

Atunci

$$U(x,y,z) = x^2 yz + e^y + C,$$

unde C este o constantă arbitrară.

Să notăm că, în prima metodă, constanta C este determinată de alegerea lui $A(0,0,0)$ ca punct iniţial, ceea ce impune ca $U(0,0,0) = 0$.

Rămâne deci să precizăm un test care să decidă dacă o formă diferenţială dată este exactă sau nu. În acest scop, să reamintim că, dacă U este o primitivă a lui $Pdx + Qdy + Rdz$, atunci

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Conform criteriului lui Schwarz de egalitate a derivatelor parţiale mixte ale unei funcţii de mai multe variabile, obţinem atunci următorul rezultat.

Teorema 4.8. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe D. Dacă $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă, atunci*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{în } D.$$

Demonstraţie. Să observăm că

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

iar aceste derivate parţiale mixte sunt continue pe D. Conform criteriului lui Schwarz, obţinem că ele sunt egale în D, adică

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x},$$

de unde $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, celelalte egalităţi obţinându-se analog. ∎

Un rezultat asemănător are loc şi pentru funcţii cu domeniul în $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4.9. *Fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe D. Dacă $Pdx + Qdy$ este formă diferenţială exactă, atunci*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{în } D.$$

Folosind determinanţi simbolici şi faptul că un vector este nul dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt nule, teoremele de mai sus se pot pune sub următoarele forme mai uşor de vizualizat.

Corolar 4.9.1. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe D. Dacă $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă, atunci*

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \text{în } D.$$

Corolar 4.9.2. *Fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe D. Dacă $Pdx + Qdy$ este formă diferenţială exactă, atunci*

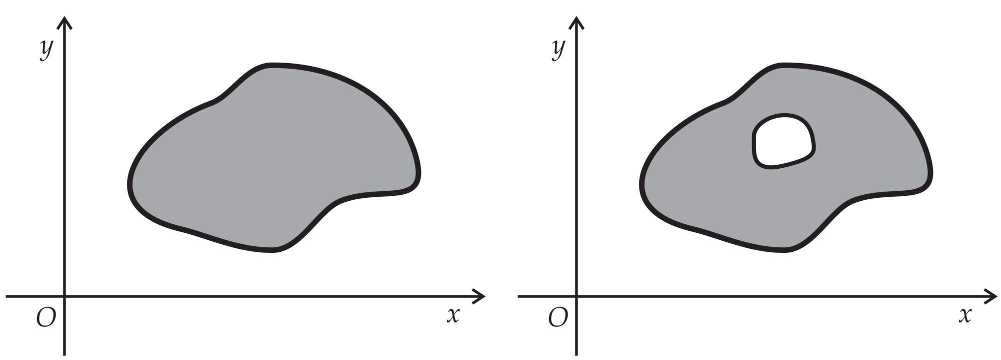
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{în } D.$$

4.4.3 Integrale curbilinii pe domenii simplu conexe. Condiţii echivalente pentru independenţa de drum

Teoremele de mai sus reprezină condiţii **necesare** ca o formă diferenţială să fie exactă. Aceste condiţii nu sunt însă neapărat şi **suficiente**, reciprocele lor neavând neapărat loc în absenţa unor condiţii auxiliare asupra domeniului D.

Domenii simplu conexe în plan

Definiţie. Fie un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$. Spunem că D este **simplu conex** dacă odată cu orice curbă închisă (C) domeniul D conţine şi interiorul acesteia.



Domeniu simplu conex Domeniu dublu conex

Cu alte cuvinte, un domeniu simplu conex în plan nu conţine goluri, indiferent de cât de mici sunt acestea. Astfel, interioarele unui cerc sau unui pătrat sunt domenii simplu conexe. Un inel (regiunea dintre două cercuri) nu este însă un domeniu simplu conex, şi nici interiorul unui cerc din care lipseşte centrul nu este un domeniu simplu conex. În ultimul caz, „golul" constă dintr-un singur punct! Astfel de domenii vor fi numite, în general, **multiplu conexe**. Distingând după numărul de goluri, un domeniu cu un singur gol va fi numit **dublu conex**, un domeniu cu două goluri va fi numit **triplu conex**; in general, un domeniu cu $n-1$ goluri va fi numit n**-uplu conex**.

Domenii simplu conexe în spaţiu

Definiţie. Fie un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$. Spunem că D este **simplu conex** dacă odată cu orice curbă închisă (C) domeniul D conţine şi o suprafaţă netedă cu frontiera (C).

În acest caz, un domeniu simplu conex poate conţine goluri. De exemplu, domeniul dintre două sfere concentrice este simplu conex, şi tot domeniu simplu conex este interiorul unei sfere din care lipseşte centrul (sau chiar lipsesc un număr finit de puncte). Dacă domeniul nu are goluri, atunci el este simplu conex.

Pentru domenii simplu conexe, condiţiile Teoremelor 4.8 şi 4.9 sunt şi suficiente (acest lucru va fi demonstrat ulterior). Obţinem atunci următoarele consecinţe.

Teorema 4.10. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe domeniul simplu conex D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. $\int Pdx + Qdy + Rdz$ *este independentă de drum în D.*

2. $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ *pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*

3. $Pdx + Qdy + Rdz$ *este formă diferenţială exactă.*

4. *Are loc egalitatea*
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \text{în } D.$$

Teorema 4.11. *Fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe domeniul simplu conex D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

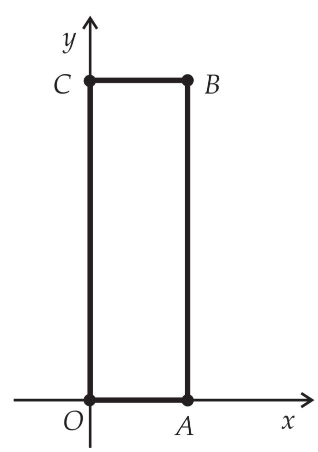
1. $\displaystyle\int Pdx + Qdy$ *este independentă de drum în D.*

2. $\displaystyle\int_C Pdx + Qdy = 0$ *pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*

3. $Pdx + Qdy$ *este formă diferenţială exactă.*

4. *Are loc egalitatea*
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{în } D.$$

Exemplu. Determinaţi
$$\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy,$$
unde (C) este dreptunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,\pi)$, $C(0,\pi)$.



Soluţie. Să observăm mai întâi faptul că dreptunghiul din enunţ este o curbă închisă. Mai departe,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \sin y\right) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0,$$

de unde $\displaystyle\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = 0$.

Exemplu. Demonstraţi că valoarea integralei

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} yz^2 dx + xz^2 dy + 2xyzdz$$

nu depinde de arcul $\overset{\frown}{AB}$ care uneşte $A(1,0,2)$ şi $B(2,1,1)$ şi calculaţi această valoare.

Soluţie. Demonstrăm mai întâi independenţa de drum. Observăm că

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{vmatrix} &= \frac{\partial}{\partial y}(2xyz)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial z}(yz^2)\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial x}(xz^2)\vec{k} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y}(yz^2)\vec{k} - \frac{\partial}{\partial z}(xz^2)\vec{\imath} - \frac{\partial}{\partial x}(2xyz)\vec{\jmath} \\
&= 2xz\vec{\imath} + 2yz\vec{\jmath} + z^2\vec{k} - z^2\vec{k} - 2xz\vec{\imath} - 2yz\vec{\jmath} = \vec{0},
\end{aligned}$$

valoarea integralei respective fiind independentă de drum. Pentru a calcula această valoare, alegem un drum format dintr-o succesiune de segmente paralele cu axele de coordonate, anume

$$A(1,0,2) \xrightarrow[\substack{x=t \\ t\in[1,2] \\ y=0 \\ z=2 \\ dx=dt \\ dy=0 \\ dz=0}]{} A_1(2,0,2) \xrightarrow[\substack{x=2 \\ y=t \\ t\in[0,1] \\ z=2 \\ dx=0 \\ dy=dt \\ dz=0}]{} A_2(2,1,2) \xrightarrow[\substack{x=2 \\ y=1 \\ z=t \\ t\in[2,1] \\ dx=0 \\ dy=0 \\ dz=dt}]{} B(2,1,1).$$

Urmează că

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} yz^2 dx + xz^2 dy + 2xyzdz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\overline{AA_1}} yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz \\
&\quad + \int_{\overline{A_1A_2}} yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz \\
&\quad + \int_{\overline{A_2B}} yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz \\
&= \int_1^2 0dt + \int_0^1 8dt + \int_2^1 4tdt = 0 + 8t \Big|_0^1 + 2t^2 \Big|_2^1 = 2.
\end{aligned}$$

Aplicaţii

4.1. *Determinaţi* $\int_C yds$, *unde* $(C): \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, \quad t \in [2,3]$.

4.2. *Determinaţi* $\int_C x^3y^2ds$, *unde* $(C): \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in [-1,1]$.

4.3. *Determinaţi* $\int_C (x^3 + y)ds$, *unde* $(C): y = \frac{x^3}{27}, \quad x \in [0,3]$.

4.4. *Determinaţi* $\int_{AB} \frac{1}{y-x}ds$, *unde* AB *este segmentul cu capetele în* $A(0,3)$ *şi* $B(1,5)$.

4.5. *Determinaţi* $\int_C xyds$, *unde* (C) *este elipsa de ecuaţie* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

4.6. *Determinaţi* $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, *unde* (C) *este cercul de ecuaţie* $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.

4.7. *Determinaţi* $\int_C ye^{-x}dx$, *unde* $(C): \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t \end{cases}, \quad t \in [0,1]$.

4.8. *Fie* $O(0,0)$, $M(1,0)$, $A(1,1)$. *Determinaţi* $\int_C (x+y)dx + xdy$ *pentru următoarele alegeri ale curbei* (C)

1. *Segmentul* OA.
2. *Porţiunea din parabola* $y = x^2$ *determinată de* O *şi* A.
3. *Reuniunea segmentelor* OM *şi* MA.

Puteţi explica rezultatul?

4.9. *Demonstraţi că următoarele forme diferenţiale sunt exacte şi precizaţi primitive ale acestora*

$$\omega_1 = (x+y)dx + (x-y)dy, \quad \omega_2 = (3x^2y + y)dx + (x^3 + x)dy$$
$$\omega_3 = (ye^x + \sin y)dx + (e^x + x\cos y)dy,$$

4.10. *Demonstraţi că următoarele integrale sunt independente de drumurile care unesc punctele A şi B şi precizaţi valorile acestora*

1. $\displaystyle\int_A^B 3x^2y dx + x^3 dy, \quad A(1,1),\ B(2,3).$

2. $\displaystyle\int_A^B (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy, \quad A(0,0),\ B(1,3).$

3. $\displaystyle\int_A^B (e^x + 2x\sin y)dx + (x^2\cos y - 3y^2)dx, \quad A(-1,0),\ B(2,2\pi).$

4. $\displaystyle\int_A^B \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy, \quad A(4,3),\ B(2,1)$, *pe un drum care nu trece prin* $O(0,0)$.

5. $\displaystyle\int_A^B \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\sin y dx + \frac{x}{1+x^2}\cos y dy, \quad A(0,\tfrac{\pi}{2}),\ B(1,\pi).$

4.11. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabile cu derivata continuă. Demonstraţi că următoarele integrale sunt independente de drum.*

1. $\displaystyle\int f(x)dx + g(y)dy.$

2. $\displaystyle\int f(x+y)(dx+dy).$

3. $\displaystyle\int f(xy)(ydx + xdy).$

4.12. *Fie* (C) *cercul unitate, parcurs în sens trigonometric.*

1. *Demonstraţi că* $\displaystyle\int_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\pi \neq 0.$

2. *Demonstraţi că*
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$
Contrazice acest lucru Teorema 4.10?

4.13. *Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care forma diferenţială*
$$\omega = ax^2 z dx + 2y dy + x^3 dz$$
este exactă şi precizaţi o primitivă a acesteia.

4.14. *Determinaţi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pentru care forma diferenţială*
$$w = (y+z)dx + (z+x)dy + f(x,y,z)dz$$
este exactă şi precizaţi o primitivă a acesteia.

Capitolul 5

INTEGRALA DUBLĂ

Să recapitulăm modul de definire al integralei definite (Riemann) pentru o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mai întâi, se construia o diviziune a intervalului $[a, b]$,

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad \text{cu} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

(şi, ca rezultat, se obţineau subintervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$, cu interioarele disjuncte şi care puteau avea în comun două câte două doar cel mult unul dintre capete). Apoi, se considera un sistem de puncte intermediare

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\},$$

astfel încât $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare interval elementar se afla câte un punct intermediar) şi se asociau sume Riemann de forma

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(c_n - c_{n-1})\end{aligned}$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţea cu lungimea intervalului din care punctul intermediar făcea parte, adunându-se rezultatele). Mai departe, $\int_a^b f(x)dx$ se obţinea ca limita unui astfel de şir de sume Riemann.

Vom păstra acelaşi punct de vedere, bazat pe **împărţirea domeniului de integrare în subdomenii, asocierea unui sistem de puncte intermediare, definirea sumei Riemann şi trecerea la limită** şi pentru definiţia noţiunii de integrală dublă a unei funcţii definite pe un domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$, care are arie.

Domenii de integrare

Nu vom prezenta aici noţiuni legate de existenţa sau inexistenţa ariei unei mulţimi din $\mathbb{R}^2$ (în acest scop cititorul putând consulta M. Nicolescu *et al.* [**?**], vol II, cap. IX), însă vom observa că orice domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este reuniunea unui număr finit de curbe netede are arie. În acest capitol, pentru simplificarea expunerii, prin **domeniu de integrare** vom înţelege un domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este reuniunea unui număr finit de curbe netede (altfel spus, cu frontiera **netedă pe porţiuni**). În particular, un astfel de domeniu de integrare are arie.

Împărţirea domeniului de integrare în subdomenii

Diviziuni (partiţii) ale unui domeniu de integrare

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare. Vom spune că o mulţime ordonată de domenii de integrare $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ reprezintă o **diviziune** (sau **partiţie**) a lui D dacă

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i = D$.

2. $\overset{\circ}{D}_i \bigcap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$, pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Altfel spus, D se poate scrie ca reuniunea tuturor subdomeniilor D_1, D_2, $\ldots$, D_n, iar aceste subdomenii pot avea comune, două câte două, cel mult puncte de pe frontieră, întrucât au două câte două interioarele disjuncte.

Notaţie

Mulţimea diviziunilor unui domeniu de integrare D se notează $\mathcal{D}_D$.

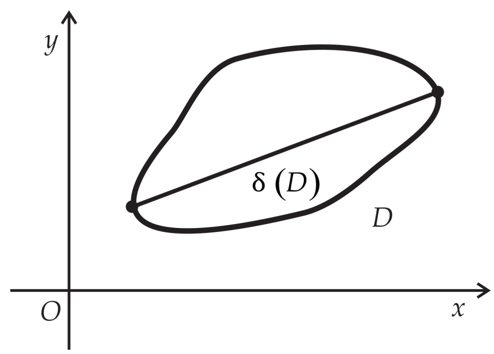
Diametrul unui domeniu de integrare

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare. Numim **diametru** al lui D, notat $\delta(D)$, distanţa maximă dintre două puncte ale lui D.

Normă a unei partiţii

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$, vom numi **normă** a diviziunii Δ, notată $\|\Delta\|$, valoarea maximă a **diametrelor** $\delta(D_1)$, $\delta(D_2)$, $\ldots$, $\delta(D_n)$, adică

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(D_n).$$

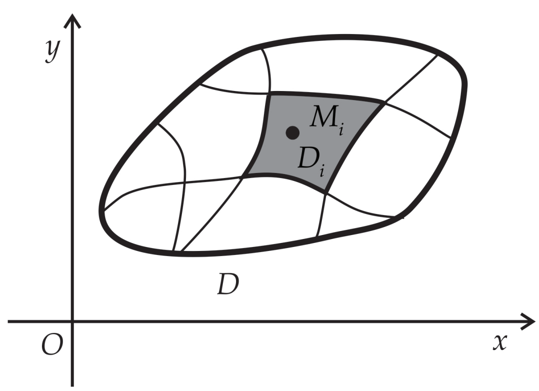


Sisteme de puncte intermediare asociate

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$, vom numi **sistem de puncte intermediare asociat diviziunii** Δ o mulţime ordonată de puncte

$$C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\},$$

astfel încât $M_i \in D_i$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare subdomeniu se află câte un punct intermediar).



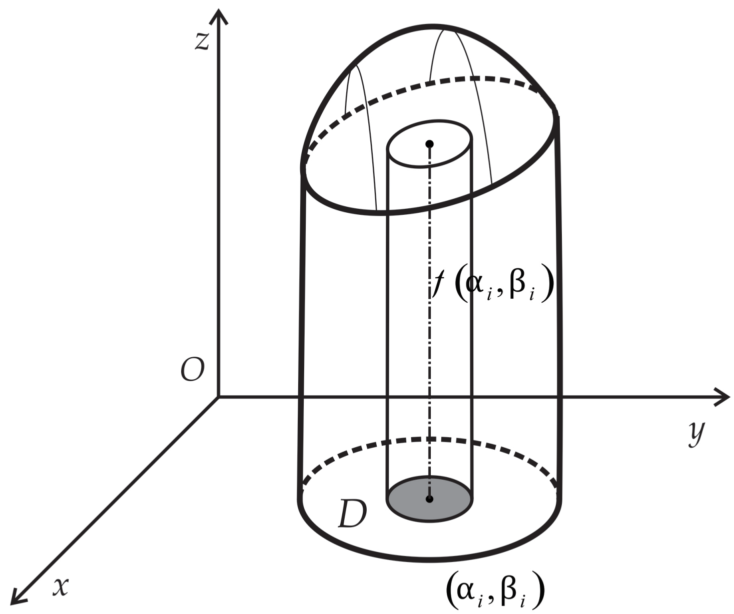
Sume Riemann. Interpretare geometrică

Fiind date un domeniu de integrare D, o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, o diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ a domeniului de integrare D şi $C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, $M_i = M_i(\alpha_i, \beta_i)$, $1 \leq i \leq n$, vom numi **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** C suma

$$\sigma_\Delta(f, C) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i)\,\text{aria}(D_i)$$

$$= f(\alpha_1, \beta_1)\,\mathrm{aria}(D_1) + f(\alpha_2, \beta_2)\,\mathrm{aria}(D_2) + \ldots + f(\alpha_n, \beta_n)\,\mathrm{aria}(D_n)$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţeşte cu aria subdomeniului din care punctul intermediar face parte, adunându-se rezultatele).



Interpretare geometrică

Fie $f : D \to [0, \infty)$, D domeniu de integrare. Considerăm corpul cilindric mărginit de planul xOy şi suprafaţa $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ cu generatoarea paralelă cu Oz. Descompunem acest corp în subcorpuri cilindrice cu bazele D_1, $D_2, \ldots, D_n$ şi aproximăm volumul unui astfel de subcorp cu volumul cilindrului cu baza D_i şi înălţime $f(\alpha_i, \beta_i)$. Obţinem că $\sigma_\Delta(f, C)$ reprezintă suma volumelor cilindrilor aproximanţi, în concluzie o aproximare pentru volumul corpului cilindric respectiv.

Funcţii integrabile Riemann

Definiţie. Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este **integrabilă Riemann** pe D (pe scurt, f este **integrabilă** pe D) dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}_D$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare C asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, C) - I| < \varepsilon.$$

La fel ca şi în cazul integralei unei funcţii definite pe un interval $[a, b]$, pentru o normă a diviziunii „suficient de mică", suma Riemann $\sigma_\Delta(f, C)$ reprezintă o aproximare „suficient de bună" a lui I.

Integrala dublă

Numărul I definit mai sus se numeşte **integrala dublă** a funcţiei f pe D şi se notează

$$\iint_D f(x, y)dxdy.$$

Să observăm şi că I, dacă există, este unic determinat.

Mulţimea D se numeşte **domeniu de integrare**, funcţia f se numeşte **integrand** iar variabilele x, y se numesc **variabile de integrare**. Expresia $dxdy$ (un tot unitar, mai degrabă decât un produs, deşi poate fi interpretat şi în acest ultim fel) se numeşte **element de arie**.

Definiţie alternativă

Are loc următoarea echivalenţă, cea de-a doua afirmaţie putând fi utilizată de asemenea ca definiţie a integrabilităţii Riemann.

Teorema 5.1. *Fie D un domeniu de integrare şi fie o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *f este integrabilă pe D.*
2. *Oricare ar fi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ ale lui D cu $\|\Delta_n\| \to 0$, împreună cu un şir de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este convergent.*

La fel ca şi în cazul integralei unei funcţii definite pe un interval $[a, b]$, se poate demonstra că limita unui astfel de şir de sume Riemann nu depinde nici de alegerea şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$, nici de alegerea şirului de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$. Valoarea (comună) a limitelor reprezintă $\iint_D f(x, y)dxdy$.

Domeniu de integrare cu arie nulă. Integrala funcţiei nule

Cu ajutorul definiţiei, ţinând cont de faptul că toate sumele Riemann asociate sunt nule, putem obţine următoarele proprietăţi.

1. Fie D un domeniu de integrare cu arie nulă şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă. Atunci
$$\iint_D f(x, y)dxdy = 0.$$

2. Fie D un domeniu de integrare. Atunci

$$\iint_D 0dxdy = 0.$$

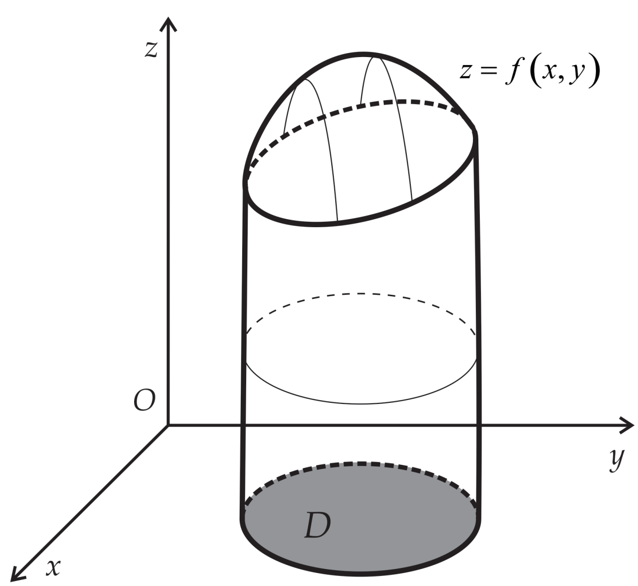
Interpretare geometrică: arie

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare. Conform definiţiei, se obţine că

$$\iint_D 1dxdy = \text{aria}(D).$$

La fel ca şi în cazul integralei definite, integrându-l pe 1 pe o mulţime obţinem „măsura" acelei mulţimi. Pentru un interval $[a, b]$, „măsura" sa era lungimea acestuia, $b - a$. Acum, „măsura" potrivită pentru domeniul de integrare D (din $\mathbb{R}^2$) este aria acelei mulţimi.

Interpretare geometrică: volum



Am observat deja că, fiind dată o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă pe $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, interpretarea geometrică a integralei definite $\int_a^b f(x)dx$ este aria subgraficului funcţiei f. Pentru integrala dublă, o interpretare similară se obţine „adăugând o dimensiune" şi transformând graficul în suprafaţă, iar aria în volum.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D, $f(x,y) \geq 0$ pentru orice $(x,y) \in D$. Definim suprafaţa Σ în $\mathbb{R}^3$ prin

$$\Sigma = \{(x,y,z); z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}.$$

Ţinând seama şi de interpretarea geometrică a sumelor Riemann amintită anterior, $\iint_D f(x,y)dxdy$ reprezintă volumul corpului cilindric cu generatoarea paralelă cu Oz determinat de D şi de suprafaţa Σ.

Legătura între integrabilitate şi alte proprietăţi ale funcţiilor

La fel ca şi în cazul integralelor simple (şi în mod natural de altfel), funcţiile continue sunt integrabile. De asemenea, funcţiile integrabile sunt mărginite.

Teorema 5.2. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f continuă pe D. Atunci f este integrabilă pe D.*

Teorema 5.3. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Atunci f este mărginită pe D.*

5.1 Operaţii cu funcţii integrabile

Teorema 5.4. *Fie D un domeniu de integrare, $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe D, şi $c \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. **Proprietatea de aditivitate**

   Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ sunt integrabile pe D, iar

   $$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

   *(***integrala sumei este egală cu suma integralelor***), respectiv*

   $$\iint_D (f(x,y) - g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy - \iint_D g(x,y)dxdy$$

   *(***integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor***).*

2. **Proprietatea de omogenitate**

Funcţia cf este integrabilă pe D, iar

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy,$$

(**o constantă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei**).

Menţionăm că nu au loc formule asemănătoare pentru produs şi raport, adică integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor şi nici integrala raportului nu este, de regulă, raportul integralelor. Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 5.5. *Fie D un domeniu de integrare, $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe D şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe D şi*

$$\iint_D (c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y))dxdy = c_1\iint_D f(x,y)dxdy + c_2\iint_D g(x,y)dxdy.$$

5.2 Proprietăţi ale integralei duble

5.2.1 Proprietăţi în raport cu domeniul

Restrângerea domeniului de integrare

Teorema 5.6. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Atunci f este integrabilă pe orice subdomeniu $D_1 \subset D$.*

Extinderea domeniului de integrare. Aditivitatea în raport cu domeniul

Teorema 5.7. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă domeniile de integrare D_1, $D_2, \ldots, D_n$ formează o diviziune a lui D, iar f este integrabilă pe $D_1, D_2, \ldots, D_n$, atunci f este integrabilă pe întreg D, iar*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

5.2.2 Proprietăţi în raport cu funcţia

Păstrarea inegalităţilor între funcţii

Vom observa în cele ce urmează că integrala dublă păstrează semnul funcţiei de integrat şi inegalităţile nestricte între funcţii. În plus, inegalitatea strictă într-un punct comun de continuitate al funcţiilor de integrat atrage inegalitatea strictă pentru integrale.

Teorema 5.8. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe D.*

1. *Dacă $f(x,y) \geq 0$, pentru orice $(x,y) \in D$, atunci*
$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$
2. *Dacă $f(x,y) \geq g(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in D$, atunci*
$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy.$$
3. *Dacă $f(x,y) \geq g(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in D$, şi există $(x_0, y_0) \in D$ astfel ca*
$$f(x_0,y_0) > g(x_0,y_0), \text{ iar } f, g \text{ sunt continue în } (x_0,y_0),$$
atunci
$$\iint_D f(x,y)dxdy > \iint_D g(x,y)dxdy.$$

Corolar 5.8.1. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Dacă*
$$m \leq f(x,y) \leq M, \quad \text{pentru orice } (x,y) \in D,$$
atunci
$$m \cdot \text{aria}(D) \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot \text{aria}(D).$$

Corolar 5.8.2. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Atunci $|f|$ este integrabilă pe D, iar*
$$\left| \iint_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

Reiterînd faptul că acum, „măsura" potrivită pentru domeniul de integrare D (din $\mathbb{R}^2$) este aria acelei mulţimi, în vreme ce pentru un interval $[a, b]$, „măsura" sa era lungimea acestuia, $b - a$, putem obţine următoarea teoremă de medie, cu semnificaţie şi demonstraţie similare celei obţinute pentru integrala simplă.

Teorema de medie

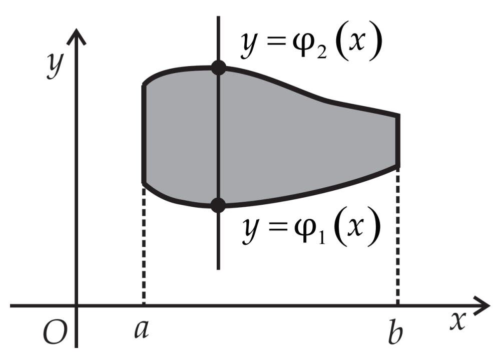
Teorema 5.9. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f continuă pe D. Atunci există $M(c_1, c_2) \in D$ astfel încât*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(c_1, c_2)\,\text{aria}(D).$$

5.3 Calculul integralelor duble

În mod natural, o primă idee este de a reduce calculul integralei duble la calculul succesiv a două integrale definite, utilizând pe rând cele două variabile ca variabile de integrare.

5.3.1 Domenii simple în raport cu axa Oy



Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy. Reamintim că, în această situaţie, au loc următoarele.

1. Proiecţia lui D pe Ox este un segment $[a, b]$.
2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x, y); \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), x \in [a, b]\}.$$

Teorema 5.10. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D. Dacă $I : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy, \quad \text{pentru } x \in [a, b],$$

este bine definită şi integrabilă pe $[a, b]$, atunci

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

În membrul drept, domeniul $[a, b]$ al primei integrale este **domeniul de proiecţie**, iar domeniul celei de-a doua integrale, $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ este **domeniul de secţiune** (pentru $x \in (a, b)$, paralela la axa Oy cu abscisa constantă x taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(x)$ fiind ordonata punctului de intrare, iar $\varphi_2(x)$ fiind ordonata punctului de ieşire; cele două puncte pot eventual şi coincide).

De notat că, în cele de mai sus, ordinea de scriere a integralelor nu este ordinea de calcul. Astfel, mai întâi se calculează integrala interioară (cea în raport cu y), iar abia apoi cea exterioară (cea în raport cu x).

Procedeul de calcul de mai sus poartă numele de **reducerea la integrale iterate** sau, urmărind raţionamentul geometric, **metoda de proiecţie şi secţiune**. În particular, ipotezele asupra lui I sunt satisfăcute dacă f este funcţie continuă.

Corolar 5.10.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe D. Atunci*

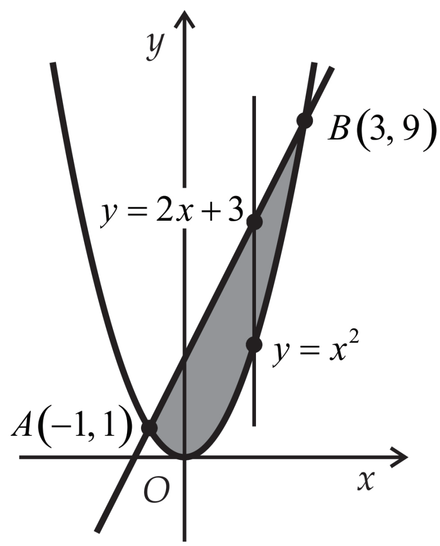
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D xydxdy,$$

unde D este domeniul limitat de parabola $(P) : y = x^2$ şi dreapta $(D) : y = 2x + 3$.

Soluţie. Domeniul de integrare D este cel haşurat în figură, observându-se că el este simplu în raport cu Oy. Pentru calculul integralei, aplicăm metoda de



proiecţie şi secţiune. În acest scop, determinăm mai întâi punctele de intersecţie (de fapt, sunt necesare doar abscisele acestora).

Determinarea punctelor de intersecţie se face rezolvând un sistem constituit din ecuaţiile parabolei şi dreptei.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases} \Longrightarrow x^2 = 2x+3 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Urmează că domeniul de proiecţie (pe Ox) este $[-1, 3]$.

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oy printr-un punct oarecare x din domeniul de proiecţie. Observăm că punctul de „intrare" în D al paralelei este situat pe parabola $y = x^2$, în timp ce punctul de „ieşire" este situat pe dreapta $y = 2x+3$. Urmează că

$$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^{3} \left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_{x^2}^{2x+3} xydy.$$

Deoarece variabila de integrare este y, urmează că

$$I_1 = x \int_{x^2}^{2x+3} ydy = x \cdot \frac{y^2}{2} \bigg|_{x^2}^{2x+3} = \frac{x}{2} \left(4x^2 + 6x + 9 - x^4 \right) = 2x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^5.$$

De aici

$$I = \int_{-1}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{x^5}{2} \right) dx = \left(2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \frac{9}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{6} \right) \Bigg|_{-1}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^6 \right) \Bigg|_{-1}^{3} = \frac{76}{3}.$$

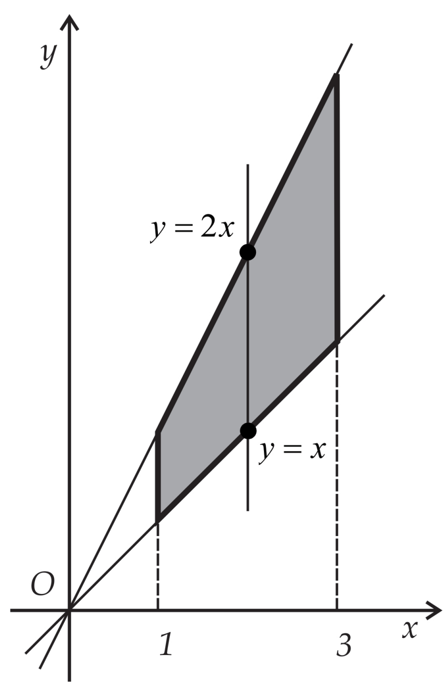
Exemplu. Determinaţi aria domeniului

$$D = \{(x, y); x \leq y \leq 2x,\ 1 \leq x \leq 3\}.$$

Soluţie. Avem că

$$\text{aria}\ (D) = \iint_D 1dxdy,$$

domeniul D fiind cel haşurat în figură. Vom folosi metoda de proiecţie şi secţiune.



În acest scop, să observăm că domeniul de proiecţie (pe Ox) este $[1, 3]$, conform enunţului problemei.

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oy printr-un punct oarecare x din domeniul de proiecţie. Observăm că punctul de „intrare" în D al paralelei este situat pe dreapta $(D1) : y = x$, în timp ce punctul de „ieşire" este situat pe dreapta $(D2) : y = 2x$. Urmează că

$$\iint_D 1dxdy = \int_1^3 \left(\int_x^{2x} 1dy \right) dx.$$

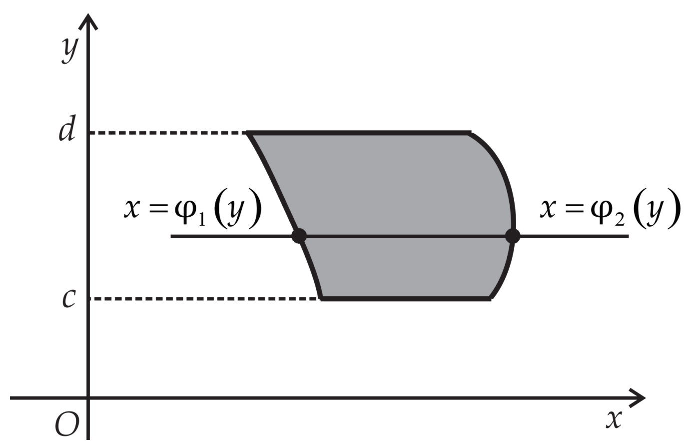
Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_x^{2x} 1dy = y \Big|_x^{2x} = 2x - x = x.$$

Atunci

$$\iint_D 1dxdy = \int_1^3 xdx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^3 = 4.$$

5.3.2 Domenii simple în raport cu axa Ox



Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Ox. Reamintim că, în această situaţie

1. Proiecţia lui D pe Oy este un segment $[c, d]$.
2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x, y); \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), y \in [c, d]\}.$$

Teorema 5.11. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Ox şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D. Dacă $I : [c, d] \to \mathbb{R}$,*

$$J(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx, \quad \text{pentru } y \in [c, d],$$

este bine definită şi integrabilă pe $[c, d]$, atunci

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

În membrul drept, domeniul $[c, d]$ al primei integrale este **domeniul de proiecţie**, iar domeniul celei de-a doua integrale, $[\varphi_1(y), \varphi_2(y)]$ este **domeniul de secţiune** (pentru $y \in (c, d)$, paralela la axa Ox cu ordonată constantă y taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(y)$ fiind abscisa punctului de intrare, iar $\varphi_2(y)$ fiind abscisa punctului de ieşire; cele două puncte pot eventual şi coincide). Din nou, mai întâi se calculează integrala interioară (cea în raport cu x), iar abia apoi cea exterioară (cea în raport cu y), iar ipotezele asupra lui J sunt satisfăcute dacă f este funcţie continuă.

Corolar 5.11.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Ox şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe D. Atunci*

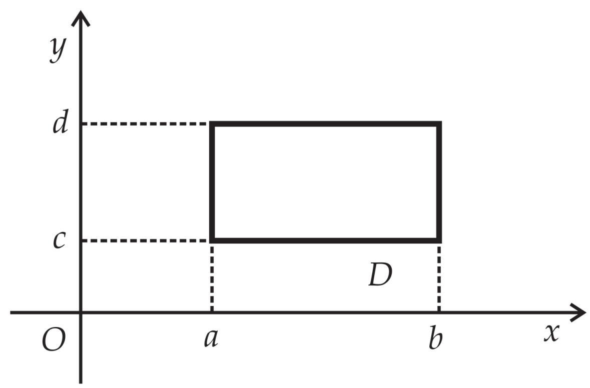
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

5.3.3 Domenii dreptunghiulare

În cazul domeniilor cu formă generală menţionate mai sus, calculul integralelor iterate presupune în particular determinarea domeniului de secţiune. Aceste formule de calcul se simplifică considerabil, nemaifiind necesar să se calculeze domeniile de secţiune, atunci când domeniul de integrare este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate. Un astfel de dreptunghi poate fi scris sub forma

$$D = [a, b] \times [c, d],$$

unde $[a, b]$ reprezintă proiecţia domeniului pe axa Ox, iar $[c, d]$ reprezintă proiecţia domeniului pe axa Oy, fiind simplu atât în raport cu Ox, cât şi cu Oy.



Corolar 5.11.2. *Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, f continuă. Atunci*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y)dxdy$.

Soluţie. Are loc egalitatea

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)dy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)dy = (-\cos(x+y)) \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} = -\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \cos x.$$

De aici,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \cos x)dx &= -\sin(x+\frac{\pi}{4}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\sin(3\frac{\pi}{4}) + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1. \end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$.

Soluţie. Are loc egalitatea

$$\iint_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(x+y+1)^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{1}{(x+y+1)^2} dy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+y+1)^2} dy$, pentru care y este variabilă de integrare, iar x este o constantă. Urmează că

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+y+1)^2} dy = \int_1^2 (x+y+1)^{-2} dy = \frac{(x+y+1)^{-1}}{-1} \Bigg|_{y=1}^{y=2}$$
$$= \frac{(x+3)^{-1}}{-1} - \frac{(x+2)^{-1}}{-1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}.$$

De aici,

$$\iint_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(x+y+1)^2} dxdy = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+2| \Bigg|_0^1 - \ln|x+3| \Bigg|_0^1$$
$$= \ln 3 - \ln 2 - \ln 4 + \ln 3 = \ln \frac{9}{8}.$$

5.3.4 Domenii dreptunghiulare şi funcţii separabile ca produse

În descrierea unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate sub forma

$$D = [a,b] \times [c,d],$$

intervalele în care variabilele x şi y sunt „separate" cu ajutorul unui produs (cartezian). Dacă şi în expresia funcţiei de integrat f variabilele x şi y sunt separate în acelaşi mod, adică f se poate scrie ca produs între o funcţie care depinde doar de variabila x şi o funcţie care depinde doar de variabila y, există atunci premizele pentru o separare „totală" a variabilelor, tot sub forma unui produs.

Teorema 5.12. *Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, unde f_1, f_2 sunt funcţii continue. Atunci*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y) dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x) \cdot f_2(y) dxdy$$

$$= \left(\int_a^b f_1(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d f_2(y)dy\right)$$

Prima integrală simplă conţine toate apariţiile variabilei x, împreună cu domeniul corespunzător, iar cea de-a doua, tot simplă, conţine toate apariţiile variabilei y, din nou împreună cu domeniul corespunzător.

De asemenea, este de remarcat faptul că separarea sumelor sau diferenţelor de funcţii are loc **tot timpul** (indiferent de forma domeniului), şi se face în integrale **de acelaşi tip** (adică tot duble), în vreme ce separarea produselor are loc **uneori** (în condiţiile particulare de mai sus) şi se face în integrale **simple**.

Exemplu. Determinaţi $\iint_{[0,1]\times[1,2]} xe^{x^2+y}dxdy$.

Soluţie. Au loc egalităţile

$$\iint_{[1,3]\times[1,2]} xe^{x^2+y}dxdy = \iint_{[1,3]\times[1,2]} xe^{x^2} \cdot e^y dxdy = \int_1^3 xe^{x^2}dx \cdot \int_1^2 e^y dy.$$

Deoarece

$$I_1 = \int_1^3 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 2xe^{x^2}dx,$$

cu schimbarea de variabilă $u = x^2$, de unde $du = 2xdx$, urmează că

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^9 e^u du = \frac{1}{2}e^u \Big|_1^9 = \frac{1}{2}\left(e^9 - e\right).$$

De asemenea,

$$I_2 = \int_1^2 e^y dy = e^y \Big|_1^2 = e^2 - e.$$

Atunci

$$I = \frac{1}{2}\left(e^9 - e\right)\left(e^2 - e\right).$$

Exemplu. Determinaţi $\iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \sin x dxdy$.

Soluţie. În acest caz, integrandul este funcţie doar de variabila x. Putem totuşi considera că el se separă ca produs între o funcţie doar de variabila x şi o funcţie doar de variabila y, sub forma

$$\sin x = \sin x \cdot 1.$$

Atunci

$$\iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \sin x dx dy = \iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \sin x \cdot 1 dx dy = \int_0^{\pi} \sin x dx \cdot \int_0^1 1 dy$$
$$= (-\cos x)\Big|_0^{\pi} \cdot y \Big|_0^1 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Exemplu. Determinaţi $\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y) dx dy$.

Soluţie. Au loc egalităţile

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y) dx dy = \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} (\sin x \cos y + \cos x \sin y) dx dy$$
$$= \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin x \cos y dx dy + \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \cos x \sin y dx dy.$$

Mai sus, separarea se face tot în integrale duble, pe acelaşi domeniu, întrucât se calculează integrala unei **sume**. De asemenea

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin x \cos y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos y dy = (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin y \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aici, separarea se face în integrale simple, întrucât se calculează integrala unui **produs** de funcţii depinzând de câte o variabilă. Din acelaşi motiv,

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \cos x \sin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin y dy = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (-\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 1 \cdot (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Atunci

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

5.3.5 Formula de schimbare de variabilă în integrala dublă

În unele situaţii, fie funcţia de integrat, fie forma geometrică a domeniului se simplifică după schimbări de variabile.

Schimbări de variabilă (transformări regulate)

Fie D_1 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_1 şi D_2 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_2. Spunem că D_2 se transformă în D_1 prin **schimbarea de variabilă** (sau **transformarea regulată**)

$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \ (u,v) \in D_2,$$

dacă

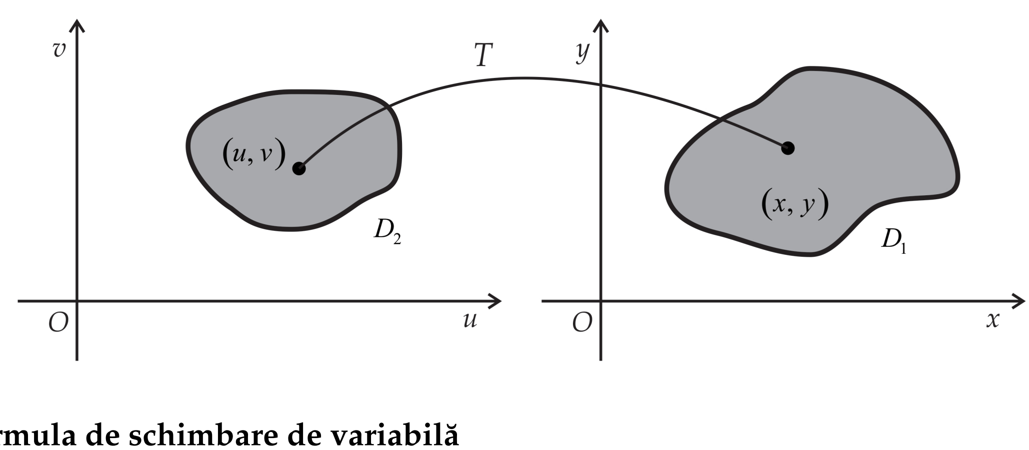
1. T este bijectivă ca funcţie de la D_2 la D_1.

2. Funcţiile $x = x(u,v)$ şi $y = y(u,v)$ au derivatele parţiale de ordinul 1 şi derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea continue.

3. Determinantul funcţional (numit **determinant jacobian**)

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

   este nenul pentru $(u,v) \in D_2$.



Formula de schimbare de variabilă

Teorema 5.13. *Fie D_1 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_1 şi D_2 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_2, astfel încât D_2 se transformă în D_1 prin* **schimbarea de variabilă** *(sau* **transformarea regulată***)*

$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \ (u,v) \in D_2.$$

Fie, de asemenea, $f : D_1 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci

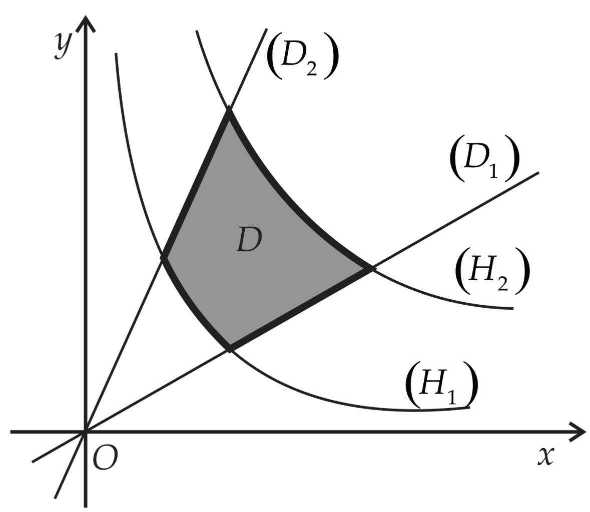
$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \iint_{D_2} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

În prima parte a membrului drept, **variabilele vechi** x şi y se înlocuiesc în funcţie de **variabilele noi** u şi v. Cea de-a doua parte a membrului drept reprezintă **formula de transformare a elementului de arie**, care poate fi scrisă sub forma

$$dxdy = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D xdxdy, \quad D = \left\{ (x,y); 1 \leq xy \leq 9, \ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4 \right\}.$$



Soluţie. Domeniul D este definit cu ajutorul unor inegalităţi. Studiem mai întâi cazurile de egalitate. Observăm că D este mărginit de hiperbolele echilatere (H_1) : $xy = 1$, (H_2) : $xy = 9$ şi de dreptele (D_1) : $y = x$, (D_2) : $y = 4x$. Alegerea variabilelor noi

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

simplifică forma domeniului de integrat, care devine dreptunghiul $[1,9] \times [1,4]$. Determinăm acum formula de transformare a elementului de arie. Observăm că

$$uv = xy \cdot \frac{y}{x} = y^2 \implies y = \sqrt{uv}, \quad \frac{u}{v} = \frac{xy}{\frac{y}{x}} = x^2 \implies x = \sqrt{\frac{u}{v}}.$$

De aici

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{uv}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{uv}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{-1}{2}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{-1}{2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}v^{\frac{-1}{2}} & \frac{-1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{-3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{-1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}v^{-1} + \frac{1}{4}v^{-1} = \frac{1}{2}v^{-1} = \frac{1}{2v},$$

iar

$$dxdy = \frac{1}{2v}dudv.$$

Urmează că

$$\iint_D xdxdy = \int_{[1,9]\times[1,4]} \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{2v}dudv = \frac{1}{2}\int_{[1,9]\times[1,4]} u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}dudv$$

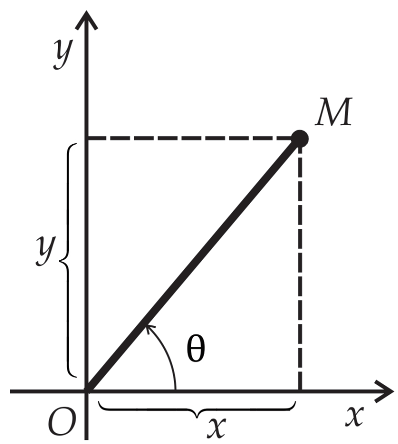
$$= \frac{1}{2}\int_1^9 u^{\frac{1}{2}}du \cdot \int_1^4 v^{-\frac{3}{2}}dv = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9 \cdot \frac{v^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{52}{3}\cdot 1 = \frac{26}{3}.$$

5.3.6 Coordonate polare şi polare generalizate

Coordonate polare

Fiind dat un reper cartezian xOy în plan şi un reper polar asociat, cu **polul** în O, originea sistemului de coordonate şi **axa polară** dată de semiaxa Ox, putem preciza poziţia unui punct $M \neq O$ atât prin coordonatele sale carteziene (x,y), cât şi prin **coordonatele sale polare** (ρ,θ), unde

1. ρ reprezintă distanţa între M şi O.



2. θ reprezintă unghiul orientat între Ox şi OM, măsurat în sens trigonometric.

În aceste condiţii, legătura între coordonatele carteziene (x, y) şi coordonatele polare (ρ, θ) este dată de formulele

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

De asemenea,

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\theta) & \dfrac{\partial}{\partial\theta}(\rho\cos\theta) \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\theta) & \dfrac{\partial}{\partial\theta}(\rho\sin\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

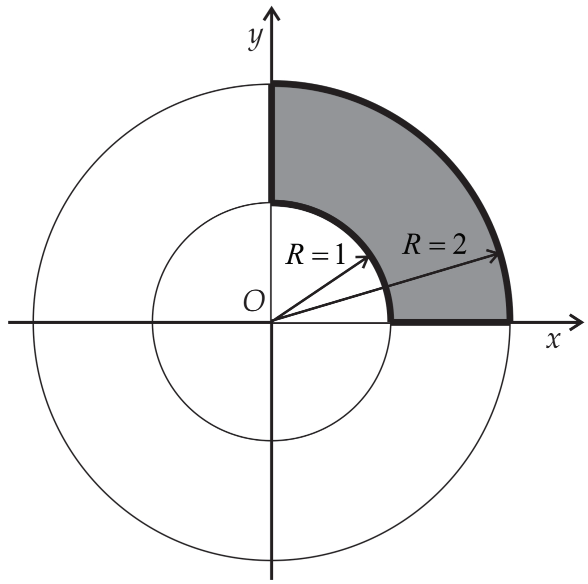
Coordonatele polare sunt utilizate în special pentru integrarea pe domenii circulare (discuri), sau porţiuni din aceste domenii, de exemplu sectoare circulare sau coroane circulare, mai ales când aceste domenii sunt centrate în origine.

În practică, atât pentru ρ cât şi pentru θ vor fi folosite intervalele corespunzătoare închise, ceea ce simplifică calculele. Închiderea intervalelor adaugă la domeniu mulţimi de arie nulă (de obicei porţiuni din cercuri, sau segmente), ceea ce nu modifică valorile integralelor.

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

unde $D = \{(x,y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$.



Soluţie. Domeniul de integrare este cel haşurat în figură. Cercul interior, de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$, are centrul în $O(0,0)$ şi rază 1, iar cercul exterior, de ecuaţie $x^2 + y^2 = 4$, are centrul în $O(0,0)$ şi rază 2. Vom folosi coordonate polare, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [1,2], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Atunci

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\rho d\rho d\theta = \iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$
$$= \left(\int_1^2 \rho e^{-\rho^2}d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\theta\right) = I_1 \cdot I_2.$$

Observăm că

$$I_1 = \int_1^2 \rho e^{-\rho^2}d\rho = \frac{1}{2}\int_1^2 2\rho e^{-\rho^2}d\rho = \frac{1}{2}\int_1^2 (\rho^2)'e^{-\rho^2}d\rho.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \rho^2$ şi notând că

$$\rho = 1 \implies u = 1, \quad \rho = 2 \implies u = 4,$$

obţinem

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^4 e^{-u}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-u}}{-1}\Bigg|_1^4 = \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}\right).$$

De asemenea,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \frac{\pi}{2},$$

iar

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy = I_1 \cdot I_2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}\right).$$

De notat că, deşi integrandul se poate separa ca un produs de funcţii care depind fiecare de câte o singură variabilă, sub forma

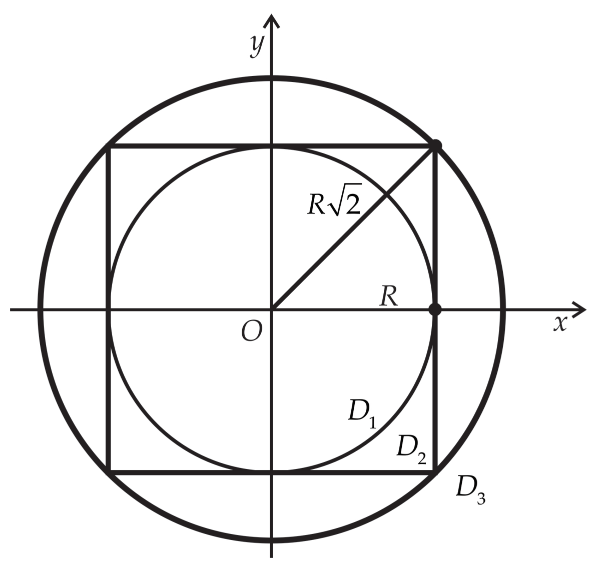
$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2},$$

integrala dublă de mai sus **nu** se poate separa ca un produs de integrale simple, întrucât domeniul nu este un dreptunghi.

Exemplu. Demonstraţi că

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \textbf{(integrala Euler-Poisson)}$$

şi deduceţi de aici că $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.



Soluţie. Fie $R > 0$ şi fie D_1, D_2, D_3 respectiv domeniile determinate de cercul cu rază R cu centrul în origine, pătratul cu latură $2R$ centrat în origine şi cercul cu rază $R\sqrt{2}$ centrat în origine, ca în figură. Atunci $D_1 \subset D_2 \subset D_3$, iar

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \le \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \le \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

deoarece integrandul este pozitiv pe aceste domenii. Pentru calculul primei integrale, vom folosi coordonate polare, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Urmează că

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)} \rho d\rho d\theta \\ &= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \left(\int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right) = I_1 \cdot I_2. \end{aligned}$$

Observăm că

$$I_1 = \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}\int_0^R 2\rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}\int_0^R (\rho^2)' e^{-\rho^2} d\rho.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \rho^2$ şi notând că

$$\rho = 0 \implies u = 0, \quad \rho = R \implies u = R^2,$$

obţinem

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{R^2} e^{-u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-u}}{-1}\Bigg|_0^{R^2} = \frac{1}{2}\left(e^0 - e^{-R^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^{R^2}}\right).$$

De asemenea

$$I_2 = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi,$$

iar

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = I_1 \cdot I_2 = \pi\left(1 - \frac{1}{e^{R^2}}\right).$$

Cu un raţionament similar şi ţinând seama că al doilea cerc are rază $R\sqrt{2}$, obţinem că

$$\iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi\left(1 - \frac{1}{e^{(R\sqrt{2})^2}}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{e^{2R^2}}\right).$$

Domeniul celei de-a doua integrale este un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate. Obţinem că

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}dy\right).$$

Schimbând notaţia pentru cea de-a doua variabilă din y în x obţinem că de fapt

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Cum $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$, este funcţie pară, obţinem că

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{R} e^{-x^2}dx,$$

de unde

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 4\left(\int_{0}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Deoarece

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

obţinem că

$$\pi\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right) \leq 4\left(\int_{0}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \pi\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right),$$

de unde

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right) \leq \left(\int_{0}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right)} \leq \int_{0}^{R} e^{-x^2}dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right)}.$$

Deoarece

$$\lim_{R\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right)} = \lim_{R\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}(1-0)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

obţinem cu ajutorul criteriului cleştelui că

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

adică

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{5.1}$$

Cu schimbarea de variabilă

$$u = x^2 \implies x = \sqrt{u} \implies dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du,$$

şi ţinând seama de faptul că

$$x = 0 \implies u = 0^2 = 0; \quad x = \infty \implies u = \infty^2 = \infty,$$

se obţine că

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-u}\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du \tag{5.2}$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}).$$

Din (5.1) şi (5.2) urmează că

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \implies \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Coordonate polare generalizate

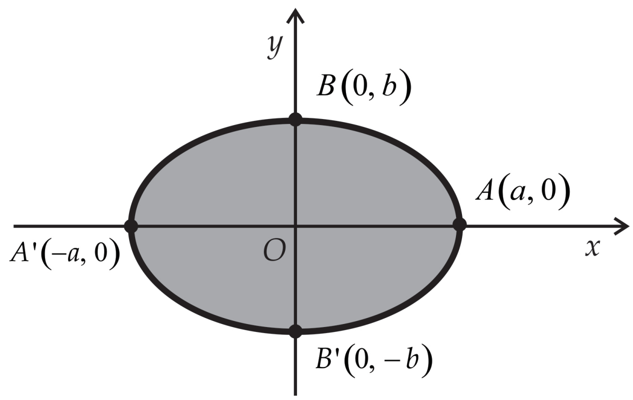
Pentru domenii mărginite de elipse centrate în origine, sau porţiuni ale acestora, se pot folosi **coordonatele polare generalizate** (**coordonatele eliptice**). Astfel, pentru un domeniu mărginit de elipsa de ecuaţie carteziană $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, vor fi folosite coordonatele (ρ, θ) legate de cele carteziene prin relaţiile

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in (0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

În acest context, θ are aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul coordonatelor polare, însă ρ nu mai reprezintă distanţa până la origine, ci o distanţă normalizată ($\rho = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$, în loc de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). Printr-un calcul asemănător celui de mai sus se poate deduce că, în acest caz,

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = ab\rho \implies dxdy = ab\rho d\rho d\theta.$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului D mărginit de elipsa (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



Soluţie. Avem că

$$\text{aria } (D) = \iint_D 1dxdy,$$

domeniul D fiind cel haşurat în figură. Vom folosi coordonatele eliptice, date de

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi], \quad dxdy = ab\rho d\rho d\theta,$$

unde a, b sunt semiaxele elipsei (E). Urmează că

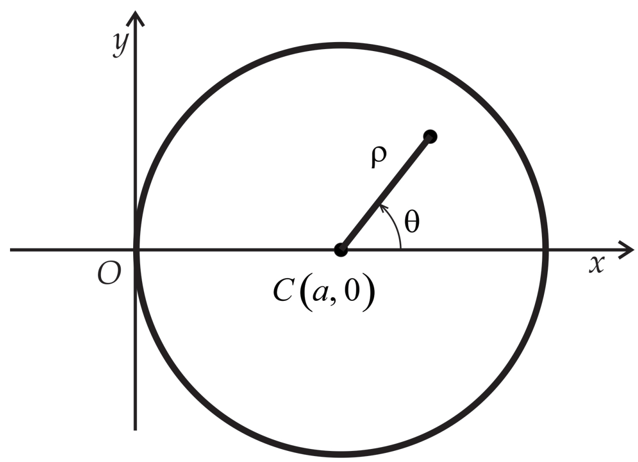
$$\begin{aligned} \text{aria}(D) &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} ab\rho d\rho d\theta = ab\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho d\rho d\theta = ab\int_0^1 \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} 1d\theta \\ &= ab\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1 \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = ab \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy, \quad \text{unde } D = \left\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 2ax\right\}, \quad a > 0.$$

Soluţie. Observăm că

$$x^2 + y^2 \leq 2ax \implies x^2 - 2ax + y^2 \leq 0 \implies (x-a)^2 + y^2 \leq a^2.$$



Domeniul D este un disc cu centrul în $C(a, 0)$ şi cu rază a. Putem folosi următoarea schimbare de variabilă, similară coordonatelor polare, dar care ia în calcul şi poziţia centrului

$$\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0, a], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

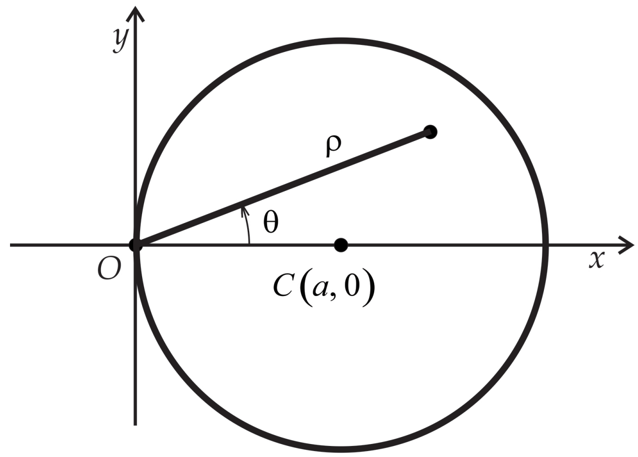
Atunci

$$dxdy = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\rho d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} d\rho d\theta = \rho d\rho d\theta.$$

Urmează că

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \left[(a+\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2\right] \rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \left[a^2 + 2a\rho\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\right] \rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \left[a^2 + 2a\rho\cos\theta + \rho^2\right] \rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} a^2\rho d\rho d\theta + \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} 2a\rho^2\cos\theta d\rho d\theta \\
&\quad + \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \rho^3 d\rho d\theta \\
&= a^2\cdot 2\pi\cdot\frac{a^2}{2} + 2a\cdot\frac{a^3}{3}\cdot 0 + 2\pi\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{3\pi a^4}{2}.
\end{aligned}$$

Alternativ, se pot utiliza coordonatele polare



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \qquad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

În fapt, conform definiţiei coordonatelor polare, ar fi trebuit ca $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (porţiunea de deasupra axei Ox)$\cup[\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ (porţiunea de dedesubtul axei Ox). Din motive de periodicitate, putem însă înlocui ultimul interval cu $[-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Rămâne să determinăm transformarea inegalităţii care defineşte domeniul D şi să determinăm de aici valorile lui ρ.

$$x^2 + y^2 \leq 2ax \implies \rho^2 \leq 2a\rho\cos\theta \implies \rho \leq 2a\cos\theta.$$

Domeniul D se transformă atunci în domeniul D_1 definit prin

$$D_1 = \left\{(\rho, \theta); 0 \leq \rho \leq 2a\cos\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right\}.$$

Urmează că

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2)dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} \left((\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2\right)\rho d\rho\right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} \rho^3 d\rho\right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^{2a\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^4\cos^4 d\theta \\
&= 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta
\end{aligned}$$

$$= a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta.$$

Atunci

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta + 2a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta + a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\theta}{2} d\theta$$
$$= \pi a^4 + 0 + \frac{\pi a^4}{2} = \frac{3\pi a^4}{2}.$$

5.4 Legătura între integrala dublă şi integrala curbilinie de specia II. Formula Riemann-Green

În cele ce urmează vom preciza legătura între integrala curbilinie de specia II pe o curbă închisă netedă pe porţiuni şi o anumită integrală dublă pe domeniul plan delimitat de acea curbă.

Teorema 5.14. *Fie D un domeniu de integrare simplu în raport atât cu Ox cât şi cu Oy şi fie C frontiera acestuia, orientată pozitiv. Fie de asemenea $P, Q : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe D pentru care derivatele parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sunt de asemenea continue pe D. Atunci*

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} (x,y)dxdy$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy.$$

De remarcat faptul că în membrul drept apariţia celei de-a doua integrale (trecerea de la integrala curbilinie la integrala dublă) se produce numai în condiţiile apariţiei în acel membru şi a operaţiei inverse, derivarea.

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi că, dacă D este simplu în raport cu Oy, iar celelalte condiţii din enunţul teoremei sunt îndeplinite, atunci

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_C P(x,y)dx.$$

Într-adevăr, deoarece D este simplu în raport cu Oy,

$$D = \left\{(x,y); \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), x \in [a,b]\right\},$$

urmează că

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy \right) dx.$$

Cum

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy = -P(x,y)\Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} = -P(x,\varphi_2(x)) + P(x,\varphi_1(x)),$$

urmează că

$$\begin{aligned}
\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy &= \int_a^b -P(x,\varphi_2(x)) + P(x,\varphi_1(x))dx \\
&= \int_a^b -P(x,\varphi_2(x))dx + \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx \\
&= -\int_{\overset{\frown}{A_2B_2}} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx \\
&= \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx.
\end{aligned}$$

Deoarece pe segmentele $\overline{A_2A_1}$ şi $\overline{B_1B_2}$ coordonata x este constantă, urmează că $dx = 0$ pe aceste segmente, deci

$$\int_{\overline{A_2A_1}} P(x,y)dx = \int_{\overline{B_1B_2}} P(x,y)dx = 0,$$

iar atunci

$$\begin{aligned}
\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy &= \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} P(x,y)dx + \int_{\overline{A_2A_1}} P(x,y)dx \\
&\quad + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx + \int_{\overline{B_1B_2}} P(x,y)dx \\
&= \int_C P(x,y)dx.
\end{aligned}$$

Similar se poate demonstra că

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \int_C Q(x,y)dy,$$

de unde concluzia. ■

În fapt, se poate demonstra că nu este neapărat necesar ca D să fie simplu în raport atât cu Ox cât şi cu Oy, formula Riemann-Green având loc şi dacă D este doar simplu conex. Demonstraţia depăşeşte însă cadrul acestui curs.

Cu ajutorul acestei observaţii, putem demonstra următoarea proprietate, care finalizează demonstraţia Teoremei 4.11 privind independenţa de drum a integralelor curbilinii în plan.

Teorema 5.15. *Fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe domeniul simplu conex D. Dacă are loc egalitatea*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{în } D,$$

atunci $\int_C Pdx + Qdy = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) *conţinută în D.*

Formula de integrare prin părţi în integrala dublă

Pentru $P \equiv 0$ şi $Q = uv$, unde $u, v : D \to \mathbb{R}$ sunt continue pe D şi derivabile parţial în raport cu variabila x, obţinem că

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(uv)dxdy = \int_C uvdy \implies \iint_D \frac{\partial u}{\partial x} vdxdy = \int_C uvdy - \iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy.$$

O formulă similară de integrare prin părţi are loc şi pentru derivate parţiale în raport cu variabila y.

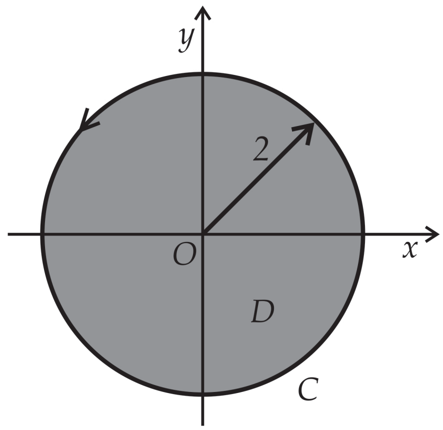
Exemplu. Cu ajutorul formulei Riemann-Green, calculaţi

$$\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy,$$

unde Γ este cercul cu centrul în origine şi de rază 2, parcurs în sens trigonometric.

Soluţie. Observăm că sunt îndeplinite ipotezele formulei Riemann-Green. Urmează că

$$\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy = \iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ y^2 - y & 2xy + x \end{vmatrix} dxdy,$$



unde D este discul determinat de Γ. Atunci

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy + x) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - y) \right) dxdy \\
&= \iint_D \big((2y + 1) - (2y - 1) \big)\, dxdy = \iint_D 2dxdy \\
&= 2 \iint_D dxdy = 2\text{aria}(D) = 2 \cdot \pi 2^2 = 8\pi.
\end{aligned}$$

5.5 Aplicaţii ale integralei duble

5.5.1 Centrul de masă al unei plăci plane

Plăci neomogene

Teorema 5.16. *Fie o placă plană* **neomogenă** *cu grosime neglijabilă, asimilabilă unui domeniu de integrare D, cu densitate variabilă $\rho(x, y)$. Atunci masa plăcii este*

$$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy$$

iar coordonatele centrului de masă al plăcii sunt

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)dxdy, \quad y_{CM} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)dxdy.$$

Să notăm că formulele corespunzătoare obţinute cu ajutorul integralei definite sunt cazuri particulare ale celor de mai sus, atât din punctul de vedere al formei plăcii (un subgrafic al unei funcţii integrabile), cât şi al densităţii sale, placa fiind asumată a fi omogenă (cu densitate constantă).

Plăci omogene

Pentru plăci omogene, cu $\rho(x,y) = \rho =$ constant, urmează că

$$m = \iint_D \rho dxdy = \rho \iint_D 1 dxdy = \rho\,\text{aria}(D),$$

şi similar

$$x_{CM} = \frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D 1dxdy} = \frac{\iint_D xdxdy}{\text{aria}(D)}, \qquad y_{CM} = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D 1dxdy} = \frac{\iint_D ydxdy}{\text{aria}(D)}.$$

5.5.2 Momentele de inerţie ale unei plăci plane

Teorema 5.17. *Fie o placă plană* **neomogenă** *cu grosime neglijabilă, asimilabilă unui domeniu de integrare D, cu densitate variabilă $\rho(x,y)$. Atunci momentele de inerţie ale plăcii în raport cu axele de coordonate sunt*

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy$$

iar momentul de inerţie al plăcii în raport cu originea este

$$I_O = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy.$$

Aplicaţii

5.1. *Determinaţi valorile următoarelor integrale pe domenii dreptunghiulare*

1) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,1]} \frac{y}{1+x^2}dxdy$; 2) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1-y^2)}}dxdy$;

3) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \frac{\sin x}{\cos^2 y}dxdy$; 4) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[1,2]} x^2y^3e^{x^3+y^4}dxdy$;

5) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{x+\sin y}\cos y dxdy$; 6) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} [\sin(x+y)+\sin(x-y)]dxdy$.

5.2. *Determinaţi valorile următoarelor integrale pe domenii dreptunghiulare*

1) $\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{1+xy}dxdy$; *2)* $\iint_{[0,1]\times[1,2]} \ln(x+y)dxdy$.

5.3. *Determinaţi aria domeniului plan mărginit de dreapta* $(D): y = x$ *şi de parabola* $(P): y^2 = x$.

5.4. *Determinaţi aria domeniului plan mărginit de parabolele* $(P_1): y = x^2$ *şi* $(P_2): y^2 = x$.

5.5. *Determinaţi aria domeniului D,*

$$D = \left\{(x,y); 0 \le x \le 1, x \le y \le 2 - x^2\right\}.$$

5.6. *Determinaţi*

$$\iint_D x dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de parabola $(P): y = x^2$ *şi dreapta* $(D): y = x + 6$.

5.7. *Determinaţi*

$$\iint_D (x^2 + y)dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de parabolele $(P_1): y = x^2$ *şi* $(P_2): x^2 = y$.

5.8. *Determinaţi*

$$\iint_D \frac{x^3}{y^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y); \frac{1}{x} \le y \le x, 1 \le x \le 2\right\}.$$

5.9. *Determinaţi*

$$\iint_D y dxdy, \qquad D = \left\{(x,y); x^2 + y^2 \le 5, y \ge 2x^2\right\}.$$

5.10. *Determinaţi*

$$\iint_D (2x - y)dxdy, \qquad D = \{(x,y); 0 \le y \le 2x, 0 \le x \le 2\}.$$

1. *folosind faptul că D este simplu în raport cu Oy;*

2. *folosind faptul că D este simplu în raport cu Ox.*

5.11. *Determinaţi*

$$\iint_D \frac{y}{1+x^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y), x \geq 0, y \geq x^2, y \leq 1\right\},$$

folosind eventual faptul că D este simplu în raport cu Oy.

5.12. *Determinaţi*

$$\iint_D (6x-5-x^2-y^2)dxdy, \qquad D = \left\{(x,y); x^2+y^2-6x+5 \leq 0\right\},$$

folosind eventual (după o argumentaţie a necesităţii) schimbarea de variabilă

$$x = 3+\rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

5.13. *Determinaţi*

$$\iint_D xydxdy, \qquad D = \left\{(x,y); x^2+4y^2-4x-8y+4 \leq 0\right\},$$

folosind eventual (după o argumentaţie a necesităţii) schimbarea de variabilă

$$x = 2+2\rho\cos\theta, \quad y = 1+\rho\sin\theta.$$

5.14. *Cu ajutorul coordonatelor polare, determinaţi*

1. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad D = \left\{(x,y); 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\right\}.$
2. $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy, \quad D = \left\{(x,y); x^2+y^2 \leq 9;\ x \leq 0, y \geq 0\right\}.$
3. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy, \quad D = \left\{(x,y); 1 \leq x^2+y^2 \leq 4;\ x \geq 0, y \leq 0\right\}.$

5.15. *Determinaţi*

$$\iint_D x^2ydxdy, \qquad D = \left\{(x,y), x^2+y^2 \leq 2x, x \leq 1, y \geq 0\right\},$$

1. *folosind faptul că D este simplu în raport cu Oy,*
2. *folosind schimbarea de variabilă*

$$x = 1+\rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

5.16. *Cu ajutorul formulei Riemann-Green, determinaţi*

1. $\displaystyle\int_C (xy-y)dx+(xy+x)dy,$

2. $\displaystyle\int_C x^2dx+y^2dy,$

3. $\displaystyle\int_C e^{x^2+y^2}(-ydx+xdy),$

unde (C) *este cercul unitate (cercul cu centrul în origine şi rază egală cu* 1*), orientat pozitiv.*

5.17. *Cu ajutorul formulei Riemann-Green, determinaţi*

1. $\displaystyle\int_C (y-\sin x)dx+\cos x dy$, *unde* $D=\left\{(x,y); 0\le y\le x;\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$, *iar* (C) *este frontiera lui* D*, orientată pozitiv.*

2. $\displaystyle\int_C (x^3-2xy)dx+(x^3y+4y^3)dy$, *unde* $D=\left\{(x,y); y^2\le 2x, x\in[0,2]\right\}$, *iar* (C) *este frontiera lui* D*, orientată pozitiv.*

3. $\displaystyle\int_C e^x(1+\cos x)dx+e^y(1+\sin x)dx$, *unde* $D=\{(x,y); 0\le y\le \sin x, x\in[0,\pi]\}$, *iar* (C) *este frontiera lui* D*, orientată pozitiv.*

5.18. *Cu ajutorul coordonatelor polare generalizate, determinaţi*

$$\iint_D \sqrt{5-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy, \quad D=\left\{(x,y); \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}, \quad a,b>0.$$

5.19. *Determinaţi*

$$\iint_D \sqrt{x-y}dxdy,$$

unde D *este domeniul mărginit de triunghiul cu vârfurile* $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(1,1)$*, folosind eventual faptul că* D *este simplu în raport cu* Ox*.*

5.20. *Cu ajutorul unei schimbări potrivite de variabile, determinaţi*

$$\iint_D (x+y)^2(x-y)dxdy,$$

D *fiind pătratul mărginit de dreptele* $(D_1): x+y=-2$, $(D_2): x+y=2$, $(D_3): x-y=-1$, $(D_4): x-y=3$.

5.21. *Cu ajutorul unor schimbări potrivite de variabile, de tipul*

$$x = \rho^m \cos^n \theta, \quad y = \rho^m \sin^n \theta,$$

(găsind valorile potrivite ale lui m, n pentru fiecare caz), determinaţi

1. $\iint_D y dx dy$, $D = \{(x, y), \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
2. $\iint_D x dx dy$, $D = \{(x, y), \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Capitolul 6

INTEGRALA TRIPLĂ

Pentru introducerea noţiunii de integrală triplă a unei funcţii definite pe un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^3$, vom revizui construcţia utilizată pentru definiţia integralei duble, trecând de la domenii plane (**bi**dimensionale) la domenii spaţiale (**tri**dimensionale). In acest capitol, prin **domeniu de integrare** vom înţelege un domeniu închis şi mărginit (de o suprafaţă netedă pe porţiuni) din $\mathbb{R}^3$, care are volum, din nou fără a intra în detalii asupra noţiunii de volum (practic, asupra „măsurării" volumului). Trecerea de la integrala dublă la cea triplă se va face în principal înlocuind, în diverse noţiuni şi procedee, noţiunea de arie cu cea de volum.

Împărţirea domeniului de integrare în subdomenii

Diviziuni (partiţii) ale unui domeniu de integrare

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. Vom spune că o mulţime ordonată de domenii de integrare $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ reprezintă o **diviziune** (sau **partiţie**) a lui V dacă

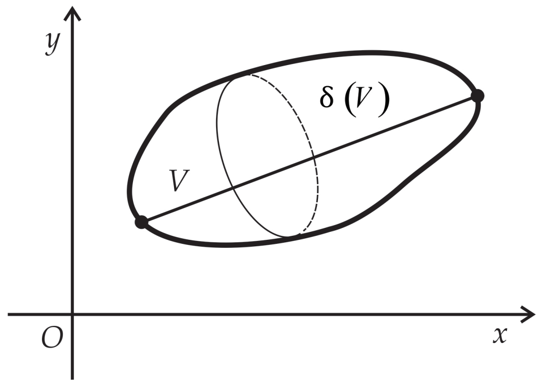
1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = V$.

2. $\overset{\circ}{V_i} \bigcap \overset{\circ}{V_j} = \emptyset$, pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Altfel spus, V se poate scrie ca reuniunea tuturor subdomeniilor V_1, V_2, $\ldots$, V_n, iar aceste subdomenii pot avea comune, două câte două, cel mult suprafeţe de pe frontieră, întrucât au două câte două interioarele disjuncte.

Notaţie

Mulţimea diviziunilor unui domeniu de integrare V se notează $\mathcal{D}_V$.



Diametrul unui domeniu de integrare

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. Numim **diametru** al lui V, notat $\delta(V)$, distanţa maximă dintre două puncte ale lui V.

Normă a unei partiţii

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, vom numi **normă** a diviziunii Δ, notată $\|\Delta\|$, valoarea maximă a **diametrelor** $\delta(V_1)$, $\delta(V_2)$, $\ldots$, $\delta(V_n)$, adică

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(V_n).$$

Sisteme de puncte intermediare asociate

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, vom numi **sistem de puncte intermediare asociat diviziunii** Δ o mulţime ordonată de puncte

$$C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\},$$

astfel încât $M_i \in V_i$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare subdomeniu se află câte un punct intermediar).

Sume Riemann

Fiind date un domeniu de integrare V, o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$, o diviziune $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ a domeniului de integrare V şi $C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, $M_i = M_i(\alpha_i, \beta_i.\gamma_i)$, $1 \leq i \leq n$, vom numi **sumă Riemann asociată diviziunii** Δ **şi sistemului de puncte intermediare** C suma

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\,\mathrm{vol}(D_i) \\ &= f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\mathrm{vol}(D_1) + f(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\,\mathrm{vol}(D_2) + \ldots\end{aligned}$$

$$+ f(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)\,\mathrm{vol}(D_n)$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţeşte cu volumul subdomeniului din care punctul intermediar face parte, adunându-se rezultatele).

Consideraţii asupra interpretării geometrice a noţiunii de sumă Riemann

Interpretarea geometrică a noţiunii de sumă Riemann nu mai este la fel de intuitivă ca şi cea a noţiunilor similare pentru integrala definită sau cea dublă, în principal datorită faptului că în situaţiile anterioare interpretarea geometrică se făcea cu ajutorul unei noţiuni „cu o dimensiune în plus" faţă de mulţimea pe care urma a se defini integrala. În speţă, o sumă Riemann a unei funcţii definite pe un interval putea fi interpretată cu ajutorul unei arii, iar o sumă Riemann a unei funcţii definite pe un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$ putea fi interpretată cu ajutorul unui volum. Acum, o sumă Riemann a unei funcţii definite pe un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^3$ ar trebui interpretată cu ajutorul unor noţiuni referitoare la spaţiul $\mathbb{R}^4$, adică nu la un spaţiu fizic, ci la un spaţiu abstract.

Funcţii integrabile Riemann

Definiţie. Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este **integrabilă Riemann** pe V (pe scurt, f este **integrabilă** pe V) dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}_V$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare C asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, C) - I| < \varepsilon.$$

Integrala triplă

Numărul I de mai sus se numeşte **integrala triplă** a funcţiei f pe domeniul spaţial V şi se notează

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Să observăm şi că I, dacă există, este unic determinat.

Mulţimea V se numeşte **domeniu de integrare**, funcţia f se numeşte **integrand**, iar variabilele x, y, z se numesc **variabile de integrare**. Expresia $dxdydz$ se numeşte **element de volum**, notat uneori şi cu dV.

Definiţie alternativă

Are loc următoarea echivalenţă, cea de-a doua afirmaţie putând fi utilizată de asemenea ca definiţie a integrabilităţii Riemann.

Teorema 6.1. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *f este integrabilă pe V.*

2. *Oricare ar fi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ ale lui V cu $\|\Delta_n\| \to 0$, împreună cu un şir de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este convergent.*

Din nou, se poate demonstra că limita unui astfel de şir de sume Riemann nu depinde nici de alegerea şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$, nici de alegerea şirului de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$. Valoarea (comună) a limitelor reprezintă $\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$.

Domeniu de integrare cu volum nul. Integrala funcţiei nule

Cu ajutorul definiţiei, ţinând cont de faptul că toate sumele Riemann asociate sunt nule, putem obţine următoarele proprietăţi.

1. Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare cu volum nul şi fie $f : V \to \mathbb{R}$ integrabilă. Atunci
$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = 0.$$

2. Fie V un domeniu de integrare. Atunci
$$\iiint_V 0dxdydz = 0.$$

Interpretare geometrică: volum

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. Conform definiţiei, se obţine că
$$\iiint_V 1dxdydz = \mathrm{vol}(V).$$

La fel ca şi în cazul integralei definite şi al celei duble, integrându-l pe 1 pe o mulţime obţinem „măsura" acelei mulţimi, în acest caz volumul.

Legătura între integrabilitate şi alte proprietăţi ale funcţiilor

Din nou, funcţiile continue pe un domeniu spaţial $V \subset \mathbb{R}^3$ sunt integrabile. De asemenea, funcţiile integrabile pe un astfel de domeniu sunt mărginite.

Teorema 6.2. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f continuă pe V. Atunci f este integrabilă pe V.*

Teorema 6.3. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Atunci f este mărginită pe V.*

6.1 Operaţii cu funcţii integrabile

Fiind obţinută printr-un acelaşi tip de procedeu, integrala triplă păstrează toate proprietăţile integralei duble, atât pe cele în raport cu intervalul cât şi pe cele în raport cu funcţia.

Teorema 6.4. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, $f, g : V \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe V, şi $c \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. **Proprietatea de aditivitate**

   Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ sunt integrabile pe V, iar

$$\iiint_V (f(x,y,z) + g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

   *(***integrala sumei este egală cu suma integralelor***), respectiv*

$$\iiint_V (f(x,y,z) - g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz - \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

   *(***integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor***).*

2. **Proprietatea de omogenitate**

   Funcţia cf este integrabilă pe V, iar

$$\iiint_V cf(x,y,z)dxdydz = c \iiint_V f(x,y,z)dxdydz,$$

(**o constantă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei**).

Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 6.5. *Fie V un domeniu de integrare, $f, g : V \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe V şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe V şi*

$$\iiint_V (c_1 f(x,y,z) + c_2 g(x,y,z))dxdydz = c_1 \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + c_2 \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

6.2 Proprietăţi ale integralei triple

6.2.1 Proprietăţi în raport cu domeniul

Restrângerea domeniului de integrare

Teorema 6.6. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Atunci f este integrabilă pe orice subdomeniu $V_1 \subset V$.*

Extinderea domeniului de integrare. Aditivitatea în raport cu domeniul

Teorema 6.7. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$. Dacă domeniile de integrare $V_1, V_2, \ldots, V_n$ formează o diviziune a lui V, iar f este integrabilă pe $V_1, V_2, \ldots, V_n$, atunci f este integrabilă pe întreg V, iar*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz + \ldots + \iiint_{V_n} f(x,y,z)dxdydz$$

6.2.2 Proprietăţi în raport cu funcţia

Păstrarea inegalităţilor între funcţii

Vom observa în cele ce urmează că şi integrala triplă păstrează semnul funcţiei de integrat şi inegalităţile nestricte între funcţii. În plus, inegalitatea strictă într-un punct comun de continuitate al funcţiilor de integrat atrage inegalitatea strictă pentru integrale.

Teorema 6.8. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f, g : V \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe V.*

1. *Dacă $f(x,y,z) \geq 0$, pentru orice $(x,y,z) \in V$, atunci*
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$
2. *Dacă $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, pentru orice $(x,y,z) \in V$, atunci*
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$
3. *Dacă $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, pentru orice $(x,y,z) \in V$, şi există $(x_0, y_0, z_0) \in V$ astfel ca*
$$f(x_0,y_0,z_0) > g(x_0,y_0,z_0), \text{ iar } f, g \text{ sunt continue în } (x_0,y_0,z_0),$$
atunci
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz > \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

Corolar 6.8.1. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Dacă*
$$m \leq f(x,y,z) \leq M, \quad \text{pentru orice } (x,y,z) \in V,$$
atunci
$$m \cdot \mathrm{vol}(V) \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq M \cdot \mathrm{vol}(V).$$

Corolar 6.8.2. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Atunci $|f|$ este integrabilă pe V, iar*
$$\left| \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|dxdydz.$$

Teorema de medie

Teorema de medie pentru integrala triplă are o interpretare similară celei obţinute pentru integrala dublă, aria domeniului fiind înlocuită însă de volumul acestuia.

Teorema 6.9. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f continuă pe V. Atunci există $M(c_1, c_2, c_3) \in V$ astfel încât*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = f(c_1,c_2,c_3)\,\mathrm{vol}(V).$$

6.3 Calculul integralelor triple

Reamintim că, pentru calculul integralelor duble, una dintre posibilele metode de lucru era de a reduce calculul integralei duble la calculul succesiv a două integrale definite, utilizând pe rând cele două variabile ca variabile de integrare. În acest scop, se realizau o **proiecţie** şi o **secţiune**, domeniul numindu-se simplu în raport cu axa paralelă cu domeniul de secţiune în anumite condiţii cu suport geometric.

Ideea de a determina valoarea a unei integrale de ordin superior prin calculul succesiv al unor integrale de ordin mai mic se păstrează şi pentru integrala triplă. Acum, proiecţia se va realiza pe unul dintre planele de coordonate (şi deci integrala „de proiecţie" va fi o integrală dublă), iar secţiunea se va realiza paralel cu una dintre axe (şi deci integrala „de secţiune" va fi o integrală simplă).

6.3.1 Domenii simple în raport cu axa Oz

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. V se numeşte **simplu în raport cu** Oz dacă

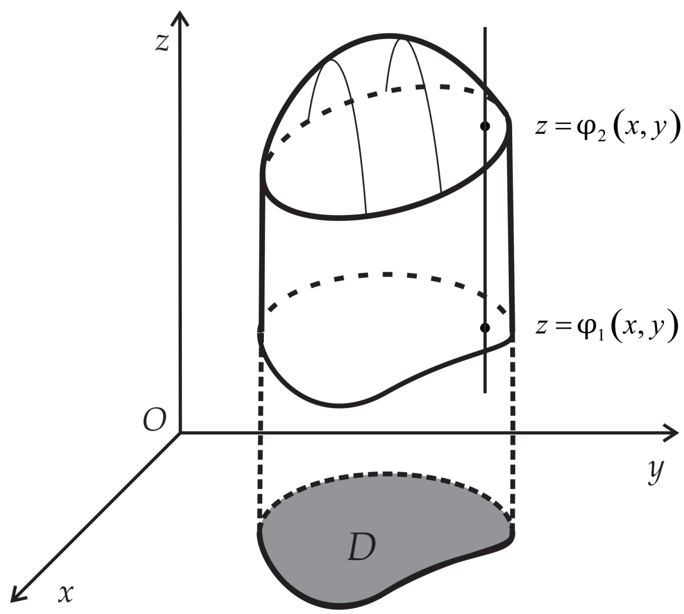
1. Proiecţia lui V pe planul xOy este un domeniu de integrare D în $\mathbb{R}^2$.
2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ continue astfel ca V se poate scrie sub forma

$$V = \{(x,y,z); \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y), (x,y) \in D\}.$$

Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă la axa Oz prin $M(x,y)$ din proiecţia lui V pe planul xOy taie frontiera domeniului V în cel mult două puncte, $\varphi_1(x,y)$ fiind coordonata z (cota) punctului de intrare, iar $\varphi_2(x,y)$ fiind cota punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide.

Analog se definesc noţiunile de **domeniu simplu în raport cu** Ox şi de **domeniu simplu în raport cu** Oy.

Teorema 6.10. *Fie V un domeniu simplu în raport cu axa Oz şi fie $f : V \to \mathbb{R}$*



integrabilă pe V. Dacă $I : D \to \mathbb{R}$,

$$I(x,y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad \text{pentru } (x,y) \in D,$$

este bine definită şi integrabilă pe D, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

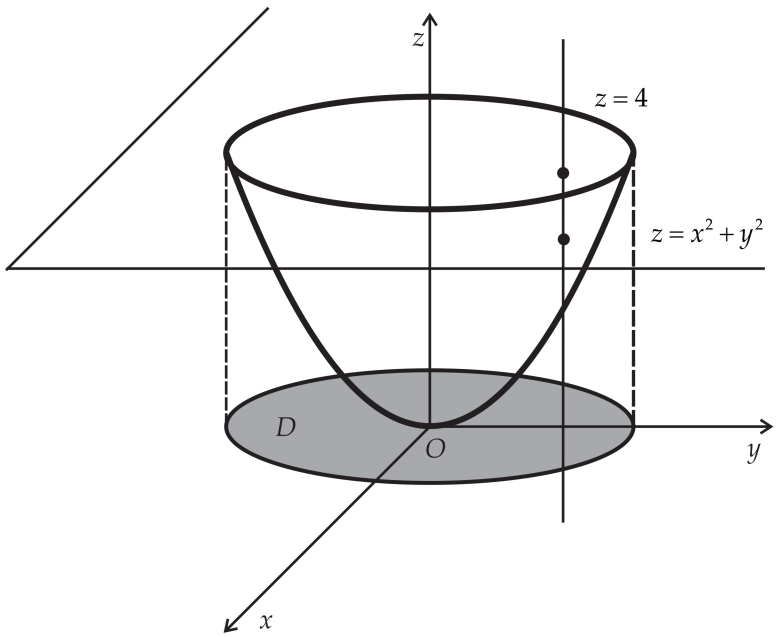
La fel ca şi în cazul integralei duble, ordinea de scriere a integralelor nu este ordinea de calcul. Astfel, mai întâi se calculează integrala interioară (cea în raport cu z), iar abia apoi cea exterioară (cea în raport cu perechea de variabile (x,y)). În particular, ipotezele asupra lui I sunt satisfăcute dacă f este funcţie continuă.

Corolar 6.10.1. *Fie V un domeniu simplu în raport cu axa Oz şi fie $f : V \to \mathbb{R}$ continuă pe V. Atunci*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Formule de calcul similare celor enunţate mai sus au loc şi pentru domenii simple în raport cu Ox sau Oy. În situaţia în care domeniul de integrare este simplu în raport cu mai multe axe, alegerea uneia dintre formule se poate face pe considerente geometrice asupra formei domeniului sau pe baza formei particulare a funcţiei.

Exemplu. Determinaţi volumul corpului V determinat de paraboloidul de rotaţie $z = x^2 + y^2$ şi planul $z = 4$.



Soluţie. Avem că
$$\text{vol}(V) = \iiint_V 1dxdydz.$$
Domeniul este simplu în raport cu toate cele trei axe. Deoarece V este un corp de rotaţie în jurul lui Oz, iar proiecţia lui V pe xOy este un disc (convenabil descris cu ajutorul coordonatelor polare), vom folosi faptul că V este simplu în raport cu Oz.

Discul D de proiecţie are raza egală cu cea a cercului de intersecţie între paraboloid şi planul $z = 4$, paralel cu planul xOy. Determinăm acum raza cercului de intersecţie. Urmează că
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 4 = 2^2,$$
deci raza cercului de intersecţie este $R = 2$, iar două dintre coordonatele centrului C sunt $x_C = 0$ şi $y_C = 0$. Cea de-a treia coordonată este $z_C = 4$, întrucât cercul de

intersecţie este conţinut în planul $z = 4$. Discul de proiecţie D are deci rază 2 şi centru O (proiecţia lui C).

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oz printr-un punct oarecare (x, y) din domeniul de proiecţie. Observăm că punctul de „intrare" în V al paralelei este situat pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$, în timp ce punctul de „ieşire" este situat în planul $z = 4$. Urmează că

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^4 1dz\right) dxdy.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, obţinând că

$$\int_{x^2+y^2}^4 1dz = z\Big|_{x^2+y^2}^4 = 4 - (x^2 + y^2).$$

Atunci

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_D (4 - (x^2 + y^2))dxdy.$$

Întrucât D este un disc centrat în origine, pentru calculul integralei duble vom folosi coordonatele polare, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0, 2], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Urmează că

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(V) &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4 - (\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta))\rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4 - \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta))\rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4 - \rho^2)\rho d\rho d\theta \\
&= \left(\int_0^2 (4 - \rho^2)\rho d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1d\theta\right) = I_1 \cdot I_2.
\end{aligned}$$

Deoarece

$$I_1 = \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho d\rho = \int_0^2 (4\rho - \rho^3)d\rho = \int_0^2 4\rho d\rho - \int_0^2 \rho^3 d\rho$$

$$= 4\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 = 4 \cdot 2 - \frac{16}{4} = 4,$$

iar

$$I_2 = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

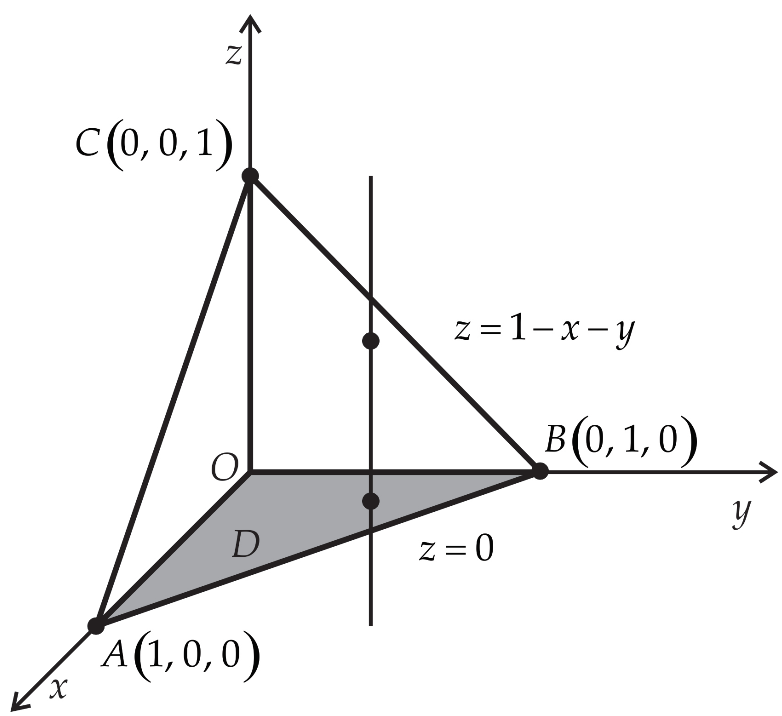
urmează că

$$\text{vol}(V) = 4 \cdot 2\pi = 8\pi.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V (x+y+z)dxdydz,$$

unde V este domeniul mărginit de planele $x=0, y=0, z=0$ şi $x+y+z=1$.



Soluţie. Domeniul V, reprezentat în figură, este tetraedrul $OABC$, cu vârfuri $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. El este simplu în raport cu toate axele de coordonate. Pentru calculul integralei, vom folosi faptul că V este simplu în raport cu Oz.

Domeniul de proiecţie este triunghiul OAB, împreună cu interiorul acestuia, domeniu notat în continuare cu D. Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oz prin $M(x,y)$ oarecare din domeniul de proiecţie. Deoarece punctul de intrare al paralelei se află în planul xOy, obţinem că $z_{\text{intrare}} = 0$. Deoarece punctul de ieşire al paralelei se află în planul $x+y+z=1$, obţinem că $z_{\text{ieşire}} = 1-x-y$. Avem atunci

$$\iiint_V (x+y+z)dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz \right) dxdy.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară. Urmează că

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz = \int_0^{1-x-y} xdz + \int_0^{1-x-y} ydz + \int_0^{1-x-y} zdz \\
&= x\int_0^{1-x-y} 1dz + y\int_0^{1-x-y} 1dz + \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x-y} \\
&= xz\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} + yz\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} + \frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} \\
&= x(1-x-y) + y(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1-x-y)(1+x+y) = \frac{1}{2}(1-(x+y)^2).
\end{aligned}$$

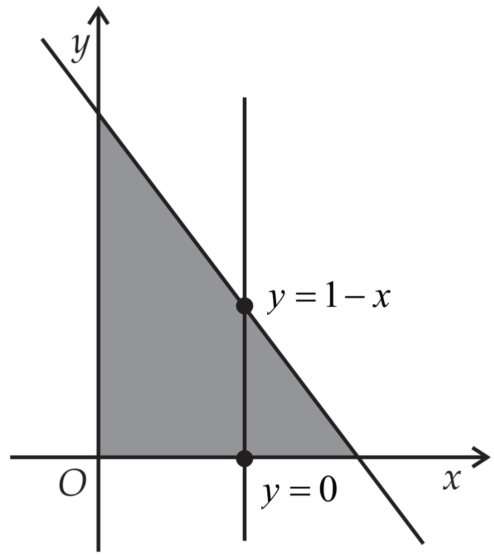
De aici,

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x+y+z)dxdydz &= \iint_D \frac{1}{2}(1-(x+y)^2)dxdy \\
&= \frac{1}{2}\left[\iint_D 1dxdy - \iint_D (x+y)^2 dxdy\right] = \frac{1}{2}\left[\text{aria}(D) - \iint_D (x+y)^2 dxdy\right].
\end{aligned}$$

Cum D este un triunghi dreptunghic isoscel cu catete de lungimi egale cu 1, avem că $\text{aria}(D) = \frac{1}{2}$.

Rămâne deci să calculăm $\iint_D (x+y)^2 dxdy$. În acest scop, să observăm că domeniul de integrare D este simplu în raport cu ambele axe. Pentru calculul integralei duble, vom folosi faptul că el este simplu în raport cu Oy.

Domeniul de proiecţie (pe Ox) este intervalul $[0,1]$, deoarece abscisa punctului A este 1, iar cea a punctului O este 0. Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă printr-un punct oarecare din domeniul de proiecţie la Oy. Deoarece punctul de intrare al paralelei se află pe axa Ox, urmează că



$y_{\text{intrare}} = 0$. Punctul de ieşire al paralelei se află pe dreapta AB, a cărei ecuaţie este $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$, sau $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1}$, adică $x + y - 1 = 0$. Urmează că $y_{\text{ieşire}} = 1 - x$. De aici,

$$\iint_D (x+y)^2 dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y)^2 dy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară. Avem că

$$\int_0^{1-x} (x+y)^2 dy = \frac{(x+y)^3}{3} \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} = \frac{1^3}{3} - \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}(1 - x^3).$$

Atunci

$$\iint_D (x+y)^2 dxdy = \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x^3)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^3)dx = \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

De aici,

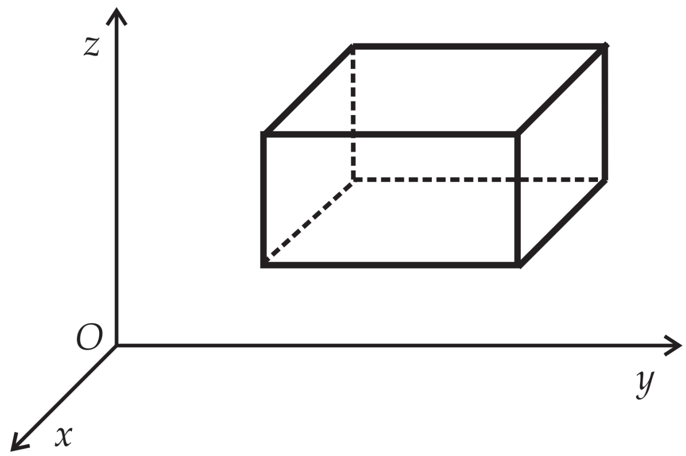
$$\iiint_V (x+y+z)dxdydz = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{8}.$$

6.3.2 Domenii paralelipipedice

La fel ca şi în cazul integralelor duble, formulele de calcul pentru integralele triple se simplifică în mod considerabil atunci când domeniul de integrare este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, nemaifiind necesară determinarea domeniului de secţiune. Un astfel de paralelipiped poate fi scris ca un produs cartezian de intervale sub forma

$$V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3],$$

unde $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, reprezintă intervalele de valori pentru abscisele, respectiv ordonatele şi cotele punctelor din V. În această situaţie, V este simplu în raport cu toate cele 3 axe de coordonate.



Corolar 6.10.2. *Fie $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$, f continuă. Atunci*

$$\begin{aligned}
\iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)dxdydz &= \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz \right) dxdy \\
&= \iint_{[a_1,b_1]\times[a_3,b_3]} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)dy \right) dxdz \\
&= \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)dx \right) dydz.
\end{aligned}$$

6.3.3 Domenii paralelipipedice şi funcţii separabile ca produse

Dacă domeniul de integrare V este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, iar integrandul f se poate scrie ca produs între o funcţie care depinde doar de variabila x, o funcţie care depinde doar de variabila y şi o funcţie care depinde doar de variabila z, atunci integrala triplă $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ se poate scrie ca un produs de integrale simple.

Teorema 6.11. *Fie* $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z),$$

unde f_1, f_2, f_3 *sunt funcţii continue. Atunci*

$$\begin{aligned}
&\iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z)dxdydz \\
&= \iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)dxdydz \\
&= \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx\right) \cdot \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(y)dy\right) \cdot \left(\int_{a_3}^{b_3} f_3(y)dy\right).
\end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} \sin x \cos y dxdydz.$$

Soluţie. Domeniul de integrare este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, iar integrandul se separă ca un produs între o funcţie doar de variabila x, o funcţie doar de variabila y şi o funcţie constantă, sub forma

$$\sin x \cos y = \sin x \cdot \cos y \cdot 1.$$

Urmează că

$$\begin{aligned}
\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} \sin x \cos y dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \cdot \int_0^{\pi} \cos y dy \cdot \int_0^1 1dz \\
&= (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin y\Big|_0^{\pi} \cdot z\Big|_0^1 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

6.3.4 Formula de schimbare de variabilă în integrala triplă

În unele situaţii, fie funcţia de integrat, fie forma geometrică a domeniului se simplifică după schimbări de variabile.

Schimbări de variabilă (transformări regulate)

Fie V_1 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_1 şi V_2 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_2. Spunem că V_2 se transformă în V_1 prin **schimbarea de variabilă** (sau **transformarea regulată**)

$$T : \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w)\ , \ (u,v,w) \in V_2, \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

dacă

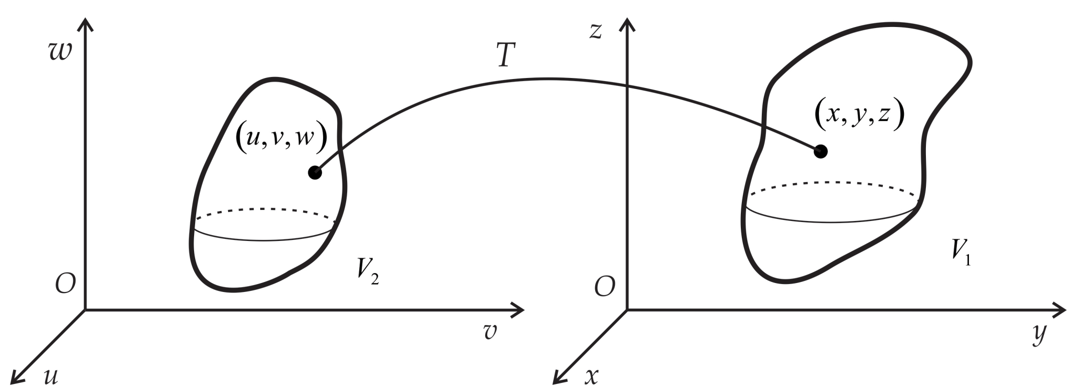
1. T este bijectivă ca funcţie de la V_2 la V_1.

2. Funcţiile $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ şi $z = y(u,v,w)$ au derivatele parţiale de ordinul 1 şi derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea continue.

3. Determinantul funcţional (numit **determinant jacobian**)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

   este nenul pentru $(u,v,w) \in V_2$.



Formula de schimbare de variabilă

Teorema 6.12. *Fie V_1 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_1 şi V_2 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_2, astfel încât V_2 se transformă în V_1 prin* **schimbarea de variabilă**

(sau **transformarea regulată***)*

$$T:\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases},\ (u,v,w) \in V_2.$$

Fie de asemenea $f : V_1 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci

$$\begin{aligned} &\iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz \\ &= \iiint_{V_2} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| dudvdw. \end{aligned}$$

În prima parte a membrului drept, **variabilele vechi** x, y şi z se înlocuiesc în funcţie de **variabilele noi** u, v şi w. Cea de-a doua parte a membrului drept reprezintă **formula de transformare a elementului de volum**, care poate fi scrisă sub forma

$$dxdydz = \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| dudvdw.$$

6.3.5 Coordonate sferice şi sferice generalizate

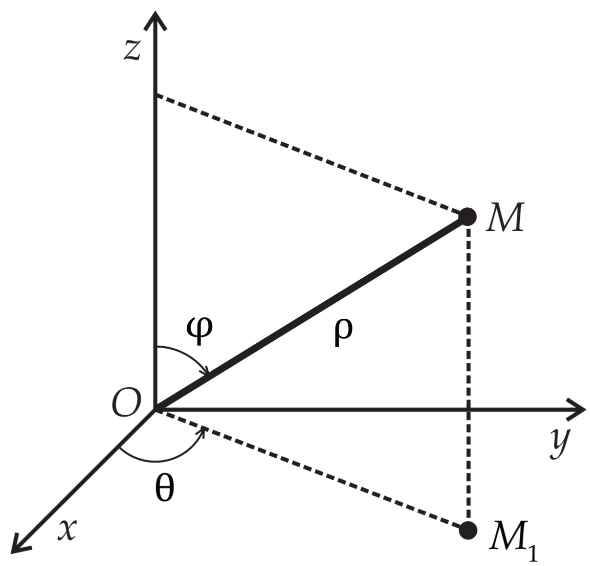
Coordonate sferice

Fiind dat un reper cartezian $Oxyz$ în spaţiu, putem preciza poziţia unui punct $M \notin Oz$ atât prin coordonatele sale carteziene (x,y,z), cât şi prin **coordonatele sale sferice** (ρ, φ, θ), unde

1. ρ reprezintă distanţa între M şi O;
2. φ reprezintă unghiul neorientat între raza vectoare OM şi semiaxa Oz;
3. θ reprezintă unghiul orientat între Ox şi OM_1, M_1 fiind proiecţia lui M pe planul xOy, măsurat în sens trigonometric.

În aceste condiţii, legătura între coordonatele carteziene (x,y,z) şi coordonatele sferice (ρ, φ, θ) este dată de formulele

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases},\quad \rho > 0,\quad \varphi \in [0,\pi],\quad \theta \in [0, 2\pi).$$



De asemenea,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin\varphi \cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \sin\varphi \cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\varphi \cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin\varphi \sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \sin\varphi \sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\varphi \sin\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \cos\varphi) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^3\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin^3\varphi \cos^2\theta.$$

Grupând termenii doi câte doi, obţinem

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2 \sin^3\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^3\varphi = \rho^2 \sin\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$= \rho^2 \sin\varphi.$$

Formula de transformare a elementului de volum

De aici, obţinem următoarea formulă de transformare a elementului de volum pentru trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice

$$dxdydz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

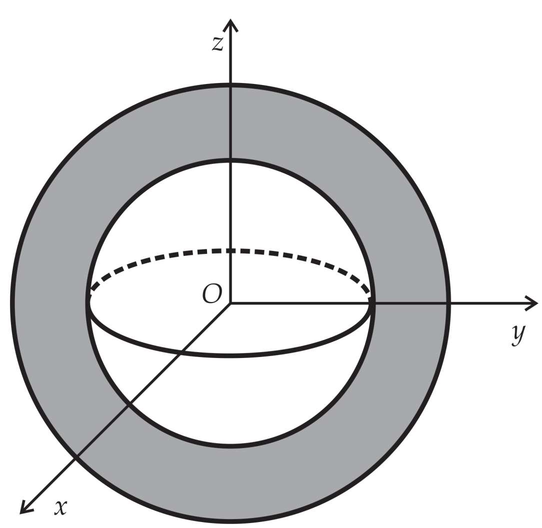
Utilitatea coordonatelor sferice

Coordonatele sferice sunt utilizate în special pentru integrarea pe domenii sferice (bile sferice), sau porţiuni din aceste domenii, mai ales când aceste domenii sunt centrate în origine. Din nou, în practică, atât pentru ρ cât şi pentru θ vor fi folosite intervalele corespunzătoare închise, întrucât închiderea intervalelor adaugă la domeniu mulţimi de volum nul, ceea ce nu modifică valorile integralelor.

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

unde V este domeniul spaţial mărginit de sferele $(S1): \; x^2+y^2+z^2 = 1$ şi $(S2): \; x^2+y^2+z^2 = 4$.



Soluţie. Sfera $(S1)$ are centrul în origine şi rază $R_1 = 1$, în vreme ce sfera $(S2)$ are centrul tot în origine şi rază $R_2 = 2$. Vom folosi coordonate sferice, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [1, 2], \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

$$dxdydz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

valorile maximă şi respectiv minimă ale lui ρ fiind deduse din faptul că, întrucât domeniul V este mărginit de cele două sfere, distanţa dintre un punct al său şi origine este minimă şi egală cu 1 când punctul se află pe $(S1)$, respectiv maximă şi egală cu 2 când punctul se află pe $(S2)$. Atunci

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\varphi} \\ &= \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2 \cos^2\varphi} = \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi} \\ &= \sqrt{\rho^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \sqrt{\rho^2} = \rho. \end{aligned}$$

Altfel, se putea observa direct că $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ reprezintă distanţa între punctul curent $M(x, y, z)$ şi originea $O(0, 0, 0)$, prin definiţie egală cu ρ. Urmează că

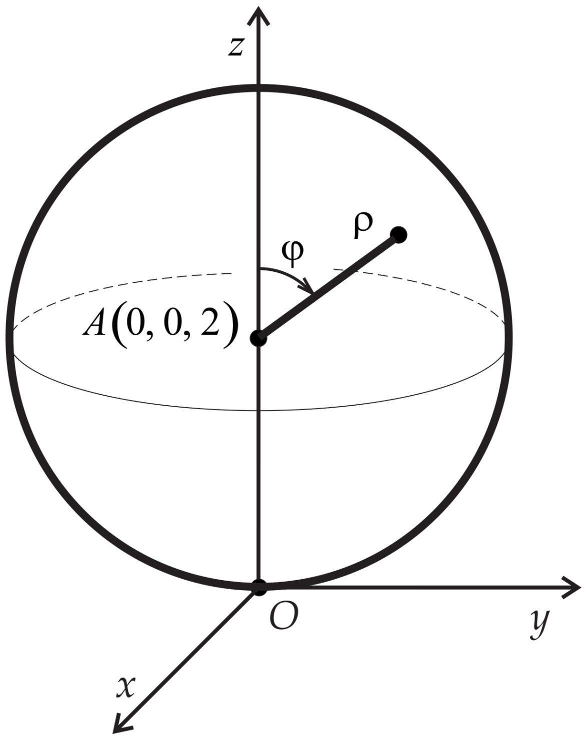
$$\begin{aligned} &\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz \\ &= \iiint_{[1,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\rho} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \iiint_{[1,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_1^2 \rho d\rho \cdot \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^2 \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz,$$

unde V este domeniul spaţial definit prin

$$V = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z\right\}.$$



Soluţie. Să observăm că

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 2^2,$$

ceea ce înseamnă că V este o bilă sferică cu centrul în $A(0,0,2)$ şi de rază 2. Putem folosi următoarea schimbare de variabilă, similară coordonatelor sferice, dar care ia în calcul şi poziţia centrului

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = 2 + \rho\cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [0,2], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \theta \in [0,2\pi].$$

Atunci

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

la fel ca şi în cazul coordonatelor sferice, întrucât adăugarea constantei 2 nu modifică valorile derivatelor parţiale utilizate în calculul determinantului jacobian.

Deoarece

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \sqrt{(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2+(\rho\sin\varphi\sin\theta)^2+(2+\rho\cos\varphi)^2}\\ &= \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi)+4\rho\cos\varphi+4}\\ &= \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\cos^2\varphi)+4\rho\cos\varphi+4}\\ &= \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+4\rho\cos\varphi+4}\\ &= \sqrt{\rho^2+4\rho\cos\varphi+4},\end{aligned}$$

urmează că

$$\begin{aligned}&\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz\\ &\quad= \iiint_{[0,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \sqrt{\rho^2+4\rho\cos\varphi+4}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\\ &\quad= \iint_{[0,2]\times[0,\pi]} \left(\int_0^\pi \sqrt{\rho^2+4\rho\cos\varphi+4}\cdot\rho^2\sin\varphi d\varphi\right) d\rho d\theta.\end{aligned}$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2+4\rho\cos\varphi+4) = -4\rho\sin\varphi,$$

această din urmă derivată putând fi pusă în evidenţă sub integrală, este avantajos să integrăm mai întâi în raport cu φ şi să folosim metoda de schimbare de variabilă. Pentru calculul integralei

$$I_1 = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2+4\rho\cos\varphi+4}\cdot\rho^2\sin\varphi d\varphi,$$

vom folosi deci schimbarea de variabilă

$$u = \rho^2+4\rho\cos\varphi+4 \implies du = -4\rho\sin\varphi d\varphi,$$

ceea ce conduce la

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\rho^2+4\rho+4}^{\rho^2-4\rho+4} \sqrt{u}\cdot\left(-\frac{\rho}{4}\right)du = \frac{\rho}{4}\int_{(\rho-2)^2}^{(\rho+2)^2}\sqrt{u}du = \frac{\rho}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{(\rho-2)^2}^{(\rho+2)^2} = \frac{\rho}{6}\sqrt{u^3}\Bigg|_{(\rho-2)^2}^{(\rho+2)^2}\\ &= \frac{\rho}{6}\left(\sqrt{(\rho+2)^6}-\sqrt{(\rho-2)^6}\right) = \frac{\rho}{6}\left(|(\rho+2)^3|-|(\rho-2)^3|\right).\end{aligned}$$

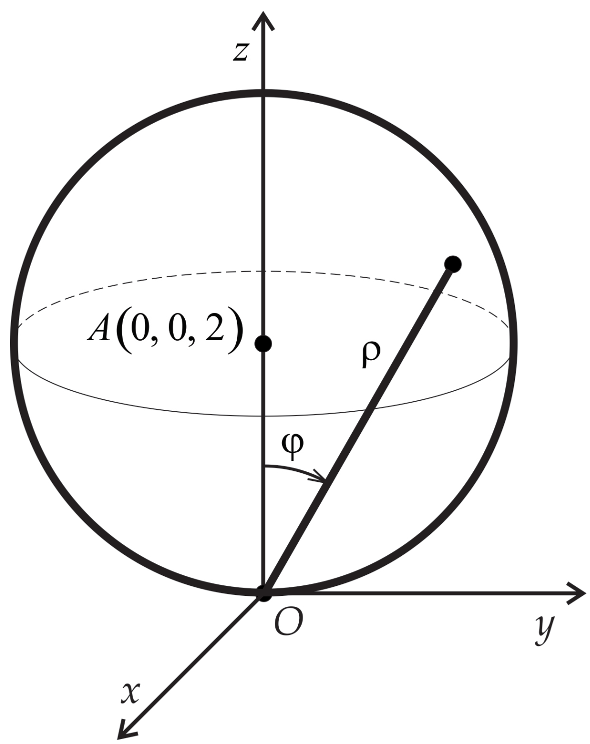
Deoarece $\rho\in[0,2]$, urmează că $\rho-2<0$, iar $|(\rho-2)^3| = (2-\rho)^3$. De aici

$$I_1 = \frac{\rho}{6}\left((\rho+2)^3-(2-\rho)^3\right) = \frac{\rho}{6}(24\rho+2\rho^3) = 4\rho^2+\frac{\rho^4}{3}.$$

Atunci

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iint_{[0,2]\times[0,\pi]} \left(4\rho^2 + \frac{\rho^4}{3}\right) d\rho d\theta$$
$$= \left(\int_0^2 \left(4\rho^2 + \frac{\rho^4}{3}\right) d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right) = \left(\frac{4\rho^3}{3} + \frac{\rho^5}{15}\right)\Bigg|_0^2 \cdot 2\pi = \frac{128\pi}{5}.$$

Alternativ, se pot utiliza coordonatele sferice



$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \ , \quad \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

Să observăm însă că de această dată $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, domeniul V aflându-se în întregime deasupra planului xOy. Să determinăm transformarea inegalităţii care defineşte domeniul V şi să determinăm de aici valorile lui ρ.

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 4z \Leftrightarrow \rho^2 \le 4\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \rho \le 4\cos\varphi,$$

Domeniul V se transformă atunci în domeniul V_1 definit prin

$$V_1 = \left\{(\rho, \varphi, \theta); 0 \le \rho \le 4\cos\varphi, \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Urmează că

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} \left(\int_0^{4\cos\varphi} \rho^3 \sin\varphi d\rho\right) d\varphi d\theta$$

$$= \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=4\cos\varphi} \cdot \sin\varphi d\varphi d\theta = \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} 64\cos^4\varphi \sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= 64\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \sin\varphi d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 64 I_1 \cdot 2\pi.$$

Cu schimbarea de variabilă

$$u = \cos\varphi \implies du = -\sin\varphi d\varphi,$$

se obţine că

$$I_1 = \int_1^0 u^4(-du) = \int_0^1 u^4 du = \frac{u^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5},$$

de unde

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \frac{128\pi}{5}.$$

Coordonate sferice generalizate

Pentru domenii mărginite de elipsoizi centraţi în origine, sau porţiuni ale acestora, se pot folosi **coordonatele sferice generalizate**. Astfel, pentru un domeniu mărginit de elipsoidul de ecuaţie carteziană $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, vor fi folosite coordonatele (ρ,φ,θ) legate de cele carteziene prin relaţiile

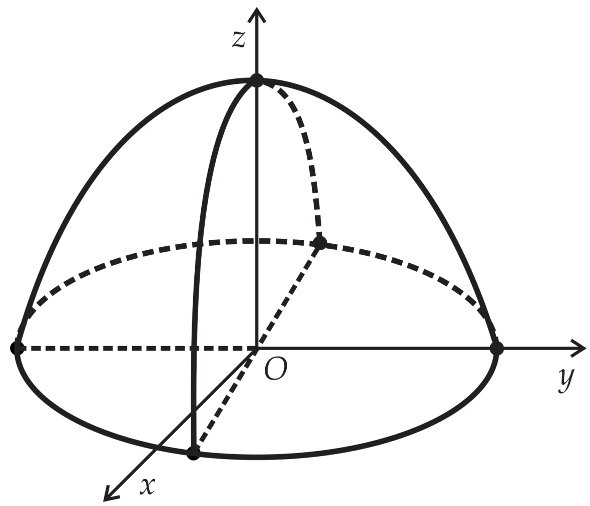
$$\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}, \quad \rho\in[0,1], \quad \varphi\in[0,\pi], \quad \theta\in[0,2\pi).$$

Printr-un calcul asemănător celui de mai sus se poate deduce că, în acest caz,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = abc\rho^2\sin\varphi \implies dxdydz = abc\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Exemplu. Determinaţi volumul domeniului V definit prin

$$V = \left\{(x,y,z); \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} \le 1;\ z \ge 0\right\}.$$



Soluţie. Domeniul V este jumătatea superioară a corpului eliptic mărginit de elipsoidul

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1,$$

de semiaxe 3, 4, 5. Avem că

$$\text{vol}(V) = \iiint_V 1dxdydz.$$

Vom folosi coordonatele sferice generalizate, date de

$$\begin{cases} x = 3\rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = 4\rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = 5\rho \cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [0,1], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

intervalul de valori pentru φ fiind dat de faptul că V este jumătatea **superioară** (pentru cea **inferioară** ar fi trebuit $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$). În acest caz,

$$dxdydz = 3 \cdot 4 \cdot 5\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = 60\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

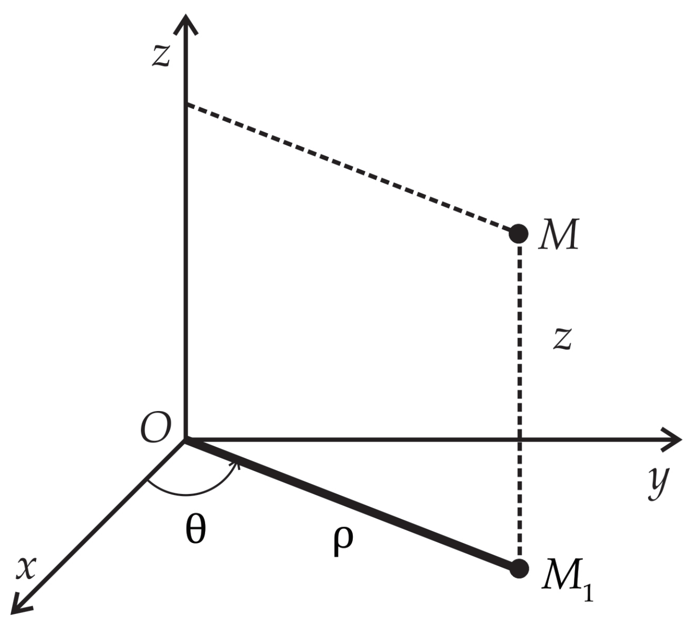
Atunci

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(V) &= \iiint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} 1\cdot 60\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= 60\cdot\int_0^1 \rho^2 d\rho\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^{2\pi} 1 d\theta = 60\cdot\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 \cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} \\
&= 60\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\pi = 40\pi.
\end{aligned}$$

6.3.6 Coordonate cilindrice

Fiind dat un reper cartezian $Oxyz$ în spaţiu, putem preciza poziţia unui punct $M \notin Oz$ şi prin **coordonatele sale cilindrice** (ρ, θ, z), unde

1. ρ reprezintă distanţa între proiecţia M_1 a lui M pe planul xOy şi O;
2. θ reprezintă unghiul orientat între Ox şi OM_1, măsurat în sens trigonometric.
3. z îşi păstrează semnificaţia.



Altfel spus, coordonatele cilindrice ale unui punct sunt coordonatele polare ale proiecţiei acelui punct pe planul xOy, la care se adaugă coordonata z iniţială. De remarcat faptul că, pentru coordonatele cilindrice, ρ are o semnificaţie diferită faţă de cea avută pentru coordonatele sferice.

În aceste condiţii, legătura între coordonatele carteziene (x, y, z) şi coordonatele cilindrice (ρ, θ, z) este dată de formulele

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}.$$

De asemenea,

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos \theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \cos \theta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cos \theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin \theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin \theta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho \sin \theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(z) & \frac{\partial}{\partial \theta}(z) & \frac{\partial}{\partial z}(z) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

deci

$$dxdydz = \rho d\rho d\varphi d\theta.$$

Utilitatea coordonatelor cilindrice

Coordonatele cilindrice sunt utilizate în special pentru integrarea pe domenii cilindrice sau pe domenii de rotaţie în jurul lui Oz (de exemplu, interioarele unor conuri sau paraboloizi de rotaţie). Din acelaşi motiv ca şi în cazul coordonatelor sferice, în practică, atât pentru ρ cât şi pentru θ vor fi folosite intervalele corespunzătoare închise.

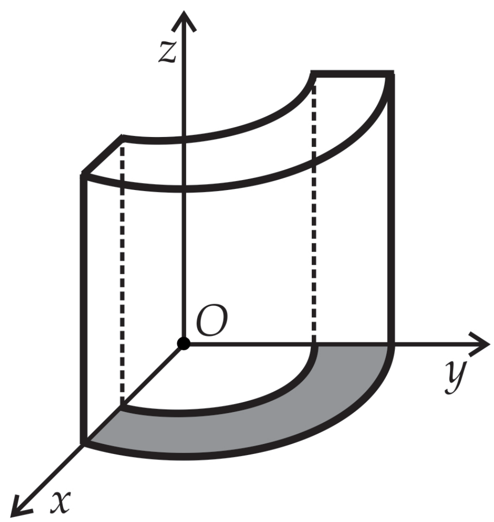
Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V xzdxdydz,$$

unde V este domeniul tridimensional definit de

$$V = \left\{(x, y, z); 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

Domeniul V poate fi privit ca un cilindru cu rază a bazei 3, generatoarea paralelă cu Oz şi înălţime 2, din care se extrage un cilindru de acelaşi tip, dar cu rază a



bazei 2, iar din rezultat se păstrează doar partea din primul octant. Vom folosi coordonate cilindrice, date de

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \rho \in [2,3], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad z \in [0,2], \quad dxdydz = \rho d\rho d\theta dz.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\iiint_V xzdxdydz &= \iiint_{[2,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2]} \rho\cos\theta z \cdot \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_2^3 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \cdot \int_0^2 zdz = \frac{\rho^3}{3}\Big|_2^3 \cdot \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{19}{3}\cdot 1 \cdot 2 \\ &= \frac{38}{3}.\end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V z^2 dxdydz,$$

unde V este domeniul tridimensional definit de

$$V = \left\{(x,y,z); x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Soluţie. Domeniul V este un con de rotaţie în jurul lui Oz, cu vârful în origine. Deşi V nu este un cilindru, coordonatele cilindrice sunt potrivite pentru reprezentarea lui V, datorită caracteristicii acestuia de a fi corp de rotaţie în jurul lui

Oz. Vom folosi deci coordonate cilindrice, date de

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 1], \qquad dxdydz = \rho d\rho d\theta dz.$$

Rămâne deci să determinăm intervalul de valori pentru ρ. Condiţia $x^2 + y^2 \leq z^2$ se transformă atunci în

$$(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 \leq z^2 \implies \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \leq z^2 \implies \rho^2 \leq z^2.$$

Ţinând seama că $0 \leq z \leq 1$, $\rho \geq 0$, ultima condiţie este echivalentă cu $\rho \leq z$. Atunci

$$\iiint_V z^2 dxdydz = \iiint_{V_1} z^2 \rho d\rho d\theta dz, \quad V_1 = \{(\rho, \theta, z); \theta \in [0, 2\pi], \rho \leq z, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Deoarece domeniul V_1 este simplu în raport cu Oz, urmează că

$$\iiint_{V_1} z^2 \rho d\rho d\theta dz = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left(\int_\rho^1 \rho z^2 dz \right) d\rho d\theta = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho \frac{z^3}{3} \bigg|_{z=\rho}^{z=1} d\rho d\theta$$
$$= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{3}\rho(1-\rho^3) d\rho d\theta = \frac{1}{3} \left(\int_0^1 (\rho - \rho^4) d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right)$$
$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^5}{5} \right) \bigg|_0^1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{5}.$$

6.4 Aplicaţii ale integralei triple

6.4.1 Centrul de masă al unui corp

Corpuri neomogene

Teorema 6.13. *Fie un corp* **neomogen** V*, asimilabil unui domeniu de integrare, cu densitate variabilă* $\rho(x, y, z)$*. Atunci masa corpului este*

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dxdydz$$

iar coordonatele centrului de masă al corpului sunt

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz, \quad y_{CM} = \frac{1}{m}\iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$z_{CM} = \frac{1}{m}\iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Corpuri omogene

Pentru corpuri omogene, cu $\rho(x,y,z) = \rho =$ constant, urmează că

$$m = \iiint_V \rho dxdydz = \rho \iiint_D 1dxdydz = \rho\,\mathrm{vol}(V),$$

şi similar

$$x_{CM} = \frac{\iiint_V xdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz} = \frac{\iiint_V xdxdydz}{\mathrm{vol}(V)}, \quad y_{CM} = \frac{\iiint_V ydxdydz}{\iiint_V 1dxdydz} = \frac{\iiint_V ydxdydz}{\mathrm{vol}(V)}$$
$$z_{CM} = \frac{\iiint_V zdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz} = \frac{\iiint_V zdxdydz}{\mathrm{vol}(V)}.$$

Exemplu. Determinaţi coordonatele centrului de masă al corpului omogen V definit prin

$$V = \left\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2; z \leq 0\right\}, \quad \text{unde } R > 0.$$

Soluţie. Corpul respectiv este jumătatea superioară a bilei sferice cu rază R centrată în origine. Atunci

$$x_{CM} = \frac{\iiint_V xdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz}, \qquad y_{CM} = \frac{\iiint_V ydxdydz}{\iiint_V 1dxdydz}, \qquad z_{CM} = \frac{\iiint_V zdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz},$$

pentru calculul acestor integrale putând fi folosite coordonate sferice, date de

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [0,R], \quad \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0,2\pi],$$

$$dxdydz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Com volumul lui V este jumătate din volumul unei bile sferice de rază R, adică $\frac{1}{2}\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{6}$, urmează că

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{\iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho\sin\varphi\sin\theta \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta}{\frac{4\pi R^3}{6}} \\ &= \frac{6}{4\pi R^3} \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = (-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

urmează că $x_{CM} = 0$. Cu un raţionament similar, putem obţine că $y_{CM} = 0$. De fapt, la aceste concluzii se puteau obţine şi observând că axa Oz este axă de simetrie pentru V. Atunci şi centrul de masă se află pe această axa, deci $x_{CM} = 0$, $y_{CM} = 0$, întrucât toate punctele de pe Oz au abscisa şi ordonata nulă.

De asemenea,

$$\begin{aligned} z_{CM} &= \frac{\iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta}{\frac{4\pi R^3}{6}} \\ &= \frac{6}{4\pi R^3} \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2}\frac{(-\cos 2\varphi)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi \\ &= \frac{6\pi R^4}{16\pi R^3} \cdot \frac{(-\cos 2\varphi)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3R}{8} \cdot 1 = \frac{3R}{8}. \end{aligned}$$

6.4.2 Momentele de inerţie ale unui corp

Teorema 6.14. *Fie un corp* **neomogen** V*, asimilabil unui domeniu de integrare, cu densitate variabilă* $\rho(x,y,z)$*. Atunci momentele de inerţie ale corpului în raport cu axele de coordonate sunt*

$$I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz, \quad I_y = \iiint_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$
$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$

momentele de inerţie ale corpului în raport cu planele de coordonate sunt

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2\rho(x,y,z)dxdydz, \quad I_{yOz} = \iiint_V x^2\rho(x,y,z)dxdydz$$
$$I_{xOz} = \iiint_V y^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

iar momentul de inerţie al corpului în raport cu originea este

$$I_O = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Aplicaţii

6.1. *Reprezentaţi grafic următoarele mulţimi*

1) $V = \left\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 = 25\right\}$; 2) $V = \left\{(x,y,z); 9 \le x^2+y^2+z^2 \le 16\right\}$;
3) $V = \left\{(x,y,z); x^2+y^2 = 9\right\}$; 4) $V = \left\{(x,y,z); 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$;
5) $V = \left\{(x,y,z); z = x^2+y^2\right\}$; 6) $V = \left\{(x,y,z); 2z \ge x^2+y^2\right\}$;
7) $V = \left\{(x,y,z); z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$; 8) $V = \left\{(x,y,z); 2z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

6.2. *Determinaţi valorile următoarelor integrale pe domenii paralelipipedice*

1) $\displaystyle\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} xy^2e^{y^3}\cos z dxdydz$; 2) $\displaystyle\iiint_{[1,e]\times[2,3]\times[0,1]} \frac{\ln x}{x} ye^z dxdydz$;
3) $\displaystyle\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,1]} \sin x \cos y dxdydz$.

6.3. *Determinaţi valorile următoarelor integrale pe domenii paralelipipedice*

1) $\displaystyle\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[1,3]} \frac{1}{(x+y+z)^3} dxdydz$; 2) $\displaystyle\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y+z) dxdydz$.

6.4. *Determinaţi* $\iiint_V z dxdydz$*, unde* V *este corpul prismatic mărginit de planele de coordonatele şi de planele* $(P_1) : z = h$ *şi* $(P_2) : x + y = R$*, unde* $h, R > 0$.

6.5. *Determinaţi*

$$\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} dxdydz,$$

unde V *este domeniul mărginit de paraboloidul* $(P) : z = x^2 + y^2$ *şi sfera* $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

6.6. *Determinaţi* $\iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} dxdydz$*, unde* V *este corpul mărginit de paraboloidul* $(P) : x = y^2 + z^2$ *şi planul* $(P_1) : x = 9$.

6.7. *Cu ajutorul coordonatelor sferice, determinaţi*

1. $\iiint_V xyz dxdydz$, $V = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, y, z \geq 0\right\}$.
2. $\iiint_V (\sqrt{x^2 + y^2} + z dxdydz$, $V = \left\{(x, y, z); 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\right\}$.
3. $\iint_V (x + y) dxdydz$*, unde* V *este domeniul mărginit de sfera* $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *şi conul* $(C) : z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. $\iiint_V \sqrt{3 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$*, unde* V *este bila sferică cu centrul în origine şi rază* 1.

6.8. *Cu ajutorul coordonatelor cilindrice, determinaţi*

1. $\iiint_V z dxdydz$, $V = \left\{(x, y, z); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\right\}$.
2. $\iiint_V z^3 dxdydz$*,* V *fiind domeniul mărginit de conul* $(c) : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *şi planul* $(P) : z = 4$.
3. $\iiint_V xy(1 - 2z) dxdydz$*,* V *fiind domeniul mărginit de cilindrul* $(C) : x^2 + y^2 = 1$*, paraboloidul* $(P) : z = x^2 + y^2$ *şi planul* $(P_1) : z = 0$.
4. $\iiint_V xy dxdydz$*,* V *fiind domeniul mărginit de paraboloizii* $(P_1) : z = x^2 + y^2$ *şi* $(P_2) : z = 8 - x^2 - y^2$.

6.9. *Determinaţi*

$$\iiint_V z dx dy dz, \qquad V = \left\{(x, y, z); \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1, z \geq 0\right\}.$$

1. *folosind faptul că domeniul este simplu în raport cu Oz;*
2. *folosind coordonatele sferice generalizate.*

6.10. *Determinaţi*

$$\iiint_V z^2 dx dy dz, \qquad V = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

1. *folosind faptul că domeniul este simplu în raport cu Oz;*
2. *folosind coordonatele cilindrice.*

6.11. *Determinaţi volumul corpului mărginit de sfera* $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 8$ *şi paraboloidul* $(P) : x^2 + y^2 = 2z$*, situat deasupra planului xOy.*

6.12. *Determinaţi volumul corpului mărginit de paraboloizii* $(P_1) : z = x^2 + y^2$ *şi* $(P_2) : 2 - z = x^2 + y^2$.

6.13. *Determinaţi coordonatele centrelor de greutate ale următoarelor corpuri omogene*

1. *Tetraedrul cu vârfurile* $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.
2. *Corpul mărginit de paraboloidul* $(P) : z = x^2 + y^2$ *şi planul* $(P_1) : z = 4$.
3. *Corpul mărginit de paraboloidul* $(P) : z = x^2 + y^2$ *şi sfera* $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 6$, *situat deasupra planului xOy.*

Capitolul 7

ELEMENTE DE TEORIA CÂMPURILOR

7.1 Definiţii şi proprietăţi

7.1.1 Câmpuri scalare. Câmpuri vectoriale

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$. Numim **câmp scalar** pe D o funcţie (cu valori scalare) $u : D \to \mathbb{R}$. Numim **câmp vectorial** pe D o funcţie (cu valori vectoriale) $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$. Astfel, oricărui punct $M \in D$ i se poate asocia un scalar (în cazul câmpurilor scalare), respectiv un vector (în cazul câmpurilor vectoriale). Atunci când un astfel de câmp nu depinde decât de poziţia punctului M, el se numeşte **staţionar**, în cazul în care el depinde şi de alte variabile (de obicei de timp) numind-se **nestaţionar**.

7.1.2 Aspecte fizice

De exemplu, oricărui punct de pe suprafaţa Pământului i se poate asocia temperatura în acel punct, obţinându-se un câmp scalar (evident, nestaţionar). Acelaşi lucru se poate realiza asociindu-i umiditatea relativă, presiunea atmosferică, ş.a.m.d.

Similar, oricărui punct de pe suprafaţa Pământului i se poate asocia intensitatea câmpului gravitaţional în acel punct (direcţionată către centrul de masă al Pământului, necesitând utilizarea unui vector pentru caracterizare completă), obţinându-se un câmp vectorial (staţionar). Acelaşi lucru se poate realiza asociind viteza şi direcţia vântului în acel punct (care, din nou, necesită utilizarea unui vector pentru caracterizare completă), obţinându-se însă în acest caz un câmp vectorial nestaţionar.

Vom nota uneori $u(M)$, în loc de $u(x,y,z)$, (respectiv $\vec{F}(M)$, în loc de $\vec{F}(x,y,z)$) pentru a sublinia dependenţa câmpului de punctul M, mai degrabă decât de coordonatele x, y, z ale acestuia, în special în cazul în care câmpul respectiv corespunde unei realităţi fizice.

Câmpuri de componente

Fie un câmp vectorial $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Pentru determinarea acestui câmp vectorial este deci necesară determinarea a trei câmpuri scalare P, Q, R, numite **câmpuri de componente**.

Câmp vectorial de clasă C^k

Se spune că $\vec{F}$ este **câmp vectorial de clasă** C^k, $k \geq 0$, în situaţia în care câmpurile scalare (funcţiile) componente P, Q, R au această proprietate.

7.2 Câmpuri scalare. Gradientul unui câmp scalar

7.2.1 Suprafeţe de nivel

Fie $u : D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar. Numim **suprafaţă de nivel** (**suprafaţă echipotenţială**) a câmpului u locul geometric al tuturor punctelor lui D pentru care valoarea lui u rămâne constantă.

Ecuaţia unei suprafeţe de nivel

Suprafeţele de nivel ale lui u au deci ecuaţia $u(x,y,z) = C$, $C \in \mathbb{R}$. În particular, ecuaţia suprafeţei de nivel care trece printr-un punct dat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este $u(M) = u(M_0)$, unde M este un punct curent de pe suprafaţă, forma analitică a acestei ecuaţii fiind $u(x,y,z) = u(x_0, y_0, z_0)$.

Să observăm de asemenea că printr-un punct al domeniului D trece o singură suprafaţă de nivel, în vreme ce două suprafeţe de nivel oarecare fie coincid (dacă au acelaşi C), fie nu se intersectează (daca ele corespund la valori diferite ale lui C).

Exemplu. Fie câmpul scalar $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Atunci suprafeţele de nivel $u(x,y,z) = C$, $C > 0$, sunt sfere cu centrul în $O(0,0,0)$ şi rază $\sqrt{C}$, în vreme ce suprafaţa de nivel $u(x,y,z) = 0$ constă dintr-un singur punct, anume originea O.

7.2.2 Derivata unui câmp scalar după direcţia unui vector

Fiind dat un câmp scalar u, dorim să studiem variaţia acestuia după o direcţie dată, într-o vecinătate a unui punct dat. Prin analogie cu cazul funcţiilor de o singură variabilă reală, pentru care studiul monotoniei se putea realiza cu ajutorul derivatei, vom defini acum noţiunea de **derivată după o direcţie**.

Fie $u : D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar, fie $M_0 \in D$ şi fie $\vec{v}$ un vector oarecare. Numim **derivată a lui** u **în** M_0 **după direcţia lui** $\vec{v}$, notată $\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0}$, mărimea care măsoară viteza de variaţie a lui u în această direcţie, raportată la unitatea de lungime, definită prin

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \lim_{l(\overrightarrow{M_0M}) \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{l(\overrightarrow{M_0M})}$$

unde $l(\overrightarrow{M_0M})$ reprezintă lungimea orientată a vectorului $\overrightarrow{M_0M}$,

$$l(\overrightarrow{M_0M}) = \begin{cases} \|\overrightarrow{M_0M}\|, \text{ pentru } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}, t \geq 0, \\ -\|\overrightarrow{M_0M}\|, \text{ pentru } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}, t < 0. \end{cases}$$

Să observăm că $\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0}$ ia în calcul, în fapt, nu doar direcţia, ci şi sensul lui $\vec{v}$.

Monotonia unui câmp scalar după direcţia unui vector

Observăm atunci următoarele

- Dacă $\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} > 0$, atunci câmpul scalar u creşte într-o vecinătate a lui M_0 după direcţia (şi sensul) lui $\vec{v}$,
- Dacă $\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} < 0$, atunci câmpul scalar u scade într-o vecinătate a lui M_0 după direcţia (şi sensul) lui $\vec{v}$.

Legătura cu conceptul de derivată parţială

Conceptul de derivată după direcţia unui vector îl generalizează pe cel de derivată parţială. Astfel, pentru $v = \vec{i}$ obţinem că $\frac{du}{d\vec{i}} = \frac{\partial u}{\partial x}$, iar pentru $\vec{v} = \vec{j}$, respectiv $\vec{v} = \vec{k}$, obţinem că $\frac{du}{d\vec{j}} = \frac{\partial u}{\partial y}$, respectiv $\frac{du}{d\vec{k}} = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Formulă de calcul

Teorema 7.1. *Dacă u este de clasă* C^1 *pe o vecinătate a lui* M_0*, iar* $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$ *este un vector nenul, atunci*

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \frac{v_3}{\|\vec{v}\|} \tag{7.1}$$

Întrucât $\frac{v_1}{\|\vec{v}\|}$, $\frac{v_2}{\|\vec{v}\|}$, $\frac{v_3}{\|\vec{v}\|}$ sunt componentele versorului director al lui $\vec{v}$ cu acelaşi sens ca şi $\vec{v}$, membrul drept reprezintă produsul scalar dintre vectorul $\vec{n} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{\imath} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{\jmath} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\vec{k}$ normal la suprafaţa de nivel a lui u prin M_0 şi versorul asociat lui $\vec{v}$ cu acelaşi sens ca şi $\vec{v}$.

Practic, valorile derivatelor parţiale ale lui u, calculate în punctul M_0, se înmulţesc cu componentele corespunzătoare ale versorului obţinut prin împărţirea lui $\vec{v}$ la norma sa, adunându-se apoi rezultatele.

De asemenea, formula de mai sus se poate pune şi sub forma

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma,$$

unde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt cosinuşii directori ai lui $\vec{v}$.

Exemplu. Determinaţi derivata câmpului scalar

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad u(x, y, z) = x^3 + x^2 - xyz$$

în $M_0(1, -3, 2)$ după direcţia vectorului $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Creşte u într-o vecinătate a punctului M_0 după direcţia lui $\vec{v}$, sau scade după această direcţie? Determinaţi ecuaţia suprafeţei de nivel a lui u pe care se află M_0.

Soluţie. Calculăm mai întâi derivatele parţiale ale lui u. Au loc relaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y - xyz) = 3x^2 + 2xy - yz$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + x^2y - xyz) = x^2 - xz$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^3 + x^2y - xyz) = -xy.$$

Precizăm acum valorile acestor derivate parţiale în punctul M_0. Pentru $x = 1$, $y = -3$, $z = 2$, obţinem că

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 3, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 3.$$

De asemenea,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3,$$

iar versorul asociat lui $\vec{v}$ cu acelaşi sens ca şi $\vec{v}$ este

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}) = \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Atunci

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = 3 \cdot \frac{2}{3} + (-1)\left(-\frac{2}{3}\right) + 3\frac{1}{3} = \frac{11}{3} > 0.$$

Deducem de aici că într-o vecinătate a punctului M_0 câmpul scalar u creşte după direcţia (şi sensul) lui $\vec{v}$. Deoarece $u(M_0) = 1^3 + 1^2(-3) - 1(-3)2 = 4$, rezultă că ecuaţia suprafeţei de nivel a lui u pe care se află M_0 este $u(M) = 4$.

7.2.3 Gradientul unui câmp scalar

Fie $u : D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1. Numim **gradient** al lui u câmpul vectorial definit prin

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{grad} u$, unde $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este câmpul scalar definit prin

$$u(x, y, z) = x^2 + yz.$$

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + yz)\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + yz)\vec{k} = 2x\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + y\vec{k}.$$

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{grad} u$, unde $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este câmpul scalar definit prin

$$u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\vec{r}\|$$

(norma vectorului de poziţie $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ ataşat lui $M(x, y, z)$).

Soluţie. Pentru $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, se obţine că

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} u &= \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\vec{k} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{\jmath} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).
\end{aligned}$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{grad}(\|\vec{r}\|) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Gradientul ca vector normal

Să observăm că $\operatorname{grad} u \,|_{M_0}$ (vectorul gradient calculat într-un punct M_0) este coliniar cu versorii normali la suprafaţa de nivel a lui u care trece prin punctul M_0. În fapt, în ipoteza că $\operatorname{grad} u \,|_{M_0} \neq \vec{0}$, unul dintre versorii normali este

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} u \,|_{M_0}}{\left\|\operatorname{grad} u \,|_{M_0}\right\|},$$

celălalt fiind $-\vec{n}$.

Proprietatea de proiecţie

Conform (7.1), rezultă că, pentru un **vector** $\vec{v}$ dat,

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} u \,|_{M_0} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \operatorname{pr}_{\vec{v}}(\operatorname{grad} u \,|_{M_0}),$$

unde „$\cdot$" notează produsul scalar a doi vectori. Obţinem că **derivata după direcţia unui vector este proiecţia scalară a gradientului pe acel vector**.

Direcţia celei mai rapide creşteri (descreşteri)

Conform (7.1), rezultă că, pentru un **versor** $\vec{v}$ dat,

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} u \,|_{M_0} \cdot \vec{v}.$$

De aici, calculând derivata după direcţia versorului $\vec{n}$ (în fapt, direcţia gradientului), obţinem

$$\left.\frac{du}{d\vec{n}}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} u \mid_{M_0} \cdot \vec{n} = \operatorname{grad} u \mid_{M_0} \cdot \frac{\operatorname{grad} u \mid_{M_0}}{\left\|\operatorname{grad} u \mid_{M_0}\right\|} = \left\|\operatorname{grad} u \mid_{M_0}\right\|.$$

Deducem de aici că direcţia lui $\vec{n}$ (în fapt, direcţia gradientului) este o direcţie de creştere a lui u. Similar, direcţia lui $-\vec{n}$ (în fapt, direcţia opusă gradientului) este o direcţie de descreştere a lui u.

Deoarece

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} u \mid_{M_0} \cdot \vec{v} = \left\|\operatorname{grad} u \mid_{M_0}\right\| \vec{n} \cdot \vec{v} = \left\|\operatorname{grad} u \mid_{M_0}\right\| \cos\theta,$$

unde θ este unghiul dintre $\vec{n}$ şi $\vec{v}$, obţinem atunci

$$\left.\frac{du}{d\vec{v}}\right|_{M_0} = \left.\frac{du}{d\vec{n}}\right|_{M_0} \cos\theta.$$

Cum $|\cos\theta| \leq 1$, **direcţia celei mai rapide creşteri (descreşteri) a câmpului scalar u este cea a unui versor al normalei la suprafaţă**. De asemenea, **sensul de creştere este sensul gradientului, sensul de descreştere fiind sensul opus gradientului**.

Exemplu. Fie câmpul scalar

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad u(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$

şi fie $A(2, 1, -2)$. Să se determine suprafaţa de nivel ce trece prin A, gradientul câmpului scalar u în acest punct şi un versor director al normalei în A la suprafaţa de nivel a lui u. Precizaţi dacă u creşte sau scade după direcţia acestui versor.

Soluţie. Deoarece $u(A) = 7$, urmează că suprafaţa de nivel a lui u care trece prin A are ecuaţia $u(x, y, z) = u(A) = 7$, adică $x^2 - y^2 + z^2 = 7$, fiind un hiperboloid cu o pânză. Deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z,$$

rezultă că

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{\imath} - 2y\vec{\jmath} + 2z\vec{k} \implies \operatorname{grad} u \mid_A = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}.$$

Un versor director al normalei la suprafaţa de nivel a lui u care trece prin A este

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} u \mid_A}{\|\operatorname{grad} u \mid_A\|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2}}(4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}) = \frac{1}{6}(4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 4\vec{k})$$
$$= \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Deoarece $\vec{n}$ are sensul gradientului, se obţine că u creşte după direcţia lui $\vec{n}$.

Proprietăţi de calcul

Au loc următoarele proprietăţi, consecinţe imediate ale proprietăţilor derivatelor parţiale cu ajutorul cărora este definit gradientul (aditivitate, omogenitate, formula de derivare a produsului, formula de derivare a raportului, regula lanţului).

Teorema 7.2. *Fie u_1, u_2 două câmpuri scalare de clasă C^1 pe D şi fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci*

1. $\operatorname{grad}(u_1 + u_2) = \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{grad} u_2$;
2. $\operatorname{grad}(cu_1) = c \operatorname{grad}(u_1)$;
3. $\operatorname{grad}(u_1 u_2) = (\operatorname{grad} u_1)u_2 + u_1(\operatorname{grad} u_2)$,

iar dacă $u_2 \neq 0$ are loc şi

4. $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u_1}{u_2}\right) = \dfrac{1}{u_2^2}[(\operatorname{grad} u_1)u_2 - u_1(\operatorname{grad} u_2)]$.

Fie de asemenea u un câmp scalar de clasă C^1 pe D şi fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Atunci

$$\operatorname{grad} \varphi(u) = \varphi'(u) \operatorname{grad} u.$$

Exemplu. Dacă

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k},$$

determinaţi $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încât $\vec{r} \cdot \operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|^2$ pentru orice $\vec{r} \in \mathbf{V_3}$.

Soluţie. Conform regulii lanţului, rezultă că

$$\operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|) = f'(\|\vec{r}\|) \operatorname{grad}(\|\vec{r}\|) = f'(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

De aici, pentru orice $\vec{r} \neq \vec{0}$,

$$\vec{r} \cdot \operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|) = \vec{r} \cdot f'(\|\vec{r}\|)\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|}\vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|}\|\vec{r}\|^2 = f'(\|\vec{r}\|)\,\|\vec{r}\|\,.$$

Urmează că

$$f'(\|\vec{r}\|)\,\|\vec{r}\| = \|\vec{r}\|^2 \implies f'(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Atunci $f'(u) = u$ pentru orice $u \in (0, \infty)$ (de fapt, prin continuitate, şi pentru $u = 0$), iar $f(u) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$.

7.3 Câmpuri vectoriale. Divergenţa şi rotorul unui câmp vectorial

În cele ce urmează, vom încerca să caracterizăm atât „intensitatea", cât şi rotaţia unui câmp vectorial $\vec{F}$. Ambele concepte vor fi mai uşor de urmărit dacă ne imaginăm câmpul vectorial respectiv ca descriind mişcarea unui fluid. Intuitiv,

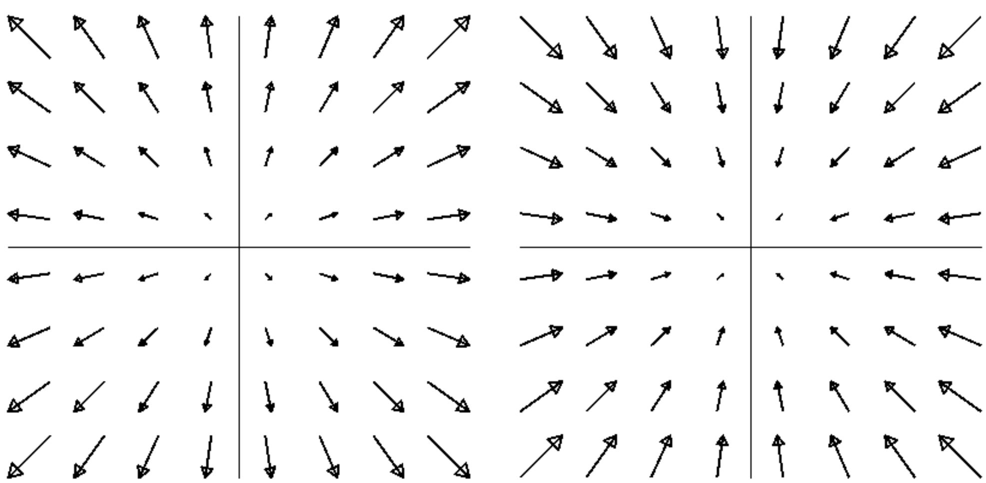


Figura 7.1: $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$, $F_1(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, $F_2(x,y,z) = -x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$

figurile de mai sus, în care câmpurile vectoriale respective sunt reprezentate cu ajutorul unor săgeţi par să descrie patru situaţii distincte.

În prima, câmpul vectorial pare a fi în expansiune, având ca sursă principală originea, care pare să „emită" câmpul vectorial. În cea de-a doua, originea pare să „absoarbă" câmpul vectorial. În cea de-a treia, câmpul vectorial pare să execute o mişcare de rotaţie în jurul originii. Toate aceste situaţii sunt „pure", în sensul

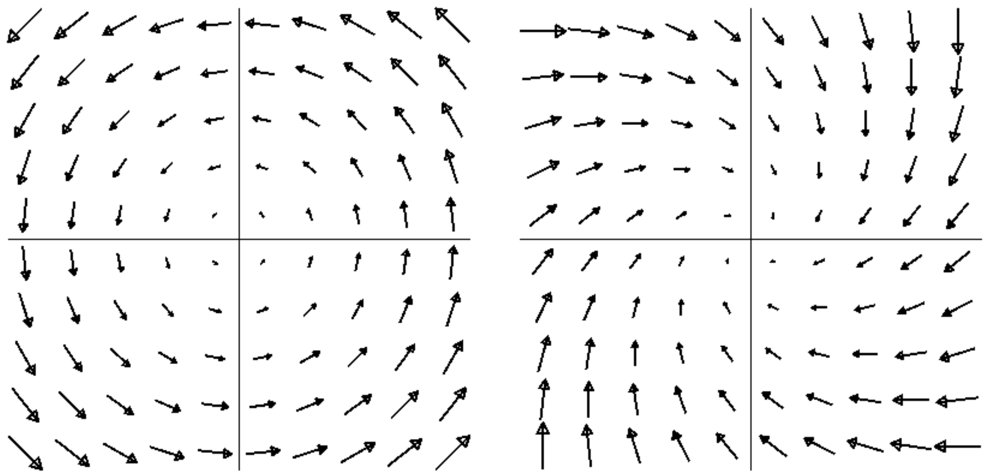


Figura 7.2: $F_3, F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$, $F_3(x,y,z) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$, $F_4(x,y,z) = (y-x)\vec{\imath} - (x+y)\vec{\jmath}$

că în primele două exemple câmpul (sau fluidul) execută o mişcare radială (de îndepărtare sau apropiere de centru), corespunzătoare „emisiei" sau „absorbţiei", fără rotaţie, în vreme ce în al treilea exemplu este executată o mişcare de rotaţie.

În fine, cea de-a patra situaţie este „mixtă", în sensul că sunt executate în acelaşi timp o mişcare de rotaţie şi una de apropiere de centru („absorbţie").

Pentru a studia aceste fenomene („emisie" şi „absorbţie" pe de o parte), respectiv rotaţie pe de altă parte, vom introduce în cele ce urmează doi operatori diferenţiali, numiţi **divergenţă** şi **rotor**.

7.3.1 Divergenţa unui câmp vectorial

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Numim **divergenţă** a câmpului vectorial $\vec{F}$ câmpul scalar definit prin

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

În aceste condiţii, referindu-ne la primele două exemple,

$$\operatorname{div}(\vec{F}_1) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 2 > 0,$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}_2) = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = -2 < 0,$$

deducând, intuitiv, faptul că divergenţa pozitivă este asociată unor fenomene de „emisie", iar divergenţa negativă unora de „absorbţie" (o justificare mai detaliată va fi oferită ulterior). Ceea ce este poate mai puţin intuitiv este faptul că **toate** punctele domeniului „emit", respectiv „absorb", originea nefiind singurul punct cu această proprietate, aşa cum pare să indice desenul.

De asemenea,

$$\operatorname{div}(\vec{F}_3) = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0,$$
$$\operatorname{div}(\vec{F}_4) = \frac{\partial}{\partial x}(y-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-x-y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = -2 < 0,$$

ceea ce confirmă intuiţia iniţială (în al treilea exemplu are loc doar o mişcare de rotaţie, fără „emisie" sau „absorbţie", iar în cel de-al patrulea are loc o „absorbţie").

Să observăm că putem defini similar şi divergenţa unui câmp vectorial $\vec{G} : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbf{V_2}$. Astfel, dacă $\vec{G} : E \to \mathbf{V_2}$ este un câmp vectorial de clasă C^1,

$$\vec{G}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath},$$

vom numi divergenţă a câmpului vectorial $\vec{G}$ câmpul scalar definit prin

$$\operatorname{div}\vec{G} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Câmpuri vectoriale solenoidale

Fie $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1. Spunem că $\vec{F}$ este **solenoidal** în D dacă $\operatorname{div}\vec{F}$ este identic nul în D.

Conform cu observaţiile anterioare, un câmp solenoidal este un câmp **fără surse** (pozitive sau negative, adică atât fără „emisie" cât şi fără „absorbţie"). Să observăm că, utilizând notaţiile de mai sus, $\vec{F}_3$ este un câmp vectorial solenoidal.

Proprietăţi de calcul

Au loc următoarele proprietăţi.

Teorema 7.3. *Fie $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe D, fie u un câmp scalar pe D şi fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci*

1. $\operatorname{div}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{div}(\vec{F}_1) + \operatorname{div}(\vec{F}_2)$;
2. $\operatorname{div}(c\vec{F}_1) = c\operatorname{div}(\vec{F}_1)$;

3. $\operatorname{div}(u\vec{F}_1) = (\operatorname{grad} u) \cdot \vec{F}_1 + u \operatorname{div}(\vec{F}_1)$.

Ultima formulă este un rezultat analog formulei de derivare a unui produs, cu deosebirea că lui u, fiind un câmp scalar şi nu unul vectorial, nu i se poate aplica divergenţa.

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{div} \vec{F}$, unde $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x, y, z)$)

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{div}(\vec{r}) = 3.$$

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{div} \vec{F}$, unde $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x, y, z) = \|\vec{r}\|^2\vec{r}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x, y, z)$)

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(\|\vec{r}\|^2\vec{r}) = \operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2) \cdot \vec{r} + \|\vec{r}\|^2 \operatorname{div}(\vec{r}).$$

Cu notaţia $\varphi(x) = x^2$, deducem

$$\operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2) = \operatorname{grad} \varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|) \operatorname{grad} \|\vec{r}\| = 2\|\vec{r}\| \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = 2\vec{r}, \quad r \neq \vec{0}.$$

Deoarece

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3,$$

rezultă că

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2\vec{r} \cdot \vec{r} + 3\|\vec{r}\|^2 = 2\|\vec{r}\|^2 + 3\|\vec{r}\|^2 = 5\|\vec{r}\|^2.$$

Soluţie alternativă. Observăm că

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$$

$$= x(x^2+y^2+z^2)\vec{\imath} + y(x^2+y^2+z^2)\vec{\jmath} + z(x^2+y^2+z^2)\vec{k},$$

şi atunci

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2+z^2)x) + \frac{\partial}{\partial y}((x^2+y^2+z^2)y) + \frac{\partial}{\partial z}((x^2+y^2+z^2)z)\\ &= 2x^2 + (x^2+y^2+z^2) + 2y^2 + (x^2+y^2+z^2) + 2z^2 + (x^2+y^2+z^2)\\ &= 5(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

7.3.2 Rotorul unui câmp vectorial

Fie $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Numim **rotor** al câmpului vectorial $\vec{F}$ câmpul vectorial $\operatorname{rot}\vec{F}$ definit prin

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Referindu-ne la exemplele de mai sus,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(0)\right)\vec{\jmath}\\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right)\vec{k} = \vec{0},\end{aligned}$$

similar observându-se că $\operatorname{rot}\vec{F_2} = \vec{0}$. Aceasta confirmă, din nou, intuiţia iniţială (lipsa fenomenenului de rotaţie din primele două exemple). În plus,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(x)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}(0)\right)\vec{\jmath}\\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)\vec{k} = 2\vec{k},\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-x & -x-y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-x-y)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(y-x) - \frac{\partial}{\partial x}(0)\right)\vec{\jmath}$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x-y) - \frac{\partial}{\partial y}(y-x)\right)\vec{k} = -2\vec{k}.$$

Notaţie alternativă

În loc de rot $\vec{F}$ se mai foloseşte şi notaţia curl $\vec{F}$ („to curl", din limba engleză, înseamnă „a se răsuci", „a se ondula").

Câmpuri vectoriale irotaţionale

Fie $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1. Spunem că $\vec{F}$ este **irotaţional** în D dacă rot $\vec{F}$ este identic nul în D.

Să observăm că, utilizând notaţiile de mai sus, $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ sunt câmpuri vectoriale irotaţionale.

Proprietăţi de calcul

Au loc următoarele proprietăţi.

Teorema 7.4. *Fie $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe D, fie u un câmp scalar de clasă C^1 pe D şi fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci*

1. $\operatorname{rot}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{rot}(\vec{F}_1) + \operatorname{rot}(\vec{F}_2)$;
2. $\operatorname{rot}(c\vec{F}_1) = c\operatorname{rot}(\vec{F}_1)$;
3. $\operatorname{rot}(u\vec{F}_1) = \operatorname{grad} u \times \vec{F}_1 + u \operatorname{rot}\vec{F}_1$.

Ultima formulă este, din nou, un rezultat analog formulei de derivare a unui produs, cu menţiunea că lui u, fiind un câmp scalar şi nu unul vectorial, nu i se poate aplica rotorul.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\vec{\imath} + (z+x)\vec{\jmath} + (x+y)\vec{k}.$$

Demonstraţi că $\vec{F}$ este atât irotaţional, cât şi solenoidal.

Soluţie. Se obţine că

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(z+x)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(y+z) - \frac{\partial}{\partial x}(x+y)\right)\vec{\jmath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(z+x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right)\vec{k} \\
&= (1-1)\vec{\imath} + (1-1)\vec{\jmath} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0},$$

câmpul vectorial $\vec{F}$ fiind irotaţional. De asemenea

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(z+x) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y) = 0+0+0 = 0.$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 0,$$

câmpul vectorial $\vec{F}$ fiind şi solenoidal.

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{rot}\vec{F}$, unde $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x,y,z)$).

Soluţie. Se obţine că

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z)\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right)\vec{k} \\
&= 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{rot}(\vec{r}) = \vec{0}.$$

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{rot}\vec{F}$, unde $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x,y,z) = \|\vec{r}\|^2\vec{r}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x,y,z)$)

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{rot}(\|\vec{r}\|^2\vec{r}) = \operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2)\times\vec{r} + \|\vec{r}\|^2\operatorname{rot}(\vec{r}).$$

Cu notaţia $\varphi(x) = x^2$, obţinem

$$\operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2) = \operatorname{grad}\varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|)\operatorname{grad}\|\vec{r}\| = 2\|\vec{r}\|\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = 2\vec{r}, \quad r \neq \vec{0}.$$

Deoarece

$$\operatorname{rot}\vec{r} = \vec{0},$$

urmează că

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 2\vec{r}\times\vec{r} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Soluţie alternativă. Observăm că

$$\begin{aligned}F(x,y,z) &= (x^2+y^2+z^2)(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k})\\ &= x(x^2+y^2+z^2)\vec{\imath} + y(x^2+y^2+z^2)\vec{\jmath} + z(x^2+y^2+z^2)\vec{k},\end{aligned}$$

şi atunci

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x(x^2+y^2+z^2) & y(x^2+y^2+z^2) & z(x^2+y^2+z^2)\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z(x^2+y^2+z^2)) - \frac{\partial}{\partial z}(y(x^2+y^2+z^2))\right)\vec{\imath}\\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x(x^2+y^2+z^2)) - \frac{\partial}{\partial x}(z(x^2+y^2+z^2))\right)\vec{\jmath}\\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y(x^2+y^2+z^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(x(x^2+y^2+z^2))\right)\vec{k}\\ &= (2yz-2yz)\vec{\imath} + (2zx-2zx)\vec{\jmath} + (2xy-2xy)\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Exemplu. Fiind dat un câmp scalar u, precizaţi dacă următoarele operaţii au ca rezultat scalari, vectori, sau nu sunt bine definite

1. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u)$, 2. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} u)$, 3. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, 4. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$.

Soluţie. Operaţia 1 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{rot} u$ nu este bine definit (rotorul se poate aplica unui câmp vectorial, nu unuia scalar).

Operaţia 2 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{div} u$ nu este bine definit (divergenţa se poate aplica unui câmp vectorial, nu unuia scalar).

Operaţia 3 este bine definită, cu rezultat un scalar (divergenţa vectorului $\operatorname{grad} u$ este un scalar).

Operaţia 4 este bine definită, cu rezultat un vector (rotorul vectorului $\operatorname{grad} u$ este un vector).

Exemplu. Fiind dat un câmp vectorial $\vec{F}$, precizaţi dacă următoarele operaţii au ca rezultat scalari, vectori, sau nu sunt bine definite

1. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \vec{F})$, 2. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})$, 3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})$, 4. $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{F})$.

Soluţie. Operaţia 1 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{grad} \vec{F}$ nu este bine definit (gradientul se poate aplica unui câmp scalar, nu unuia vectorial).

Operaţia 2 este bine definită, cu rezultat un vector (gradientul scalarului $\operatorname{div} \vec{F}$ este un vector).

Operaţia 3 este bine definită, cu rezultat un scalar (divergenţa vectorului $\operatorname{rot} \vec{F}$ este un scalar).

Operaţia 4 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{F})$ nu este bine definit (rotorul se poate aplica unui câmp vectorial, în timp ce $\operatorname{div} \vec{F}$ este unul scalar.

7.3.3 Operatorul ∇ al lui Hamilton

Operatorii de bază ai teoriei câmpurilor menţionaţi mai sus, anume grad, div şi rot, se pot exprima sub o formă simplificată cu ajutorul următorului operator diferenţial ∇, numit şi **operatorul lui Hamilton**,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Acest operator poate fi gândit ca un vector simbolic, cu convenţia că produsul fiecăruia dintre simbolurile $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ cu o funcţie (câmp scalar) u este derivata parţială corespunzătoare a acestei funcţii.

Exprimarea gradientului

Astfel, pentru un câmp scalar u de clasă C^1,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} u,$$

operaţie care trebuie gândită similar înmulţirii dintre un vector şi un scalar.

Exprimarea divergenţei

Similar, pentru un câmp vectorial $\vec{F}$ de clasă C^1,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k},$$

rezultă că

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F},$$

operaţie care trebuie gândită similar produsului scalar a doi vectori. Să remarcăm, totuşi, că operaţia respectivă **nu** este comutativă. Într-adevăr

$$\vec{F} \cdot \nabla = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}.$$

Exprimarea rotorului

De asemenea

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{F},$$

operaţie care trebuie gândită similar produsului vectorial a doi vectori.

Reţinem deci

$$\nabla u = \operatorname{grad} u, \qquad \nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}, \qquad \nabla \times \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{F}.$$

7.3.4 Operatorul Δ al lui Laplace

Prin analogie cu operatorul ∇ al lui Hamilton, putem introduce următorul operator diferenţial Δ, numit şi **operatorul lui Laplace**, sau **laplacian**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Din nou, se face convenţia că produsul fiecăruia dintre simbolurile $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ cu o funcţie (câmp scalar) u este derivata parţială corespunzătoare acestei funcţii.

Δ aplicat unui câmp scalar

Astfel, pentru un câmp scalar u,

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Se observă că, în fapt,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u. \end{aligned}$$

Altfel scris,

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$$

Δ aplicat unui câmp vectorial

Pentru un câmp vectorial $\vec{F}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k},$$

rezultă că

$$\Delta\vec{F} = \Delta(P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}) = (\Delta P)\vec{\imath} + (\Delta Q)\vec{\jmath} + (\Delta R)\vec{k},$$

operatorul Δ aplicându-se pe componentele lui $\vec{F}$.

7.3.5 Productivitatea unui domeniu şi circulaţia unui câmp vectorial

Productivitatea unui domeniu

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1. Vom numi **productivitate** a domeniului $V \subset D$ cantitatea $\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV$.

Circulaţia unui câmp vectorial

Vom numi **circulaţia** câmpului vectorial $\vec{F}$ de-a lungul curbei $(\Gamma) \subset D$ mărimea (scalară)

$$C = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz.$$

Observăm că dacă $\vec{F}$ este un câmp de forţe, atunci C reprezintă lucrul mecanic efectuat de $\vec{F}$ de-a lungul lui (Γ).

Să presupunem acum că (Γ) mărgineşte un domeniu plan D_1. Definim atunci

$$C_m = \frac{1}{\text{aria}(D_1)} \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ca fiind **circulaţia medie pe unitatea de arie a lui** D_1.

7.3.6 Definiţia revizuită a rotorului

Putem defini atunci rotorul unui câmp vectorial $\vec{F}$, nu neapărat de clasă C^1, precizând proiecţia (scalară) a lui pe un versor arbitrar $\vec{n}$ din $\mathbf{V_3}$ cu ajutorul formulei

$$\text{pr}_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{F}(M) = \lim_{\substack{\text{aria}(D_1)\to 0 \\ M\in D_1}} \frac{1}{\text{aria}(D_1)} \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

(Γ) fiind curba închisă care mărgineşte D_1, un domeniu conţinut într-un plan perpendicular pe $\vec{n}$, atunci când această limită există.

Dacă $\vec{F}$ este un câmp vectorial de clasă C^1, această definiţie se reduce la definiţia iniţială. Totuşi, această din urmă definiţie precizează sensul fizic al rotorului ca fiind **circulaţia infinitezimală pe unitatea de arie**.

7.4 Câmpuri vectoriale particulare

Vom începe prin a menţiona câteva proprietăţi de legătură între gradient, divergenţă şi rotor.

Teorema 7.5. *1. Pentru orice câmp scalar u de clasă C^2,*

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \vec{0}.$$

2. Pentru orice câmp vectorial $\vec{F}$ de clasă C^2,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0.$$

Demonstraţie. 1. Fiind dat un câmp scalar u de clasă C^2, să observăm că

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\vec{\jmath}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} = \vec{0},$$

conform egalităţii derivatelor parţiale mixte ale lui u.

2. Fiind dat un câmp vectorial $\vec{F}$ de clasă C^2,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k},$$

să observăm că

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) &= \operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

conform egalităţii derivatelor parţiale mixte ale lui P, Q, R. ■

7.4.1 Câmpuri potenţiale

Fie un câmp vectorial $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Vom spune că $\vec{F}$ este un **câmp potenţial** dacă el este gradientul unui câmp scalar, adică există $u : D \to \mathbb{R}$ astfel ca $\vec{F} = \operatorname{grad} u$, câmpul scalar u numindu-se **potenţialul** sau **funcţia de forţă** a câmpului vectorial $\vec{F}$.

Legătura între potenţialul unui câmp vectorial şi potenţialul unei forme diferenţiale

Se observă de aici că dacă $\vec{F}$ este un câmp potenţial,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

iar u este potenţialul său, atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = R.$$

Altfel spus,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$$

este un câmp potenţial dacă şi numai dacă forma diferenţială asociată

$$d\mathcal{F} = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

este formă diferenţială exactă, iar u este un potenţial pentru $\vec{F}$ dacă şi numai dacă este un potenţial pentru $d\mathcal{F}$. Obţinem atunci următoarea consecinţă a Teoremei 4.10.

Teorema 7.6. *Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un câmp de clasă C^1 pe domeniul simplu conex D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *este independentă de drum în D.*
2. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ *pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*
3. $\vec{F}$ *este câmp potenţial.*
4. $\vec{F}$ *este câmp irotaţional.*

Dacă D nu este simplu conex, atunci primele trei condiţii sunt echivalente, iar cea de-a patra este o condiţie necesară pentru celelalte trei, nu neapărat şi suficientă. În plus, are loc următoarea formulă de calcul, similară formulei Leibniz-Newton pentru integrala definită.

Corolar 7.6.1. *Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un câmp potenţial pe D şi fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă pe porţiuni în D. Atunci*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(x_B, y_B, z_B) - u(x_A, y_A, z_A),$$

unde u este potenţialul lui $\vec{F}$.

> **Exemplu.** Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ definit prin
>
> $$\vec{F}(x,y,z) = xyz(yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}).$$
>
> Demonstraţi că $\vec{F}$ este un câmp potenţial şi determinaţi un potenţial al acestuia.

Soluţie. Observăm că

$$\vec{F}(x,y,z) = xy^2z^2\vec{\imath} + x^2yz^2\vec{\jmath} + x^2y^2z\vec{k},$$

iar

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & x^2y^2z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^2)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2z)\right)\vec{\jmath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^2)\right)\vec{k} \\
&= (2x^2yz - 2x^2yz)\vec{\imath} + (2xy^2z - 2xy^2z)\vec{\jmath} + (2xyz^2 - 2xyz^2)\vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Urmează că $\vec{F}$ este irotaţional şi, fiind definit pe întreg $\mathbb{R}^3$ (care este simplu conex), este şi câmp potenţial. Fie u potenţialul său. Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2yz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2y^2z.$$

Deducem că

$$u = \int xy^2z^2 dx = \frac{1}{2}x^2y^2z^2 + \varphi_1(y,z).$$

Observăm că $u(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y^2z^2$ verifică toate cele trei egalităţi, fiind deci un potenţial al lui $\vec{F}$.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ definit prin

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+y+z)(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).$$

Demonstraţi că $\vec{F}$ nu este un câmp potenţial.

Soluţie. Observăm că

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + xy + xz)\vec{\imath} + (y^2 + yx + yz)\vec{\jmath} + (z^2 + zx + zy)\vec{k},$$

iar

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + xy + xz & y^2 + yx + yz & z^2 + zx + zy \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2+zx+zy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2+yx+yz)\right)\vec{\imath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x^2+xy+xz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2+zx+zy)\right)\vec{\jmath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2+yx+yz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy+xz)\right)\vec{k} \\
&= (z-y)\vec{\imath} + (x-z)\vec{\jmath} + (y-x)\vec{k}.
\end{aligned}
$$

De aici, rot $\vec{F}$ este neidentic nul în $\mathbb{R}^3$, iar $\vec{F}$ nu este irotaţional. Nefiind un câmp irotaţional, $\vec{F}$ nu este nici un câmp potenţial.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ definit prin

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^n(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).$$

Demonstraţi că $\vec{F}$ este un câmp potenţial şi determinaţi un potenţial al acestuia.

Soluţie. Observăm că

$$\vec{F}(x,y,z) = \|\vec{r}\|^{2n}\vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Căutăm atunci un potenţial u de forma $u = \varphi(\|\vec{r}\|)$. Atunci

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|)\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0},$$

iar

$$\|\vec{r}\|^{2n} = \varphi'(\|\vec{r}\|)\frac{1}{\|\vec{r}\|} \implies \varphi'(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|^{2n+1}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

De aici,

$$\varphi'(r) = r^{2n+1},\ r > 0 \implies \varphi(r) = \int r^{2n+1} dr = \frac{r^{2n+2}}{2n+2} + \mathcal{C}.$$

Se obţine că un potenţial al lui $\vec{F}$ este

$$u(x,y,z) = \frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2}(x^2+y^2+z^2)^{n+1}.$$

7.4.2 Câmpuri solenoidale

Reamintim că un câmp vectorial $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ de clasă C^1 se numeşte **solenoidal** în D dacă $\operatorname{div} \vec{F}$ este identic nul în D.

Următoarele proprietăţi sunt atunci consecinţe ale formulei lui Stokes, respectiv ale formulei Gauss-Ostrogradski şi formulelor de legătură menţionate în Teorema 7.5.

Teorema 7.7.
1. *Fluxul unui câmp solenoidal de clasă* C^1 *printr-o suprafaţă netedă închisă este* 0.
2. *Rotorul unui câmp* $\vec{G}$ *de clasă* C^2 *este un câmp solenoidal.*

7.4.3 Câmpuri armonice

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$. Vom spune că $\vec{F}$ este **armonic** dacă este în acelaşi timp solenoidal şi irotaţional.

Dacă D este simplu conex, atunci $\vec{F}$ este de asemenea un câmp potenţial. Fie u potenţialul acestuia. Atunci

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \operatorname{div} \vec{F} = 0. \tag{7.2}$$

O funcţie u de clasă C^2 care satisface ecuaţia (7.2), numită **ecuaţia lui Laplace**, va fi numită **funcţie armonică**.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F}$ definit prin $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F} = (y+z)\vec{\imath} + (z+x)\vec{\jmath} + (x+y)\vec{k}.$$

Determinaţi un câmp vectorial $\vec{A}$ astfel ca $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

Soluţie. Fie $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Atunci

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

de unde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = y + z \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = z + x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x + y. \end{cases}$$

Din motive de simetrie, căutăm P, Q, R astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{1}{2}(y+z), \quad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -\dfrac{1}{2}(y+z) \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(z+x), \quad \dfrac{\partial R}{\partial x} = -\dfrac{1}{2}(z+x) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{2}(x+y), \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}(x+y). \end{cases}$$

Deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2}(z+x),$$

rezultă că

$$P = \int \frac{1}{2}(z+x)dz = \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}zx + \varphi_1(x,y).$$

Similar, deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x+y),$$

rezultă că

$$P = \int -\frac{1}{2}(x+y)dy = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy + \varphi_2(x,z).$$

Comparând cele două expresii ale lui P, observăm că o posibilă soluţie este

$$P = \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}zx - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy = -\frac{1}{4}(y^2 - z^2) - \frac{1}{2}x(y-z).$$

Din considerente similare obţinem

$$Q = -\frac{1}{4}(z^2 - x^2) - \frac{1}{2}y(z-x), \quad R = -\frac{1}{4}(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}z(x-y).$$

Câmpul vectorial căutat este atunci

$$\begin{aligned} \vec{F} = &- \left[\frac{1}{4}(y^2 - z^2) + \frac{1}{2}x(y-z)\right]\vec{\imath} - \left[\frac{1}{4}(z^2 - x^2) + \frac{1}{2}y(z-x)\right]\vec{\jmath} \\ &- \left[\frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}z(x-y)\right]\vec{k}. \end{aligned}$$

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F}$ definit prin $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Demonstraţi că nu există un câmp vectorial $\vec{A}$ de clasă C^2 astfel ca $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

Soluţie. Dacă ar exista un câmp vectorial $\vec{A}$ de clasă C^2 astfel ca $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$, atunci ar trebui ca

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0.$$

Observăm că

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0,$$

de unde deducem că nu există un câmp vectorial $\vec{A}$ cu proprietăţile căutate.

Aplicaţii

7.1. *Fie $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ un vector constant. Demonstraţi că*

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}, \qquad \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = 0, \qquad \operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}.$$

7.2. *Fie $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ un vector constant. Demonstraţi că*

$$\operatorname{grad}((\vec{a} \cdot \vec{r})^n) = n(\vec{a} \cdot \vec{r})^{n-1}\vec{a}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

7.3. *Fie $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ un vector constant. Demonstraţi că*

$$\operatorname{grad}(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^n}) = \frac{\vec{a}}{\|\vec{r}\|^n} - n\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^{n+2}}\vec{r}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

7.4. *Determinaţi o funcţie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pentru care*

$$\vec{r} \cdot \operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|.$$

7.5. *1. Demonstraţi că*

$$\operatorname{grad}(\frac{1}{\|\vec{r}\|^n}) = -n\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^{n+2}}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}, n \in \mathbb{N}.$$

2. *Demonstraţi că* $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{C}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \quad C \in \mathbb{R}, C > 0,$$

(câmpul forţelor de atracţie gravitaţională) este un câmp potenţial.

7.6. *Fie* $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz + 4x)\vec{\imath} + (xz + 4y)\vec{\jmath} + (xy + 4z)\vec{k}.$$

Calculaţi $\operatorname{rot} \vec{F}$ *şi arătăţi că* $\vec{F}$ *este irotaţional.*

7.7. *Fie* $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy - 2z^2)\vec{\imath} + (4xz - y^2)\vec{\jmath} + (yz - 2x^2)\vec{k}.$$

Calculaţi $\operatorname{div} \vec{F}$ *şi arătăţi că* $\vec{F}$ *este solenoidal.*

7.8. *Determinaţi* $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^1 *astfel încât câmpul vectorial*

$$\vec{F}(x,y,z) = x\varphi(x)\vec{\imath} - y\varphi(x)\vec{\jmath} + x^2z\vec{k}$$

să fie solenoidal. Pentru φ *astfel determinat, precizaţi* $\operatorname{rot} \vec{F}$.

7.9. 1. *Dacă* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1, *iar* $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ *este un vector constant, demonstraţi că*

$$\operatorname{div}(f(\|\vec{r}\|)\vec{a}) = \frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|}(\vec{r} \cdot \vec{a}), \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

2. *Demonstraţi că*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{a}}{\|\vec{r}\|}\right) = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

7.10. 1. *Dacă* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1, *demonstraţi că*

$$\operatorname{div}(f(\|\vec{r}\|)\vec{r}) = f'(\|\vec{r}\|)\|\vec{r}\| + 3f(\|\vec{r}\|), \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

2. *Demonstraţi că*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right) = \frac{2}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

3. *Determinaţi* $p \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$\operatorname{div}(\|\vec{r}\|^p\vec{r}) = 0.$$

7.11. *1. Dacă $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2, demonstraţi că*

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|)) = f''(\|\vec{r}\|) + 2\frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

2. Demonstraţi că

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right) = \frac{2}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

7.12. *Fiind date două câmpuri vectoriale $\vec{F}$, $\vec{G}$ de clasă C^1, demonstraţi că*

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{G} - \operatorname{rot}(\vec{G}) \cdot \vec{F}.$$

7.13. *Demonstraţi că dacă două câmpuri vectoriale $\vec{F}$, $\vec{G}$ de clasă C^1 sunt irotaţionale, atunci $\vec{F} \times \vec{G}$ este solenoidal.*

7.14. *Fie u, v două câmpuri scalare de clasă C^1 şi fie $\vec{F}$ câmpul vectorial definit prin*

$$\vec{F} = \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v.$$

1. *Demonstraţi că F este solenoidal.*
2. *Demonstraţi că $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$, unde $\vec{A} = \frac{1}{2}(u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u)$.*

7.15. *Fie $\vec{F}$ un câmp vectorial de clasă C^2. Demonstraţi că*

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \nabla^2 \vec{F} + \nabla \times (\nabla \times \vec{F}),$$

adică

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) = \Delta \vec{F} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F})$$

(prima formă este mai uşor de reţinut, întrucât toţi membrii conţin „pătrate" în care intervine operatorul Hamilton, putând fi şi privită prin analogie cu formula de derivare a unui produs).

7.16. *Demonstraţi că, folosind notaţia*

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad \textit{pentru } \vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k},$$

au loc relaţiile

$$\operatorname{div} \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{F}, \qquad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \vec{F}.$$

7.17. 1. *Demonstraţi că, pentru orice* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}_3$,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}.$$

2. *Fie* $\vec{F}$, $\vec{G}$ *două câmpuri vectoriale de clasă* C^1. *Demonstraţi că*

$$\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \left[(\nabla \cdot \vec{G})\vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G}\right] + \left[(\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}\right]$$

(prima parte este similară celei din formula de mai sus, iar a doua este „completarea" ei, după schimbarea ordinii în produsele simbolice, care, reamintim, sunt necomutative).

3. *Demonstraţi (şi pe această cale) că dacă* $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ *este un vector constant, atunci*

$$\mathrm{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}.$$

Index