Capitolul 3

INTEGRALE IMPROPRII

În definiţia integralei Riemann, s-a presupus că intervalul de integrare $[a, b]$ este un interval închis şi mărginit, demonstrându-se mai apoi că o funcţie integrabilă este în mod necesar şi mărginită. Totuşi, apar în mod natural situaţii în care aceste condiţii nu sunt îndeplinite.

În cele ce urmează, vom extinde noţiunea de integrală Riemann pentru a acoperi aceste cazuri (interval de integrare nemărginit, respectiv integrand nemărginit pe intervalul de integrare), obţinându-se aşa-numitele **integrale improprii** sau **integrale generalizate**. Prin analogie cu seriile numerice, pentru care convergenţa sau divergenţa seriei erau definite cu ajutorul limitei şirului sumelor parţiale, vom defini convergenţa sau divergenţa unor integrale improprii cu ajutorul unui procedeu de trecere la limită pentru integrale „parţiale", pe domenii mai mici, pe care se evită situaţiile problematice în cauză.

Vom începe mai întâi cu situaţia în care intervalul de integrare este nemărginit, continuând apoi cu situaţia în care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare.

3.1 Integrale improprii în raport cu intervalul

Integralele pentru care intervalul de integrare este nemărginit se numesc **integrale improprii în raport cu intervalul**, sau de **specia (speţa) I**.

Vom studia mai întâi integrale de tipul $\int_a^\infty f(x)dx$. În acest sens, fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $A > a$. Putem atunci vorbi despre $\int_a^A f(x)dx$ pentru orice $A > a$, următorul pas fiind cel de a studia ceea ce se intâmplă când $A \to \infty$ (ne „apropiem" de $+\infty$ prin trecere la limită).

3.1.1 Convergenţă şi divergenţă. Integrabilitate

Definiţie. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $A > a$.

Dacă există limita $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ şi este finită, spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este **convergentă** iar funcţia f este **integrabilă** pe $[a, \infty)$ (pe scurt, **integrabilă**).

Dacă limita $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ nu există, sau există, dar este infinită, spunem că integrală $\int_a^\infty f(x)dx$ este **divergentă** iar funcţia f **nu este integrabilă** pe $[a, \infty)$ (pe scurt, **nu este integrabilă**).

În situaţia în care limita $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ există (finită sau nu), această limită reprezintă **valoarea integralei** $\int_a^\infty f(x)dx$.

Exemple. 1. Fie integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$. Funcţia

$$f_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

este integrabilă pe orice interval $[0, A]$, $A > 0$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2},$$

deci integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}$ este convergentă, valoarea sa este $\frac{\pi}{2}$, iar f_1 este integrabilă pe $[0, \infty)$.

2. Fie integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$. Funcţia

$$f_2 : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x},$$

este integrabilă pe orice interval $[1, A]$, $A > 1$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A\to\infty} \ln x \,\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty,$$

deci integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ este divergentă, valoarea sa fiind $+\infty$, iar f_2 nu este integrabilă pe $[1, \infty)$.

3. Fie integrala $\int_0^\infty \cos x dx$. Funcţia

$$f_3 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \cos x,$$

este integrabilă pe orice interval $[0, A]$, $A > 0$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A\to\infty} \sin x \,\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} \sin A, \text{care nu există.}$$

Integrala $\int_0^\infty \cos x dx$ este divergentă, fără a i se asocia o valoare, iar f_3 nu este integrabilă pe $[0, \infty)$.

Exemplu. Fie integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$. Printr-un raţionament similar celui din Exemplul 2 de mai sus putem arăta că

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă,} & \text{pentru } p > 1, \\ \text{divergentă,} & \text{pentru } p \leq 1. \end{cases}$$

Integrale improprii de speţa I cu integrand pozitiv

Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $a < A$. Să notăm

$$F : [a, \infty) \to \mathbb{R}, \quad F(A) = \int_a^A f(x)dx.$$

Întrucât f este pozitivă, F este crescătoare, valoarea integralei crescând odată cu creşterea lungimii intervalului. Atunci limita $\lim_{A\to\infty} F(A)$, utilizată în definiţiile convergenţei şi divergenţei, există, finită sau nu. Are deci loc următorul rezultat, similar în natura sa cu proprietatea seriilor cu termeni pozitivi de a fi sau convergente, sau divergente către $+\infty$.

Teorema 3.1. *Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $a < A$. Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este fie convergentă, fie divergentă cu valoarea $+\infty$.*

Alte tipuri de intervale nemărginite

În mod similar definim convergenţa unor integrale de tipul $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, cu ajutorul limitei

$$\lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)dx,$$

respectiv a unor integrale de tipul $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, cu ajutorul limitei

$$\lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \int_A^B f(x)dx.$$

3.1.2 Convergenţa în sensul valorii principale (Cauchy)

Pentru definiţia integralei $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, este important să se observe faptul că limita

$$\lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \int_A^B f(x)dx$$

conţine două variabile diferite, A şi B, întrucât ne putem apropia de $-\infty$ şi $+\infty$ în mod independent. Acest lucru se poate observa şi cu ajutorul relaţiei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

pentru $a \in (-\infty, +\infty)$ oarecare, în care convergenţa primei integrale este independentă de convergenţa celei de-a doua.

Definiţie. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[-A, A]$ pentru orice $A > 0$ iar limita cu o singură variabilă

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx,$$

caz particular al celei de mai sus (ne îndreptăm către $-\infty$ şi $+\infty$ „cu aceeaşi viteză"), există şi este finită, spunem că integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este **convergentă în sensul valorii principale (Cauchy)**, valoarea sa principală, notată

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

fiind valoarea limitei.

Relaţia între convergenţă şi convergenţă în sensul valorii principale

Conform definiţiei, dacă integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, atunci ea este convergentă şi în sensul valorii principale (Cauchy). Să observăm însă că implicaţia reciprocă nu are loc.

Fie integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$. Deoarece

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-A}^{A} = 0,$$

urmează că integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ este convergentă în sensul valorii principale, iar v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$. Totuşi

$$\lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \int_{A}^{B} xdx = \lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \frac{x^2}{2}\bigg|_{A}^{B} = \lim_{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}} \frac{B^2 - A^2}{2}$$

nu există, integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ nefiind deci convergentă.

3.1.3 Proprietăţi de calcul

Integralele improprii păstrează cele mai multe proprietăţi ale integralelor definite. În particular, au loc următoarele proprietăţi de calcul, prima reprezentând **proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul**, cea de-a doua reprezentând **proprietatea de aditivitate în raport cu funcţia**.

Teorema 3.2. *Fie* $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, f *integrabilă pe* $[a,\infty)$. *Atunci* f *este integrabilă pe orice subinterval* $[c,\infty)$, $c > a$, *şi*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Demonstraţie. Fie $c > a$ arbitrar. Fie de asemenea $A > c$. Atunci f este integrabilă pe $[c, A]$, iar conform proprietăţii de aditivitate a integralei definite în raport cu intervalul, avem că

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx &= \lim_{A\to\infty}\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx\right)\\ &= \lim_{A\to\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{A\to\infty}\int_c^A f(x)dx\\ &= \int_a^c f(x)dx + \lim_{A\to\infty}\int_c^A f(x)dx,\end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Teorema 3.3. *Fie* $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, f, g *integrabile pe* $[a,\infty)$ *şi* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Atunci* $c_1 f + c_2 g$ *este integrabilă pe* $[a,\infty)$, *şi*

$$\int_a^\infty (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1\int_a^\infty f(x)dx + c_2\int_a^\infty g(x)dx$$

Demonstraţia se obţine din proprietatea corespunzătoare a integralei definite printr-un procedeu de trecere la limită similar celui de mai sus.

3.1.4 Criterii de convergenţă

Criteriul de comparaţie

Teorema 3.4. *Fie $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$, astfel încât*

$$f(x) \leq g(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a, \infty).$$

1. *Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este convergentă, atunci şi $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.*
2. *Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă, atunci şi $\int_a^\infty g(x)dx$ este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $A > a$. Atunci

$$\int_a^A f(x)dx \leq \int_a^A g(x)dx,$$

întrucât inegalităţile între funcţii se păstrează prin integrare. Conform Teoremei 3.1, există

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx, \quad \lim_{A\to\infty} \int_a^A g(x)dx = \int_a^\infty g(x)dx,$$

iar prin trecere la limită pentru $A \to \infty$ în inegalitatea de mai sus obţinem că

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$

Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este convergentă, atunci membrul drept este finit, şi atunci la fel este şi membrul stâng, iar $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă. Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă, atunci membrul stâng este infinit, şi atunci la fel este şi membrul drept, iar $\int_a^\infty g(x)dx$ este divergentă. ■

Rezultatul este uşor de reţinut (şi înţeles) ţinând seama de următoarea observaţie. Integrala pe $[a, \infty)$ a unei funcţii pozitive este fie „mică" (convergentă, cu valoare numerică), fie „mare" (divergentă), cu valoarea $+\infty$.

Cum $f \leq g$, inegalitatea se păstrează şi între cele două integrale, adică

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$

Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este „mică" (convergentă), atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este „şi mai mică" (tot convergentă). Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este „mare" (divergentă), atunci $\int_a^\infty g(x)dx$ este „şi mai mare" (tot divergentă).

Tot de aici putem observa că nu putem trage nicio concluzie dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este divergentă, întrucât $\int_a^\infty f(x)dx$ este „mai mică", dar poate fi sau „mică" (convergentă), sau „mare" (divergentă). Similar, dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă, atunci nu putem obţine nicio concluzie.

Teorema 3.5. *Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $A > a$.*

1. *Dacă există $p > 1$ astfel ca*
$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \in [0,\infty)$$
atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.

2. *Dacă există $p \leq 1$ astfel ca*
$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \in (0,\infty]$$
atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Combinând cele două proprietăţi obţinem următorul criteriu de convergenţă util în aplicaţii.

Corolar 3.5.1. *Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea*
$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \in (0,\infty).$$

Atunci

1. *Dacă $p > 1$, atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.*

2. *Dacă $p \leq 1$, atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.*

Remarcăm faptul că în situaţia în cauză, integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ are comportament „invers" lui p. Astfel dacă p este „mic" (≤ 1), integrala este „mare" (divergentă cu valoarea $+\infty$), iar dacă p este „mare" (> 1), integrala este „mică" (convergentă).

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$.

Soluţie. Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$ pentru $x \to \infty$, alegem $p = 2$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 1 \in (0,\infty).$$

Cum $p = 2 > 1$, urmează că $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$ este convergentă.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx$.

Soluţie. Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{\sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ pentru $x \to \infty$, alegem $p = \frac{5}{2}$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+2x+3} = 1 \in (0,\infty).$$

Deoarece $p = \frac{5}{2} > 1$, urmează că integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx$ este convergentă.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Soluţie. Deoarece numitorul are comportarea aproximativă a lui $\sqrt{x^2} = x$ pentru $x \to \infty$, iar numărătorul este mărginit, alegem $p = 1$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x\to\infty} x \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\pi}{2} \in (0,\infty).$$

Deoarece $p = 1$, urmează că integrala $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ este divergentă.

3.1.5 Transformarea într-o serie numerică

Integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ poate fi transformată într-o serie numerică. Astfel, are loc egalitatea

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^{a+1} f(x)dx + \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx + \ldots.$$

Cu notaţia $a_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(x)dx$, $n \geq 0$, urmează că

$$\int_a^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty a_n$$

În acest fel, convergenţa unei integrale improprii în raport cu intervalul poate fi legată de convergenţa unei serii numerice. Desigur, transformarea integralei într-o serie numerică nu este unică, intervalul $[a, \infty)$ putând fi împărţit şi în alte moduri.

Teorema 3.6. *Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$, f continuă şi monoton descrescătoare. Atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ are aceeaşi natură cu $\sum_{n=k}^\infty f(n)$, unde indicele de plecare $k \in [a, \infty)$ poate fi ales convenabil.*

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$

Soluţie. Funcţia

$$f : [1, \infty) \to [0, \infty), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}},$$

este continuă şi monoton descrescătoare pe $[1, \infty)$. Urmează că $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$.

Studiem acum natura seriei $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ cu ajutorul unui criteriu de comparaţie. Întrucât

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2},$$

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (serie armonică generalizată cu $p = 2 > 1$), urmează că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ este convergentă. La rândul ei, integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} dx$ este convergentă, având aceeaşi natură cu această serie.

3.1.6 Convergenţă absolută

Definiţie. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$. Vom spune că $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este **absolut convergentă**, iar f este **absolut integrabilă** pe $[a, \infty)$, dacă $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ este convergentă, adică $|f|$ este integrabilă pe $[a, \infty)$.

Se poate demonstra că dacă $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci este şi convergentă, nefiind însă valabilă şi reciproca (aşa cum numele sugerează, absoluta convergenţă înseamnă **mai mult** decât convergenţa). Pentru funcţii cu valori pozitive, cum $|f|$ coincide cu f, noţiunea de absolută convergenţă coincide cu noţiunea de convergenţă.

3.2 Integrale improprii în raport cu funcţia

Integralele pentru care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare se numesc **integrale improprii în raport cu funcţia**, sau de **specia (speţa) II**.

Vom studia mai întâi integrale de tipul $\int_a^b f(x)dx$ în care limita inferioară a este punct singular, în sensul că f este nemărginită într-o vecinătate a lui a.

Definiţie. Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că a este **punct singular** pentru funcţia f dacă f este mărginită pe orice subinterval $[A, b]$, $a < A < b$, dar f este nemărginită pe $(a, b]$.

Prototip

Un prototip al acestor integrale este integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, $p > 0$, în care integrandul nu este definit în $x = 0$, punctul singular, nefiind nici mărginit pe $(0, 1]$, întrucât limita sa la dreapta în $x = 0$ este $+\infty$.

Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$. Putem atunci vorbi despre $\int_A^b f(x)dx$ pentru orice $a < A < b$, următorul pas fiind cel de a studia ceea ce se întâmplă când $A \to a$, punctul singular al funcţiei (ne „apropiem" de punctul singular prin trecere la limită).

3.2.1 Convergenţă şi divergenţă. Integrabilitate

Definiţie. Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$.

Dacă există limita $\lim\limits_{\substack{A \to a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$ şi este finită, spunem că integrala $\int_a^b f(x)dx$ este **convergentă** iar funcţia f este **integrabilă** pe $(a, b]$ (pe scurt, **integrabilă**).

Dacă limita $\lim\limits_{\substack{A \to a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$ nu există, sau există, dar este infinită, spunem că integrală $\int_a^b f(x)dx$ este **divergentă** iar funcţia f **nu este integrabilă** pe $(a, b]$ (pe scurt, **nu este integrabilă**).

În situaţia în care limita $\lim\limits_{\substack{A \to a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$ există (finită sau nu), această limită reprezintă **valoarea integralei** $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple. 1. Fie integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p \in (0, 1)$. Punctul singular al funcţiei este $x = 0$, întrucât $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^p} = +\infty$. Funcţia

$$f_1 : (0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{x^p},$$

este integrabilă pe orice interval $[A, 1]$, $0 < A < 1$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \int_A^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{A\to 0} \int_A^1 x^{-p}dx = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \Bigg|_A^1 \right)$$
$$= \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{A^{1-p}}{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}.$$

Integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p \in (0,1)$ este deci convergentă, cu valoarea $\frac{1}{1-p}$.

2. Fie integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$. Ca mai sus, punctul singular al funcţiei este $x = 0$, funcţia

$$f_2 : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x},$$

este integrabilă pe orice interval $[A,1]$, $0 < A < 1$, iar

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \int_A^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \ln x \Bigg|_A^1 = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} (\ln 1 - \ln A) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ este deci divergentă, cu valoarea $+\infty$.

3. Fie integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p > 1$. Ca mai sus, punctul singular al funcţiei este $x = 0$, funcţia

$$f_3 : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x^p},$$

este integrabilă pe orice interval $[A,1]$, $0 < A < 1$, iar

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \int_A^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{A^{1-p}}{1-p} \right) = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{A^{p-1}(1-p)} \right)$$
$$= \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(0+)\cdot(1-p)} = +\infty.$$

Integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p > 1$ este deci divergentă, cu valoarea $+\infty$. Obţinem din cele de mai sus că

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{pentru } p < 1, \\ \text{divergentă}, & \text{pentru } p \geq 1. \end{cases}$$

Integrale improprii de speţa II cu integrand pozitiv

Fie $f : (a, b] \to [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$. Putem obţine următorul rezultat analog celui corespunzător pentru integrale improprii de speţa I.

Teorema 3.7. *Fie $f : (a, b] \to [0, \infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A, b]$, $a < A < b$. Atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este fie convergentă, fie divergentă cu valoarea $+\infty$.*

3.2.2 Proprietăţi de calcul

Au loc următoarele proprietăţi de calcul, similare celor pe care le au integralele improprii de speţa I.

Teorema 3.8. *Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $(a, b]$. Atunci f este integrabilă pe orice subinterval $(a, c]$, $a < c < b$, şi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema 3.9. *Fie $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $(a, b]$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe $(a, b]$, şi*

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

3.2.3 Criterii de convergenţă

Teorema 3.10. *Fie $f : (a, b] \to [0, \infty)$, integrabilă pe $[A, b]$ pentru orice $a < A < b$.*

1. *Dacă există* $p < 1$ *astfel ca*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^p f(x) = l \in [0,\infty),$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă.*

2. *Dacă există* $p \geq 1$ *astfel ca*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^p f(x) = l \in (0,\infty],$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă.*

Demonstraţia este similară demonstraţiei Teoremei 3.5, criteriul corespunzător de convergenţă pentru integrale improprii de specia I.

Corolar 3.10.1. *Fie* $f : (a,b] \to [0,\infty)$ *continuă astfel încât există* $p \in \mathbb{R}$ *cu proprietatea*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^p f(x) = l \in (0,\infty).$$

Atunci

1. *Dacă* $p < 1$, *atunci integrala* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $p \geq 1$, *atunci integrala* $\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă.*

Remarcăm faptul că în situaţia în cauză, integrala $\int_a^b f(x)dx$ are comportamentul lui p. Astfel dacă p este „mic" ($p < 1$), integrala este „mică" (convergentă), iar dacă p este „mare" (> 1), integrala este „mare" (divergentă cu valoarea $+\infty$).

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx$.

Soluţie. Deoarece

$$\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2(5-x)} dx,$$

urmează că $x = 0$ este punct singular pentru integrand (cealaltă rădăcină a numitorului, $x = 5$, nu aparţine intervalului de integrare). Deoarece termenul care anulează numitorul în punctul singular, x^2, are puterea 2, alegem $p = 2$. Atunci

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x-0)^2 \frac{1}{x^2(5-x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \in (0,\infty).$$

Cum $p = 2 > 1$, urmează că integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx$ este divergentă, cu valoarea $+\infty$.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$.

Soluţie. Deoarece

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

iar numitorul se anulează pentru $x = 0$, în timp ce numărătorul nu, urmează că $x = 0$ este punct singular. Deoarece termenul care anulează numitorul în punctul singular, $\sin x$, are comportarea aproximativă a lui x pentru $x \to 0$, lucru observabil cu ajutorul limitei

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

alegem $p = 1$. Urmează că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^1 \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos x \frac{x}{\sin x} = 1 \in (0,\infty).$$

Deoarece $p = 1$, urmează că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$ este divergentă.

3.2.4 Convergenţă absolută

Definiţie. Fie $f : (a,b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este **absolut convergentă**, iar f este **absolut integrabilă** pe $(a,b]$ dacă $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă, adică $|f|$ este integrabilă pe $(a,b]$.

Se poate demonstra că dacă $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci este şi convergentă pe $(a,b]$, nefiind însă valabilă şi reciproca (din nou, aşa cum numele sugerează, absoluta convergenţă înseamnă **mai mult** decât convergenţa). Pentru funcţii cu valori pozitive, cum $|f|$ coincide cu f, noţiunea de absolută convergenţă coincide cu noţiunea de convergenţă.

Integrale improprii cu limita superioară punct singular

Integralele de tipul $\int_a^b f(x)dx$ în care limita superioară b este punct singular, în sensul că f este nemărginită într-o vecinătate a lui b, se studiază analog celor în care limita inferioară este punct singular, utilizând „apropierea" de punctul singular b prin trecere la limită.

Definiţie. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$. Vom spune că b este **punct singular** pentru funcţia f dacă f este mărginită pe orice subinterval $[a, A]$, $a < A < b$, dar f este nemărginită pe $[a,b)$.

Prototip

Un prototip al acestor integrale este integrala $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}dx$, $p > 0$, în care integrandul nu este definit în $x = 1$, punctul singular, nefiind nici mărginit pe $[0,1)$, întrucât limita sa la stânga în $x = 1$ este $+\infty$.

Prin analogie, pentru integralele improprii cu limita superioară punct singular se pot obţine următoarele criterii de convergenţă.

Criterii de convergenţă

Teorema 3.11. *Fie $f : [a,b) \to [0,\infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $a < A < b$.*

1. *Dacă există $p < 1$ astfel ca*

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}}(b-x)^p f(x) = l \in [0,\infty)$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

2. *Dacă există $p \geq 1$ astfel ca*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b-x)^p f(x) = l \in (0, \infty]$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Corolar 3.11.1. *Fie $f : [a, b) \to [0, \infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b-x)^p f(x) = l \in (0, \infty).$$

Atunci

1. *Dacă $p < 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.*
2. *Dacă $p \geq 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.*

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{5-x}} dx$.

Soluţie. Observăm că $x = 5$ este punct singular, întrucât celălalt punct în care se anulează numitorul, $x = 1$, nu aparţine intervalului de integrare. Deoarece termenul care anulează numitorul, $\sqrt{5-x}$, poate fi scris ca $(5-x)^{\frac{1}{2}}$, având puterea $\frac{1}{2}$, alegem $p = \frac{1}{2}$. Urmează că

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} (5-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{5-x}} = \lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} \frac{x^2}{x-1} = \frac{25}{4} \in (0, \infty).$$

Deoarece $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că integrala $\int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{5-x}} dx$ este convergentă.

Integrale improprii cu mai mult de un punct singular

Pot fi întâlnite însă şi integrale improprii de speţa II cu mai mult de un punct singular, sau integrale improprii în care atât intervalul de integrare este nemărginit, cât şi funcţia de integrat este nemărginită pe acest interval, având puncte singulare finite. Acestea din urmă combină atât caracteristicile integralelor improprii de speţa I, cât şi ale celor de speţa II.

În această situaţie, se scrie integrala ca suma mai multor integrale improprii, fiecare cu câte un unic punct singular, respectiv ca suma dintre o integrală improprie de speţa I şi una de speţa II.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$.

Soluţie. În această situaţie, atât $x = 1$ cât şi $x = 4$ sunt puncte singulare, fiind rădăcini ale numitorului. Scriem integrala sub forma

$$\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx + \int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx,$$

ca suma între o integrală cu limita inferioară punct singular (prima integrală) şi o integrală cu limita superioară punct singular (a doua integrală). Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^3}{(4-x)^2} = \frac{1}{9} \in (0,\infty),$$

iar $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$ este convergentă.

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(4-x)^2\frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} = \lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}}\frac{x^3}{\sqrt{x-1}} = \frac{64}{\sqrt{3}} = \frac{64\sqrt{3}}{3} \in (0,\infty),$$

iar $p = 2 > 1$, urmează că integrala $\int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$ este divergentă. Fiind suma dintre o integrală convergentă şi una divergentă, integrala $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$ este divergentă.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$.

Soluţie. În această situaţie, $x = 0$ este punct singular, fiind rădăcină a numitorului, iar intervalul de integrare este nemărginit. Scriem integrala sub forma

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx,$$

ca suma între o integrală improprie de speţa II cu limita inferioară punct singular (prima integrală) şi o integrală improprie de speţa I (a doua integrală). Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{1+x^2} = 1 \in (0,\infty),$$

iar $p = \frac{1}{3} < 1$, urmează că $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$ este convergentă. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \in (0,\infty),$$

iar $p = \frac{7}{3} > 1$, urmează că integrala $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$ este de asemenea convergentă. De aici, integrala improprie $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$ este convergentă, fiind suma a două integrale improprii convergente.

3.3 Integrale improprii dependente de parametri

Dependenţa de parametru poate apare şi în contextul integralelor improprii. Prezentăm în continuare două dintre cele mai cunoscute integrale de acest tip.

3.3.1 Funcţia Γ a lui Euler

Integrala

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

este convergentă pentru orice $p > 0$, definind astfel o funcţie $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Integrala de mai sus se mai numeşte şi **integrala lui Euler de specia (speţa) II**.

Proprietăţi ale funcţiei Γ

Teorema 3.12. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, *pentru orice* $p > 0$ *(***formula de recurenţă***).*
3. $\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2)\cdots p\Gamma(p)$, *pentru orice* $p > 0, n \in \mathbb{N}$.
4. $\Gamma(n+1) = n!$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.
5. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, *pentru orice* $p \in (0,1)$ *(***formula complementelor***).*

6. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Exemplu. Determinaţi $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$.

Soluţie. Observăm că

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}-1}e^{-x}dx = \Gamma(\frac{3}{2}).$$

Conform formulei de recurenţă, urmează că

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Exemplu. Demonstraţi că

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \textbf{(integrala Euler-Poisson)}.$$

Soluţie. Să notăm $u = x^2$. Atunci

$$u = x^2 \implies x = \sqrt{u} \implies dx = (\sqrt{u})'du = \frac{1}{2\sqrt{u}}du,$$

de unde

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^2}dx &= \int_0^\infty e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}e^{-u}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

3.3.2 Funcţia β a lui Euler

Integrala

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

este convergentă pentru orice $p,q > 0$, definind astfel o funcţie $\beta : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Integrala de mai sus se mai numeşte şi **integrala lui Euler de specia (speţa) I**.

Proprietăţi ale funcţiei β

Teorema 3.13. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\beta(1,1) = 1$.
2. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$, *pentru orice* $p,q > 0$.
3. $\beta(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du$, *pentru orice* $p,q > 0$.
4. $\beta(p,q) = \dfrac{p-1}{p+q-1}\beta(p-1,q)$, *pentru orice* $p,q > 0$ (**formula de recurenţă** *pentru prima poziţie).*
5. $\beta(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}\beta(p,q-1)$, *pentru orice* $p,q > 0$ (**formula de recurenţă** *pentru a doua poziţie).*
6. $\beta(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, *pentru orice* $m,n \in \mathbb{N}$.
7. $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, *pentru orice* $p,q > 0$.
8. $\beta(p,1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$, *pentru orice* $p \in (0,1)$ (**formula complementelor**).
9. $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$.

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$.

Soluţie. Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx &= \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1} = \beta(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}.\end{aligned}$$

Conform formulei de recurenţă,

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

În plus, $\Gamma(3) = 2! = 2$. Urmează atunci că

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}dx = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}dx$.

Soluţie. Observăm că

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}dx = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}dx.$$

Pentru a calcula această integrală cu ajutorul proprietăţilor funcţiei β, transformăm intervalul de integrare în intervalul $[0, 1]$ cu ajutorul schimbării de variabilă $u = x - 2$. Atunci

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}du$$
$$= \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}du = \beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Soluţie. Ţinând seama de identitatea trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ceea ce conduce la $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, vom face schimbarea de variabilă $u = \sin^2 x$. Atunci

$$du = 2 \sin x \cos x dx,$$

de unde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{5}{2}-1}(1-u)^{\frac{3}{2}-1}du = \frac{1}{2}B(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}).$$

Folosind formula de recurenţă pentru prima poziţie obţinem

$$\frac{1}{2}B(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\frac{5}{2} - 1}{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} - 1}B(\frac{5}{2} - 1, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}}{3}B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{4}B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}).$$

Folosind formula de reprezentare a funcţiei β cu ajutorul funcţiei Γ, urmează că

$$\frac{1}{4}\beta(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})} = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})^2}{\Gamma(3)} = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})^2}{2!} = \frac{1}{8}\Gamma(\frac{3}{2})^2.$$

Conform formulei de recurenţă,

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

de unde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{\pi}{32}.$$

Exemplu. Determinaţi $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$

Soluţie. Observăm că

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{1+x}dx.$$

Pentru a aplica formula $\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$, alegem $p = \frac{1}{2}$ (corespondenţa cu numărătorul), iar q va fi determinat din condiţia ca $p+q=1$ (corespondenţa cu numitorul). Urmează că $q = \frac{1}{2}$, iar

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}dx = \beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi.$$

Aplicaţii

3.1. *Determinaţi valorile următoarelor integrale improprii*

1) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}dx$; *2)* $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; *3)* $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$; *4)* $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

3.2. *Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii*

1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5+1}$; *2)* $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+2x^6+3x^8}}dx$; *3)* $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-2x+3}$.

3.3. *Folosind eventual faptul că*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0, \quad \textit{pentru orice funcţie polinomială } P,$$

demonstraţi că integrala improprie $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$ *este convergentă.*

3.4. *Demonstraţi că integrala improprie* $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{2x}\cos 3x dx$ *este convergentă.*

3.5. *Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii*

1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2(4-x)}dx$; *2)* $\displaystyle\int_2^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$; *3)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$;

4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}$.

3.6. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Folosind eventual schimbarea de variabilă*

$$u = \frac{x-a}{b-a},$$

(sau, în etape, $u = x - a$ *pentru a transforma intervalul de integrare în intervalul* $[0, b - a]$*, cu un capăt în origine, apoi* $v = \dfrac{u}{b-a}$ *pentru a transforma acest interval, de lungime* $b - a$*, în intervalul* $[0, 1]$*) şi proprietăţile funcţiei* β*, determinaţi*

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx.$$

3.7. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = x^2$ *şi proprietăţile funcţiei* β*, determinaţi* $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

3.8. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = x^2$ *şi proprietăţile funcţiei* β*, determinaţi* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[3]{x}}dx$.

3.9. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = x^4$ *şi proprietăţile funcţiei* β*, determinaţi* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4}dx$.

3.10. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = \sin^2 x$ *şi proprietăţile funcţiei* β*, demonstraţi că*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} dx = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2n+1}.$$

3.11. *Folosind eventual schimbările succesive de variabilă* $u = \mathrm{tg}^2\, x$, $v = u^2$ *şi proprietăţile funcţiei* β, *determinaţi* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\, x)^p dx$, $p \in (-1, 1)$.